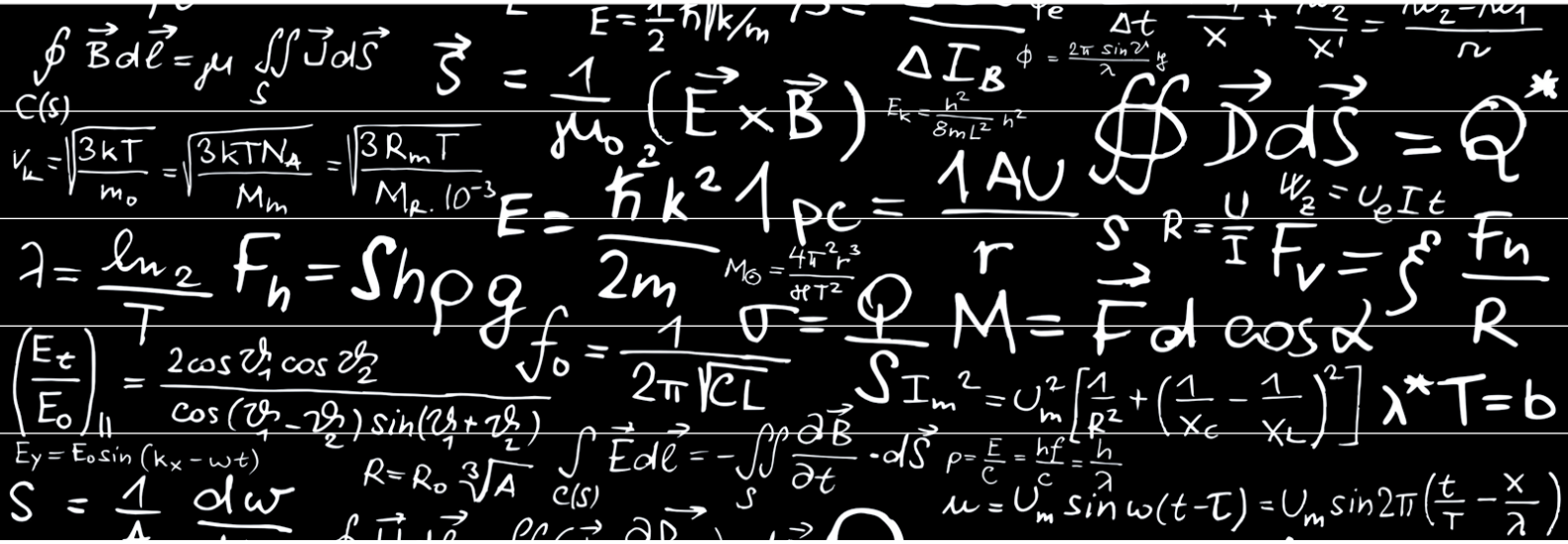
Друштво физичара Србије

Српске физичке олимпијаде за средњишколце 2007-2011



СРПСКЕ ФИЗИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ ЗА СРЕДЊОШКОЛЦЕ 2007-2011

Задаци са решењима

Српске физичке олимпијаде за средњошколце 2007-2011,
Задаци са решењима

Задатке припремили:
Андријана Жекић
Александар Крмпот
Драган Маркушев
Зоран Мијић
Мићо Митровић
Маја Рабасовић
Ђорђе Спасојевић
Александар Срећковић

Ова публикација може слободно да се штампа,
копира, умножава и користи за друге публикације
које су повезане са Српским физичким
олимпијадама ученика средњих школа.

Као извор при настанку ове публикације,
коришћени су подаци на сајту
www.dfs.rs/takmicenja

Приредили:
Душко Латас
Милован Шуваков

Објављно на:
takmicenja.dfs.rs

Београд, 2012.

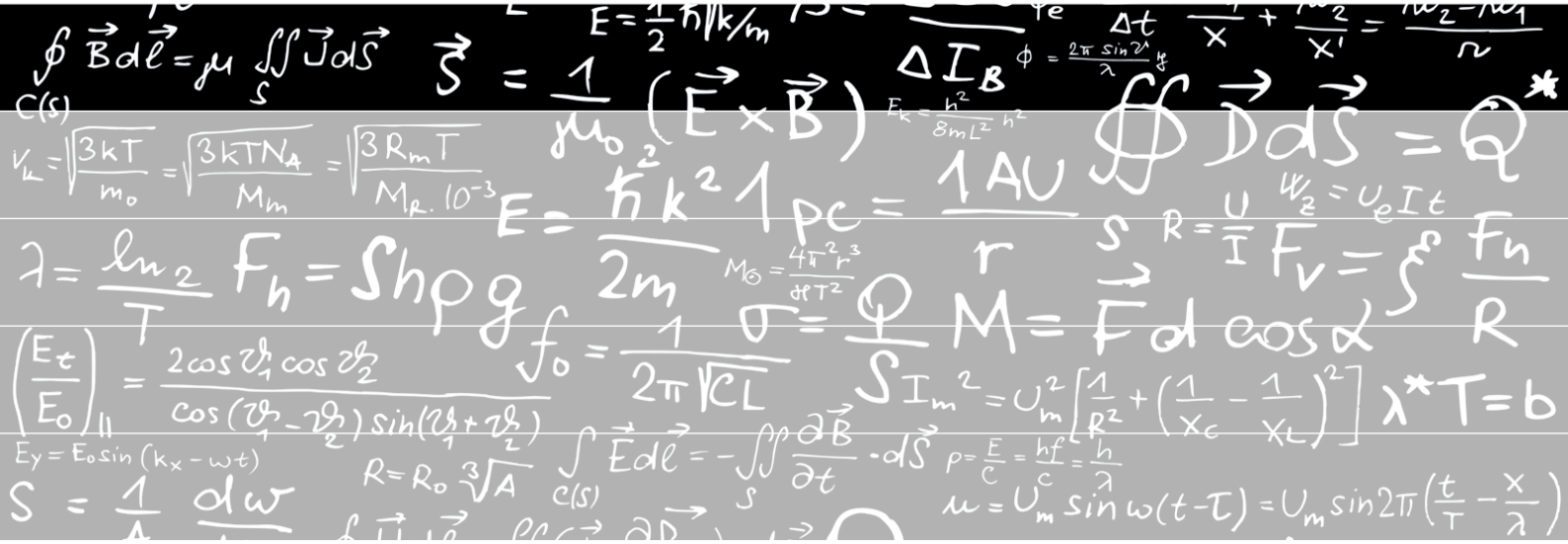
Предговор

Српске физичке олимпијаде организује Друштво физичара Србије као последњи испит при одабиру екипе која представља Србију на међународним олимпијадама. Ово релативно ново такмичење је заправо настало из дугогодишње традиције коју имају савезна такмичења из физике. За првих пет година, Српска физичка олимпијада се састојала од теоријског и експерименталног дела, и била је најзначајније такмичење за одређивање екипе, јер су се узимали и резултати са републичког такимичења као и завршни испит након припрема екипе. У овој брошури су приказани сви задаци који су били на на свим до сад одржаним Српским физичким олимпијадама, као и задаци који су ученици решавали након припрема, а дати су и коначни резултати свих тих такмичења.

Циљ ове брошуре је да омогући ученицима који су учествовали на Српским физичким олимпијадама да се подсете на тренутаке када су учествовали на овим такмичењима, а ученицима који се припремају да суделују на оваквом или сличном такмичењу да на једном месту нађу велики број лепих задатака, који су детаљно решени.

Приређивачи

1. Српска физичка олимпијада, Београд 2007.



Друштво физичара Србије
Министарство просвете и спорта Републике Србије

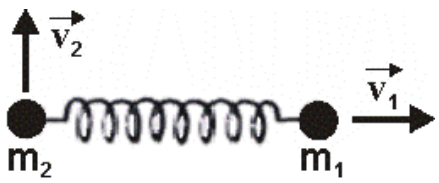
1. Физичка олимпијада Србије
Физички факултет, Београд, 2007.

Теоријски задаци
Општа група - средње школе

1. Раван проводан рам постављен је у хомогено магнетно поље, нормално на раван рама. Рам почиње да ротира константном угаоном брзином око осе која лежи у равни рама. Када се обрне за угао $\varphi_1 = 180°$, кроз рам протекне наелектрисање $q_1 = 7{,}2\ \mathrm{mC}$. За колики угао треба да се обрне рам да би кроз њега протекло наелектрисање $q_2 = 1{,}8\ \mathrm{mC}$? (15п)

2. Гас моларне масе $M = 60\ \mathrm{g/mol}$ налази се у херметичком суду чврстих зидова на температури $T = 0^{\circ}\mathrm{C}$. Површина попречног пресека молекула тога гаса, које можемо посматрати и као чврсте лоптице, износи $S = 10^{-19}\ \mathrm{m}^2$. Притисак гаса на почетку експеримента износи $p_0 = 100\ \mathrm{Pa}$. Приликом осветљавања гаса ултраљубичастом светлошћу молекули гаса, апсорбујући кванте те светлости, прелазе у побуђено стање. Средње време живота молекула у побуђеном стању износи $\tau = 10^{-3}\ \mathrm{s}$. При судару два побуђена молекула у гасу долази до хемијске реакције захваљујући којој се образује једна нова молекула. Познато је да се у једној секунди у сваком кубном центиметру гаса побуђује $N = 10^{12}$ молекула. Процените за које ће се време, од почетка осветљавања гаса, притисак у суду смањити за $\varepsilon = 1\%$ од почетне вредности p_0. Узети да се молекули крећу средњим квадратним брзинама.
(25п)

3. Две мале куглице маса m_1 и m_2 спојене су опругом занемарљиве масе константе еластичности k. Опруга се налази у равнотежном стању, а цео систем мирује у хоризонталном положају. У неком тренутку куглицама се, у односу на референтни систем везан за подлогу, истовремено саопште брзине $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ као што је приказано на слици. Интензитети брзина су међусобно једнаки тј. важи $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Отпор ваздуха се може занемарити. Одредити :



а) максималну висину подизања целог система
б) максималну деформацију опруге. Сматрати да је деформација опруге много мања од максималне дужине опруге. (30п)

4. Релативистичка формула за Доплеров ефекат предвиђа и трансверзални Доплеров ефекат који представља потпуно релативистички резултат. Наиме, ако су правац простирања таласа и правац кретања посматрача (детектора) под правим углом

релативистички третман предвиђа да ће и у том случају доћи до промене учестаности детектованог таласа. Трансверзални Доплеров ефекат се мора узети у обзир при прецизним спектроскопским мерењима.

Да би одредили колики је Доплеров помак у таквом случају замислимо да се у систему S простире раван монохроматски талас учестаности ν чији таласни вектор лежи у *xz* равни и заклапа угао θ са *x*-осом. Систем S се креће брзином *u* у правцу *x*-осе у односу на систем S'. Електромагнетни талас се у систему S' детектује под углом θ' у односу на осу *x'* и има учестаност ν' – види слику.

а) Написати изразе за фазе таласа у оба референтна система, узимајући да су почетне фазе једнаке 0; (2п)

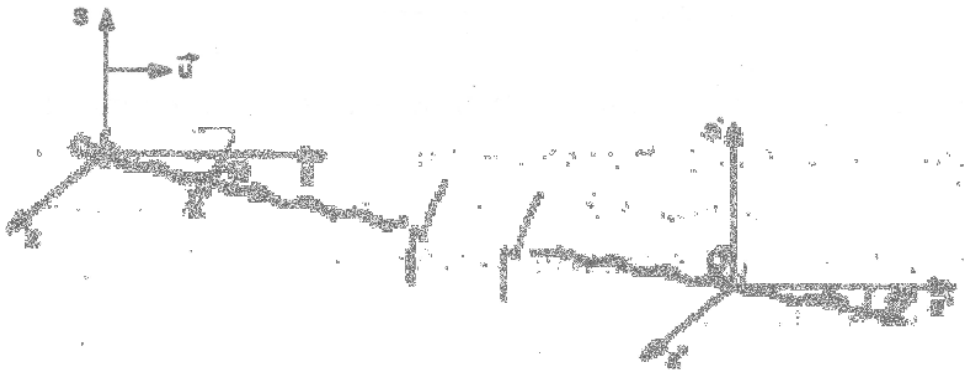
б) Знајући да је фаза таласа иста у оба референтна система, одредити колика се учестаност ν' детектује у систему S' под углом θ' у зависности од учестаности ν и брзине *u* (једначина релативистичког Доплеровог ефекта); (13п)

в) На основу резултата добијеног под б) одредити колика је учестаност ν' у случајевима када је угао под којим се светлост детектује $\theta'=0$, $\theta'=\pi$ и $\theta'=\pi/2$ (3п)

г) Одредити учестаност ν' у нерелативистичком случају ($u << c$). Наћи такође колика је учестаност ν' у три карактеристична случаја $\theta'=0$, $\theta'=\pi$ и $\theta'=\pi/2$ (5п)

д) Одредити разлику учестаности ласерског снопа којим се побуђује сноп јона Ne убрзаних напоном од U = 10 kV у случајевима када је ласерски сноп нормалан на сноп јона и када је он паралелан и супротно усмерен од снопа јона. Побуђује се прелаз на λ = 500 nm. Моларна маса неона је M = 20,179 g/mol. (7п)

(укупно 30 поена)



Задатке припремили

Мр Зоран Мијић, Др Драган Маркушев, Доц. др Андријана Жекић, Александар Крмпот

Рецензенти

Проф. Др Александар Срећковић, Проф. Др Мићо Митровић, Др Ђорђе Спасојевић

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и спорта Републике Србије

1. Физичка олимпијада Србије
Физички факултет, Београд, 2007.

Теоријски задаци - решења
Општа група - средње школе

1. $\varphi = \omega t$, $d\varphi = \omega dt$

$$q = \int_0^{T/2} I dt = \int_0^{T/2} \frac{\varepsilon}{R} dt = \int_0^{T/2} \frac{\varepsilon_0 \sin \omega t}{R} dt = \int_0^{\varphi_0} \frac{\varepsilon_0 \sin \varphi}{R\omega} d\varphi = -\frac{\varepsilon_0}{R\omega}\left(\cos\varphi_0 - \cos 0°\right) = \frac{\varepsilon_0}{R\omega}\left(1 - \cos\varphi_0\right)$$

$$\varphi_0 = \varphi_1, \qquad q_1 = \frac{2\varepsilon_0}{R\omega}, \qquad q_2 = \frac{\varepsilon_0}{R\omega}\left(1 - \cos\varphi_2\right) = \frac{q_1}{2}\left(1 - \cos\varphi_2\right)$$

$$\cos\varphi_2 = 1 - \frac{q_1}{2q_2} = 0{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_2 = 60°$$

2. За дате услове задатка, када се молекули крећу средњим квадратним брзинама, имамо:

$$v = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 337\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

што значи да ће, за време свог живота, побуђени молекул прелетети растојање

$$L = v\tau = 3{,}4 \times 10^{-1}\ \mathrm{m}.$$

Запремина у којој се тај молекул може сударити за то време са другим молекулима једнака је $V \approx 4LS$. Концентрација молекула у суду непосредно пре осветљавања је

$$n = \frac{p_0 N_A}{RT} \approx 2{,}7 \times 10^{22}\ \mathrm{m}^{-3},$$

где је N_A Авогадров број а R је универзална гасна константа. Концентрација побуђених молекула износи

$$n_{exc} = \tau N \cdot 10^6 \approx 10^{15}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Један побуђени молекул у току свог времена живота може да доживи судар са другим побуђеним молекулом ν_1 пут, при чему је

$$\nu_1 = V n_{exc} = 4 v \tau S n_{exc}.$$

То значи да за то време у једном кубном метру међу побуђеним молекулима долази до

$$\nu = \frac{1}{2}\nu_1 n_{exc} = 2 v \tau S n_{exc}^2 \approx 0{,}68 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$$

судара. Коефицијент ½ се јавља због тога што у сударима учествују по два молекула. При сваком том судару један молекул нестаје, па је брзина смањења концентрације једнака

$$\beta = \frac{\nu}{\tau} = 2 v S n_{exc}^2 \approx 6{,}8 \times 10^{13}\ \mathrm{m}^{-3}\mathrm{s}^{-1}.$$

Притисак у суду ће се смањити за $\varepsilon = 1\% = 0{,}01$ онда када се за исту вредност смањи концентрација молекула n. То ће се догодити за време

$$t = \frac{\varepsilon n}{\beta} \approx 4 \times 10^6 \text{ s},$$

што износи приближно 46 дана. Наравно ово је процена, и конкретна бројна вредност зависиће првенствено од брзине која се узме, тј. да ли ћете на почетку узети $\sqrt{<v^2>}, <v>$ или v_n. Пошто се ове брзине међусобно разликују за највише фактор 1,25, онда је за процену оправдано на почетку узети било коју брзину.

3. а) Центар масе система се креће као тело масе $M = m_1 + m_2$ под одређеним углом у односу на хоризонталну раван, почетним импулсом $\vec{p}_0 = M\vec{u}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ где је $\vec{u}_0$ почетна брзина центра масе. Пројекција овог импулса на вертикалну осу је $m_2 v$ на основу чега следи да је вертикална брзина центра масе система $u_{oy} = \frac{m_2 v}{M}$. Максимална висина подизања система се затим лако налази као $H_{\max} = \frac{u_{oy}^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$.

б) Деформација опруге се може наћи нпр. на основу следећег разматрања: У тренутку када је максимална дефорамција опруге очигледно је да, у систему референце везаном за центар масе, куглице врше само ротационо кретање око центра масе. У том тренутку укупна енергија система представља суму кинетичке и потенцијалне енергије центра масе (W_c), потенцијалне енергије истезања опруге $k\frac{x^2}{2}$ (x-деформација опруге) и енергије ротације појединих куглица $W_k = \frac{1}{2}\left[m_1(\omega l_1)^2 + m_2(\omega l_2)^2\right]$ где је ω угаона брзина ротације, l_1 и l_2 растојања појединих куглица од центра масе. Ако је укупна дужина опруге у том тренутку l онда, у систему везаном за центар масе, важи $l_1 = \frac{lm_2}{M}$ и $l_2 = \frac{lm_1}{M}$ па је $W_k = \frac{1}{2}\omega^2 l^2\left(\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2}\right) = \frac{1}{2}\omega^2 l^2 \frac{m_1 m_2}{M}$. Из закона одржања момента импулса следи да у тренутку када је максимална деформација опруге важи $m_1(\omega l_1)l_1 + m_2(\omega l_2)l_2 = m_1\omega_0 l_{10}^2 + m_2\omega_0 l_{20}^2$ где су l_{10} и l_{20} почетна растојања куглица од центра масе, а ω_0 почетна угаона брзина. Ако је почетна дужина опруге l_0 очигледно важи $l_{10} = \frac{l_0 m_2}{M}$ и $l_{20} = \frac{l_0 m_1}{M}$. На основу тога може се писати $\left[m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2\right]\omega l^2 = \left[m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2\right]\omega_0 l_0^2$ па је $\omega = \omega_0 \frac{l_0^2}{l^2}$. Да би се одредило ω_0 потребно је наћи почетне брзине куглица у систему центра масе $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$. Како је брзина центра масе у почетном тренутку била $\vec{u}_0 = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M}$ за почетне брзине куглица у систему центра масе се добија $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{u}_0 = \frac{m_2}{M}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$ и $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{u}_0 = \frac{m_1}{M}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)$. На основу претходног интензитет почетне угаоне брзине једнак је односу нормалне компоненте брзине куглице и њеног растојања од центра масе нпр $\omega_0 = \frac{v_{2y}'}{l_{20}}$ тј. $\omega_0 = \frac{vm_1/M}{l_{20}} = \frac{v}{l_0}$ па се за енергију ротације куглица добија $W_k = \frac{1}{2}\omega_0^2 l_0^2 \frac{m_1 m_2}{M}\frac{l_0^2}{l^2} = \frac{m_1 m_2}{2M}v^2\frac{l_0^2}{l^2}$. Ако се сада искористи

апроксимација $\frac{x}{l} << 1$ тј. $\frac{l_0^2}{l^2} = \frac{(l-x)^2}{l^2} = \frac{l^2 - 2lx + x^2}{l^2} = 1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \approx 1$ коначно се за енергију ротације куглица у моменту максималне деформације добија $W_k = \frac{m_1 m_2}{2M} v^2$. Почетна енергија целог система је $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}$ па из закона одржања енергије следи $\frac{Mv^2}{2} = W_c + \frac{kx^2}{2} + W_k$ где је W_c - збир кинетичке и потенцијалне енергије центра масе у датом тренутку. За систем као целину такође из закона одржања енергије важи $W_c = W_{c0} = \frac{Mu_0^2}{2} = \frac{M}{2}\left(\frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{M}\right)^2$. Како је $\left(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}\right)^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 = \left(m_1^2 + m_2^2\right)v^2$ следи $W_c = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2M} v^2$. На основу претходних једначина сада се може написати $\frac{Mv^2}{2} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2M} v^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{m_1 m_2}{2M} v^2$ одакле се за тражену деформацију опруге добија решење $x = v\sqrt{\frac{m_1 m_2}{kM}}$.

5. а) При почетној фази једнакој 0, фаза таласа је

$$\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \qquad (1)$$

Стога је у систему S

$$\phi = 2\pi\left(\nu t - \frac{x\cos\theta + z\sin\theta}{\lambda}\right), \qquad \textbf{(1п)} \qquad (2)$$

а у систему S'

$$\phi' = 2\pi\left(\nu' t' - \frac{x'\cos\theta' + z'\sin\theta'}{\lambda'}\right) \qquad \textbf{(1п)} \qquad (3)$$

б) Применом Лоренцових трансформација

$$t = \gamma\left(t' - \frac{u}{c^2}x'\right),\ x = \gamma(x' - ut'),\ y = y',\ z = z' \ \textbf{(1п)} \qquad (4)$$

где су $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ и $\beta = u/c$, добијамо:

$$2\pi\left(\nu' t' - \frac{x'\cos\theta' + z'\sin\theta'}{\lambda'}\right) = 2\pi\left(\frac{\nu\left(t' - \left(u/c^2\right)x'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{(x' - ut')}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}\cos\theta - \frac{z'\sin\theta}{\lambda}\right)$$

одакле, након груписања чланова уз x', y' и z', налазимо

$$2\pi\left(\nu' t' - \frac{x'\cos\theta' + z'\sin\theta'}{\lambda'}\right) = 2\pi\left(\frac{\nu(1+\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}}t' - \frac{\cos\theta + \beta}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}x' - \frac{\sin\theta}{\lambda}z'\right). \ \textbf{(3п)} \qquad (5)$$

Одавде, изједначавајући коефицијенте уз *x'*, *y'* и *z'*, добијамо

$$\frac{\cos\theta'}{\lambda'} = \frac{\cos\theta + \beta}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \textbf{(1п)} \qquad (6)$$

$$\frac{\sin\theta'}{\lambda'} = \frac{\sin\theta}{\lambda} \qquad \textbf{(1п)} \qquad (7)$$

$$\nu' = \frac{\nu(1+\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \textbf{(1п)} \qquad (8)$$

Елиминацијом угла θ' из једначина 6 и 7, користећи идентитет $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, добијамо таласну дужину λ' у S' у функцији величина из S:

$$\lambda' = \frac{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta} \qquad \textbf{(2п)} \qquad (9)$$

Из једначине 6 и услова $\lambda'\nu' = \lambda\nu = c$ може да се изрази угао θ као:

$$\cos\theta = \frac{\nu'}{\nu}\cos\theta'\sqrt{1-\beta^2} - \beta\,. \qquad \textbf{(2п)} \qquad (10)$$

Заменом 10 у 8 добија се

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta'} \qquad \textbf{(2п)} \qquad (11)$$

што представља релацију за релативистички Доплеров ефекат.

в) када се извор и детектор приближавају $\theta'=0$ па је (на основу 11)

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \nu\sqrt{\frac{c+u}{c-u}}\,, \quad \textbf{(1п)} \qquad (12)$$

а када се извор и детектор удаљавају $\theta'=\pi$ па је (опет на основу 11)

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}\,. \quad \textbf{(1п)} \qquad (13)$$

Пошто се извор и детектор крећу дуж паралелних праваца, то је у тренутку када је њихово растојање најмање $\theta'=\pi/2$, па је

$$\nu' = \nu\sqrt{1-\beta^2} \quad \textbf{(1п)} \qquad (14)$$

г) На основу $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1-\beta^2/2$, и задржавајући се на линеарним члановима, добијамо

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta'} \approx \nu\frac{1-\frac{1}{2}\beta^2}{1-\beta\cos\theta'} \approx \frac{\nu}{1-\beta\cos\theta'} \approx \nu\left(1+\beta\cos\theta'\right) \textbf{(2п)} \qquad (15)$$

што представља нерелативистички резултат за Доплеров ефекат. За нерелативистички Доплеров ефекат се такође могу навести три карактеристична случаја:

$\nu' = \nu(1+\beta)$ када је $\theta'=0$ **(1п)** (16)

$\nu' = \nu(1-\beta)$ када је $\theta'=\pi$ **(1п)** (17)

$\nu' = \nu$ када је $\theta'=\pi/2$; тада нема промене учестаности. **(1п)** (18)

д) Јони Ne убрзани напоном U се крећу брзином u одређеном са:

$$eU = \frac{mu^2}{2} \quad \textbf{(0,5п)} \qquad (19)$$

Масу јона неона можемо наћи из моларне масе M = 20,179 g/mol сматрајући да су атом и јон приближно исте масе $m = \frac{M}{N_A} = 3.35\cdot10^{-26}\,kg$ **(0,5п)** 20

Следи да је брзина јона неона у снопу $u = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 3{,}09\cdot10^5\,\frac{m}{s}$ **(1п)**. (21)

Када је сноп јона паралелан ласерском снопу и креће му се у сусрет, тада је угао $\theta'=0$ односно јони ће регистровати учестаност ласерског снопа вишу за

$$\Delta\nu_1 = \nu' - \nu = \nu\left(\sqrt{\frac{c+u}{c-u}} - 1\right) = \frac{c}{\lambda}\left(\sqrt{\frac{c+u}{c-u}} - 1\right) = 618318{,}6\,MHz \quad \textbf{(2п)} \qquad (22)$$

што значи да за израчунати износ треба смањити учестаност ласера би се побудио тражени прелаз.

У случају када ласерски сноп сече сноп јона под правим углом долази до појаве трансверзалног Доплеровог ефекта, али у том случају јони ће регистровати учестаност ласерског снопа нижу за

$$\Delta\nu_2 = \nu' - \nu = \nu\left(\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} - 1\right) = \frac{c}{\lambda}\left(\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} - 1\right) = -318{,}3MHz \quad \textbf{(2п)} \qquad (23)$$

тако да је потребно повећати учестаност ласера за израчунати износ да би се побудио тражени прелаз.

Разлика учестаности ласерског снопа у ова два случаја ће бити $\Delta\nu_1$ - $\Delta\nu_2$ = 618636,9 MHz **(1п)**

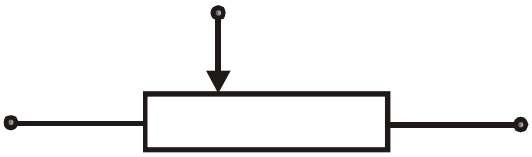
Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије

1. Физичка олимпијада Србије
Физички факултет, Београд, 2007.

Експериментални задаци
Општа група - средње школе

Задатак 1

Одредити максималну отпорност линеарног потенциометра који се налази у приложеној црној кутији.
У црној кутији се налази потенциометар који је везан на неуобичајен начин. Додатно повезивање потенциометра је извршено кабловима занемарљиве отпорности.
Линеарни потенциометар је потенциометар код кога отпорност између једног од крајева и клизача расте сразмерно углу за који се обрне осовина потенциометра.
Између два од три прикључка потенциометра мерите отпорност приложеним омметром.
Пратите зависност ове отпорности од угла обртања осовине потенциометра (у даљем тексту угао).
Из добијене зависности закључите како је потенциометар везан у црној кутији. На приложеној шеми црне кутије означите јасно начин повезивања потенциометра и начин врзивања омметра у току мерења.
На основу тог закључка и извршених мерења одредите максималну отпорност потенциометра. (60 бодова)



Напомене

1. Тражену отпорност можете одредити са графика мерене зависности, ако из карактера зависности одредите шта се налази у црној кутији. За овако одређену отпорност, уз правилну процену грешке мерења можете добити највише 40 поена.
- 20 поена добијате за комплетно мерење директно мерених величина и правилну процену грешака ових мерења
- 7 поена добијате за исправно цртање одговарајућег графика
- 7 поена добијате за исправан закључак о могућој вези потенциометра у црној кутији.
- 4 поена добијате за исправно одређену отпорност потенциометра, а 2 поена за исправну процену грешке ове отпорности.

2. Да би сте потврдили претпостављену везу потенциометра у црној кутији, потребно је извршити линеаризацију зависности између мерених величина.
- За исправно објашњење на који начин линеаризована зависност потврђује претпостављену везу добијате 7 поена.
- За одређивање тражене отпорности потенциометра из линеаризоване зависности добијате 10 поена, а за одређивање њене грешке 3 поена.

3. Приликом обраде резултата линеаризоване зависности довољно је да искористите 6 правилно изабраних експерименталних тачака. При томе изоставите тачке које одговарају угловима обртања мањим од 360°.

4. Угао обртања осовине потенциометра мерите угломером који се налази на црној кутији. Максималан угао обртања приложеног потенциометра је 10 пуних кругова. Довољно је да ја пратите промену отпорности са променом угла за 90°.

5. За сваку одређену величину морате јасно навести начин одређивања, као и начин процене грешке.
6. За апсолутну грешку омметра узмите 1% од измерене вредности + вредност најмање цифре која се може очитати.

Мерни комплет

1. Црна кутија која садржи: линеарни потенциометар, жице занемарљиве отпорности, угломер
2. Омметар

Задатак 2

Измерити отпорност непознатог отпорника. (15 бодова)

У црној кутији из првог дела задатка измењен је сасвим начин везивања потенциометра. Међутим, тачке између којих се мери отпорност су остале исте.
За крајеве потенциометра је везан отпорник чију отпорност треба одредити.
Мерење извршити за један попожај потенциометра (није потребно пратити зависност отпорности од угла).

Напомене
Када завршите задатак 1 позовите дежурног да изврши одговарајуће измене у црној кутији, за задатак 2. Од дежурног можете тражити да црну кутију врати поново у стање за задатак 1.

Задатак 3

Помоћу мерног комплета који имате на располагању измерите атмосферски притисак и процените грешку његовог мерења. Опишите поступак мерења.
(25 бодова)
Мерни комплет
Боца са водом густине 1000 kg/m^3
Црево фиксирано за метарску траку
Пластелин

Напомене
1. Занемарити грешку густине воде
2. Занемарити грешку услед одступања од ваљкастог облика црева

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије
1. Физичка олимпијада Србије
Физички факултет, Београд, 2007.
Решење експерименталних задатака
Општа група - средње школе

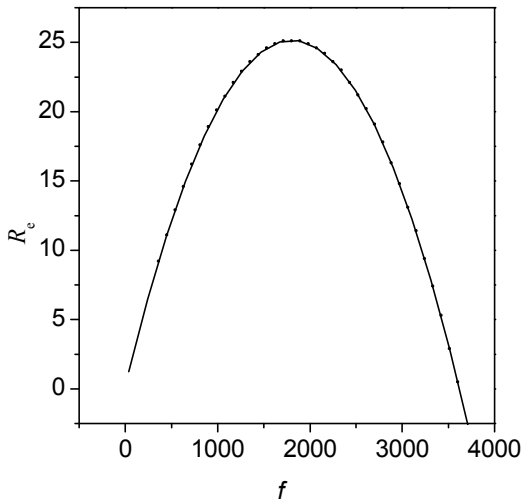
Задатак 1

Мерењем отпорности R_e при промени угла обртања ϕ добијени су подаци дати у табели, где је a однос измереног и максималог угла.

ϕ	R_e	ΔR_e	a	R_e / a	$\Delta(R_e / a)$
360	9,2	0,19 ≈ 0.2	0,1	92	1,9 ≈ 2
450	11,1	0,21≈ 0.2	0,125	88,8 ≈ 89	1,7 ≈ 2
540	12,9	0,23 ≈ 0.3	0,15	86	1,5 ≈ 2
630	14,6	0,25 ≈ 0.3	0,175	83,4 ≈ 83	1,4 ≈ 2
720	16,2	0,26 ≈ 0.3	0,2	81	1,3 ≈ 2
810	17,6	0,28 ≈ 0.3	0,225	78,2 ≈ 78	1,3 ≈ 2
900	18,9	0,29 ≈ 0.3	0,25	75,6 ≈ 76	1,2 ≈ 2
990	20,1	0,30 ≈ 0.3	0,275	73,1 ≈ 73	1,1 ≈ 1
1080	21,1	0,31 ≈ 0.3	0,3	70,3 ≈ 70	1,0 ≈ 1
1170	22,1	0,32 ≈ 0.4	0,325	68	0,98 ≈ 1
1260	22,9	0,33 ≈ 0.4	0,35	65,4 ≈ 65	0,94 ≈ 1
1350	23,6	0,34 ≈ 0.4	0,375	62,9 ≈ 63	0,9 ≈ 1
1440	24,1	0,34 ≈ 0.4	0,4	60,2 ≈ 60	0,9 ≈ 1
1530	24,6	0,35 ≈ 0.4	0,425	57,88 ≈ 57,9	0,81 ≈ 0.8
1620	24,9	0,35 ≈ 0.4	0,45	55,33 ≈ 55,3	0,78 ≈ 0.8
1710	25,1	0,35 ≈ 0.4	0,475	52,84 ≈ 52,8	0,74 ≈ 0.8
1800	25,1	0,35 ≈ 0.4	0,5	50,2	0,70 ≈ 0.7
1890	25,1	0,35 ≈ 0.4	0,525	47,81 ≈ 47,8	0,67 ≈ 0.7
1980	24,9	0,35 ≈ 0.4	0,55	45,27 ≈ 45,3	0,63 ≈ 0.7
2070	24,6	0,35 ≈ 0.4	0,575	42,78 ≈ 42,8	0,60 ≈ 0.6
2160	24,2	0,34 ≈ 0.4	0,6	40,33 ≈ 40,3	0,57 ≈ 0.6
2250	23,6	0,34 ≈ 0.4	0,625	37,8 ≈ 37,8	0,54 ≈ 0.6
2340	23,0	0,33 ≈ 0.4	0,65	35,38 ≈ 35,4	0,51 ≈ 0.5
2430	22,1	0,32 ≈ 0.4	0,675	32,74 ≈ 32,7	0,48 ≈ 0.5
2520	21,2	0,32 ≈ 0.4	0,7	30,29 ≈ 30,3	0,45 ≈ 0.5
2610	20,2	0,30 ≈ 0.3	0,725	27,86 ≈ 27,9	0,42 ≈ 0.5
2700	19,1	0,29 ≈ 0.3	0,75	25,47 ≈ 25,5	0,39 ≈ 0.4
2790	17,8	0,28 ≈ 0.3	0,775	22,97 ≈ 23,0	0,36 ≈ 0.4
2880	16,3	0,26 ≈ 0.3	0,8	20,38 ≈ 20,4	0,33 ≈ 0.4
2970	14,8	0,25 ≈ 0.3	0,825	17,94 ≈ 17,9	0,30 ≈ 0.3
3060	13,1	0,23 ≈ 0.3	0,85	15,41 ≈ 15,4	0,27 ≈ 0.3
3150	11,4	0,22 ≈ 0.3	0,875	13,03 ≈ 13,0	0,24 ≈ 0.3
3240	9,4	0,19 ≈ 0.2	0,9	10,44 ≈ 10,4	0,22 ≈ 0.3

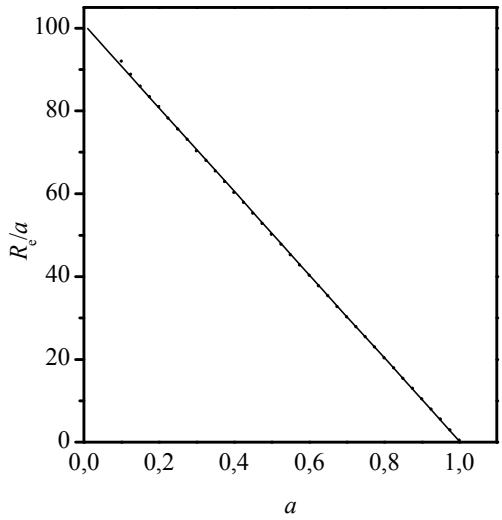
3330	7,4	0,17 ≈ 0.2	0,925	8,0	0,19 ≈ 0.2
3420	5,3	0,15 ≈ 0.2	0,95	5,58 ≈5,6	0,16 ≈ 0.2
3510	2,9	0,13 ≈ 0.2	0,975	2,97 ≈ 3,0	0,13 ≈ 0.2
3600	0,5	0,11 ≈ 0.1	1	0,5	0,11 ≈ 0.1

Са графика $R_e = f(\phi)$ се види да се максимална отпорност добија када је клизач на средини потенциометра. Отпорности два дела потенциометра са две стране клизача могу бити везано редно, паралелно или једна од њих кратко спојена. Ако су везане редно отпор би био константан, а ако је један кратко спојен отпор другог би се линеарно мењао са углом. Пошто зависност има максимум значи да су те отпорности везане паралелно, максимум од $(25.0 \pm 0.4)\Omega$ имају када су отпорности исте, тј. када је клизач на средини. Паралелна веза је остварена кратким спојем крајева потенциометра а отпорност је мерена између тако спојених крајева и клизача. Пошто паралелна веза истих отпорности и ма двоструко мању отпорност, отпорност једне половине потециометра је 50Ω а целог $(100.0 \pm 1.6)\Omega$. Максимална отпорност потенциометра износи



$$R = (100 \pm 2)\Omega$$

Да би тачније одредили отпорност потенциометра извршена је линеаризација зависности између мерених величина. Еквивалентна отпорност овакве паралелне везе је $R_e = aR(1-a)$ која се може линеаризовати праћењем зависности $\frac{R_e}{a} = R - Ra$. Цртањем графика $\frac{R_e}{a} = f(a)$ може се одредити тражена максимална отпорност као одсечак на ординати.



Вредност одсечка на ординати, тј. максималне отпорности износи $R = (101 \pm 2)\Omega$.

Задатак 2

Померањем клизача са једног на други крај потенциометра мерена отпорност се мења између нуле и 50,4 Ω, међутим, ова промена није линеарна, као што је то случај када би био потенциометар сам.

У задатку 1 нађено да су тачке везивања омметра један његов крај и клизач, што значи да је у зависности од положаја клизача:
А) отпорност нула, када је он на крају за који је везан омметар.
Б) отпорност 50,4Ω када је клизач на другом крају, при чему је она једнака отпорности паралелне везе целог потенциометра и траженог отпорника.
В) остале отпорности су једнаке отпорности редне везе дела потенциометра и паралелне везе остатка потенциометра са непознатим озпорником.
Најједноставнији начин одређивања тражене отпорности је у Б положају клизача, тада важи:

$$R_x = \frac{RR_e}{R - R_e} = \frac{101 \cdot 50.4}{50.6}\Omega = 100.6\Omega$$

$$\Delta R_x = \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta R_e}{R_e} + \frac{\Delta R + \Delta R_e}{R - R_e}\right)R_x = \left(\frac{2}{101} + \frac{0.61}{50.4} + \frac{2.61}{50.6}\right)\cdot 100.6\Omega = 8.4\Omega \approx 10\Omega$$

$$R_x = (100 \pm 10)\Omega$$

Задатак 3

Један од начина мерења атмосферског притиска

Црево се стави у воду, до дна и измери се висина ваздушног стуба у цреву l_0. Црево се извади и обрне за 180°. Тада се измере: l - висина ваздушног стуба испод воде и h - висина стуба воде у цреву.

Ред. бр.	l_0 [cm]	l [cm]	h [cm]
1	64.9	63.5	24.4
2	64.9	63.4	24.4
3	64.9	63.6	24.4
Средња вредност	64.9	63.5	24.4
Апсолутна грешка	0.2	0.2	0.2

Једначине равнотеже: $p_0 + \rho gh = p_1$, где су
p_0 и p_1 - атмосферски притисак и притисак у цреву после обртања.
Процес је приближно изотерман, па важи $p_0 l_0 S = plS$, где је површина пресека црева.
Из претходних једначина се добија:

$$p_0 = \frac{l}{l_0 - l}\rho gh = \frac{63.5}{64.9 - 63.5}1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}0.244\text{m} = 1.09 \cdot 10^5\,\text{Pa} = 1.1 \cdot 10^5\,\text{Pa}$$

$$\Delta p_0 = \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta l_0 + \Delta l}{l_0 - l} + \frac{\Delta h}{h}\right)p_0 = \left(\frac{0.2}{63.5} + \frac{0.4}{1.4} + \frac{0.2}{24.4}\right)1.09 \cdot 10^5\,\text{Pa} = 0.33 \cdot 10^5\,\text{Pa} \approx 0.4 \cdot 10^5\,\text{Pa}$$

$$p_0 = (1.1 \pm 0.4)\cdot 10^5\,\text{Pa}$$

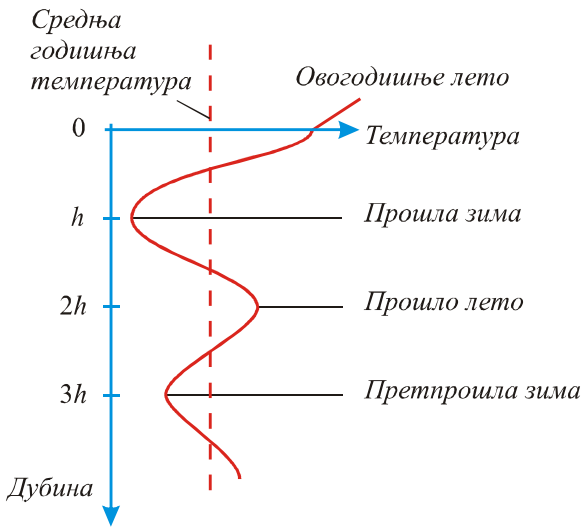
Резултати 1. физичке олимпијаде Србије - средње школе

Бр.	Ученик	Школа	Место	Наставник	Теорија Бодова	Експ. Бодова	Н.
1	Радичевић Ђорђе	Г. "Светозар Марковић"	Ниш	Бранко Јовановић	100,0	100,0	I
2	Павловић Владан	Гимназија "9. мај"	Ниш	Горан Ђорђевић	80,9	100,0	I
3	Јанковић Страхиња	Гимназија	Крушевац	Драгана Милићевић	74,0	90,3	II
4	Милошевић Бојана	Математичка Гимназија	Београд	Наташа Каделбург	68,7	67,7	III
5	Милошевић Милана	Математичка Гимназија	Београд	Наташа Каделбург	67,2	52,7	III
6	Крнета Александра	Математичка Гимназија	Београд	Наташа Каделбург	53,4	62,9	III
7	Оташевић Никола	Математичка Гимназија	Београд	Бранислав Цветковић	56,5	54,8	П
8	Живановић Горан	Математичка Гимназија	Београд	Катарина Матић	64,1	36,6	П
9	Стојковић Ненад	Гимназија Вељко Петровић	Сомбор	Урош Стојковић	40,5	59,1	П
10	Младеновић Марко	Математичка Гимназија	Београд	Драган Цветковић	53,4	25,8	П
11	Василијевић Момчило	Математичка Гимназија	Београд	Бранислав Цветковић	44,7		серт
13	Глигоријевић Владимир	Гимназија	Смедерево	Милутин Вуцковић	44,1		серт
14	Вукомировић Ненад	Математичка Гимназија	Београд	Наташа Каделбург	35,0		серт
12	Николић Александра	Математичка Гимназија	Београд	Бранислав Цветковић	33,3		серт
15	Јевремовић Марко	Математичка гимназија	Краљево	Милентије Ђуровић	28,7		серт

ЗАВРШНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ОЛИМПИЈСКЕ ЕКИПЕ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ, БЕОГРАД, 2007.

Задатак 1. (20 поена)

Опште је позната чињеница да све појаве у природи у основи имају и могу се описати законима физике. Мало је, међутим, познато да се и понашања животиња у природи, па и људи, које смо приписивали нагонима самоодржања, могу и те како добро објаснити познатим физичким законима. Узмимо, на пример, понашање неких сисара приликом изградње својих склоништа. По правилу су та склоништа под земљом, на некој дубини h_1 где су не само заштићени од својих природних непријатеља, већ су лети заштићени од превелике топлоте а зими од превелике хладноће. Са друге стране, још у давним временима када нису постојали никакви расхладни уређаји, људи су неке своје намирнице закопавали у земљу на дубину $h_2 \approx h_1 = h$ и тако их одржавали свежим и корисним за исхрану један много дужи период него да су биле на површини земље. И једно и друго понашање људи и животиња условљено је карактеристиком површинског слоја Земљине коре тј. њеном топлотном проводношћу. И експерименти и теоријски прорачуни дају нам данас прецизну расподелу температуре површинског слоја Земљине коре по дубини, што је и представљено на датој упрошћеној и идеализованој слици која би се добила мерењем једног дана средином лета нпр. ове године. На њој се види да се промена температуре површинског слоја Земљине коре са дубином мења приближно по слици тзв. "пригушених осцилација" где су минимуми и максимуми промена температуре на подједнакој удаљености $h, 2h, 3h...$ које одговарају временском размаку од пола године, и које ишчезавају већ на дубинама већим од 20 m, када температура Земљине коре почиње константно да се повећава.



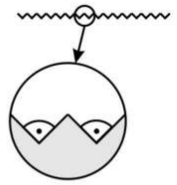
а) Средњи пораст температуре Земљине коре за дубине веће од 20 m износи $\Delta T = 1\,\mathrm{K}$ на сваких $H = 30\,\mathrm{m}$ дубине, а губитак топлоте Земљине коре у току једне године износи $Q = 4 \times 10^{20}$ J. Израчунајте средњи коефицијент топлотне проводљивости λ Земљине коре, ако је полупречник Земље $R = 6370\,\mathrm{km}$.

б) Користећи се резултатом за λ под а) и знајући да је густина Земљине коре приближно $\rho = 5518\,\mathrm{kg/m^3}$ а њен специфичан топлотни капацитет приближно $c = 715\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$, израчунајте која би то дубина h била да би, ако узмемо пример са слике, намирнице средином лета држали на температури одређеној минималном температуром протекле зиме.

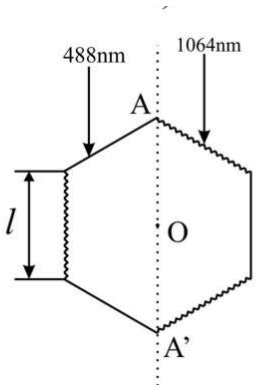
Задатак 2. (25 поена)

Када се споји много малих ретро-рефлектора добија се оптички елемент који се у свакодневном животу назива „мачије око" (слика 1а). Ретро-рефлектори морају да буду

довољно велики да може да се занемари дифракција. С друге стране, они су довољно мали да помак упадног и рефлектованог зрака може да се занемари. Према томе, мачије око има особину да зрак врати приближно по истој путањи, односно да се рефлектовани зрак разликује од упадног само по смеру.
На стране омотача правилне шестостране призме су наизменично налепљена огледала и мачије очи (слика 1б). Страница шестоугаоуника је *l*. Призма може слободно да ротира око центра О. На средину стране са мачијим оком пада узак, добро усмерен сноп Nd:YAG ласера таласне дужине 1064nm. Сноп је паралелан оси АА'.
На којој удаљености од тачке А треба на страни са огледалом да падне узак, добро усмерен сноп Ar^+ ласера таласне дужине 488nm да призма не би почела да ротира? И овај сноп је паралелан оси АА' и има исти флукс фотона као и Nd:YAG ласер.



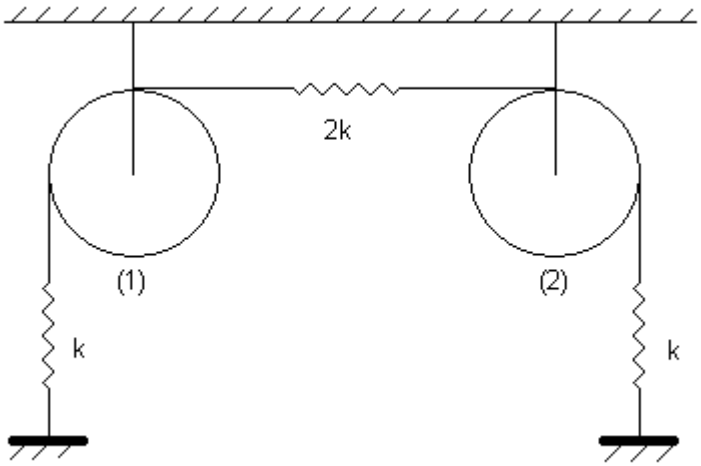
а



б

Задатак 3. (25 поена)

Систем са слике се састоји из два једнака котура (момента инерције I и полупречника R без трења у лежиштима) , као и три опруге замемарљивих маса и константи еластичности $k_1 = k_2 = k$ и $k_3 = 2k$ које су идеално еластичне. Опруге су повезане неистегљивим идеално савитљивим нитима занемарљиве масе које не проклизавају по котуровима. У равнотежном стању све три опруге су натегнуте. У почетном тренутку $t = 0$ котурови су изведени улево из својих равнотежних положаја за мале углове Φ_1 и Φ_2 респектвно, и пуштени да осцилују без почетне брзине.
а) Наћи једначине малих осцилација овог система (6п),
б) Наћи карактеристичне фреквенце и нормалне моде (9п),
в) Наћи нормалне координате овог система (3п),
г) Наћи коначне једначине кретања система (7п),



Задатак 4. (30 поена)

Ако математичко клатно, на чијем се крају налази мало намагнетисано тело, магнетног момента у правцу вертикале, врши мале осцилације у вертикалном магнетном пољу, тада важи релација:

$$\frac{1}{T^2} = A + \frac{C}{mgl} f(x),$$

где су: T – период малих осцилација клатна, m – маса малог тела, l – дужина математичког клатна –(приближно једнака дужини клатна изван магнетног поља), g – убрзање Земљине теже, $f(x)$ – бездимензионална функција која зависи од тачке простора око које мало тело осцилује и x – растојање између горње површине магнета и доње површине малог тела.

Константа C је пропорционална магнетном моменту малог тела μ и реманентној магнетизацији B_r извора мгнетног поља, у коме се осцилације врше:

$$C \propto \mu B_r .$$

Измерите константе A и C за математичко клатно и стални магнет које имате на располагању. Мерење извршити за случај када магнет лежи на страници одређеној најдужом и најкраћом ивицом, и када клатно у равнотежном положају виси изнад пресека дијагонала ове странице. Процените грешке мерења ових константи.

Ради мерења тражених величина имате на располагању:

1. одговарајућу нит за клатно. 2. плочицу од феромагнетног материјала масе 0.8 g
2. стални магнет 4. носач на који треба окачити клатно
5. скалу са милиметарском поделом 6. држач скале – жица 7. хронометар

Пажња:

1) ***Пластелин на крају нити има одговарајући облиик, на његовом крају је причвршћена плочица од феромагнетика. Немијте мењати облик пластелина и положај плочице.***

2) ***Избегавајте приближавање плочице сталном магнету на растојање мање од 15*mm, *јер може доћи до слепљивања плочице и магнета. Ако се то деси, полако их одвојите – не вукући за пластелин, него за плочицу.***

Константу C одредите као средњу вредност добијених константи за три различите вредности x, између 20 и 30 mm.

Вредност функције $f(x)$ дате су на приложеном графику.

Процените грешку мерења константи A и C.

Задатке припремили

1. др Драган Маркушев
2. Александар Крмпот
3. др Ђорђе Спасојевић
4. доц. др Андријана Жекић и проф. др Мићо Митровић

Председник комисије

проф. др Мићо Митровић

ЗАВРШНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ОЛИМПИЈСКЕ ЕКИПЕ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ, БЕОГРАД, 2007.
Решења

Задатак 1

Количина топлоте која прође за време t кроз јединичну површину S постављену нормално на правац преношења топлоте, износи

$$Q = \lambda S \frac{(T_2 - T_1)}{H} t = \lambda 4\pi R^2 \frac{\Delta T}{H} t. \text{ (4п)}$$

Одавде је, на основу датих података,

$$\boxed{\lambda = \frac{HQ}{4\pi R^2 \Delta T t} = 0{,}75 \frac{\text{W}}{\text{mK}}.} \text{ (4п)}$$

б) Полазећи од последње једначине видимо да је, за више слојеве Земљине коре ($H = h < 20\,\text{m}$):

$$\lambda = \frac{hQ}{S\Delta T t} \cdot \frac{m}{m} = \frac{hmc}{St} = \frac{h\rho Vc}{St} = \frac{h\rho hSc}{St} = \frac{h^2 \rho c}{t}, \text{ (8п)}$$

па је, уз $t = T/2 = 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s}/2 \approx (3{,}1536/2) \times 10^7\,\text{s}$,

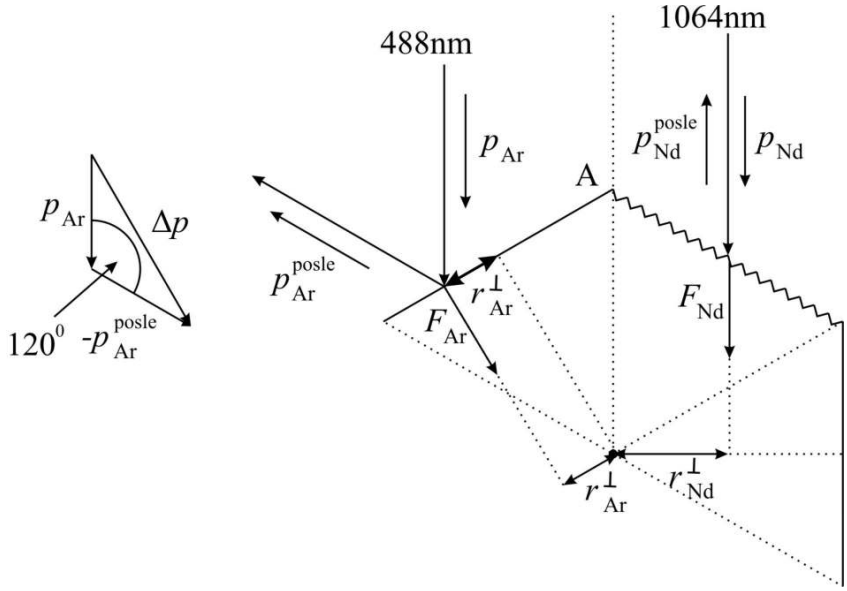
$$\boxed{h = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} t} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} \frac{T}{2}} \approx 1{,}73\,\text{m}.} \text{ (4п)}$$

Задатак 2

Призма неће почети да ротира ако је укупан момент силе једнак 0, односно ако су моменти услед притиска светлости оба ласера једнаки по интензитету и супротно усмерени. Да би израчунали моменте силе, најпре је потребно израчунати интензитете и правце деловања силе. Сила може да се израчуна из промене импулса фотона при рефлексији. У случају Nd:YAG ласера фотони се рефлектују уназад, односно $\vec{p}_{\text{Nd}}^{\text{posle}} = -\vec{p}_{\text{Nd}}$. На основу овога следи да је $\Delta p = 2p_{\text{Nd}}$ **(4п)**. Сила којом овај зрак делује на призму је тако $F_{\text{Nd}} = \frac{\Delta p_{\text{ukupno}}}{\Delta t} = \frac{n \cdot \Delta p}{\Delta t} = \frac{n}{\Delta t} 2p_{\text{Nd}} = 2\Phi \frac{h}{\lambda_{\text{Nd}}}$, где је n број фотона и $\Phi = \frac{n}{\Delta t}$ флукс фотона **(4п)**. Правац и смер силе су исти као код упадног фотона. Интензитет момента ове силе је $M_{\text{Nd}} = F_{\text{Nd}} r_{\text{Nd}}^{\perp}$. Крак износи $r_{\text{Nd}}^{\perp} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$ па је момент $M_{\text{Nd}} = \frac{l\Phi h\sqrt{3}}{2\lambda_{\text{Nd}}}$ **(3п)**. Овај момент тежи да окрене призму у смеру казаљке на сату (негативном смеру).

Што се тиче Ar^+ ласера сила се рачуна на исти начин. Али у овом случају промена импулса фотона је $\Delta p = 2\frac{p_{\text{Ar}}\sqrt{3}}{2} = p_{\text{Ar}}\sqrt{3}$ **(4п)**. Тако је сила

$F_{\mathrm{Ar}} = \frac{\Delta p_{\mathrm{ukupno}}}{\Delta t} = \frac{n \cdot \Delta p}{\Delta t} = \frac{n}{\Delta t} p_{\mathrm{Ar}} \sqrt{3} = \sqrt{3}\Phi \frac{h}{\lambda_{\mathrm{Ar}}}$ **(4п)**. Флукс фотона је исти за оба ласера по услову задатка. Ова сила је усмерена нормално на површину огледала. Момент ове силе је $M_{\mathrm{Ar}} = F_{\mathrm{Ar}} r_{\mathrm{Ar}}^{\perp}$. Овде је $r_{\mathrm{Ar}}^{\perp}$ удаљеност од центра стране. Пошто призма не ротира тада је $M_{\mathrm{Nd}} = M_{\mathrm{Ar}}$. Одавде добијемо да је $r_{\mathrm{Ar}}^{\perp} = \frac{M_{\mathrm{Ar}}}{F_{\mathrm{Ar}}} = \frac{M_{\mathrm{Nd}}}{F_{\mathrm{Ar}}} = \frac{l\Phi h\sqrt{3}}{2\lambda_{\mathrm{Nd}}} \cdot \frac{\lambda_{\mathrm{Ar}}}{\sqrt{3}\Phi h} = \frac{l}{2} \cdot \frac{\lambda_{\mathrm{Ar}}}{\lambda_{\mathrm{Nd}}}$ **(3п)**. Односно зрак треба да пада на удаљености $d = \frac{l}{2} + r_{\mathrm{Ar}}^{\perp} = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{\lambda_{\mathrm{Ar}}}{\lambda_{\mathrm{Nd}}}\right) = 0{,}729 \cdot l$ од тачке А **(3п)**. Ово растојање мора бити веће од $\frac{l}{2}$ да би момент M_{Ar} имао супротни смер од момента M_{Nd}.



Задатак 3

а) Обзиром да су нити неистегљиве, збир дужина све три опруге је константан (1п). Нека је φ_1 угао (мерен улево – тј. у смеру супротном од смера кретања казаљке на сату) за који је котур 1 изведен из свог равнотежног положаја, и аналогно φ_2 за котур 2. Нека је l_1 дужина опруге 1, l_2 дужина опруге 2, а l_3 дужина опруге 3 у том положају котурова: нека су l_{10}, l_{20} и l_{30} дужине ових опруга у равнотежном положају система. Тада је $l_1 - l_{10} = -R\varphi_1$, $l_2 - l_{20} = R\varphi_2$, док је $l_3 - l_{30} = R(\varphi_1 - \varphi_2)$ (1п) на основу услова да је збир дужина све три опруге константан. Стога је сила F_{11} којом прва опруга делује на први котур $F_{11} = -kR\varphi_1$ а њен момент $M_{11} = -kR^2\varphi_1$. Слично је сила F_{22} којом друга опруга делује на други котур $F_{22} = -kR\varphi_2$ а њен момент $M_{22} = -kR^2\varphi_2$. Коначно је сила F_{13} којом трећа опруга делује на први котур $F_{13} = -2kR(\varphi_1 - \varphi_2)$ а њен момент $M_{13} = -2kR^2(\varphi_1 - \varphi_2)$, док иста опруга делује моментом силе $M_{23} = 2kR^2(\varphi_1 - \varphi_2)$ на други котур (2п). Стога једначине кретања (ротације) котурова гласе

$$I\ddot{\varphi}_1 = -kR^2(3\varphi_1 - 2\varphi_2) \text{ (1п)}$$

$$I\ddot{\varphi}_2 = -kR^2(3\varphi_2 - 2\varphi_1) \text{ (1п)}$$

б) Решења претходног система једначина тражимо у облику $\varphi_1(t) = \varphi_{10}e^{i\omega t}$ односно $\varphi_2(t) = \varphi_{20}e^{i\omega t}$ (1п). Сменом ових (пробних) решења у једначине кретања, након скраћивања са $e^{i\omega t}$, добијамо систем алгебарских једначина

$$\left(\omega^2 - 3\frac{kR^2}{I}\right)\varphi_{10} + 2\frac{kR^2}{I}\varphi_{20} = 0$$

$$2\frac{kR^2}{I}\varphi_{10} + \left(\omega^2 - 3\frac{kR^2}{I}\right)\varphi_{20} = 0$$

за амплитуде φ_{10} и φ_{20} (1п). Добијени систем је хомогени систем линеарних једначина и имаће нетривијална решења када је његова детерминанта

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 3\frac{kR^2}{I} & 2\frac{kR^2}{I} \\ 2\frac{kR^2}{I} & \omega^2 - 3\frac{kR^2}{I} \end{vmatrix} = 0$$

(1п) одакле се добија квадратна једначина $\left(\omega^2 - 3\frac{kR^2}{I}\right)^2 - \left(2\frac{kR^2}{I}\right)^2 = 0$ чијим решавањем добијамо карактеристичне фреквенце система

$$\omega_1^2 = \frac{kR^2}{I} \text{ и } \omega_2^2 = 5\frac{kR^2}{I} \text{ (2п).}$$

Сменом ω_1^2 у једначине за амплитуде (нпр. прву од две једначине) добијамо $\varphi_{20} = \varphi_{10}$ (1п), док сменом ω_2^2 добијамо $\varphi_{20} = -\varphi_{10}$ (1п). Тако налазимо нормалне моде система:

$$\varphi_1^{(1)} = A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) \text{ и } \varphi_2^{(1)} = A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) \text{ за моду која одговара } \omega_1^2\text{, (1п)}$$

одосно

$$\varphi_1^{(2)} = A_2\cos(\omega_2 t + \delta_2) \text{ и } \varphi_2^{(2)} = -A_2\cos(\omega_2 t + \delta_2) \text{ за моду која одговара } \omega_2^2\text{. (1п)}$$

в) Лако се види да су нормалне координате система дате са

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ и } \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \text{ (2п)}$$

те да за њих вреди

$$\ddot{\psi}_1 = -\omega_1^2\psi_1 \text{ и } \ddot{\psi}_2 = -\omega_2^2\psi_2 \text{ (1п)}$$

тј. систем једначина је распрегнут.

г) Опште решење једначина кретања је

$$\varphi_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

$$\varphi_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \delta_2) \text{ (1п)}$$

одакле следи да је

$$\frac{d\varphi_1}{dt}(t) = -\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t + \delta_1) - \omega_2 A_2\sin(\omega_2 t + \delta_2)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt}(t) = -\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_2 A_2\sin(\omega_2 t + \delta_2) \text{ (1п)}$$

Тако из почетних услова налазимо два система:

$$\Phi_1 = A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2$$

$$\Phi_2 = A_1\cos\delta_1 - A_2\cos\delta_2$$

односно

$$0 = -\omega_1 A_1 \sin\delta_1 - \omega_2 A_2 \sin\delta_2$$
$$0 = -\omega_1 A_1 \sin\delta_1 + \omega_2 A_2 \sin\delta_2 \quad (2п)$$

Из другог система налазимо: $\delta_1 = \delta_2 = 0$, након чега из првог система следи $A_1 = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$, односно $A_2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}$ (1п). Тако коначно добијамо:

$$\varphi_1(t) = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{kR^2}{I}}\right) + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\cos\left(t\sqrt{5\frac{kR^2}{I}}\right)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{kR^2}{I}}\right) - \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\cos\left(t\sqrt{5\frac{kR^2}{I}}\right) \quad (2п).$$

Задатак 4

Мерени су периоди осциловања математичког клатна изван и унутар магнетног поља за различите вредности *x*. Поред услова мерења и ознаке одговарајућих перода, у наредном тексту су изначене одговарајуће вредности функције $f(x)$, прочитане са приложеног графика.

1. изван магнетног поља (T_0)
2. у магнетном пољу када је $x = 0.021\,\text{m}$ (T_1) $f(x) = 2.375$ (1п)
3. у магнетном пољу када је $x = 0.025\,\text{m}$ (T_2) $f(x) = 0.9$ (1п)
4. у магнетном пољу када је $x = 0.029\,\text{m}$ (T_3) $f(x) = 0.375$ (1п)

Сви периоди су одређивани мерењем времена трајања 10 осцилација (t_0, t_1, t_2, t_3).
Тачност хронометра је 0.01 s.

У табели су дате мерене и израчунате вредности времена, односно периода, и грешака њихових мерења.

t_{0i}[s]	t_0[s]	Δt_0[s]	T_0[s]	ΔT_0[s]
16.94 16.91 16.97	16.94	0.0 3	1.694	0.003

t_{1i}[s]	t_1[s]	Δt_1[s]	T_1[s]	ΔT_1[s]
8.00 8.10 8.06	8.053 8.05	0.053 0.06	0.8053 0.805	0.0053 0.006

t_{2i}[s]	t_2[s]	Δt_2[s]	T_2[s]	ΔT_2[s]
11.50 11.40 11.46	11.453	0.053 0.06	1.1453	0.0053 0.006

t_{3i}[s]	t_3[s]	Δt_3[s]	T_3[s]	ΔT_3[s]
14.28 14.00 14.00	14.09	0.19 0.2	1.409	0.019 0.02

(Ампл.: мања од 5mm 4 x 2п, од 5 do 10mm 4 x 1.8п, већа од 10mm 4 x 1.6п)

Очигледно је да је вредност константе *A* у једначини (2) једнака:

$$A = \frac{1}{T_0^2} = 0.3485\frac{1}{\mathrm{s}^2} \approx 0.348\frac{1}{\mathrm{s}^2},$$

а њена грешка:

$$\Delta A = 2\frac{\Delta T_0}{T_0} = 0.0036\frac{1}{\mathrm{s}^2} \approx 0.004\frac{1}{\mathrm{s}^2},$$

па је:

$$A = (0.348 \pm 0.004)\frac{1}{\mathrm{s}^2}.$$ (4+1 поен)

Пошто је мало тело на крају клатна нехомогено и неправилног облика, ефективна дужина математичког клатна одређена је из измереног периода његових осцилација изван магнетног поља:

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 0.713\,\mathrm{m}.$$ (3п, нула за мерење метарском траком)

Из једначине (2) се добија вредност константе C, која за три вредности x износи:

$$C_1 = \frac{mgl}{f_1(x)}\left(\frac{1}{T_1^2} - A\right) = \frac{0.0008\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0.713\,\mathrm{m}}{2.375}\left(\frac{1}{0.8053^2\,\mathrm{s}^2} - 0.3485\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right) \approx 2.417\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^4}$$

$$C_2 \approx 2.310\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^4} \qquad C_3 \approx 2.314\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^4}$$ (3 x 2 поена)

Тражена константа износи:

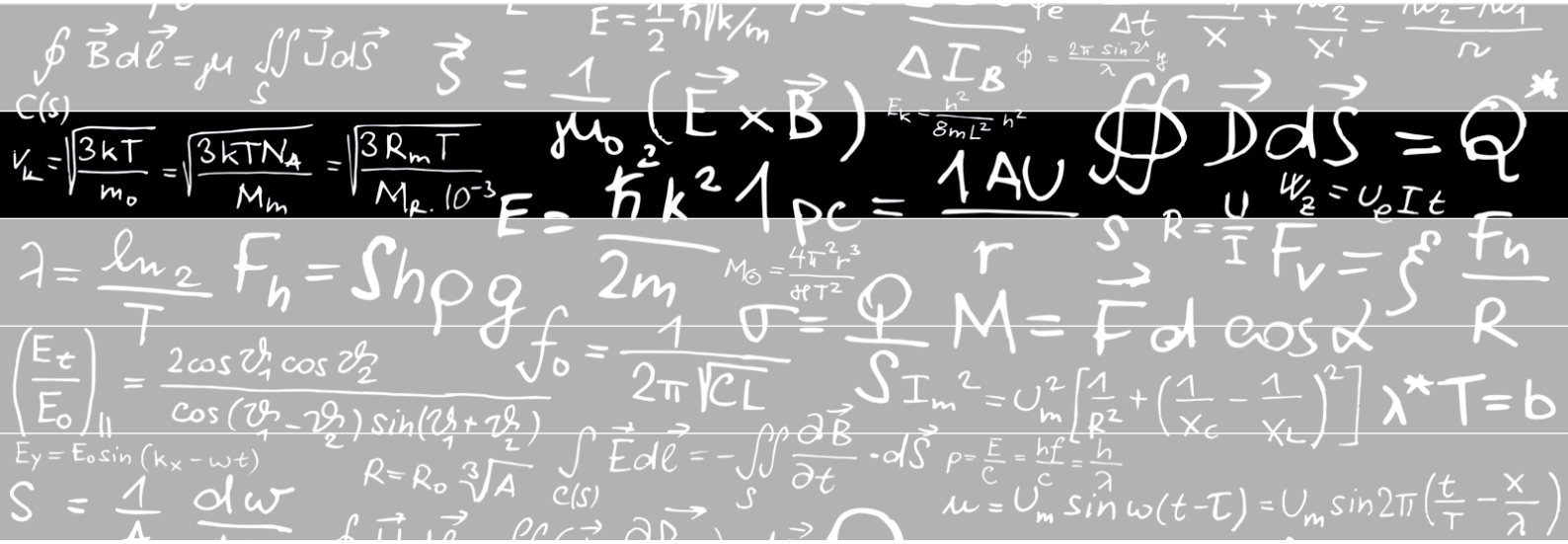
$$C \approx (2.35 \pm 0.07)\cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^4}.$$ (3+2 поена)

Коначни резултати избора олимпијске екипе Србије из физике за 2007. годину

Бр.	Ученик	Школа	Место	Наставник	Завршно Бод.	**Ук.**
1	**Радичевић Ђорђе**	**Г. "Светозар Марковић"**	**Ниш**	**Бранко Јовановић**	**95.2**	**100,0**
2	**Павловић Владан**	**Гимназија "9. мај"**	**Ниш**	**Горан Ђорђевић**	**69.6**	**76,5**
3	**Јанковић Страхиња**	**Гимназија**	**Крушевац**	**Драгана Милићевић**	**78.5**	**67,7**
4	**Милошевић Милана**	**Математичка Гимназија**	**Београд**	**Наташа Каделбург**	**76.8**	**50,6**
5	**Оташевић Никола**	**Математичка Гимназија**	**Београд**	**Бранислав Цветковић**	**78.2**	**47,5**
6	Стојковић Ненад	Гимназија "Вељко Петровић"	Сомбор	Урош Стојковић	65.6	**33,9**
7	Милошевић Бојана	Математичка Гимназија	Београд	Наташа Каделбург	34.8	**29,1**

На међународну олимпијаду су се пласирали првих пет ученика, а шести и седми су резерве.

2. Српска физичка олимпијада, Београд 2008.



Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије

2. Српска физичка олимпијада

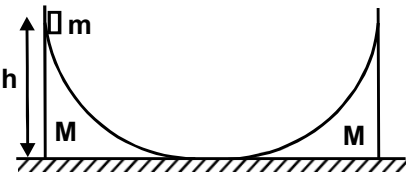
Физички факултет, Београд, 2008.

Теоријски задаци

Општа група - средње школе

1. Једна плоча ненаелектрисаног кондензатора, капацитета *C*, је уземљена. Друга плоча се танким дугим проводником споји са лоптом полупречника *r*, која је наелектрисана наелектрисањем q_0, и веома удаљена од свих предмета. Одредити наелектрисање које остаје на лопти после овог спајања. (20 поена)

2. На глатком хоризонталном столу мирују два идентична клина сваки масе M. У неком тренутку мала плочица масе m ($m < M$) се пусти са висине h да клизи низ леви клин (слика 1). Сматрати да се све силе трења могу занемарити. Одредити:



а) Максималну висину, у односу на подлогу, до које ће се плочица попети на десном клину
б) Минималну масу M коју мора имати сваки клин да би плочица поново дошла у контакт са левим клином (20 поена)

3. Један мол идеалног једноатомског гаса рашири се од почетне запремине $V_1 = 20$ l до коначне запремине $V_{10} = 200$ l. Истовремено се у посуди где се налази тај гас притисак мења на начин дат у табели:

V[l]	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
p[kPa]	100,00	35,40	19,20	12,58	9,00	7,80	6,95	6,30	5,75	5,30

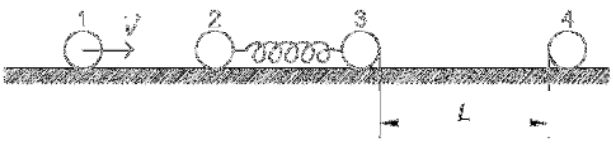
а) Процените бројну вредност количине топлоте коју гас размени са околином приликом ширења од $V_2 = 40$ l до $V_4 = 80$ l. Да ли гас у овом интервалу прима или предаје топлоту?

б) Процените бројну вредност количине топлоте коју гас размени са околином приликом ширења од $V_7 = 140$ l до $V_9 = 180$ l. Да ли се гас загрева или хлади у овом интервалу?

в) Процените бројне вредности специфичних моларних топлотних капацитета процеса под а) и б). Универзална гасна константа је $R = 8{,}3\ \mathrm{J/(mol\,K)}$.

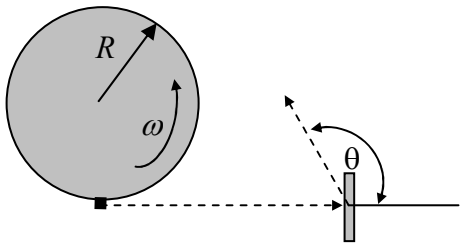
(20 поена)

4. Четири идентичне мале куглице (1-4) леже на једном правцу на хоризонталном столу по коме могу да се крећу без



трења, као на слици. Две средње куглице (2 и 3) су повезане опругом коефицијента еластичности k. Растојање куглица 3 и 4 износи L . Куглица 1 удара брзином v у куглицу број 2. Све сударе сматрати раткотрајним, еластичним и чеоним.
а) Одредити брзину центра масе система куглица спојених опругом (2 и 3).
б) За које растојање између куглица 3 и 4 ће крајња брзина куглице 4 бити једнака брзини v. (20 поена)

5. На обод диска полупречника R = 30 cm, који се обрће угаоном брзином ω=10^4 rad/s, је причвршћен радиоактивни извор ^{198}Au. Језгра ^{198}Au бета минус распадом прелазе у побуђена језгра ^{198}Hg која се у основно стање враћају γ распадом. γ фотони, настали на овај начин, се расејавају на слабо везаним електронима и детектују у правцу који са хоризонталом заклапа угао θ = 120^0 – види слику. Минимална вредност колич-ника $k = \frac{\Delta E_\gamma}{E'_\gamma}$, где је ΔE_γ разлика енергија упадних и расејаних γ фотона а E'_γ енергија расејаних γ фотона, износи k = 1,206. Одредити енергију E_0 побуде језгара ^{198}Hg и енергију E_u узмака овог језгра при емисији γ фотона; добијене вредности изразити у keV. Енергије мировања електрона и атомске јединице масе су 0,511 MeV и 931,4 MeV, респективно, а брзина светлости $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s . (20 поена)



Задатке припремили: **Зоран Мијић и Александар Срећковић (2)**
Маја Рабасовић и Драган Маркушев (3)
Александар Крмпот и Ђорђе Спасојевић (5)
Андријана Жекић и Мићо Митровић (1,4)

Председник Комисије **Мићо Митровић**

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије

3. Физичка олимпијада Србије
Физички факултет, Београд, 2008.

Теоријски задаци

Општа група - средње школе

Решења задатака

1. Потенцијал уземљене плоче је нула **(3)**, а потенцијал друге плоче кондензатора је једнак потенцијалу кугле **(3)**. Пошто је кугла далеко од околине, тада је

$$\frac{q_0 - q}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \ \textbf{(6)}, \qquad \text{па је} \qquad q = \frac{q_0}{1 + C/4\pi\varepsilon_0} \ \textbf{(8)}.$$

2 а) Сва разматрања нека се односе на инерцијални систем везан за подлогу са x осом у правцу подлоге усмереном од левог ка десном клину. Посматрајмо систем леви клин и плочицу у почетном тренутку (систем мирује и плочица се налази на висини h) и крајњем тренутку (тренутак када се плочица у подножју левог клина одвајања од њега). Ако са v обележимо брзину плочице у тренутку одвајања од левог клина, а са V_L брзину левог клина у истом тренутку онда из закона одржања импулса за систем у два поменута тренутка времена следи $0 = mv - MV_L$ односно $V_L = \frac{m}{M}v$ **(2п)**. Из закона одржања енергије у два поменута тренутка времена важи $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV_L^2$ **(2п)** одакле се налази брзина плочице у тренутку одвајања од левог клина тј. $v^2 = \frac{2Mgh}{m+M}$ **(2п).**

Ову брзину плочица има у тренутку додира са десним клином (који мирује) тако да из закона одржања импулса у том тренутку и тренутку када плочица мирује у односу на десни клин (тада се налази на максималној висини H) важи $mv = (m+M)V$ **(2п)** где је V заједничка брзина плочице и десног клина. Из закона одржања енергије за исте тренутке важи $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgH$ **(2п)**. Комбинацијом претходних једначина за тражену висину се налази $H = \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 h$ **(2п)**.

б) Плочица, након што достигне максималну висину на десном клину, из мировања почне да клизи према подножју клина. Да би плочица поново дошла у контакт са левим клином брзина коју има у тренутку када се у подножју десног клина одваја од њега v_f (усмерена ка левом клину) мора бити већа од брзине левог клина V_L тј. $v_f > V_L$. Из одржања импулса (за тренутак непосредно пре судара плочице и десног клина и тренутак одвајања плочице од десног клина) следи $mv = MV_d - mv_f$ **(2п)** где је V_d брзина десног клина, а такође важи и $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV_d^2 + \frac{1}{2}mv_f^2$ **(2п)**. Из претходног се налази

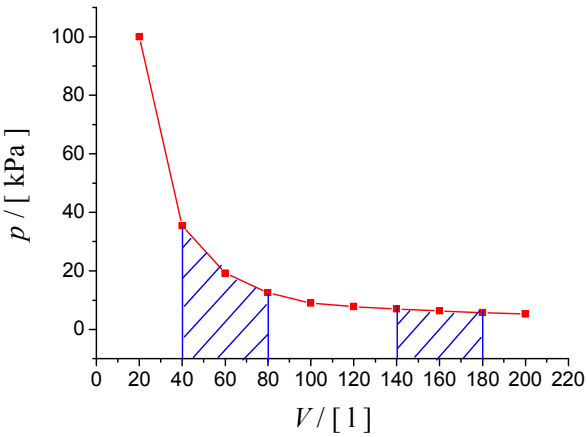
једначина $(m+M)v_f^2+2mvv_f-(M-m)v^2=0$ чија су решења $v_f=\frac{-mv\pm Mv}{M+m}$. Само решење $v_f=\frac{M-m}{M+m}v$ **(2п)** је физички прихватљиво јер даје позитиван интензитет и прави смер брзине v_f. Пошто мора да важи $v_f>V_L$ тј. $\frac{M-m}{M+m}v>\frac{m}{M}v$ следи да мора бити испуњен услов $M^2-2mM-m^2>0$. Из претходног се налази да је $M>\frac{2m\pm\sqrt{8m^2}}{2}$ па како M мора бити позитивно коначно се добија тражена минимална маса клина $M>m(1+\sqrt{2})$ **(2п)**.

3. За тражене процене корисно је нацртати график $p=f(V)$ на основу датих података из табеле. Рад гаса при ширењу на оба интервала проценићемо графички. Пошто не знамо аналитички облик функције $p=f(V)$ за овај процес ширења, најједноставнија апроксимација се састоји у спајању тачака на интервалу правама, и затим израчунавању површина на задатим интервалима као збиру површина правоуглих троуглова и правоугаоника. На делу ширења од 40 l до 80 l укупан рад је једнак

$$A_{40-80}=(546+317{,}8)\,\mathrm{J}\approx 864\,\mathrm{J}.$$

Укупан рад утрошен на ширење гаса на интервалу од 140 l до 180 l једнак је

$$A_{140-180}=(6{,}5+126+5{,}5+115)\,\mathrm{J}\approx 253\,\mathrm{J}.$$



На основу табеле лако је израчунати температуре гаса у датим тачкама процеса. Користећи $pV=RT$, добија се $T_2=pV/R=35{,}4\,\mathrm{kPa}\cdot 40\,\mathrm{l}/8{,}3(\mathrm{J/molK})\approx 171\,\mathrm{K}$, а на исти начин $T_4\approx 120\,\mathrm{K}$, $T_7\approx 117\,\mathrm{K}$ и $T_9\approx 125\,\mathrm{K}$. Сада са овим резултатима можемо израчунати промену унутрашње енергије на овим интервалима, и то:

$$\Delta U_{40-80}=\nu\frac{3}{2}R\cdot\Delta T_{42}=\nu\frac{3}{2}R\cdot(T_4-T_2)=1\,\mathrm{mol}\cdot\frac{3}{2}\cdot 8{,}3\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\cdot(120-171)\,\mathrm{K}\approx -635\,\mathrm{J},$$

и

$$\Delta U_{140-180}=\nu\frac{3}{2}R\cdot\Delta T_{97}=\nu\frac{3}{2}R\cdot(T_9-T_7)=1\,\mathrm{mol}\cdot\frac{3}{2}\cdot 8{,}3\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\cdot(125-117)\,\mathrm{K}\approx 100\,\mathrm{J}.$$

а) Знајући вредности рада и промене унутрашње енергије, можемо добити вредност количине топлоте која се размени током процеса ширења гаса као:

$$\boxed{Q_{40-80}=A_{40-80}+\Delta U_{40-80}\approx 864\,\mathrm{J}-635\,\mathrm{J}\approx 230\,\mathrm{J}.}\ \textbf{(4 п)}$$

Видимо да се у овом интервалу количина топлоте ***прима*** **(2 п)** док се температура смањује, тј. ***гас се хлади*** од 171 K на 120 K.

б) У другом интервалу гас такође ***прима*** топлоту

$$\boxed{Q_{140-180} = A_{140-180} + \Delta U_{140-180} \approx 253\,\mathrm{J} + 100\,\mathrm{J} \approx 353\,\mathrm{J}}\ \textbf{(4 п)}$$

али се у овом интервалу и ***загрева*** **(2 п)**, од 117 K до 125 K.

в) У првом делу је специфични моларни топлотни капацитет

$$\boxed{C_{40-80} = \frac{Q_{40-80}}{\nu \Delta T_{42}} = \frac{230\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{mol}\cdot(-51\,\mathrm{K})} \approx -4{,}5\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}},}\ \textbf{(4 п)}$$

а у другом

$$\boxed{C_{140-180} = \frac{Q_{140-180}}{\nu \Delta T_{97}} = \frac{353\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{mol}\cdot 8\,\mathrm{K}} \approx 45\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}.}\ \textbf{(4 п)}$$

4. Утицај опруге на први судар је занемарљив пошто је судар краткотрајан, па се куглица 2 у току њега не помери, тј. не деформише опругу **(1)**. Због тога куглица 2 почиње кретање брзином v **(2)**.
а) центар масе система куглица на опрузи се креће брзином $v/2$ **(2)**.
б) Лоптице осцилују тако да средишња тачка између њих мирује у систему центра масе. У том систему свака лоптица осцилује на опрузи двоструко краћој од стварне дужине опруге, чији је коефицијент еластичности $2k$, са фреквенцијом $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ **(3)**.
По закону одржања енергије, да куглица 4 имала брзину v, све остале куглице морају да стоје **(2)**. Да би је имала после судара са куглицом 3, мора куглица 3 пре судара имати исту ту брзину, односно, куглица 2 мора тада да стоји (супротна ситуација од оне непосредно после удара куглице 1 у куглицу 2 **(2)**.
Опруга тада мора бити недеформисана, па пређени пут центра масе је једнак L **(1)**.
Куглица 4 је до тада могла да начини цео број плус пола целе осцилације **(1)**, односно време кретања центра масе и период осциловања куглице су повезани односом

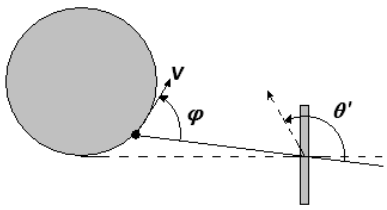
$\frac{L}{v/2} = T(n+\frac{1}{2})$ **(3),** без n **(2)**, па је $L = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi v\sqrt{\frac{m}{2k}}$ **(3),** без n **(2)**.

5. За емисију γ фотона из језгра ^{198}Hg вреди $E_0 = E_u + E_{\gamma 0}$ **(1п)**, где је $E_u = \frac{p^2}{2M}$ **(1п)** енергија узмака језгра а $E_{\gamma 0} = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$ **(1п)** енергија емитованог γ фотона у систему референце везаном за диск. Из закона одржања импулса следи $p = p_{\gamma 0}$, где је p импулс узмакнутог језгра а $p_{\gamma 0} = \frac{E_{\gamma 0}}{c}$ **(1п)** импулс γ фотона; ови импусли имају исти правац а супротан смер. Следи $E_u = \frac{E_{\gamma 0}^2}{2Mc^2}$ **(1п)** и $E_0 = E_{\gamma 0}\left(1+\frac{E_{\gamma 0}}{2Mc^2}\right)$ **(1п)**. Због Доплеровог ефекта $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_{\parallel}}{c}$ **(1п)**, енергија емитованог γ фотона у лабораторијском систему

референце је $E_\gamma = E_{\gamma 0}\left(1+\frac{v_\parallel}{c}\right) = E_{\gamma 0}\left(1+\frac{\omega R}{c}\cos\varphi\right)$ **(1п)**, где је φ угао између правца кретања емитованог γ фотона и хоризонталног правца и где је $v_\parallel = \frac{\omega R}{c}\cos\varphi$ **(1п)** пројекција брзине извора на правац кретања емитованог γ фотона – види слику. На основу датих бројних вредности је $\frac{\omega R}{c} \approx 10^{-5}$ **(1п)**, тако да можемо сматрати да је $E_\gamma = E_{\gamma 0}$.

Расејање γ фотона на слабо везаним електронима је Комптоново расејање па важи $\lambda' - \lambda_0 = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta'}{2}$ **(1п)** где је λ' таласна дужина расејаног γ фотона, $\lambda_c = h/(m_e c)$ Комптонова таласна дужина, док је θ' угао под којим се фотон расејава – види слику. Стога је

$$\frac{\Delta E_\gamma}{E'_\gamma} = \frac{\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'}}{\frac{hc}{\lambda'}} = \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{E_{\gamma 0}}{hc}\cdot 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta'}{2} = \frac{E_{\gamma 0}}{m_e c^2}\cdot 2\mathrm{s}$$



(3п),

одакле се види да k има минималну вредност када је угао θ' минималан. Са слике се види да је $\theta'_{\min} = \theta$, тј. $k = \frac{E_{\gamma 0}}{m_e c^2}\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ **(1п)**. Одавде је $E_{\gamma 0} = m_e c^2 \cdot \frac{k}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ **(1п)**, тако да је енергија побуде

$E_0 = m_e c^2 \cdot \frac{k}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(1+\frac{m_e c^2 k}{4Mc^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) \approx m_e c^2 \cdot \frac{k}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ **(1п)**, док је енергија узмака језгра

$E_u = \frac{\left(m_e c^2\right)^2 k^2}{8Mc^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ **(1п)**. Заменом бројних вредности налазимо $E_0 = 411\ keV$ **(1п)** и

$E_u = 4{,}6\cdot 10^{-4}\ keV = 0{,}46\ eV$. **(1п)**

2. Српска физичка олимпијада
Експериментални задатак
Проучавање особина стојећих таласа у акустици; мерење брзине звука
Општа група - средње школе

Експериментални задаци

Теоријски увод

Под појмом *звук* се подразумева механички талас који се простире кроз ваздух и који можемо да региструјемо чулом слуха. Механички таласи у ваздуху су увек лонгитудинални. Најједноставнији формула која описује овакве таласе има облик $X = X_0 \cdot \sin(k \cdot x - 2\pi\nu \cdot t + \varphi)$. Ова формула описује раван, прогресиван монохроматски талас који се простире у правцу *x*-осе. Оваквом једначином могу да се описују различите величине код звука, односно *X* може да представља различите физичке величине, нпр. брзину, убрзање или елонгацију осциловања честица средине, промену температуре, густине или притиска ваздуха, итд. Јачина звука дефинисана је амплитудом осциловања притиска око равнотежне термодинамичке вредности, односно око атмосферског притиска. Због овога звук у најједноставнијем случају обично описујемо формулом $p = p_0 \cdot \sin(k \cdot x - 2\pi\nu \cdot t + \varphi)$ где је p_0 максимално одступање од атмосферског притиска.

Брзина звука у ваздуху зависи од атмосферских услова. Брзина звука у термодинамички идеалним гасовима је дата формулом

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}\,.$$

Овде је γ експонент адијабате, R универзална гасна константа, T апсолутна температура, M моларна маса. Користећи ову формулу могуће је приближно одредити брзину звука у ваздуху ($\gamma_{VAZ} = 1{,}4$, $R = 8{,}315\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$, $M_{VAZ} = 29{,}0\,\mathrm{g/mol}$).

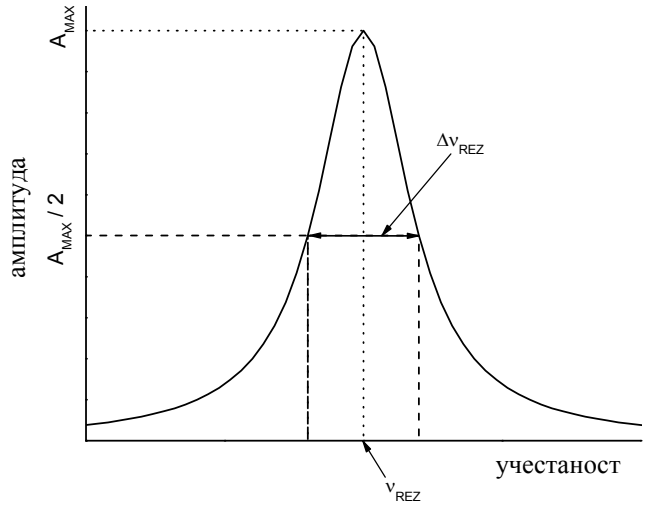
Као резонатор за звук може да послужи обична цев. Најважније вредности које карактеришу сваки резонатор су резонантне учестаности и фактор доброте. Фактор доброте описује квалитет резонатора и може да се дефинише на више начина. Обично се дефинише као

$$Q = 2\pi \frac{E_{OSC}}{E_G}$$

где је E_{OSC} укупна енергија осциловања, а E_G енергија осциловања која се губи по једном периоду. Ове величине није лако мерити па се често користе алтернативне формуле за одређивање ове величине. Из наведене формуле може да се изведе и следећа формула из које се најчешће практично одређује фактор доброте:

$$Q = \frac{\nu_{REZ}}{\Delta\nu_{REZ}}.$$

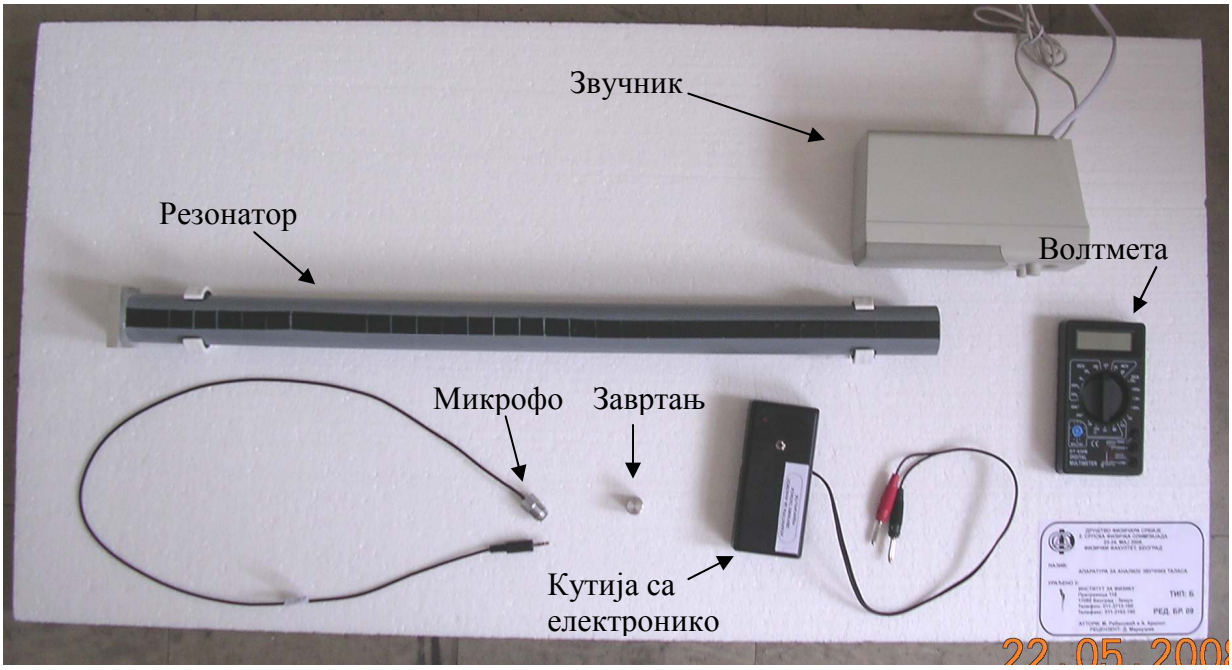
Овде је ν_{REZ} резонантна учестаност, а $\Delta\nu_{REZ}$ ширина резонантне криве, односно ширина на половини висине (видети слику 1).



Слика 1.

Опис апаратуре (слика2)

Апаратура се састоји од рачунара, резонатора и детекционог система. Рачунар служи само као извор звука одређене учестаности. Звучници успешно генеришу звук изнад 250Hz. Резонатор се састоји од пластичне цеви затворене на једном крају. Цев, као и плочица која затвара један крај су избушени тако да омогућавају мерење јачине звука унутар цеви. Ако се не врши мерење на одређеном отвору он мора да буде затворен да не ремети особине резонатора. За затварање отвора на плочици на крају цеви служи завртањ, а отвори дуж цеви су затворени изолир траком. Детекциони систем се састоји од микрофона са пратећом електроником и волтметра. Волтметром се мери једносмерни напон који је пропорционалан јачини звука. Осетљивост детекционог система је 70mV/Pa.



Слика 2.

Задатак

1. На основу формуле дате раније одредити приближну брзину звука у ваздуху на собној температури.
2. Израчунати приближне вредности резонантних учестаности датог резонатора за прве три резонанце (хармоника) са учестаностима преко 250Hz. Дужине цеви су различите у зависности од типа апаратуре (тип А l = 60 cm, тип Б l = 65 cm, тип В l = 70 cm). Дужина цеви је мерена са тачношћу 1mm.
3. На основу ових резултата експериментално одредити резонантне учестаности за претходне три резонанце и проценити грешке.
4. На основу учестаности сваке од ових резонанци одредити брзину звука у ваздуху.
5. Графички представити ове три резонантне криве.
6. Одредити њихове ширине.
7. Одредити факторе доброте резонатора за ове три резонанце.
8. За резонанцу са најнижом учестаношћу, од претходно измерених, одредити расподелу јачине звука дуж резонатора и графички је представити. **Растојање мерити од отвореног краја цеви!** Почевши од отвореног краја цеви, први отвор се налази на 0,5 cm, други на 1,5 cm од првог и сваки следећи на 2 cm. Пречник сваког отвора је 0,1 cm.
9. Користећи резултате последњег мерења одредити брзину звука.
10. За ову резонанцу наћи амплитуду промене притиска у цеви и упоредити је са атмосферским притиском ($p_{atm} = 1 \cdot 10^5$ Pa)

При свим мерењима вредност напона на волтметру не мора да буде стабилна већ може да осцилује. Због тога грешку мерења проценити на основу амплитуде тог осциловања.

Упутство

Одређивање резонантних учестаности. При одређивању резонантних учестаности и облика резонантне криве микрофон треба да се налази заврнут у плочици која затвара цев на једном крају (слика 3). При завртању микрофона у плочицу не притезати завртањ јако да се микрофон не би оштетио. Сви остали отвори дуж цеви морају да буду залепљени

Слика 3.

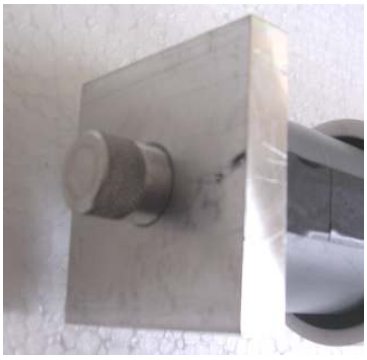
Пошто се при мерењу јачине звука добија једносмерни напон пропорционалан јачини звука, при мерењу преклопник на волтметру довести у опсег DCV. Укључити прекидач на кутији са електроником, што се види по томе ако сија црвена лампица. Конектор који се налази на супротном крају кабла од микрофона прикључити у кутију са електроником. Изглед правилно повезаног детекционог система је приказан на слици 4.

Слика 4.

Максималан напон који може да се добије је око 7,5V али при мерењу не треба прелазити вредност од 5V. Због овога звучнике треба утишати да се не добије већа вредност ни при једном мерењу. То се може постићи на следећи начин: наћи тачно резонантну учестаност и подесити јачину звучника да се добије сигнал око 5V. Поступак поновити за сваку резонанцу, пре мерења резонантне криве. Избегавати контролу јачине звука окретањем потенциометра на звучницима. Ако је могуће користити контролу јачине преко програма који генерише звук као што је објашњено у опису програма за генерисање звука. Пре овог мерења проверити да ли су сви отвори дуж цеви добро затворени изолир траком.

Цео детекциони систем има коначно време одзива тако да када се промени учестаност треба сачекати пар секунди да се сигнал стабилизује, односно да дође на своју праву вредност.

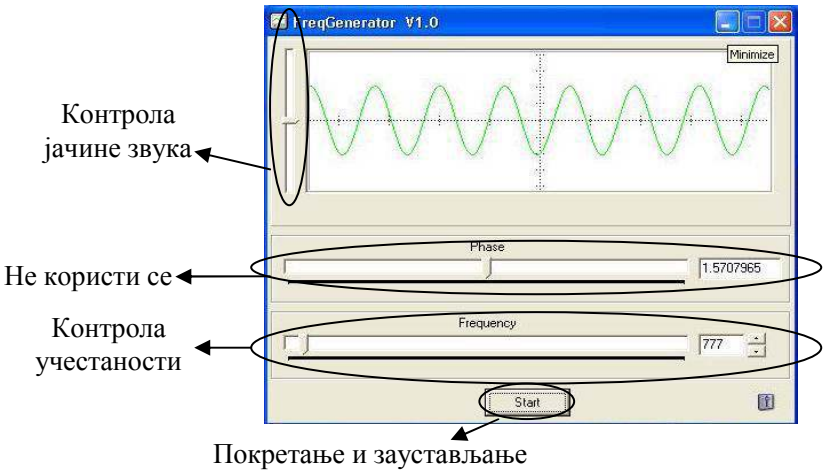
Одређивање расподеле јачине звука дуж цеви. Пре одређивања расподеле јачине звука дуж цеви одврнути микрофон из плочице која затвара један крај цеви и затворити отвор завртњем (слика 5). Завртањ завити до краја! При одређивању расподеле јачине звука дуж резонатора микрофон треба чврсто (али не сувише јако) притиснути на одређени отвор на цеви, тако да у потпуности заптива отвор (да „се не клацка”). Мокрофон треба наслонити преко отвора тако да отвор дође на средину микрофона. Померати микрофон благо лево десно, али тако да отвор остаје увек испод микрофона, све док се не добије максимум сигнала При мерењу се скида трака само са отвора на цеви на којем се врши мерење. Када се прелази на следећи отвор претходни мора опет да се залепи.



Слика 5.

И овде због коначног времена одзива система и зато што се повлачењем микрофона по цеви ствара звук (бука), након сваког, и најмањег, померања микрофона треба сачекати пар секунди да се сигнал стабилизује

Генератор учестаности. На слици 6 је дат прозор који се појави када се покрене програм који генерише звук одређене учестаности (*FreqGenerator*) и објашњење како се користи. Учестаност се подешава тако што се одређени број уписује у поље на десној страни или се мишем помера клизач или коришћењем стрелица поред бројне вредности учестаности. Јачина звука се подешава померањем показивача мишем. Програм се покреће и зауставља кликтањем миша на дугме Start/Stop. Учестаност се може мењати и за време рада програма, односно не мора се зауставити генерисање звука на дугме Stop да би се променила учестаност.



Аутори:
М. Рабасовић и А. Крмпот
Институт за физику, Београд

Рецензент:
Д. Маркушев
Институт за физику, Београд

Председник комисије:
М. Митровић
Физички факултет, Београд

Слика 6.

Решење експерименталног задатка

За експериментални задатак су коришћене три цеви различите дужине као резонатори (60cm, 65cm и 70cm). Овде је дат пример решење за цев дужине 70cm. За две краће цеви се добијају нешто веће резонантне учестаност и незнатно мањи фактори доброте.

1. Да би се одредила брзина звука у ваздуху коришћењем дате формуле потребно је само знати температуру. За процену је довољно узети температуру од 20^0C, односно 293K. За процену може да се узме и 300K јер се не добија велико одступање. Сада се добија

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = \sqrt{1{,}4 \frac{8{,}315\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293\text{K}}{0{,}029\text{kg/mol}}} \approx 342.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\Delta c = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}\sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = \frac{1}{2}\frac{0.1}{293}\sqrt{1{,}4 \frac{8{,}315\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 293\text{K}}{0{,}029\text{kg/mol}}} \approx 0.59 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = (342.6 \pm 0.6)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

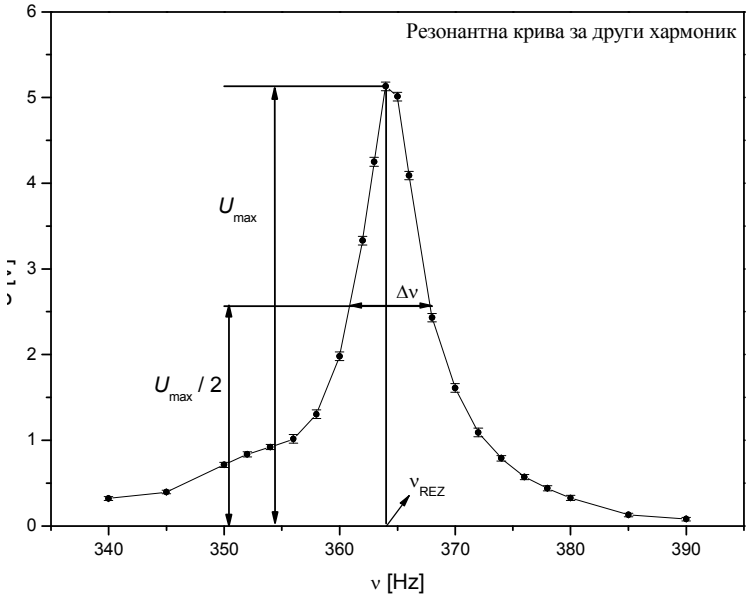
2. Пошто се ради о цеви затвореном на једном крају основни хармоник одговара случају када је $\lambda/4 = L$, где је L дужина цеви. Мерењем се добија да је дужина цеви L = (70,0±0,1)cm. Одавде се добија да је λ = 2,8m. Из таласне дужине и брзине звука се добија процена учестаности основног хармоника, $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{343\text{m/s}}{2{,}8\text{m}} = 122{,}5\text{Hz}$. Ово је сувише ниска учестаност да би је генерисао звучник на апаратури. Други хармоник одговара услову $3\lambda/4 = L$. Одавде се добија λ = 0,933m, односно $\boldsymbol{\nu_2}$ **= 368Hz**. Трећи и четврти хармоник одговарају условима $5\lambda/4 = L$, односно $7\lambda/4 = L$. Одавде се добија $\boldsymbol{\nu_3}$ **= 612Hz**, односно $\boldsymbol{\nu_4}$ **= 858Hz**.

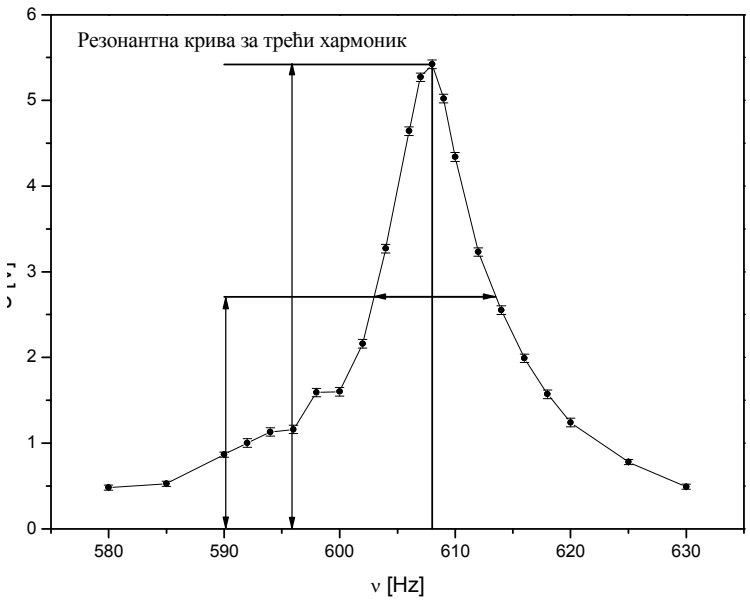
3. Сада може да се приступи експерименталном одређивању резонантних учестаности за ове резонанце. Најпре се генерише звук учестаност ν_2 = 368Hz, а затим нпр. фреквенција 369Hz и 367Hz (Ако има потребе звучник са утиша да се добије сигнал не већи од 5V). Пошто је примећено да сигнал опада са порастом фреквенције наставља се са даљим смањивањем фреквенције све док се не добије максималан сигнал. Учестаност на којој се добије максималан сигнал је резонантна учестаност. У нашем случају за резонантну учестаност добијена је вредност од 364Hz. Грешка одређивања ове учестаности је барем 1Hz. Ако је максимум „туп" или неправилан још је већа. У нашем случају грешка је процењена на 1Hz, па можемо да пишемо $\boldsymbol{\nu_2}$ **= (364±1)Hz**. Исти поступак се понови и за друге две резонанце. У нашем случају су добијене вредности $\boldsymbol{\nu_3}$ **= (608±1)Hz** и $\boldsymbol{\nu_4}$ **= (852±1)Hz. За исту цев, у зависности од атмосферских услова и окружење, могу да се добију вредности које одступај неколико херца.**

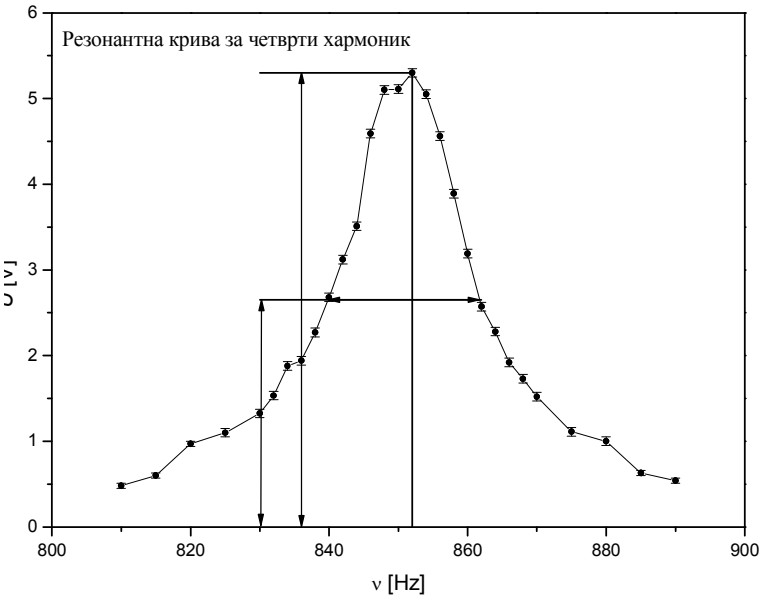
4. Брзина звука у ваздуху сада може да се израчуна као $c = \lambda\nu$. Тако добијамо $c_2 = \lambda_2\nu_2 = 0{,}933\text{m} \cdot 364\text{Hz} = 339{,}7\text{m/s}$. Релативна грешка ове вредности може да се одреди као $\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\Delta\nu}{\nu}$, па се добија да је Δc = 1,4m/s ~2m/s. Сада можемо да пишемо $\mathbf{c_2}$ **= (340±2)m/s**. На исти начин добијамо $\mathbf{c_3}$ **= (340±1)m/s** и $\mathbf{c_4}$ **= (341±1)m/s.**

Добијене експерименталне вредности се слажу у оквиру експерименталне грешке. Разлика у односу на процењену вредност потиче од непознавања тачне температуре и чињенице да се ваздух само апроксимативно може описати једначином стања идеалног гаса. Још једна чињеница доводи до неслагања резултата, **трбух** на отвореном крају цеви се не формира тачно на крају већ је мало померен ван цеви.

5. Да би се одредио облик резонантних кривих најпре се генерише звук резонантне учестаности а јачина звучника се подеси да се добије сигнал око 5V. Затим се мере сигнали за веће и мање учестаности док сигнал не падне знатно испод половине максималног сигнала. На сликама су дате резонантне криве за други, трећи и четврти хармоник. Грешке су процењене као што је дато у тексту задатка.



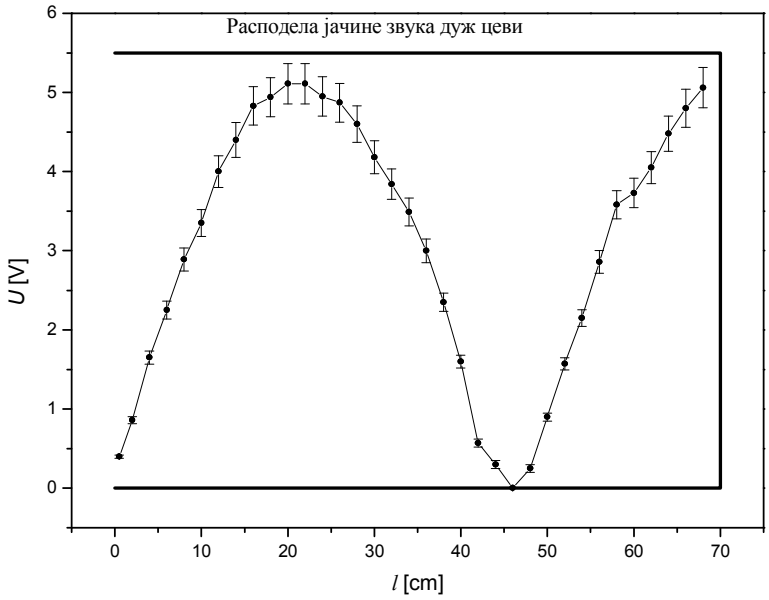




6. Ширине се одређују графички. Најпре се израчуна половина максималног сигнала и нацрта се хоризонтална права која одговара овој вредности. Ширина криве се одређује мерењем растојања између пресека резонантне криве и ове праве. Пошто се вредности између мерених тачака интерполирају, фреквенција не може да се одреди боље од 1Hz и резонантна крива има неправилан облик, грешка одређивања ове вредности процењена је као не боља од грешке одређивања фреквенције, односно 1 Hz. Тако је добијено $\Delta\nu_2 = (7 \pm 1)\text{Hz}$, $\Delta\nu_3 = (10 \pm 1)\text{Hz}$ и $\Delta\nu_4 = (22 \pm 1)\text{Hz}$.

7. На основу одређених ширина и резонантних учестаности фактори доброте за одређену резонанцу се одређују као $Q = \frac{\nu_{REZ}}{\Delta\nu_{REZ}}$. При томе се релативна грешка одређује као $\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta(\nu_{REZ})}{\nu_{REZ}} + \frac{\Delta(\Delta\nu_{REZ})}{\Delta\nu_{REZ}} \approx \frac{\Delta(\Delta\nu_{REZ})}{\Delta\nu_{REZ}}$. Тако се добија: **$Q_2$ = 52±8**, **Q_3 = 61±6**, **Q_4 = 39±2**.

8. Расподела јачине звука дуж цеви се мери тако што се микрофон одврне из плочице која затвара цев а у њу се заврне цеп, а микрофоном се мери јачина звука на отворима са горње стране цеви. Трака се скида само са отвора на коме се врши мерење а после извршеног мерења се враћа. Пример добијене расподеле је дат на слици. На слици је дата и цев да би се јасније видела расподела.



9.

10. На основу резултата расподеле интензитета звука дуж резонаторске цеви можемо одредити таласну дужину. Са претходног графика се види да је растојање између два максимума (или између два минимума) сигнала 48 cm што представља половину таласне дужине. Грешка мерења положаја сваког максимума или минимума се може проценити као као половина растојања између отвора. С обзиром да смо сигурни да је један максимум на затвореном крају цеви грешку одређивања његовог положаја можемо изузети. Тако долазимо до резултата

    $\lambda_2 = (96 \pm 2)\,\mathrm{cm}$

    Пошто знамо да је учестаност за овај хармоник $\boldsymbol{\nu_2 = (364\pm1)\mathrm{Hz}}$ можемо израчунати и брзину звука $c = \lambda_2 \nu_2 = 0{,}96\mathrm{m} \cdot 364\mathrm{Hz} = 332{,}16\mathrm{m/s}$. За грешку опет важи да је $\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\Delta\nu}{\nu}$ па се добија да је $\frac{\Delta c}{c} = 0{,}02358$. Односно c=(332±8) m/s.

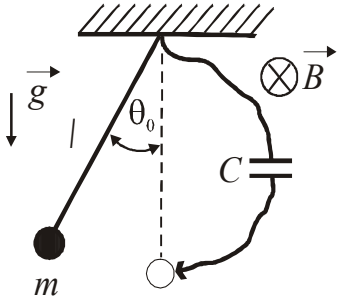
11. Највећа амплитуда притиска у цеви је тамо где је сигнал највећи. У нашем случају то је U=5,11V и то на 22 cm од отвореног краја цеви. Пошто је осетљивост начег детекционог система S=70 mV/Pa следи да је амплитуда притиска на том месту p_0 = U/S=73 Pa. Како звукпредстављају осцилације притиска у односу на атмосферски ово је врло мала промена, наиме $\frac{p_0}{p_{atm}} = 0{,}00073 = 0{,}073\%$.

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије

2. Физичка олимпијада Србије
Физички факултет, Београд, 2008.

Задаци
Општа група - средње школе – изборно такмичење

1. Математичко клатно, које се састоји од танке проводне нити дужине l занемарљиве масе и мале металне куглице масе m, може да осцилује у равни као на слици 1. Горњи крај нити је проводником преко кондензатора капацитета C, повезан са металним контактом који се налази фиксиран у ранотежном положају куглице тако да га куглица при осциловању само овлаш "окрзне" (сматрати да тај додир не утиче на даље кретање куглице). Цео систем се налази у хомогеном магнетном пољу индукције B усмереном као на слици. Сматрати да је време додира куглице и металног контакта веома мало, али да се при томе кондензатор потпуно напуни. У почетном тренутку куглица се налази отклоњена за мали угао θ_0 у односу на равнотежни положај и затим се пусти. Одредити максималан угао θ, у односу на равнотежни положај, за који ће се куглица отклонити на супротној страни. Занемарити индуктивност система. (25 п)



Слика 1

2. Сателит сферног облика се креће у горњим, врло разређеним слојевима атмосфере.

а) Услед трења са ваздухом, после много обилазака око Земље, његова укупна механичка енергија се смањи за 1 %. За колико процената се, у исто време, промени полупречник орбите сателита и брзина сателита, ако се зна да му је путања увек кружна? У оба случаја одговорити каква је то промена, повећање или смањење? Искористити једнакост $(1+x)^n = 1+nx$ за $x \ll 1$.

б) Колика је бројна вредност силе којом молекули ваздуха делују на сателит, и колико износи успорење које сателит добије услед судара са молекулима атмосфере, ако су густина ваздуха и брзина сателита на задатој висини респективно $\rho \approx 3\times10^{-9}\,\mathrm{kg/m^3}$ и $v \approx 8\,\mathrm{km/s}$? Маса сателита износи $1\times10^3\,\mathrm{kg}$ а његов полупречник је $r = 70\,\mathrm{cm}$. Брзина термалног кретања молекула је много мања од брзине сателита. Ваздух сматрати идеалним гасом. Дужина слободног пута молекула ваздуха је већа од димензија сателита. (25 п)

3. Стања атома са великим главним квантним бројем се називају Ридбергова стања. Када се атоми водоника побуде у Ридбергова стања моноенергетским млазом електрона тада интензитет светлости која се емитује приликом њихове релаксације пулсира са основном учестаношћу ν_0 = 242,63 MHz. Проценити до којег главног квантног броја су побуђени атоми водоника и колика је енергија електрона (у eV) у побудном снопу. Бројни подаци: Ридбергова константа $R = 1{,}097\cdot10^7\,\mathrm{m^{-1}}$, брзина светлости $c = 2{,}998\cdot10^8\,\mathrm{m/s}$, елементарно наелектрисање $e = 1{,}602\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$, Планкова константа $h = 6{,}626\cdot10^{-34}\,\mathrm{Js}$. (25 п)

4. Измерити запремину тела које сте добили. Проценити грешку мерења. За мерење користити нонијус и микрометарски завртањ, тако да грешка мерења буде најамња. За свако директно мерење написати којим је мерним инструментом извршено. (25 п)

Задатке припремили

мр Зоран Мијић, др Драган Маркушев, мр Александар Крмпот, др Андријана Жекић

Рецензенти

др Мићо Митровић, др Ђорђе Спасојевић, мр Зоран Мијић, др Драган Маркушев

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и спорта Републике Србије

2. Физичка олимпијада Србије
Физички факултет, Београд, 2008.

Задаци – решења
Општа група - средње школе – изборно такмичење

P1. Услед кретања проводне нити у матнетном пољу, на крајевима нити се индукује електромоторна сила

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\omega B l^2 \quad \textbf{(2 п)},$$

где је ω угаона брзина куглице. У тренутку додира куглице са металним контактом, затвори се електрично коло и кондензатор се напуни при чему је напон на кондензатору $U = \varepsilon$. При томе део енергије куглице се троши на енергију кондензатора, а део на топлотне губитке у проводницима. Та енергија коју куглица изгуби једнака је раду извора електромоторне силе тј. qU где је q укупно протекло наелектрисање. Како је

$$C = \frac{q}{U},$$

то је укупан рад једнак

$$A = CU^2 \quad \textbf{(3 п)}.$$

Из закона одржања енергије у почетном и крајњем тренутку (када се куглица налази са десне стране максимално отклоњена) налази се

$$mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\theta_0) - CU^2 \quad \textbf{(5 п)},$$

где су

$$E_p = mgl(1-\cos\theta_0) \text{ и } E'_p = mgl(1-\cos\theta)$$

потенцијалне енергије куглице у крајњим позицијама.

За куглицу непосредно пре додира са металним контактом важи

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1-\cos\theta_0) \quad \textbf{(5 п)},$$

одакле се налази брзина куглице v, односно угаона брзина

$$\omega = \frac{v}{l} \text{ тј. } \omega = \frac{1}{l}\sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)} \quad \textbf{(3 п)}.$$

Замењујући ω у претходне једначине добија се

$$mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\theta_0) - \frac{1}{2}Cl^3B^2g(1-\cos\theta_0)$$

односно

$$1-\cos\theta=(1-\cos\theta_0)(1-\frac{Cl^2B^2}{2m})\ \textbf{(3 п)}.$$

Како за мале углове важи $\sin\theta\approx\theta$ и узимајући у обзир идентитет

$$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

коначно се добија

$$\theta^2=\theta_0^2\left(1-\frac{Cl^2B^2}{2m}\right)\ \textbf{(4 п)}.$$

P2. а) Укупна механичка енергија сателита који се креће по кружној путањи полупречника r једнака је збиру кинетичке и потенцијалне енергије:

$$E_r=\frac{mv^2}{2}-\gamma\frac{Mm}{r}=-\frac{mgR^2}{2r},\ \textbf{(4 п)}$$

јер је $\gamma M=gR^2$ и $v^2=\frac{gR^2}{r}$, где је R полупречник, а M маса Земље.

Претпоставимо да се полупречник промени за Δr. Укупна механичка енергија на тој новој путањи једнака је:

$$E_{r+\Delta r}=-\frac{mgR^2}{2(r+\Delta r)}=E_r+\Delta E\ .\ \textbf{(3 п)}$$

Сада можемо да пишемо да је

$$-\frac{mgR^2}{2(r+\Delta r)}=-\frac{mgR^2}{2r\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)}=-\frac{mgR^2}{2r}\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^{-1}\approx-\frac{mgR^2}{2r}\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)=E_r\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right),\ \textbf{(1 п)}$$

искористивши $(1+x)^n=1+nx$ за $x<<1$ (у нашем случају је $n=-1$). Поређењем последње две једначине добијамо:

$$E_r+\Delta E=E_r\left(1+\frac{\Delta E}{E_r}\right)=E_r\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right),\ \textbf{(1 п)}$$

и закључујемо да је

$$\boxed{\frac{\Delta r}{r}=-\frac{\Delta E}{E_r}=-0{,}01.}\ \textbf{(1 п)}$$

Закључујемо да се полупречник орбите *умањио* за 1 %. **(1 п)**

С обзиром да је, са једне стране,

$$(v+\Delta v)^2=\frac{gR^2}{(r+\Delta r)}=\frac{gR^2}{r\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)}=\frac{gR^2}{r}\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^{-1}\approx\frac{gR^2}{r}\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right),\ \textbf{(1 п)}$$

а са друге

$$(v+\Delta v)^2=v^2\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^2\approx v^2\left(1+2\frac{\Delta v}{v}\right),\ \textbf{(1 п)}$$

видимо да је

$$\boxed{\frac{\Delta v}{v}=-\frac{\Delta r}{2r}=\frac{\Delta E}{2E}=0{,}005.}\ \textbf{(1 п)}$$

Брзина се *повећа* за 0,5 % услед трења са ваздухом. **(1 п)**

б) Пошто је, по услову задатка, брзина кретања сателита v много већа од брзине термалног кретања молекула можемо сматрати да сателит мирује а да у њега ударају молекули ваздуха брзином v и одбијају се истом брзином. При удару једног молекула сателиту се преда импулс

$$|\Delta p|=2m_m v=2\frac{M}{N_A}v\ .\ \textbf{(2 п)}$$

У току времена Δt у површину $S=r^2\pi$ ударе сви молекули који се налазе у цилиндру запремине $V=r^2\pi\cdot v\Delta t$. Према томе, укупна сила којом молекули делују на сателит једнака је, уз услов да је дужина слободног пута молекула већа од димензија сателита:

$$F=N\frac{|\Delta p|}{\Delta t}=2N\frac{M}{N_A}\cdot\frac{v}{\Delta t}\cdot\frac{V}{V}=2nV\frac{Mv}{N_A\Delta t}=2nr^2\pi\cdot v\Delta t\frac{\rho_0 V_m v}{N_A\Delta t}\cdot\frac{\rho}{\rho}=2r^2\pi\rho v^2,\ \textbf{(4 п)}$$

где је N број судара у току времена Δt а n је концентрација молекула на висини на којој се сателит налази. Заменом бројних вредности добија се да је

$$\boxed{F=2r^2\pi\rho v^2=2\cdot(0{,}7\ \mathrm{m})^2\cdot 3{,}14\cdot 3\times10^{-9}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\left(8\times10^3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2=0{,}59\ \mathrm{N}.}\ \textbf{(2 п)}$$

Дељењем горње једначине за силу са масом сателита добија се успорење од

$$\boxed{a = \frac{F}{m} = \frac{0{,}59\ \mathrm{N}}{1\times 10^3\,\mathrm{kg}} = 5{,}9\times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}\ \textbf{(2 п)}$$

Р3. При релаксацији атома водоника из стања са (већим) главним квантним бројем n у стање са (мањим) главним квантним бројем k емитује се фотон учестаности

$$\nu_{n,k} = cR\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Када се атоми водоника побуђују млазом електрона, тада електрони у побуђеним атомима прелазе у стања са великим главним квантним бројевима n. Ако су n и m два таква квантна броја ($n > m$) тада фотони емитовани при релаксацији у исто стање (одређено квантним бројем k) имају блиске учестаности те долази до избијања**(2п)**. Другим речима, допринос оваквих фотона емитованој светлости има интензитет који се периодично мења са фреквенцом избијања

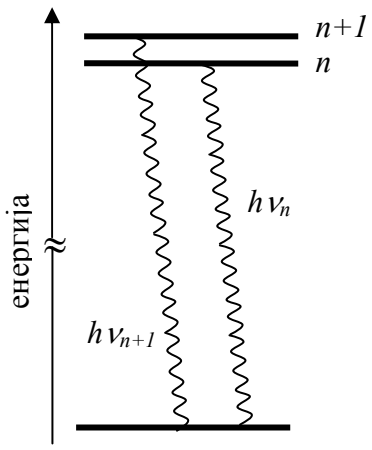
$$\nu = \nu_{n,k} - \nu_{m,k} = cR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)\ \textbf{(3п)}$$

која не зависи од квантног броја k. Основна учестаност ν_0 са којом пулсира интензитет светлости одговара стога минималној фреквенцији избијања која се јавља за $n = m + 1$ (види слику Р3). Тако налазимо

$$\nu_0 = cR\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = cR\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.\ \textbf{(5п)}$$

Пошто је n велико може се сматрати да је $n+1 \approx n$ и $2n+1 \approx 2n$, па је $\nu_0 = \frac{2cR}{n^3}$ **(5п)** где је n просечна вредност главног квантног броја атома водоника у Ридберговим стањима. Одавде је

$$n = \left(\frac{2cR}{\nu_0}\right)^{1/3} \approx 300.\ \textbf{(5п)}$$



Слика Р3

Енергија електрона у побудном снопу се може проценити из Балмерове формуле

$$E = hcR\left(1 - \frac{1}{300^2}\right) \approx hcR \approx 13{,}6\ \mathrm{eV},\ \textbf{(5п)}$$

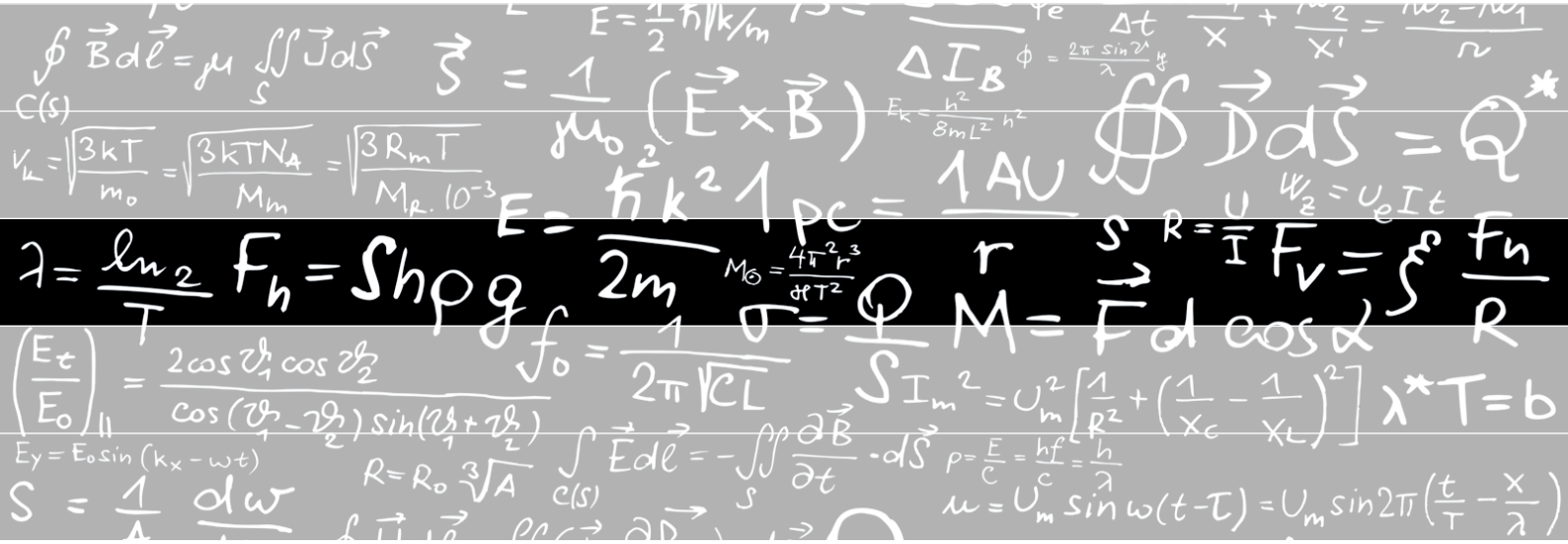
што је приближно једнако енергији јонизације атома водоника.

2. Српска физичка олимпијада - резултати

				Реп.	СФО		И	
	Презиме и име ученика	место	наставник	бод.	теор.	**екс**	бод.	**УК**
1	Шибалић Никола	Београд	Наташа Чалуковић	100	99	40	97,8	**97,4**
2	Разуменић Иван	Вршац	Анђела Спасић	85,8	64,1	44,5	82	**71,2**
3	Цвијовић Ивана	Београд	Наташа Чалуковић	96,3	78,8	18,25	81,5	**66,7**
4	Солар-Николић Дино	Београд	Наташа Чалуковић	94	79	26	66	**62,5**
5	Оташевић Никола	Београд	Бранислав Цветковић	73,1	77	26,52	87,2	**62,4**
6	Василијевић Момчило	Београд	Бранислав Цветковић	82,8	89	30,25	61,2	**61,3**
7	Јовић Александар	Београд	Вишња Јовановић	85,1	57	28,25	47,3	**41,5**
8	Катанчевић Михајло	Крушевац	Иван Зорнић	56,7	89	23		
9	Спасић Мина	Београд	Наташа Чалуковић	65,7	65	26,9		
10	Радовановић Милан	Крушевац	Миланка Илић	73,1	86	1,5		
11	Марјановић Аљоша	Београд	Вишња Јовановић	53,7	71	26		
12	Радосављевић Сања	Београд	Коста Панић	48,5	50			
13	Вуковић Никола	Београд	Бранислав Цветковић	58,2	37			

На 39. International Physics Olympiad су се пласирали ученици завршно са редним бројем 5

3. Српска физичка олимпијада, Београд 2009.



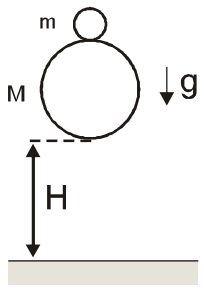
3. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ

Средња школа

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ - ТЕОРИЈА

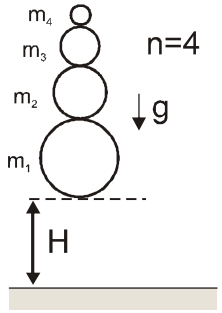
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
07-08.05.2009.

1. а) Мала лопта масе m мирује на врху веће лопте масе M при чему је $M > m$. У почетном тренутку лопте мирују на висини H изнад подлоге (слика 1), а затим се пусте. Сматрати све сударе до којих долази идеално еластичним и да се одвијају само у вертикалном правцу. Занемарити отпор средине и сматрати да је време трајања сваког појединачног судара веома кратко. На коју висину изнад свог почетног положаја ће се попети мања лопта након њеног првог судара?



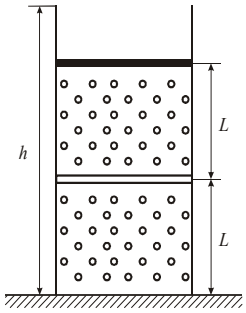
Слика 1.

б) Размотримо претходну ситуацију у случају n лопти (видети слику 2 за случај $n = 4$). Сматрати да је маса m_1 много већа од масе m_2, маса m_2 много већа од масе m_3 итд. (тј. $m_1 >> m_2 >> m_3 >> ... >> m_n$). Доњи крај прве лопте се налази на висини H изнад подлоге, а доњи крај $n-$те лопте се налази на висини $H + l$ изнад подлоге. Лопте се пусте из стања мировања. Као и у претходном случају сматрати све сударе идеално еластичним и да се одвијају у вертикалном правцу. Време трајања сваког судара је веома кратко, а отпор средине занемарити. Одредити максималну висину до које одскочи горња лоптица након првог судара (решење изразити у функцији броја лоптица n). Ако је $H = 1\text{m}$ и $l << H$ колики је најмањи број потребних лоптица да би горња лоптица одскочила на висину од 1 km? **(25 п)**



Слика 2.

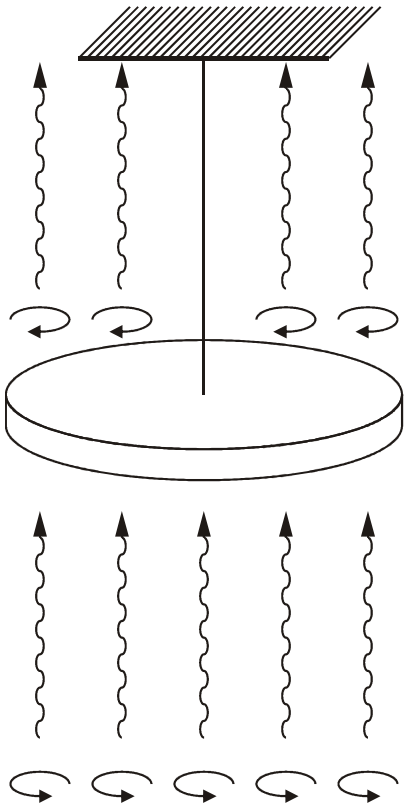
2. На лабораторијском столу се налази вертикални топлотно изоловани цилиндрични суд површине попречног пресека S у коме се налазе два танка клипа (видите слику). Горњи клип је масиван, топлотно непроводан и може да се креће у цилиндру без трења. Доњи клип је лак и топлотно проводан, али између њега и зидова цилиндра постоји трење. У сваком од делова овог суда налази се по ν молова идеалног једноатомског гаса. На почетку је овај физички систем био у топлотној равнотежи и оба дела суда су имала висину L и притисак гаса је у оба дела био p_0. Затим је систем полако загрејан неком количином топлоте ΔQ. Ако је приликом загревања доњи лаки клип остао непокретан: а) Колика је промена температуре ΔT гаса у овом процесу? б) Колики је топлотни капацитет C гаса у овом процесу? в) При којој вредности силе трења F између доњег лаког клипа и зидова цилиндра је овакав процес могућ? г) Колика је максимална количина топлоте $\Delta Q_{\max}$ коју може да прими гас у овом процесу да горњи клип не испадне из цилиндра ако је висина цилиндричног суда $h = 2{,}5L$? Колика у том случају треба да буде вредност силе трења F? Универзална гасна константа је R. Топлотне капацитете зидова суда и клипова занемарите. **(25 п)**



3. Електромагнетно зрачење поред енергије и импулса преноси и момент импулса L. Када се светлост посматра корпускуларно, ово се тумачи тиме да фотони имају спин $s = L/\hbar$. Пројекција спина фотона на правац његовог простирања може да има само две вредности $\pm s$, које одговарају двема кружним (циркуларним) поларизацијама светлости, левој и десној.
На слици 1 је шема експеримента за одређивање спина фотона. Торзиона вага, која се користи за мерење спина фотона, се састоји од нити на коју је обешен диск полупречника r = 0,2 cm и масе m = 1,97 mg. Диск је направљен од материјала који двојно прелама светлост и његова дебљина је

одабрана тако да формира тзв. $\lambda/2$ плочицу (која леву кружну поларизацију светлости претвара у десну, и обратно). Укључивањем светлосног извора, плочица се осветљава хомогеним снопом кружно поларизоване светлости таласне дужине $\lambda = 1064$ nm која пада нормално на плочицу; снага снопа који пада на плочицу је $P = 10$W.

Пре укључивања извора плочица мирује у равнотежном положају. Када се извор укључи плочица почне да осцилује са периодом $T = 34{,}6$s. При томе је равнотежни положај ових осцилација померен за угао $\theta_0 = 5^0$ у односу на положај пре укључивања. На основу ових података израчунати спин фотона s. Занемарити одбијање светлости од плочице и сматрати да сва светлост пролази кроз плочицу. Брзина светлости је $3 \cdot 10^8$ m/s. **(25 п)**



4. Извор светлости се налази на оптичкој оси танког сабирног сочива жижне даљине f на удаљености x од сочива, где је $x>f$. Извор емитује светлосни зрак на сочиво под углом α у односу на осу. Заклон се налази са друге стране сочива на удаљености d од њега, постављен нормално на осу сочива. Одредити удаљеност између тачке на заклону у коју пада зрак светлости и осе сочива. Занемарити све недостатке сочива. **(25 п)**

Задатке припремили: *Зоран Мијић* (1), *Маја Рабасовић* (2), *Александар Крмпот* (3), *Мићо Митровић* (4)
Рецензенти: *Александар Срећковић (1), Драган Маркушев (2), Ђорђе Спасојевић (3), Андријана Жекић (4)*
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,Физички факултет, Београд*

3. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ

Средња школа

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
РЕШЕЊА ТЕОРИЈСКИХ ЗАДАТАКА

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
07-08.05.2009.

P1. а) Обе лопте падају из стања мировања и прелазе пут H до свог најнижег положаја при чему достижу брзину $v=\sqrt{2gH}$ **(1п)**. Већа лопта M се еластично судара са подлогом при чему мења смер брзине и креће се на више сударајући се са мањом лоптом m која се креће на доле. Из закона одржања импулса следи $Mv-mv=Mv_M+mv_m$ **(2п)** (позитиван смер смо изабрали да буде усмерен навише) где су v_M, v_m брзине веће и мање лопте непосредно после судара, респективно. Из претходног је $v_M=v-\frac{m}{M}\left(v+v_m\right)$ **(1п)**, а како из закона одржања енергије важи $\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}Mv_M^2+\frac{1}{2}mv_m^2$ **(2п)** уврштавањем претходне једначине долази се до квадратне једначине $\left(m+M\right)v_m^2-2v\left(M-m\right)v_m-\left(3M-m\right)v^2=0$ **(2п)**. Решења једначине су $v_m=\left(\frac{M-m\pm 2M}{M+m}\right)\sqrt{2gH}$, а пошто тражимо позитивно решење (брзина куглице је усмерена на горе) налазимо коначно $v_m=\left(\frac{3M-m}{M+m}\right)\sqrt{2gH}$ **(2п)**. Нека је h максимална висина до које се куглица попне изнад свог најнижег положаја, тада је $mgh=\frac{1}{2}mv_m^2$ **(2п)** одакле се добија $h=H\left(\frac{9M^2-6Mm+m^2}{M^2+2Mm+m^2}\right)$ **(1п)**. Сада се лако налази тражена позиција изнад почетног положаја $\Delta h=h-H \Rightarrow \Delta h=H\frac{8(1-m/M)}{(1+m/M)^2}$ **(2п)**.

б) У тренутку непосредно пре додира доње лопте и подлоге све лоптице се крећу ка подлози и имају брзину $v=\sqrt{2gH}$ **(1п)**. Брзину сваке лопте непосредно након судара са лоптом испод ње можемо одредити индукцијом. Ако лопта L_i има брзину v_i после судара са лоптом испод ње L_{i-1} треба да одредимо брзину лопте L_{i+1} након судара са лоптом L_i. Релативна брзина лопте L_{i+1} и L_i непосредно пре судара је $v+v_i$ што је истовремено и релативна брзина након судара (код еластичног судара, независно од маса честица које се сударају, релативна брзина се не мења, што се најлакше може видети посматрајући судар у систему центра масе...). Пошто лопта L_i наставља да се креће навише брзином v_i (јер је $m_i >> m_{i+1}$) коначна брзина лопте L_{i+1} усмерена на горе је $(v+v_i)+v_i$ односно важи $v_{i+1}=2v_i+v$ **(2п)**. Како је $v_1=v$ то је $v_2=3v$ (што се слаже са решењем добијеним у првом делу за $M>>m$), $v_3=7v$, $v_4=15v$ итд. На основу претходног може се написати брзина горње $n-$те лопте у општем облику $v_n=(2^n-1)v$ **(4п)**. Из закона одржања енергије се добија максимална висина одскока горње лопте $h=l+\frac{(2^n-1)^2v^2}{2g}=l+(2^n-1)^2H$ **(2п)**. У случају да је $H=1\,\mathrm{m}$ висину изнад 1 km ће достићи лопта број 6 **(1п)**

$(2^n - 1 > \sqrt{1000} \Rightarrow n > \ln_2(\sqrt{1000}+1))$

P2. а) Означимо са $V_1 = SL$ запремину дела цилиндра испод лаког клипа, где је S површина клипа. Означимо са $\Delta V_2 = S\Delta L$ промену запремине дела цилиндра између масивног и лаког клипа. Ако се читавом систему доведе нека количина топлоте ΔQ она ће се потрошити на промену унутрашње енергије гаса ΔU и на извршени рад A:

$$\Delta U = 2\nu \cdot \frac{3}{2} R\Delta T \text{ , } \textbf{(2п)}$$

и

$$A = p_0 \Delta V_2 = \nu R \Delta T \text{ . } \textbf{(2п)}$$

Сада можемо да напишемо да је

$$\Delta Q = \Delta U + A = 4\nu R\Delta T \text{ , } \textbf{(2п)}$$

одакле се лако добија да је

$$\boxed{\Delta T = \frac{\Delta Q}{4\nu R}.} \textbf{(2п)}$$

б) Топлотни капацитет гаса у овом процесу је

$$\boxed{C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 4\nu R.} \textbf{(2п)}$$

в) Пошто је запремина нижег дела суда (испод лаког клипа) константна, промена притиска Δp у том делу суда се може добити из

$$\Delta p V_1 = \nu R \Delta T \text{ ,} \qquad \text{тј.} \qquad \Delta p = \frac{\nu R \Delta T}{V_1} = \frac{\Delta Q}{4V_1} \text{ . } \textbf{(3п)}$$

Пошто је притисак гаса између клипова константан током загревања и износи p_0, а испод лаког клипа је почетни притисак био p_0, на крају загревања је разлика притисака гаса испод лаког клипа и гаса између клипова једнака Δp. Да би лаки клип остао непокретан, сила трења између њега и зидова суда мора бити не мања од

$$\boxed{F = S\Delta p = \frac{V_1 \Delta Q}{4V_1 L} = \frac{\Delta Q}{4L}.} \textbf{(3п)}$$

г) Пошто је

$$p_0 \Delta V_{2\max} = p_0 S \Delta L_{\max} = p_0 S \cdot 0{,}5L = \nu R \Delta T_{\max} \textbf{ (2п)}$$

следи да је

$$\Delta T_{\max} = \frac{p_0 SL}{2\nu R} \text{ , } \textbf{(2п)}$$

па је

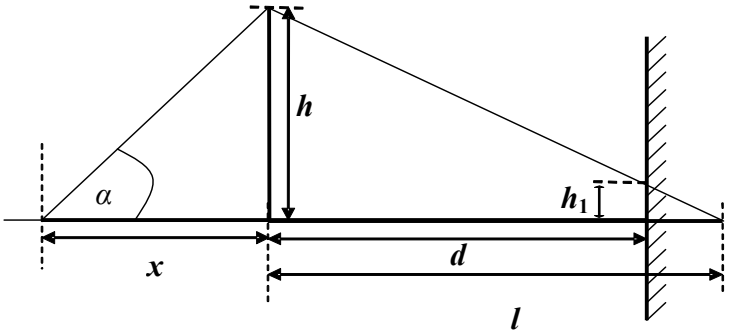
$$\boxed{\Delta Q_{\max} = 4\nu R \Delta T_{\max} = 4\nu R \frac{p_0 SL}{2\nu R} = 2 p_0 SL.} \textbf{(2п)}$$

Да би лаки клип остао непокретан, сила трења између њега и зидова суда мора бити не мања од

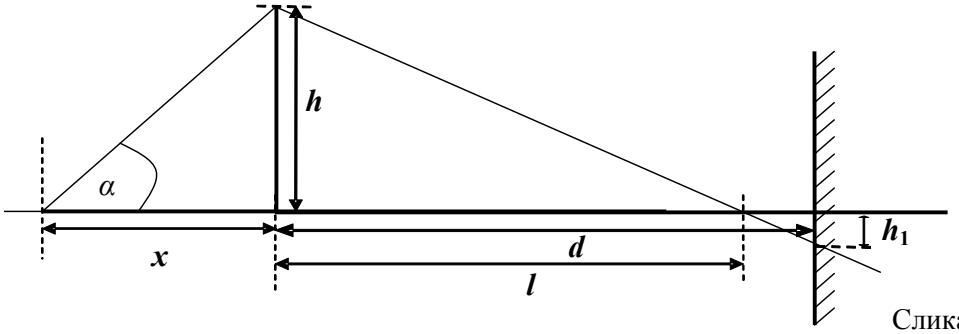
$$\boxed{F=\frac{\Delta Q_{\max}}{4L}=\frac{2p_0SL}{4L}=\frac{p_0S}{2}.}$$ **(3п)**

P3. Кружна учестаност осциловања торзионог клатна је $\omega=\sqrt{\frac{k}{I}}$ **(2п)**, те је његов период $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$ **(1п)**, где је $I=mr^2/2$ момент инерције диска. Одавде је торзиона константа нити $k=\frac{2\pi^2mr^2}{T^2}$ **(1п)**. Из снаге снопа $P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{hc}{\lambda}\cdot\frac{\Delta N}{\Delta t}$ **(3п)** налазимо да је број фотона који по јединици времена прође кроз плочицу једнак $\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{P\lambda}{hc}$ **(1п)**. Пошто се равнотежни положај при укључивању извора светлости мења, то значи да светлост делује на плочицу сталним моментом силе. Момент силе настаје услед промене пројекције спина фотона услед које се момент импулса сваког фотона промени за $2s\hbar$. Ову разлику момента импулса фотони предају плочици. Тако је укупан момент силе којом светлост делује на плочицу дат са $M=\frac{\Delta L}{\Delta t}=2s\hbar\frac{\Delta N}{\Delta t}$ **(5п)**. Овај момент силе настаје при укључивању извора и торзионо клатно почиње да осцилује настојећи да пређе у нови равнотежни положај у којем је $M=k\theta_0$ **(3п)** (момент силе M којом светлост делује на плочицу је уравнотежен реституционим торзионим моментом $k\theta_0$); осциловање се врши под дејством „неуравнотеженог дела“ реституционог торзионог момента око новог равнотежног положаја, па је период исти као и код слободних торзионих осцилација. Комбиновањем претходних израза добија се $s=\frac{2\pi^3mr^2\theta_0c}{T^2\lambda P}$ за θ_0 изражено у радијанима, односно $s=\frac{\pi^4mr^2\theta_0c}{90T^2\lambda P}$ **(5п)** за θ_0 изражено у степенима. На основу приложених експерименталних података бројна вредност за s је $s=1{,}00314\approx1$ **(4п)**.

P4. На сочиво зрак пада на удаљености од осе $h=x\,tg\alpha$ **(1п)**. Пут зрака иза сочива је одређен једначином сочива $\frac{1}{f}=\frac{1}{x}+\frac{1}{l}$ **(5п)**. Да нема заклона, зрак би пресекао осу сочива на удаљености $l=\frac{xf}{x-f}$ **(3п)**. Ако је $d\leq l$ (слика 4а), тада из сличности троуглова следи да је $\frac{h_1}{h}=\frac{l-d}{l}$ **(5п)**, па тражена удаљеност износи $h_1=\frac{l-d}{l}h=\frac{l-d}{l}x\,tg\alpha=(x-\frac{d(x-f)}{f})tg\alpha$ **(3п).** Ако је $d>l$ (слика 4б), тада из сличности троуглова следи да је $\frac{h_1}{h}=\frac{d-l}{l}$ **(5п)**, па тражена удаљеност износи $h_1=\frac{d-l}{l}h=\frac{d-l}{l}x\,tg\alpha=(\frac{d(x-f)}{f}-x)tg\alpha$ **(3п).**



Слика 4а

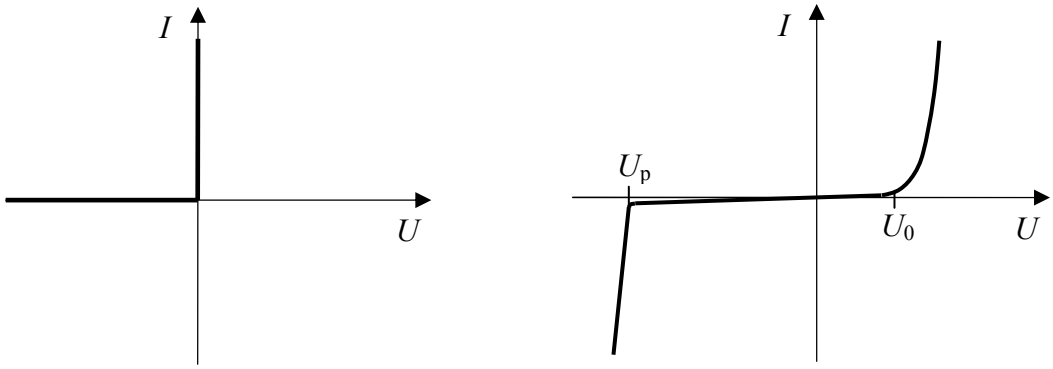


Слика 4б

Теоријски увод. Особине p-n споја

У савременој електроници полупроводника p-n спој може да има више различитих употреба. Најчешћа и најпознатија употреба p-n споја је полупроводничка диода. У процесу производње p-n спој може да се оптимизује за различите употребе као што су: диода која емитује светлост – ЛЕД (**L**ight **E**mitting **D**iode), фотодиода и соларна ћелија.

У електроници је често потребна компонента која у једном смеру пропушта струју, без отпора, а у другом је не пропушта уопште (има бесконачан отпор). То би била идеална диода. Јачина струје која протиче кроз такву идеалну диоду у зависности од напона на њој (**струјно напонска карактеристика**) дата је на слици 1а. p-n спој се користи као диода, али њене особине не одговарају баш особинама идеалне диоде (слика 1б). p-n спој је **директно поларисан** када је p део споја везан на позитивни пол извора напона, а n део на негативни, и тада се каже да је напон на диоди позитиван. За мале позитивне напоне, мање од неког напона U_0, струја кроз диоду је веома мала односно диода се понаша као да има јако велики отпор. Пошто је јако мала, та струја се у реалним ситуацијама занемарује. Напон U_0 се назива напон провођења и он је једнак **контактној разлици потенцијала** p-n споја. За вредности напона веће од U_0 струја кроз диоду почиње нагло да расте. За негативне напоне (p-n спој је **инверзно поларисан**) веће од неког напона U_p диода такође веома слабо проводи струју која се обично занемарује. Ако се напон спусти испод неке вредности U_p диода опет почиње добро да проводи струју (сада у супротном смеру), али то може да је уништи. Напон U_p се зове напон пробоја и обично је по апсолутној вредности далеко већи од U_0.



а **б**

Слика 1. а) струјно напонска карактеристика идеалне диоде; б) струјно напонска карактеристика реалне диоде

Сада можемо упоредити особине идеалне и реалне диоде. Са слике 1 се види да реална диода за разлику од идеалне почиње добро да проводи струју тек после напона провођења U_0 и то је најбитнија разлика у односу на идеалну диоду. За стандардне диоде које се користе у електронским колима тај напон је приближно 0,6V. После овог напона реална диода се ипак не понаша као да има бесконачно мали отпор, односно и за напоне веће од U_0 струја кроз диоду је коначна.

Диода која емитује светлост – ЛЕД. Типичне ширине забрањених зона (енергијских процепа) код полупроводника су реда eV што одговара енергији фотона у блиској инфрацрвеној, видљивој и блиској ултраљубичастој области. Ова особина омогућава да се погодном оптимизацијом p-n споја полупроводничке диоде користе као извори светлости у наведеним областима. Овако оптимизована диода се назива ЛЕД. ЛЕД почиње да емитује светлост тек када је напон на њему

већи од U_0, односно када кроз њега почне да протиче незанемарљива струја.

Механизам емитовања светлости у p-n споју је следећи: Када је p-n спој директно поларисан напоном већим од U_0 електрони из n дела под утицајем тог напона прелазе у p део. Пошто у p делу постоји вишак шупљина електрони се тамо **рекомбинују** са њима. У процесу рекомбинације енергија се ослобађа емитовањем фотона. Шупљине такође под утицајем напона U_0 прелазе из p дела у n део и тамо се рекомбинују са постојећим електронима, али због знатно веће покретљивости електрона број процеса рекомбинације је далеко већи у p делу. Електрон у овом процесу добија енергију eU_0 па за фотоне који настају у процесу рекомбинације важи

$$h\nu = eU_0 \qquad (1)$$

Одавде може да се закључи да таласна дужина емитоване светлости зависи од U_0 односно контактне разлике потенцијала. Коришћењем различитих типова полупроводника и додавањем различитих примеса може се утицати на контактну разлику потенцијала у p-n споју па самим тим и на таласну дужину (боју) емитоване светлости.

Ово је сувише поједностављен приступ јер електрони у полупроводнику нису слободне честице па једначина (1) није у потпуности задовољена и мора да се коригује. Енергија фотона насталог у овом процесу може добро да се опише формулом :

$$h\nu = eU_0 + E^* \qquad (2)$$

где је E^* корекциони фактор који има димензију енергије.

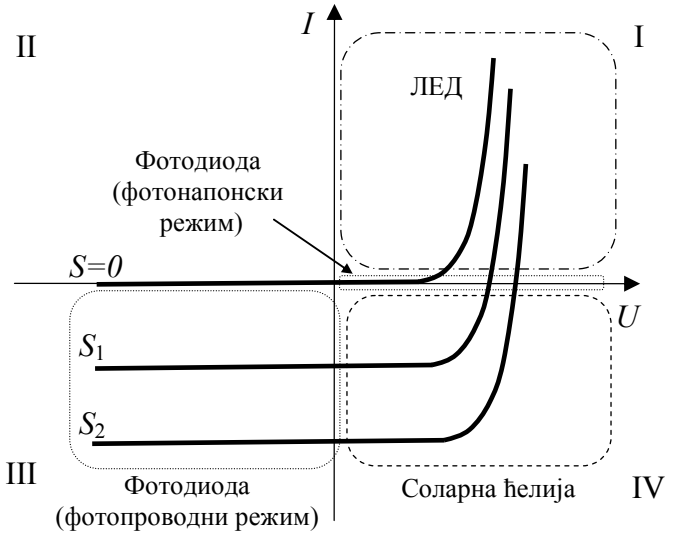
Фотодиода и соларна ћелија. У претходном делу је описано како p-n спој може да емитује светлост. Међутим, могућ је и супротан процес, односно да фотони буду апсорбовани у p-n споју и да се при томе стварју парови електрон-шупљина. Не улазећи у детаље ових процеса јер то превазилази градиво средње школе битно је рећи да апсорпција светлости доводи до промене струјно напонске карактеристике p-n споја. Струјно напонска карактеристика не мења свој облик већ се услед осветљавања p-n споја само „спушта” на *I-U* дијаграму (слика 2). **Вредност јачине струје за коју се „спусти” струјно напонска карактеристика је директно пропорционална интензитету светлости који пада на p-n спој**. Та вредност јачине струје се назива **фотострија.**

Описана особина p-n споја може да се искористи за детекцију и мерење интензитета светлости и p-n спој се тада назива **фотодиода**. Такође, описана особина може да се искористи за конверзију светлосне у електричну енергију и тада се p-n спој назива **соларна ћелија**.

Постоје два режима када се p-n спој користи као фотодиода: фотонапонски и фотопроводни (слика 2). У фотонапонском режиму се мери напон на фотодиоди у отвореном колу (бесконачан отпор и нулта струја). У том случају напон није пропорционалан интензитету светлости па није згодан за квантификацију интензитета светлости већ само за детекцију (има-нема светлости).

Други режим је фотопроводни и за њега је карактеристично да је p-n спој неполарисан или инверзно поларисан. У том случају се мери јачина фотострује кроз коло у којем се налази фотодиода. Као што је већ речено, јачина фотострује је директно пропорционална интензитету светлости па је због тога овај режим погодан за квантитативно одређивање интензитета светлости. У овом режиму треба водити рачуна да инверзни напон којим је поларисана фотодиода не пређе вредност напона пробоја U_p.

Треба приметити, уопште, да је у I и III квадранту *I-U* дијаграма производ струје и напона, односно снага која се доводи диоди, позитивна, док је у II и IV квадранту негативна, односно тада се снага ослобађа. Очигледно је да струјно напонска карактеристика p-n споја не може да се нађе у II квадранту, док може да се нађе у IV ако се p-n спој осветли. Тада се p-n спој назива соларна ћелија.



Слика 2. Струјно напонска карактеристика p-n споја, односно диоде, када је он осветљен различитим интензитетима светлости *S*, где је $S_1 < S_2$.

Задатак 1. Одређивање Планкове константе

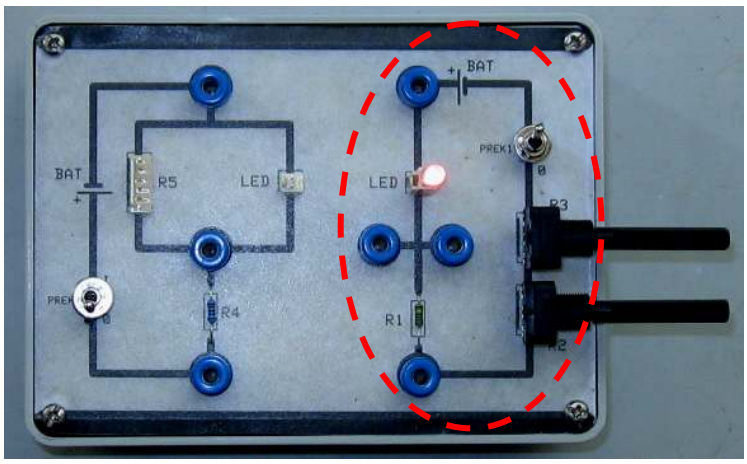
Корекциони фактор E^* у формули (2) у принципу зависи од ЛЕД-а до ЛЕД-а. Међутим, за већину ЛЕД-ова он је приближно константан. Имајући то у виду, за различите ЛЕД-ове постоји једнозначна веза између таласне дужине на којој зрачи ЛЕД и његове контактне разлике потенцијала.

Задатак 1.1 За дате ЛЕД-ове, означене бројевима од 2 до 7, мерити њихову контактну разлику потенцијала, односно напон U_0 на њима. Таласне дужине ЛЕД-ова су:

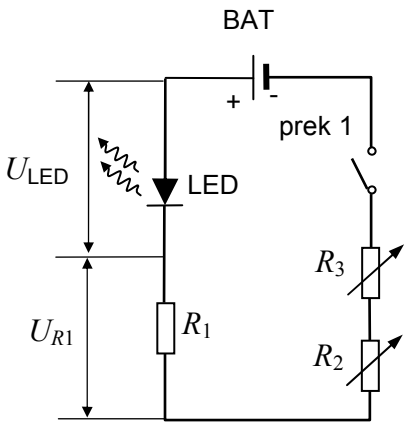
ЛЕД	ЛЕД2	ЛЕД3	ЛЕД4	ЛЕД5	ЛЕД6	ЛЕД7
λ[nm]	594	652	630	610	570	940

Резултате приказати у табели. На основу измерених напона U_0 и датих таласних дужина нацртати одговарајући график и помоћу њега одредити вредност Планкове константе. Узети да је брзина светлости $c = 2{,}998\cdot10^8$ m/s. Елементарно наелектрисање је $e = 1{,}6022\cdot10^{-19}$C. Проценити грешку одређивања Планкове константе. Грешка мерења таласне дужине је $\Delta\lambda$ = 5nm. (30п)

Апаратура: Мерења за овај задатак се врше на делу апаратуре који је заокружен на слици 3а. Одговарајућа електрична шема је дата на слици 3б. Коло се састоји из електричног извора (батерија од 9V која се налази у кутији), прекидача prek1, два променљива отпорника R_2 и R_3 помоћу којих се мења струја кроз коло, једног сталног отпорника R_1 који служи за ограничавање и индиректно мерење струје кроз коло и места на које се ставља ЛЕД. У колу такође постоје и мерне тачке за мерење напона на отпорнику R_1 и ЛЕД-у.



а



б

Слика 3. а) део апаратуре који је заокружен се користи за испитивање особина ЛЕД-а; б) електрична шема кола за испитивање особина ЛЕД-а.

Поступак мерења: Најпре измерити отпорност отпорника R_1 тако што се преклопник на инструменту подеси на опсег Ω. При мерењу ове отпорности прекидач prek1 треба да је у положају 0 тј. да је коло прекинуто (отворено). На даље се струја кроз коло одређује тако што се мери напон U_{R1} на отпорнику R_1. При мерењу напона преклопник на инструменту пребацити на DCV. Сада ставити одговарајући ЛЕД, укључити прекидач и струју у колу мењати променљивим отпорницима R_2 и R_3. За фино подешавање служи R_2 (0-1kΩ), а R_3 (0-250kΩ) за грубо. Као што је већ речено U_0 је напон на ЛЕД-у (U_{LED}) на којем он почиње да пропушта струју. Сматрати да је ЛЕД почео да пропушта струју када јачина струје кроз коло достигне вредност 50μA.

<u>Задатак 1.2</u> Одредити таласне дужине λ_8 и λ_9 на којима зраче ЛЕД-ови 8 и 9, респективно, мерењем напона U_0 на њима. Проценити грешке мерења. (10п)

<u>Задатак 1.3</u> Мерити зависност струје кроз ЛЕД број 3 I_{LED}, (на начин описан у 1.1) у зависности од напона на њему (U_{LED}). Из добијених података нацртати струјно напонску карактеристику ЛЕД-а. Мерења извршити у најмање 10 тачака тако да се покрије цео опсег напона на ЛЕД-у који је могуће постићи датом апаратуром. Резултате представити табеларно и графички. Није потребно проценити грешке. (10п)

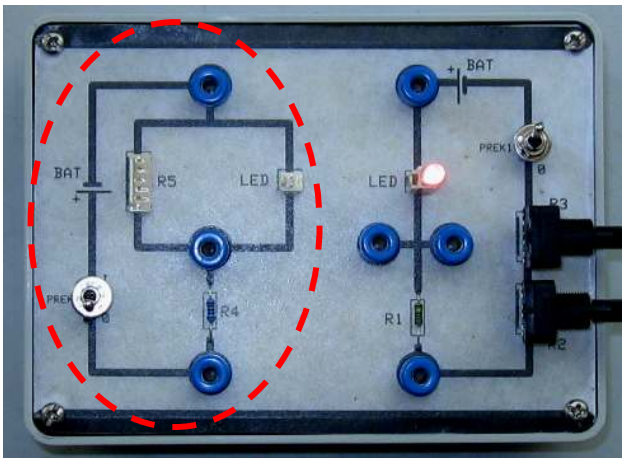
<u>Задатак 2. ЛЕД као фотодиода и соларна ћелија.</u>

Сви ЛЕД-ови могу да се користе и као фотодиоде и као соларне ћелије, али за то нису оптимизовани. У овом задатку ћемо показати како се понаша ЛЕД као фотодиода и соларна ћелија.

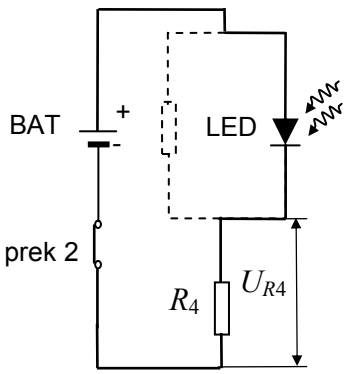
ЛЕД као фотодиода

<u>Задатак 2.1</u> Под претпоставком да је фотострија директно пропорционална интензитету светлости која пада на фотодиоду, одредити како изгледа зависност интензитета светлости коју израчи ЛЕД у зависности од струје која пролази кроз њега. Резултате представити табеларно и графички као зависност фотострује I_f од струје ЛЕД-а I_{LED}. Није потребно проценити грешке. (12п)

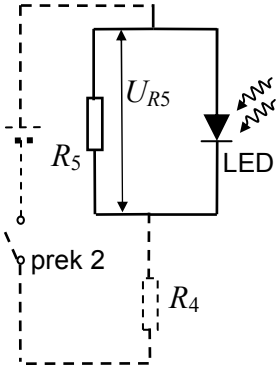
Апаратура: Коло за тестирање ЛЕД-а као фотодиоде и соларне ћелије заокружено је на слици 4а. Да би се ЛЕД користио као фотодиода у фотопроводном режиму користи се коло чија је шема дата на слици 4б. Да би се остварило такво коло потребно је да се одговарајући ЛЕД стави на своје место, да на месту за отпорник R_5 нема ничега и да се затвори прекидач prek2 чиме се постиже да ЛЕД буде инверзно поларисан. Сада се коло састоји од инверзно поларисаног ЛЕД-а који служи као фотодиода и отпорника R_4 који служи за индиректно мерење струје кроз коло (фотострује).



а



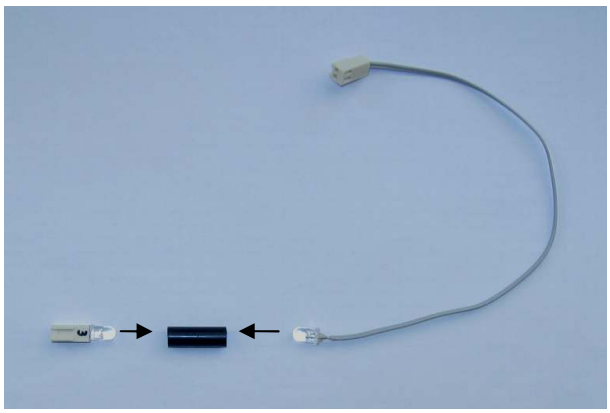
б



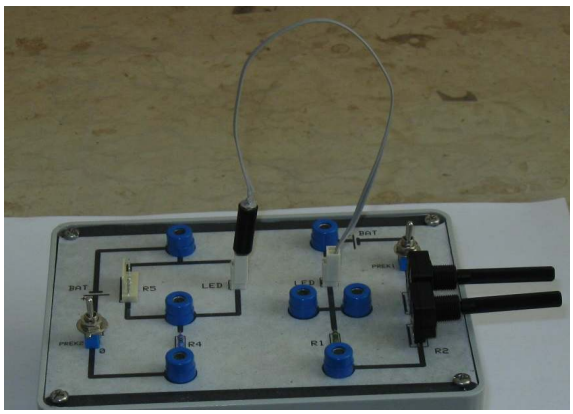
в

Слика 4. а) део апаратуре који се користи за испитивање особина ЛЕД-а као фотдиоде и соларне ћелије; б) електрична шема кола за испитивање ЛЕД-а као фотодиоде; в) електрична шема кола за испитивање ЛЕД-а као соларне ћелије.

Поступак мерења: У колу за фотодиоду измерити отпорник R_4. Мерење вршити при отвореном прекидачу prek 2. На даље се струја кроз коло одређује тако што се мери напон U_{R4} на отпорнику R_4. У коло које је служило за одређивање Планкове константе ставити ЛЕД бр 3. Други ЛЕД под истим бројем ставити у коло за фотодиоду. Ставити један ЛЕД наспрам другог користећи црну цевчицу као на слици 5. Укључити прекидаче prek1 и prek2. Мењати струју у колу за ЛЕД помоћу отпорника R_2 и R_3 и мерити фотострују у колу фотодиоде. Када се подеси жељена струја кроз ЛЕД сачекати око 30s па онда очитати напона на отпорнику R_4. Мерења извршити у целом опсегу струја ЛЕД-а у најмање 10 тачака.



а



б

Слика 5. а) Начин стављања ЛЕД-ова у цевчицу; б) Изглед апаратуре када се ставе оба ЛЕД-а, један као ЛЕД а други као фотодиода.

ЛЕД као соларна ћелија

<u>Задатак 2.2</u> Наћи зависност снаге *P* која се ослобађа на отпорнику R_5 у зависности од вредности тог отпорника, када се соларна ћелија осветљава константним интензитетом светлости из ЛЕД-а. Интензитет ЛЕД-а је одређен његовом струјом коју треба подесити на око 50mA ако је могуће. Резултате представити графички. Није потребно процењивати грешке. Наћи за коју вредност отпорника R_5 је снага соларне ћелије највећа.

Поновити претходна мерења за двоструко мањи интензитет светлости коју израчује ЛЕД. Резултате представити на истом дијаграму где се налази и график са претходним интензитетом ЛЕД-а. Описати поступак на који је добијен двоструко мањи интензитет светлости из ЛЕД-а!

Да ли се сада, и како, променила вредност отпора потрошача за који је снага соларне ћелије највећа? (23п)

<u>Задатак 2.3</u> На основу мерења из задатка 2.2 наћи максимални степен корисног дејства η целог система тј. однос максималне снаге која се ослобађа на потрошачу и снаге која се доводи ЛЕД-у. Ово урадити за оба интензитета светлости. Проценити грешку ове величине. (15п)

Апаратура: Да би се ЛЕД користио као соларна ћелија користи се коло чија је шема дата на слици 4в. Да би се остварило такво коло потребно је да се одговарајући ЛЕД стави на своје место, да се на место за отпорник R_5 стави жељени отпорник и да прекидач prek2 буде отоврен. Сада се коло састоји од ЛЕД-а који служи као соларна ћелија и отпорника R_5 који служи као потрошач.

Поступак мерења: Измерити вредности различитих отпорника R_5. При мерењу отпорности соларна ћелија не сме да буде у колу и прекидач prek2 мора да буде отворен. Снага која се ослобађа на потрошачима се одређује мерењем напона на њима. У коло које је служило за одређивање Планкове константе ставити ЛЕД број 3 . Други ЛЕД под истим бројем ставити у коло за соларну ћелију. Ставити један ЛЕД наспрам другог користећи црну цевчицу као на слици 5. Укључити прекидач prek1. Подесити струју у колу за ЛЕД помоћу отпорника R_2 и R_3 на око 50mA. Стављати различите потрошаче (отпорнике) на место R_5 и мерити напон на њима.

Двоструко мањи интензитет ЛЕД-а којим се осветљава соларна ћелија подесити на основу резултата добијених у 2.1

Напомена: Грешке свих величина (напон и отпор) које се директно мере универзалним мерним инструментом проценити као 1% од мерене вредности и додати вредност најмањег дигита.

<u>Мера опреза: Не гледати директно у ЛЕД-ове када су они укључени. Ово се поготово односи на ЛЕД-ове 7 и 8 који не зраче у видљивој области.</u>

Задатке припремио: *мр Александар Крмпот,* Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Драган Д. Маркушев,* Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,*Физички факултет, Београд

1.1 Номинална вредност отпорника R_1 је 100Ω **(1п)**. Ова вредност може да се мења од апаратуре до апаратуре. Пошто се јачина струје ЛЕД-а мери индиректно мерењем напона на овом отпорнику важи да је $I_{LED} = U_{R1} / R_1$. Да би се јачина струје у колу подесила на 50μA, као што је речено у задатку, потребно је подесити напон на R_1 око 5mV**(2п)**.

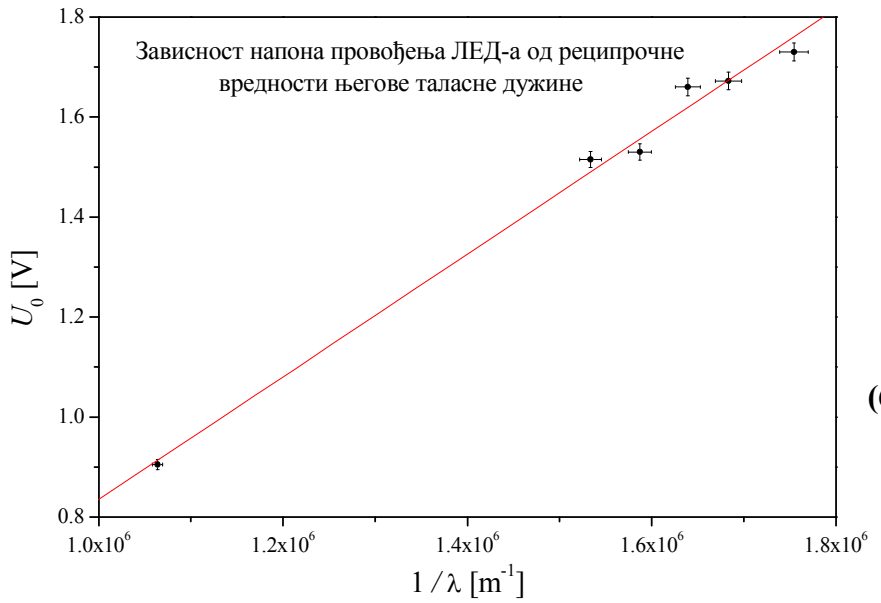
Да би се одредила Планкова константа формула (2) може да се преобличи на следећи начин

$$U_0 = h \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{1}{\lambda} - \frac{E^*}{e} \quad \textbf{(1п)}$$

одакле се јасно уочава линеарна зависност U_0 од 1/λ.

ЛЕД	λ [nm]	U_0 [V]	ΔU_0 [V]	1/ λ [1/nm]	Δ(1/ λ) [1/nm]
ЛЕД2	594	1.67	0.02	$1.68 \cdot 10^6$	$0{,}02 \cdot 10^6$
ЛЕД3	652	1.52	0.02	$1.53 \cdot 10^6$	$0{,}01 \cdot 10^6$
ЛЕД4	630	1.53	0.02	$1.59 \cdot 10^6$	$0{,}02 \cdot 10^6$
ЛЕД5	61	1.66	0.02	$1.64 \cdot 10^6$	$0{,}02 \cdot 10^6$
ЛЕД6	570	1.73	0.02	$1.75 \cdot 10^6$	$0{,}02 \cdot 10^6$
ЛЕД7	940	0.90	0.02	$1.064 \cdot 10^6$	$0{,}006 \cdot 10^6$

(4п)



(6п)

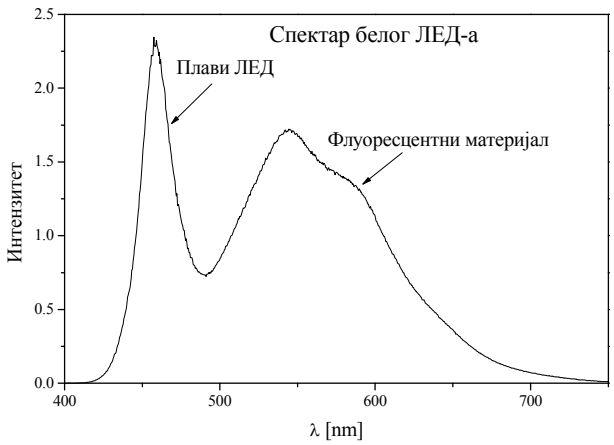
Метод најмањег квадрата даје за коефицијент правца $k = h \cdot \frac{c}{e} = 1{,}2264 \cdot 10^{-6}\,\text{Jm/C}$ **(3п)** и за његову грешку $\Delta k = 0{,}057 \cdot 10^{-6}\,\text{Jm/C}$ **(3п)**. Знајући ово добијамо $\boxed{h = (6{,}6 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-34}\,\text{Js}}$ **(4п)**. Грешка је добијена из $\Delta h / h = \Delta k / k$. За одсечак се добија $n = -\frac{E^*}{e} = -0{,}3912\text{V}$ **(3п)** и $\Delta n = -0{,}089\text{V}$ **(3п)** тј. $n = -\frac{E^*}{e} = (-0{,}391 \pm 0{,}08)\text{V}$.

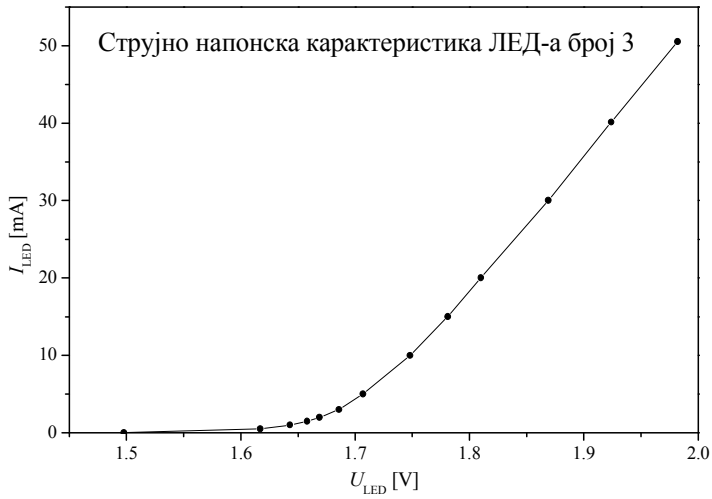
За одређивање параметара *k* и *n* прихватају се и графичка решења која дају смислене резултате.

Коментар: Главни извор грешке при одређивању параметара је чињеница да E^* није исто за све коришћене ЛЕД-ове па се јавља велико одступање тачака од праве!

1.2 Из једначине $U_0 = k \cdot \frac{1}{\lambda} + n$ се добија да је $\lambda = \frac{k}{U_0 - n}$ **(1п)** па мерењем напона провођења U_0 може да се одреди таласна дужина зрачења ЛЕД-а. За ЛЕД број 8 је измерено да је U_0 = 0,927V **(2п)**. Одавде се добија да је $\lambda_8 = 930\text{nm}$. Грешка се рачуна као $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta U_0 + \Delta n}{U_0 - n} = 0{,}122$ **(1п)** па је $\boxed{\lambda = (900 \pm 100)\text{nm}}$ **(2п)**.

За ЛЕД број 9 је измерено да је U_0 = 2,44V **(2п)** па се добија $\boxed{\lambda_9 = (430 \pm 40)\text{nm}}$ **(2п)** што је таласна дужина која се налази у плавом делу спектра. ЛЕД-ови који зраче белу боју, као овај, су уствари плави ЛЕД-ови којима је додат материјал који флуоресцира у ширем делу видљивог спектра, од зелене до црвене боје (слика спектра белог ЛЕД-а)





(5п)

1.3 За струјно напонску карактеристику потребно је мерити струју кроз ЛЕД као што је описано у 1.1 и напон на ЛЕД-у. Добијени резултати дати су у табели и приказани графички.

Број	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
U_{LED}[V]	1.498	1.617	1.643	1.658	1.669	1.686	1.707	1.748	1.781	1.81	1.869	1.924	.982
U_{R1}[V]	0.003	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.5	1	1.	2	3	4.01	5.05
I_{LED}[mA]	0.031	0.5	1.0	1.501	2.002	3.003	5.005	10.01	15.01	20.02	30.03	40.14	50.55

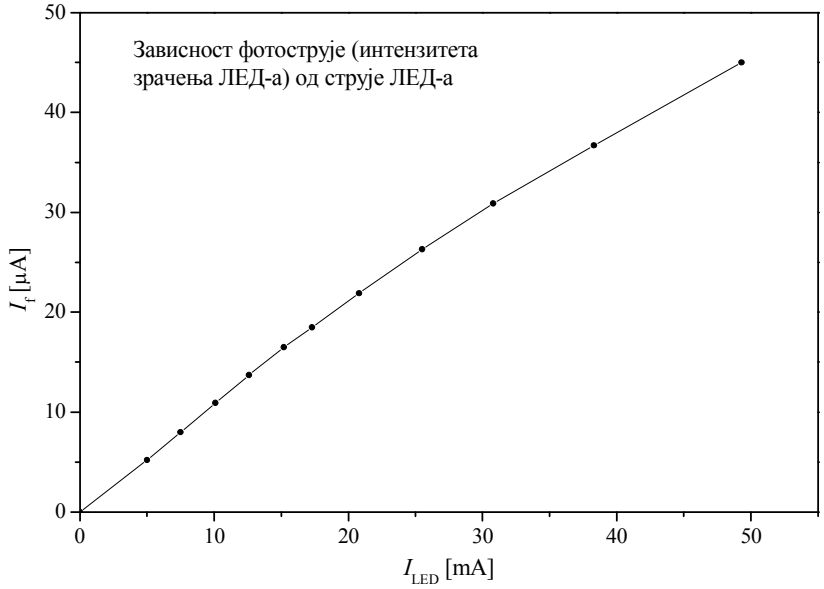
(5п)

Са графика се види да тамо где функција више одступа од линеарне, мерења треба вршити у више тачака које су гушће распоређене.

2.1 Отпорник R_4 има номиналну вредност од 100kΩ **(1п)**. Мерењем отпорности треба да се добије вредност приближна овој. Добијене вредности могу да се разликују од апаратуре до апаратуре. Фото струја се сада одређује мерењем напона на овом отпорнику као $I_f = U_{R4} / R_4$ **(1п)**.

Број	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
U_{R1}[V]	4.93	3.83	3.08	2.55	2.08	1.73	1.52	1.26	1.01	0.75	0.50	0
U_{R4}[V]	4.50	3.67	3.09	2.63	2.19	1.85	1.65	1.37	1.09	0.8	0.52	0
I_{LED}[mA]	49.3	38.3	30.8	25.5	20.8	17.3	15.2	12.6	10.1	7.5	5.0	0
I_f[μA]	45.0	3 .7	30 9	26.3	21.9	18.5	16.5	13.7	10.9	8.0	5.2	0

(5п)



(5п)

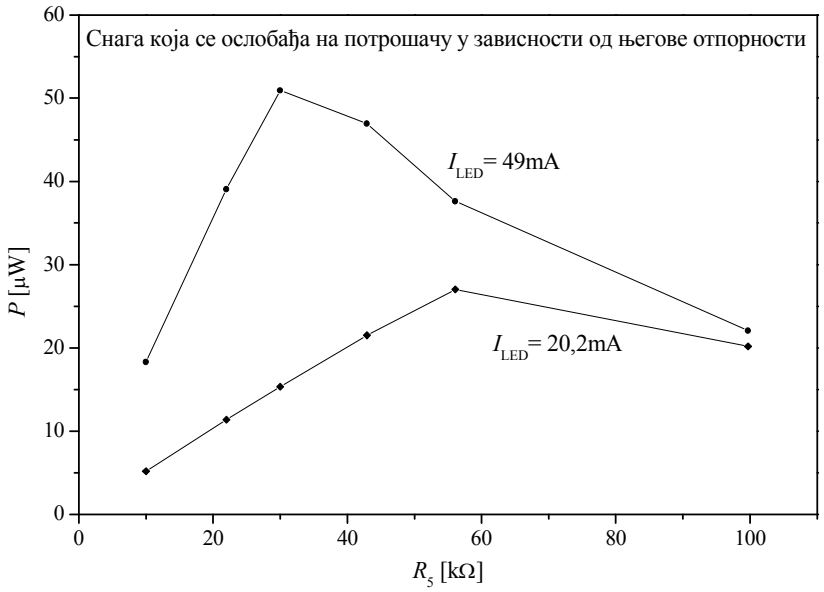
Са графика се види да пораст интензитета зрачења са порастом јачине струје ЛЕД-а није сасвим линеаран већ нешто блажи.

2.2 Номиналне вредности отпорника који могу да се ставе на место потрошаче (R_5) су 10kΩ, 22kΩ, 30kΩ, 43kΩ, 56kΩ и 100kΩ **(2п)**. Мерењем треба да се добију приближно ове вредности. Сада се снага која се ослобађа на отпорнику добија мерењем напона на њему као $P = U_{R5}^2 / R_5$ **(1п)**.

Одређивање половине неког интензитета зрачења заснива се на мерењу фотострује. Фотострују је могуће опет директно мерити па на основу ње проценити интензитете као у претходном задатку (2.1). Међутим, ова мерења су већ извршена па је могуће на основу струје ЛЕД-а и графика из задатка 2.1 одредити фотострује односно интензитете зрачења ЛЕД-а. Тако је овде за почетни интензитет постављена струја ЛЕД-а на 49mA и процењено је да је потребно да струја ЛЕД-а за два пута мањи интензитет буде 20,2mA **(4п)**.

(5п)

Број	1	2	3	4	5	6
R_5 [kΩ]	10	22	30	42.9	56.1	99.7
$U_{R5,\ 44mA}$[V]	0.428	0.927	1.236	1.419	1.453	1.483
$U_{R5,\ 20,3mA}$[V]	0.228	0.5	0.678	0.961	1.231	1.419
P_{44mA}[μW]	18.32	39.06	50.92	46.94	37.63	22.06
$P_{20,3mA}$[μW]	5.20	11.36	15.32	21.53	27.01	20.2



(5п)

Са графика и из табеле се види да је снага која се ослобађа на потрошачу највећа за вредност отпорника од **30kΩ у случају струје ЛЕД-а од 49mA (2п)**а за отпорник од **56kΩ у случају струје ЛЕД-а од 20,2mA (2п)**. **Одавде се види да оптималан избор отпорности потрошача зависи од интензитета светлости који пада на соларну ћелију и да оптимална отпорност опада са порастом интензитета светлости (2п).**

2.3 Да би се проценио степен корисног дејства система потребно је проценити и снагу која се доводи ЛЕД-у. Пошто се струја ЛЕД-а већ мери потребно је још одредити и напон ЛЕД-а. Ово је могуће урадити или директним мерењем или очитавањем напона за одређену струју са струјно напонске карактеристике из задатка 1.3. На овај начин су добијени напони ЛЕД-а од 1,953V **(2п)** за струју ЛЕД-а од 49mA и 1,80V **(2п)** за струју ЛЕД-а од 20,2mA.

Сада се степен корисног дејства система рачуна као

$$\eta_{49\text{mA}} = \frac{P_{\max}}{P_{LED}} = \frac{P_{\max}}{I_{\text{LED}} U_{\text{LED}}} = \frac{50{,}92\,\mu\text{W}}{49\text{mA} \cdot 1{,}953\text{V}} = 0{,}0532\% \quad \textbf{(1п)}$$

$$\eta_{20{,}2\text{mA}} = \frac{P_{\max}}{P_{LED}} = \frac{P_{\max}}{I_{\text{LED}} U_{\text{LED}}} = \frac{27{,}06\,\mu\text{W}}{20{,}2\text{mA} \cdot 1{,}80\text{V}} = 0{,}0744\% \quad \textbf{(1п)}$$

Грешка за степен корисног дејства се процењује као

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta P_{\max}}{P_{\max}} + \frac{\Delta P_{LED}}{P_{LED}} = 2\frac{\Delta U_{R5}}{U_{R5}} + \frac{\Delta R_5}{R_5} + \frac{\Delta U_{R1}}{U_{R1}} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta U_{LED}}{U_{LED}} \quad \textbf{(3п)}$$

На основу горе наведеног добија се $\boxed{\eta_{49\text{mA}} = (0{,}053 \pm 0{,}004)\%}$ **(3п)** и $\boxed{\eta_{20{,}2\text{mA}} = (0{,}074 \pm 0{,}006)\%}$ **(3п)**.

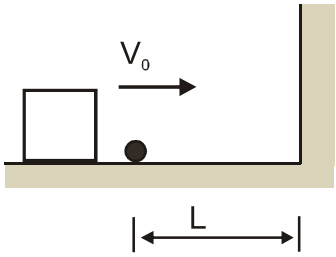
Квалификационо такмичење за олимпијску екипу
2009. године

Средња школа

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ

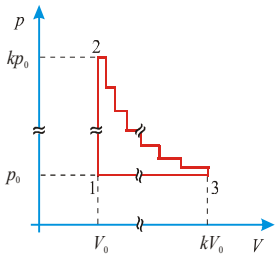
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
18-29. мај 2009.

1. Блок, велике масе M, креће се по подлози без трења према зиду брзином V_0. Блок удара у честицу веома мале масе m $(m << M)$, занемарљивих димензија, која је мировала на растојању L од зида. Честица се еластично одбија од блока, клизи по подлози без трења, судара еластично са зидом и поново креће ка блоку. Овај процес се понавља тј. честица наставља да се еластично судара са зидом и блоком.



а) Одредити минимално растојање до којег ће се блок приближити зиду
б) Колико судара ће направити честица са блоком за време док се блок приближи на то минимално растојање од зида **(25 п)**

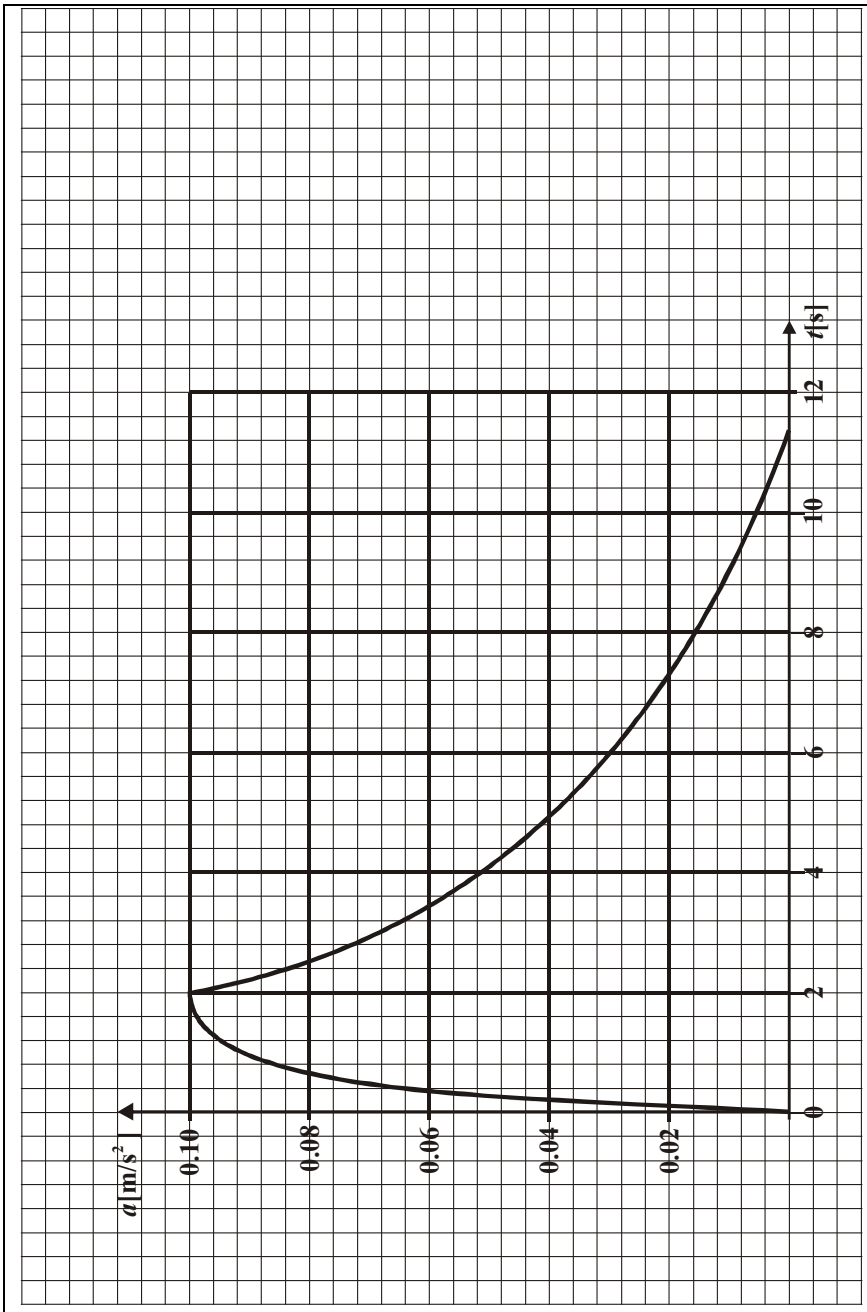
2. У циклусу са слике учествује ν молова идеалног једноатомског гаса. Циклус се састоји из изохоре (1-2), изобаре (3-1) и "степеница" од n степеника (2-3). Сваки степеник чини један изобарски и један изохорски процес. Односи максималног и минималног притиска као и максималне и минималне запремине у овом циклусу једнаки су k. а) Нађите општи израз за коефицијент корисног дејства η топлотне машине која ради по овом циклусу. б) Израчунајте η за $n = 10$ и $k = 5$. Узети да се на сваком хоризонталном и вертикалном делу степеника запремина и притисак промене $k^{1/n}$ пута.



(25 п)

3. Пулсари су небеска тела која се састоје практично само од неутрона. За пулсар масе $m = 2 \cdot 10^{30}$ kg и пречника $d \approx 10$ km одредити да ли се неутрони унутар њега крећу релативистички или не, и оценити њихову средњу кинетичку енергију у eV. Маса мировања неутрона је $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, брзина светлости $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, а Планкова константа $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js. **(25 п)**

4. Скела (компа) масе $m = 50\,\mathrm{t}$ је неистегљивом сајлом везана за мотор који је вуче према обали. У почетном тренутку $t = 0$ мотор почиње да затеже сајлу. При томе сила затезања сајле расте са временом до неке максималне вредности, а после тога остаје константна. Одредите максималну силу затезања ужета у тренутку $t_1 = 2\,\mathrm{s}$, ако је сила отпора воде кретању скеле сразмерна квадрату његове брзине. График зависности убрзања скеле од времена дат је на слици. Проценити грешку мерења. Скела је средство за превоз путника и аутомобила преко реке. Скела у задатку нема сопствени мотор, вуче је, преко сајле, мотор постављен на обали. **(25 п)**



Задатке припремили: Зоран Мијић (1), Маја Рабасовић (2), Александар Крмпот (3), Андријана Жекић (4)
Рецензенти: Александар Срећковић (1), Драган Маркушев (2), Ђорђе Спасојевић (3), Мићо Митровић (4)
Председник Комисије за такмичење ДФС: Проф. др Мићо Митровић,Физички факултет, Београд

Квалификационо такмичење за олимпијску екипу
2009. године

Средња школа

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
РЕШЕЊА

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
18-29. мај 2009.

1. а) Посматрајмо један судар блока и честице. Нека су V и v брзине блока и честице након судара, респективно. Нека се судар догоди на растојању l од зида. Може се доказати да је производ $l(v-V)$ инваријанта, тј. исти је за сваки судар. То се види из следећег разматрања: нађимо растојање l' на којем се деси следећи судар. Време које прође до следећег судара се налази из једначине $vt+Vt=2l$ **(3п)** (очигледно је збир путева које пређу два тела до следећег судара $2l$).Како је $l'=l-Vt$ то је $l'=\frac{l(v-V)}{v+V}$. Код еластичног судара, релативна брзина пре и после судара се не мења па важи $v'-V'=v+V$ **(3п)** (са примовима су означене брзине након судара). Имајући ово у виду, из претходне једначине се добија $l(v-V)=l'(v'-V')$ што је требало и показати. Нађимо вредност ове инваријанте: после првог судара блок наставља да се креће брзином V_0 (узимајући да је $M>>m$) док се честица креће брзином $2V_0$. Дакле инваријанта има вредност $L(2V_0-V_0)=LV_0$ **(3п)**. Нека је $L_{\min}$ растојање до ког блок приђе зиду, тада му је брзина једанка нули. Укупна почетна кинетичка енергија блока једнака је сада кинетичкој енерригији честице па је $v=V_0\sqrt{\frac{M}{m}}$ **(3п)**. Знајући ово, из инваријнте налази се $L_{\min}$ као $LV_0\approx L_{\min}(V_0\sqrt{\frac{M}{m}}-0)$ па је $L_{\min}\approx L\sqrt{\frac{m}{M}}$ **(3п)**

а) Други начин: Нека је $V(t)$ брзина блока, $v(t)$ брзина честице, а $x(t)$ растојање од зида. У тренутку када се блок заустави (на том најмањем растојању од зида) важи $\frac{1}{2}MV_0^2=\frac{1}{2}mv^2$ одакле је $v=V_0\sqrt{\frac{M}{m}}$. Ако нађемо везу $x(t)$ и $v(t)$ можемо лако наћи и тражено растојање. Наконе неког времена брзина честице је велика, дешава се велики број судара dn за кратко време dt, при чему се x не мења много па важи $dn=\frac{vdt}{2x}$ (за $M>>m$). Сваки судар повећа брзину честице за $2V$ тако да за повећање брзине можемо писати $dv=2Vdn$ тј. $dv=\frac{vVdt}{x}$, а како је $V=-\frac{dx}{dt}$ добија се $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$ тј. $vx=const$. Након првог судара $v=2V_0$ па је $x\approx\frac{L}{3}$, након другог судара $v=4V_0$ док је брзина блока приближно V_0 па је $x\approx\frac{L}{5}$, за следећи судар је $x\approx\frac{L}{7}$ па се може закључити да се растојање мења са $x=\frac{L}{2k-1}$, k је број судара, док се брзина честице после судара мења са $v=2kV_0$. Сада је $vx=2kV_0\frac{L}{2k-1}\approx LV_0$ за велики број судара. Из претходног се лако налази $x_{\min}=L\sqrt{\frac{m}{M}}$.

б) Нека су V и v брзине блока и честице. Смањење импулса блока услед судара једнако је промени импулса честице након судара које је $2mv$ (након неколико првих судара можемо сматрати да је V мало у поређењу са v).Нека је dn број судара који се деси у малом интервалу времена dt, онда из закона одржања импулса за кратко време dt важи $MdV = -2mvdn$. Из закона одржања енергије се добија $\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$ **(3п)** односно $v = V_0\sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{1-\frac{V^2}{V_0^2}}$ **(2п)**.

Коначно је $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\int_{V_0}^{0}\frac{dV}{V_0\sqrt{1-\frac{V^2}{V_0^2}}} = -\int_0^N dn = -N$ **(2п),** узимајући да је $y \equiv \frac{V}{V_0}$ даље је

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\int_1^0\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int_0^N dn = -N$ (интеграл је таблични $\arcsin y$ и има вредност $-\frac{\pi}{2}$) па се коначно добија $N \approx \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{M}{m}}$ **(3п).**

2. а) Коефицијент корисног дејства η топлотне машине једнак је односу извршеног рада A и количине топлоте Q_+ добијене од грејача. Означимо са p_0 и V_0 минималне, а са kp_0 и kV_0 максималне вредности притиска и запремине респективно.

Гас добија извесну количину топлоте на делу циклуса 1-2 и хоризонталним деловима "степеница" на делу циклуса 2-3. Количина топлоте која се добија на делу 1-2 једнака је промени унутрашње енергије гаса:

$$Q_{12} = \nu C_v \Delta T = 1{,}5R\frac{V_0\Delta p}{R} = 1{,}5V_0(kp_0 - p_0) = 1{,}5V_0p_0(k-1).\ \textbf{(2п)}$$

Притисак опада у делу 2-3 и то, по услову задатка од p_0k до p_0, по закону $p_0k\cdot k^{(i-1)/n}$ **(2п)** (i има вредности од 1 до n). Истовремено, на истом делу циклуса запремина расте од V_0 до V_0k по закону $V_0k^{i/n}$ **(2п)**. Узмимо сада баш i-ти степеник. На том степенику се запремина повећала од $V_0k^{(i-1)/n}$ до $V_0k^{i/n}$ **(1п)**, док је притисак константан и износи $p_0k^{1-((i-1)/n)}$ **(1п)**. Приликом преласка овог степеника гас изврши рад (хоризонтални део)

$$\Delta A = p_i\Delta V = p_0k^{1-((i-1)/n)}\cdot V_0\left(k^{i/n} - k^{(i-1)/n}\right) = kp_0V_0\left(k^{1/n}-1\right),\ \textbf{(2п)}$$

промени унутрашњу енергију (вертикални део)

$$\Delta U = \nu C_v\Delta T = 1{,}5p_i\Delta V = 1{,}5\Delta A = 1{,}5kp_0V_0\left(k^{1/n}-1\right),\ \textbf{(2п)}$$

и добије количину топлоте (хоризонтални део)

$$\Delta Q = \nu C_p\Delta T = 2{,}5p_i\Delta V = 2{,}5\Delta A = 2{,}5kp_0V_0\left(k^{1/n}-1\right).\ \textbf{(2п)}$$

На вертикалном делу степеница гас не врши рад и предаје топлоту околини.

На делу 3-1 гас врши негативан рад

$$A_{31} = -p_0\Delta V = -p_0(V_0k - V_0) = -p_0V_0(k-1).\ \textbf{(2п)}$$

Сада можемо да пишемо да је укупна количина топлоте која се добија од грејача једнака

$$Q_+ = Q_{12} + n\Delta Q = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0 + \frac{5}{2}nk\left(k^{1/n}-1\right)p_0V_0,\ \textbf{(2п)}$$

а извршени рад једнак

$$A = A_{31} + n\Delta A = -(k-1)p_0V_0 + nk\left(k^{1/n}-1\right)p_0V_0.\ \textbf{(2п)}$$

На крају добијамо да је тражени коефицијент корисног дејства топлотне машине једнак

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{-(k-1)+nk\left(k^{1/n}-1\right)}{\frac{3}{2}(k-1)+\frac{5}{2}nk\left(k^{1/n}-1\right)}.}\ \textbf{(3п)}$$

б) за $n = 10$ и $k = 5$ добијамо да је

$$\boxed{\eta = \frac{-(k-1)+nk\left(k^{1/n}-1\right)}{\frac{3}{2}(k-1)+\frac{5}{2}nk\left(k^{1/n}-1\right)} = \frac{-(5-1)+10\cdot 5\left(5^{1/10}-1\right)}{\frac{3}{2}(5-1)+\frac{5}{2}10\cdot 5\left(5^{1/10}-1\right)} = \frac{-4+50\cdot 0{,}1746}{\frac{3}{2}4+\frac{5}{2}50\cdot 0{,}1746} \approx 0{,}17.}\ \textbf{(2п)}$$

3. Број неутрона у пулсару је $N = \frac{m}{m_0} = 1{,}2\cdot 10^{57}$ **(1п)**, а њихова концентрација $n = \frac{N}{\frac{4}{3}r^3\pi} \approx 2{,}29\cdot 10^{45}\,\mathrm{m}^{-3}$ **(1п)**, па су димензије области локализације једног неутрона $a = n^{-1/3} = 7{,}58\cdot 10^{-16}\,\mathrm{m}$ **(4п)**. Средњи импулс неутрона у пулсару је $\langle p\rangle \approx \frac{\hbar}{a} \approx 1{,}39\cdot 10^{-19}\,\mathrm{kg\,m/s}$ **(4п)**. Како је $\langle p\rangle = m_0 v = \frac{m_0\frac{v}{c}c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ **(4п)**, то је $\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\langle p\rangle}{m_0 c} = 0{,}277$ **(2п)**. Квадрирањем последње једначине и решавањем по v/c добија се да је $v/c \approx 0{,}267$ **(2п)**. Одавде се закључује да је брзина кретања неутрона у пулсару нерелативистичка (јер је $\frac{v^2}{c^2} = 0{,}077 << 1$) **(2п)**, па је средња кинетичка енергија $\langle T\rangle \approx \frac{\langle p\rangle^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_0} = 5{,}77\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} \approx 36\,\mathrm{MeV}$ **(3+2п)**.

4. Ако је сила затезања сајле F, једначина кретања скеле је $ma = F - kv^2$. Ако у тренутку t_1 сила достиже максималну вредност $F_{\max}$, а убрзање и брзина скеле износе a_1 и v_1, тада је $ma_1 = F_{\max} - kv_1^2$ [3]. Пошто после тога сила остаје константна, убрзање тежи нули, и постаје нула кад сила трења достигне њену вредност. Ако је ту вредност постигло при брзини v_2, тада је

$F_{\max} = kv_2^2$ [3], па је $\qquad F_{\max} = \frac{ma_1}{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}$ [1].

Са графика се види да је

$v_1 = \int_0^{t_1} a(t)dt = S_1$ - површина испод графика до t_1. $S_1 = 98x0.4x0.004\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}1568\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_2 = \int_0^{\infty} a(t)dt = S_2$ - површина испод целог графика. $S_2 = 278x.0.4x0.004\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}4448\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_1 = (0.157 \pm 0.004)\,\mathrm{m/s}$ [3+1]

$$v_2 = (0.445 \pm 0.004)\,\mathrm{m/s} \quad [3+1]$$

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = 2x(0.004x0.4)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.0032\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0.004\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad a_1 = (0.100 \pm 0.001)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad [2+1]$$

$$F_{\max} = \frac{ma_1}{1-\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2} = 5.71 \cdot 10^3\,\mathrm{N}, \quad \Delta F_{\max} = F_{\max}\left(\frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{2\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\left(\frac{\Delta S_1}{S_1} + \frac{\Delta S_2}{S_2}\right)}{1-\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}\right) = 0.102 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$$

$$F_{\max} = (5.7 \pm 0.1) \cdot 10^3\,\mathrm{N} \quad [5+2]$$

3. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ

ОПШТА ГРУПА

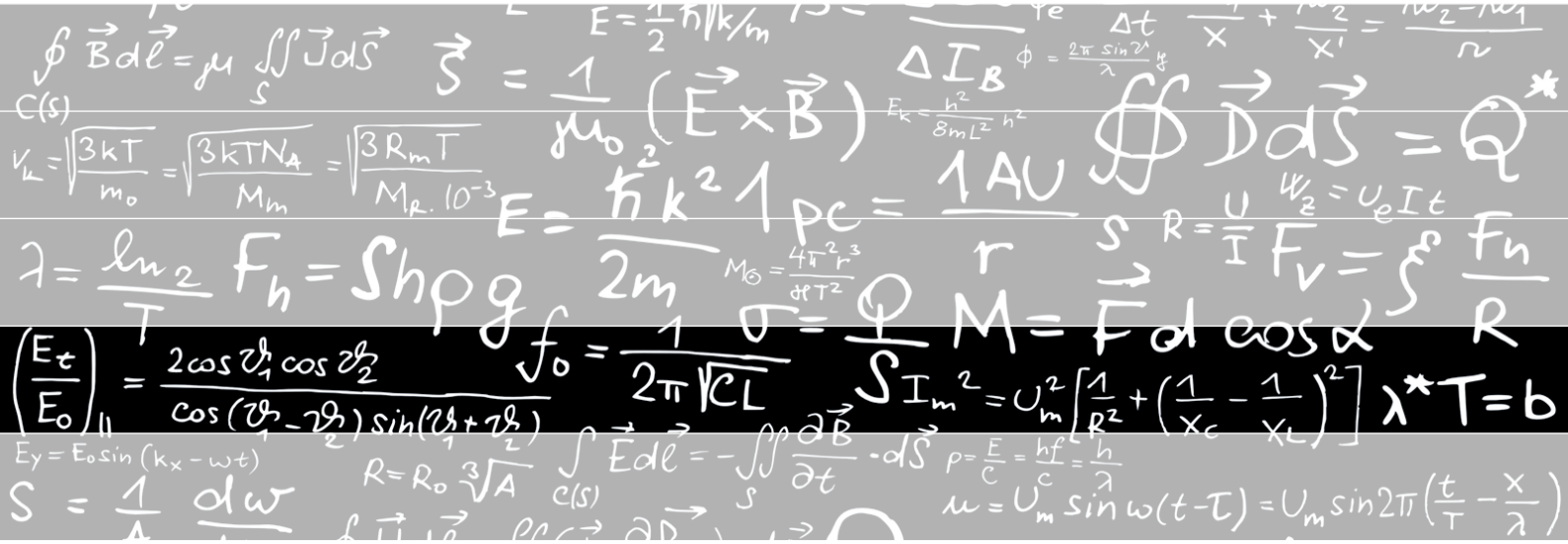
Друштво Физичара Србије
РЕЗУЛТАТИ

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
07-08.05.2009.

Рб.	Име и презиме	Школа	Место	Наставник	Т.	Е.	И.	**УК.**
1	Никола Шибалић	Математичка	Београд	Наташа Чалуковић и Бранислав Цветковић	99	67,8	86,9	**97,5**
2	Огњен Ивковић	Математичка	Београд	Наташа Чалуковић и Бранислав Цветковић	92	60	59,4	**67**
3	Александра Димић	Математичка	Београд	Наташа Чалуковић и Бранислав Цветковић	74	49,6	74,7	**58,9**
4	Александар Васиљковић	Математичка	Београд	Наташа Чалуковић и Бранислав Цветковић	86,5	58,5	70,7	**58,5**
5	Угљеша Стојановић	Рачунарска	Београд	Наташа Чалуковић	95	51	66,8	**56,2**
6	Вељко Јанковић	Математичка	Београд	Драган Цветковић	72	49,6	73,7	**55,1**
7	Миљан Дашић	Гимназија	Параћин	Љубиша Јовановић	51	33	87	**48,7**
8	Ненад Живић	С. Марковић	Ниш	Љубиша Нешић	58,8	73	57,7	**46**
9	Лука Гартнер	Гим. Ј.Ј. Змај	Нови Сад	Стеван Јанков	75	31,5		
10	Јелена Марковић	Математичка	Београд	Н. Чалуковић и Б.Цветковић	68,4	18		
11	Мина Спасић	Математичка	Београд	Н. Чалуковић и Б.Цветковић	73	22,6		
12	Дино Солар Николић	Математичка	Београд	Н. Чалуковић и Б.Цветковић	69,4			
13	Предраг Поповић	9. гимназија	Београд	Жељко Цветић	86			
14	Душан Божилов	Гимназија	Краљево	Владан Пејовић	75,8			
15	Срђан Ставрић	Гимназија	Зајечар	Младен Шљивовић	74,5			
16	Дионисије Шопић	Математичка	Београд	Драган Цветковић	2			

На олимпијаду су се пласирали ученици редних бројева 1-5

4. Српска физичка олимпијада, Београд 2010.



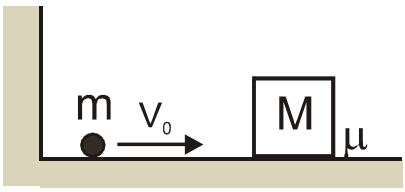
4. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2009/2010. ГОДИНЕ

Средња школа

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ - ТЕОРИЈА

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
04-05.05.2010.

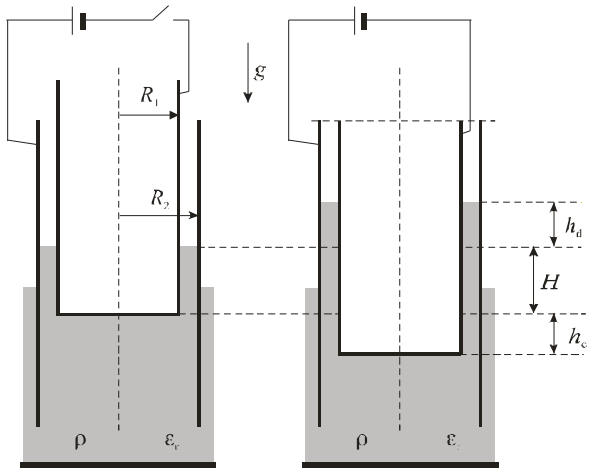
1. У систему приказаном на слици, честица занемарљивих димензија, масе m судара се апсолутно еластично са блоком масе M $(m \ll M)$ и непокретним зидом. У почетном тренутку блок мирује, а честици се саопшти почетна брзина v_0 као на слици. Честица се еластично одбија од блока, клизи по подлози без трења, судара еластично са зидом и поново креће ка блоку. Овај процес се понавља тј. честица наставља да се еластично судара са зидом и блоком. Коефицијент трења између подлоге и блока износи μ. Сматрати да је μ довољно велико тако да се блок сваки пут заустави пре него што се деси наредни судар блока са честицом. Сви судари су апсолутно еластични и тренутни тј. време трајања појединачног судара је занемарљиво мало. Одредити:



а) брзину лоптице након n – тог судара са блоком

б) растојање на које се блок помери у односу на почетни положај (20 поена)

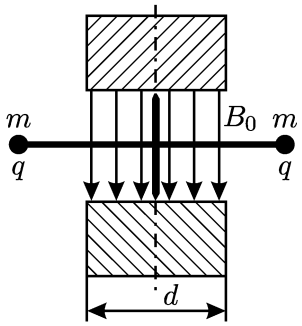
2. У великом базену напуњеном нестишљивим течним диелектриком густине ρ и релативне диелектричне пропустљивости ε_r налази се цилиндрични кондензатор образован од непокретног проводника полупречника R_2 и покретне посуде проводних зидова полупречника R_1 $(R_1 \approx R_2)$, која има дно од изолатора. Посуда плива у течном диелектрику, зароњена на дубини H (види слику). Цилиндрични кондензатор чине два коаксијална метална цилиндра.Капацитет му је $C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l / \ln(R_2/R_1)$, где је l дужина кондензатора. Када се овај кондензатор прикључи на константни напон U покретни проводник потоне мало дубље за h_c, што је праћено одговарајућим подизањем нивоа диелектрика унутар плоча кондензатора за h_d.



а) сматрајући да су нам убрзање силе земљине теже g и диелектрична пропустљивост ε_0 познати, извести општи израз за израчунавање h_c;

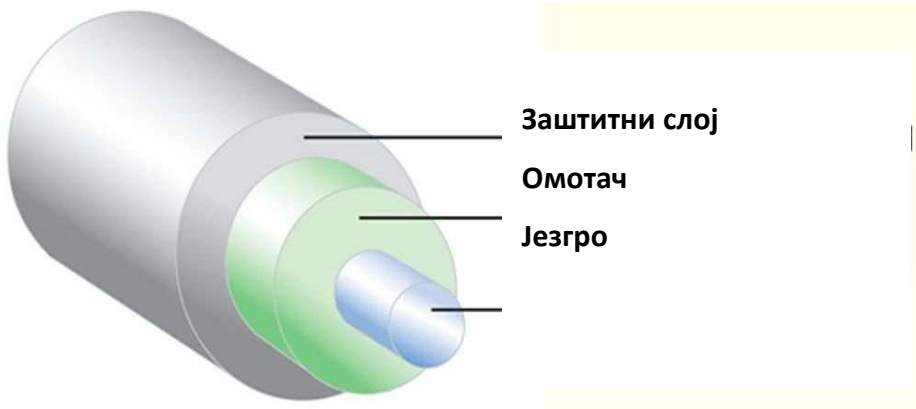
б) израчунати h_c ако су дати $R_1 = 10\,\text{mm}$, $R_2 = 11\,\text{mm}$, $\varepsilon_0 = 9\times10^{-12}\,\text{F/m}$, $\varepsilon_r = 3$, $U = 10^3\,\text{V}$, $\rho = 10^3\,\text{kg/m}^3$, $g = 10\,\text{m/s}^2$, узевши у обзир да је $\ln(1+x) \approx x$ за $x \le 0{,}1$. (20 поена)

3. Танак штапић од диелектрика, занемарљиве масе и дужине L, може слободно да ротира у хоризонталној равни, око осе која пролази кроз његову средину. На крајеве штапића су причвршћене две једнаке куглице, свака масе m и наелектрисања q. Цео систем се налази између цилиндричних полова електромагнета, који међу половима даје хомогено магнетно поље индукције B_0, вертикално на раван могуће ротације штапића. Пречник полова магнета је $d < L$, а њихове осе се поклапају са осом ротације штапића. Магнетно поље се смањује равномерно до нуле. Одредите угаону брзину коју достиже штапић када магнетно поље постане нула. Сматрати да је поље изван полова увек нула. (20 поена)



4. Светловоди или оптичка влакна су једноставни оптички уређаји који служе за вођење светлости. Ове године је половина Нобелове награде додељена Чарлсу Каоу (Charles Kao) за посебан допринос на унапређењу и развоју светловода. Савремени светловоди се углавном праве од кварцног стакла и у основи се састоје од три слоја: језгра, омотача и заштитног слоја - слика 1. Језгро и омотач имају различите индексе преламања тако да светлост због потпуног унутрашњег одбијања (тоталне унутрашње рефлексије) остаје стално унутар светловода, тачније речено његовог језгра.

а) У ком односу треба да буду индекси преламања језгра n_j и омотача n_o да би светловод уопште проводио светлост?



б) Одредити израз за максимални угао (угао прихватања) под којим светлост може да уђе у језгро светловода тако да је светловод проводи, односно да светлост „не исцури“ из светловода. Индекс преламања ваздуха је n.

в) Колика је минимална жижна даљина f сабирног сочива којим ласерски сноп пречника d=1mm треба да се уведе у светловод чији су индекси преламања n_j = 1,58 и n_o = 1,53. Сматрати да се светлост сочивом фокусира у тачку и да је индекс преламања ваздуха n =1.

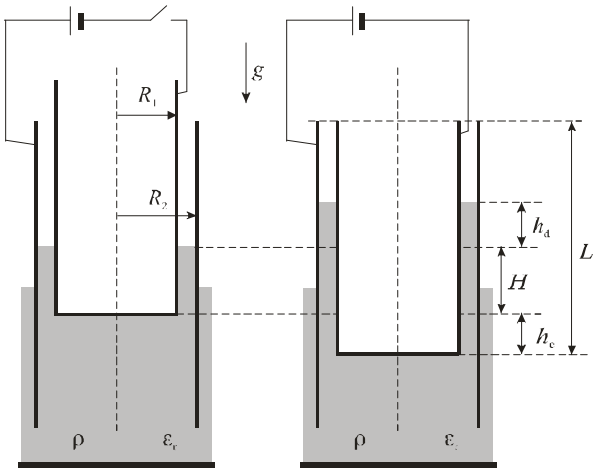
г) Проценити колики број импулса у једној секунди (брзина модулације) може да се пропусти кроз оптичко влакно дужине L= 3km истих индекса преламања као у в), тако да импулси још увек могу да се користе за пренос информација, односно да се не преклапају у времену на изласку из светловода. (20 поена)

5. При изучавању β распада $^{23}_{12}\mathrm{Mg}$ у тренутку t=0 је укључен ГМ бројач. У току временског интервала Δt=2,0s након укључења бројача број регистрованих β честица је n_1, а у току следећег интервала, који је два пута дужи од првог, број регистрованих β честица је 1,26 пута већи. Колика је константа радиоактивности $^{23}_{12}\mathrm{Mg}$? (20 поена)

Задатке припремили: Зоран Мијић (1), Маја Рабасовић (2), Александар Крмпот (3,5), Андријана Жекић (4)
Рецензенти: Александар Срећковић (1), Драган Маркушев (2), Ђорђе Спасојевић (3,5), Мићо Митровић (4)
Председник Комисије за такмичење ДФС: Проф. др Мићо Митровић,Физички факултет, Београд

1. а) Нека је v_i брзина честице након i-тог судара , из закона одржања импулса при судару са блоком важи $mv_i = MV_{i+1} - mv_{i+1}$ **(3п)**, а из закона одржања енергије следи $\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}MV_{i+1}^2 + \frac{1}{2}mv_{i+1}^2$ **(3п)** (јер се судари дешавају тренутно) где су V_{i+1} брзина блока након судара и v_{i+1} брзина честице након судара. Из претходног се налази веза $v_i = V_{i+1} + v_{i+1}$ **(2п)** одакле се комбиновањем са првом једначином налази однос брзине честица након узастопних судара $v_{i+1} = \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}v_i$ **(3п)**. Из претходног се закључује да, након n судара брзина честице очигледно износи $v_n = \left(\frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}\right)^n v_0$ **(3п).** Може се, али не мора, по услову задатка апроксимирати $\alpha = m/M << 1$, па се за брзину честице може написати $v_{i+1} \approx (1-2\alpha)v_i$ док се за брзину блока налази $V_{i+1} \approx 2\alpha v_i$. У том случају је након n судара брзина честице $v_n = (1-2\alpha)^n v_0$.

б) Укупно растојање до ког се помери блок може се добити разматрајући тренутак када је енергија честице занемарљива тј. сву своју енергију честица је предала блоку, а та енергија се практично претворила у топлоту услед деловања силе трења. Рад силе трења је дакле једнак почетној енергији честице тј. $\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu Mgd$ **(4п)** одакле је тражено растојање $d = \frac{mv_0^2}{2\mu Mg}$ **(2п)**.



2. У случају када је прекидач отворен, с`обзиром да покретни проводник плива, сила потиска биће једнака тежини покретног проводника G, тј.

$$G = g\rho\pi R_1^2 H \qquad (1)\ \textbf{(1п)}$$

Када је прекидач затворен, тако да између облога кондензатора влада напон U, покретни проводник потоне мало дубље, па је нови услов равнотеже (пливање)

$$G + F = g\rho\pi R_1^2\left(H + h_c + h_d\right), \qquad (2)\ \textbf{(2п)}$$

где је F пондеромоторна сила електростатичког поља која делује на покретни проводник.

Пошто је течни диелектрик нестишљив, запремина потиснутог дела течности једнака је запремини издигнутог слоја течности:

$$\pi R_1^2 h_c = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h_d . \qquad (3)\ \textbf{(2п)}$$

Из (1), (2) и (3) следи да је

$$F = g\rho\pi\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}h_c . \qquad (4)\ \textbf{(1п)}$$

Капацитет C овог сложеног кондензатора мења се померањем облога кондензатора, јер се мења онај део њихових површина које се међусобно поклапају. Означимо са L укупну дужину облога које се преклапају (види слику) по прикључењу на напон U. Капацитет C овог сложеног кондензатора је капацитет два паралелно везана цилиндрична кондензатора: C_0 без диелектрика и C_d са диелектриком. Дакле, можемо да пишемо да је $C = C_0 + C_\mathrm{d}$. За C_0 имамо да је

$$C_0 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L - H - h_\mathrm{d}}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}, \qquad (5)\ \textbf{(2п)}$$

а

$$C_\mathrm{d} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} \frac{H + h_\mathrm{c} + h_\mathrm{d}}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}. \qquad (6)\ \textbf{(2п)}$$

Искористивши (3) као везу између h_c и h_d, можемо (6) написати у облику

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}} \left\{ \left[(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)H + L \right] + \left[\varepsilon_\mathrm{r} + \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}(\varepsilon_\mathrm{r} - 1) \right] h_\mathrm{c} \right\}. \qquad (7)\ \textbf{(2п)}$$

Пондеромоторна сила F може се израчунати помоћу једнакости:

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial h} \right)_U, \ h = h_\mathrm{c}, \qquad (8)\ \textbf{(2п)}$$

где је $W = \frac{1}{2}CU^2$, $U = const.$ Пошто су у (7) L и H константе, на основу (8) имамо да је

$$F = \frac{1}{2}U^2 \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_U = \frac{1}{2}U^2 \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}} \frac{\varepsilon_\mathrm{r} R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \qquad (9)\ \textbf{(2п)}$$

Изједначавањем (4) и (9) добијамо да је

$$\boxed{h_\mathrm{c} = \frac{1}{\rho g} \frac{\varepsilon_0 U^2}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}} \frac{\varepsilon_\mathrm{r} R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2}}. \ \textbf{(2п)}$$

б) Заменом бројних вредности, уз $\ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\frac{11}{10} = \ln\left(1 + \frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10} = 10^{-1}$, добија се да је

$$h_c = \frac{1}{10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\,\frac{9\times10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\cdot 10^6\,\mathrm{V}^2}{10^{-1}}\,\frac{\left(3\cdot 11^2-10^2\right)\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{11^2\cdot 10^2\cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^4} = 1{,}96\times10^{-4}\,\mathrm{m}\approx 0{,}2\,\mathrm{mm}$$ **(2п)**

3. Због промене магнетног поља, у равни нормалној на магнетно поље индукује се електрично поље, чије су линије концентрични кругови, па се индукује и у контури могуће ротације штапа. Наелектрисања која се нађу у њему кретаће се тако да се супростављају промени поља кроз контуру, по Ленцовом правилу. Индукована ЕМС у тој контури је

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -S\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{\pi d^2}{4}\frac{\Delta B}{\Delta t}\,.\textbf{(3п)}$$

Магнетна индукција се смањује равномерно. Ако за време τ падне на нулу, тада је $B = B_0 - \frac{B_0}{\tau}t$,

па је $\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{B_0}{\tau}$.**(2п)**, а индукована ЕМС износи $\varepsilon = \frac{\pi d^2 B_0}{4\tau}$ **(3п)**

ЕМС је, с друге стране једнака раду "страних" сила на раздвајању јединичних наелектрисања, односно

$$\varepsilon = \frac{A_s}{q} = \frac{F_s L\pi}{q} = EL\pi\,,\ \textbf{(3п)}$$

одакле се добија индуковано електрично поље

$$E = \frac{d^2 B_0}{4\tau L}\,.\textbf{(3п)}$$

Ово поље убрзава посматрана наелектрисања, па је

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{qd^2 B_0}{4m\tau L}\,.\textbf{(2п)}$$

За време смањења поља τ наелектрисања достижу периферну брзину

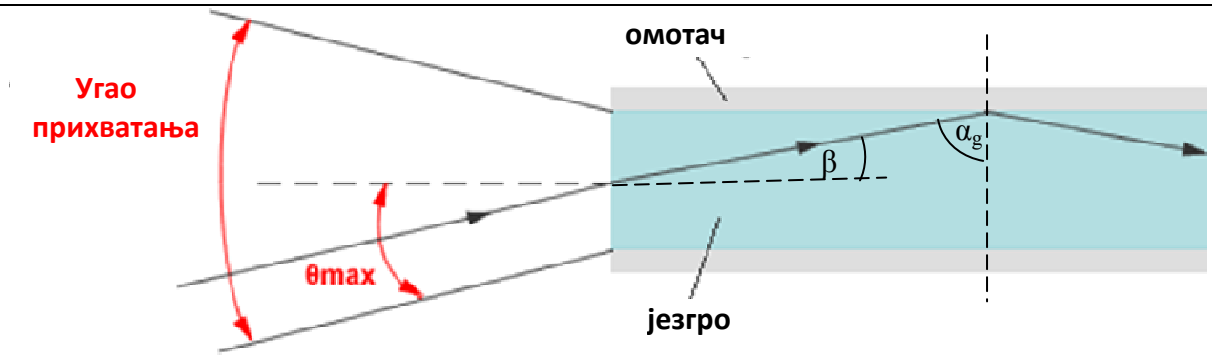
$$v = a\tau = \frac{qd^2 B_0}{4mL}\,,\textbf{(2п)}$$

односно, угаону брзину

$$\omega = \frac{2v}{L} = \frac{qd^2 B_0}{2mL^2}\ \textbf{(2п)}$$

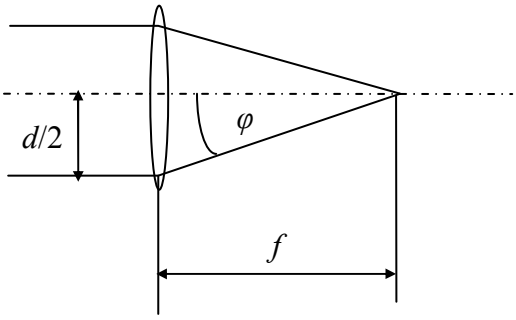
4. а) Да би светлост приликом простирања кроз светловод остала у њему мора бити испуњен услов за потпуно унутрашње одбијање, односно $n_j > n_o$. **(1п)**

б) Да би се зрак простирао кроз светловод на граници језгро-омотач мора бити испуњен услов за потпуно унутрашње одбијање. Јасно је да зрак мора доћи под углом већим од граничног угла за потпуно унутрашње одбијање α_g. Гранични угао је дат са $\sin\alpha_g = \frac{n_o}{n_j}$. **(2п)**



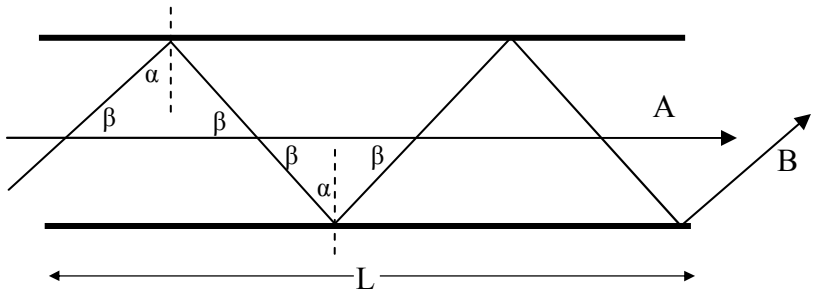
Снелов закон на уласку у влакно гласи $n\sin\theta_{\max} = n_j \sin(90^o - \alpha_g)$ **(1п)**. Пошто је $\sin(90^o - \alpha_g) = \cos\alpha_g$ онда је $n\sin\theta_{\max} = n_j \cos\alpha_g$ **(1п)**. Из тригонометријског идентитета $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ следи да је $n\sin\theta_{\max} = n_j\sqrt{1-\sin^2\alpha_g}$ **(1п)**. Заменом за вредност синуса граничног угла се добија $\sin\theta_{\max} = \dfrac{\sqrt{n_j^2 - n_o^2}}{n}$ **(1п)**. Пун угао прихватања је $2\theta_{\max} = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{n_j^2 - n_o^2}}{n}$ **(1п)**

в) Узимајући у обзир да се светлост фокусира у тачку, угао 2φ под којим се фокусира не сме бити већи од $2\theta_{\max}$ $(\varphi \le \theta_{\max})$**(1п)**. Ласерски сноп је колимисан (сноп паралелних зрака) тако да ће се он фокусирати управо у жижи сочва. Са слике је јасно да је $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{d}{2f}$ **(1п)**, односно $f \ge \dfrac{d}{2\mathrm{tg}\theta_{\max}} = \dfrac{d}{2}\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta_{\max}}}{\sin\theta_{\max}} = \dfrac{d}{2}\sqrt{\dfrac{n^2}{n_j^2 - n_o^2} - 1}$ **(1п)**. Заменом нумеричких вредности добија се $f \ge 1{,}17\,\mathrm{mm}$ **(1п)**



г) Када се један импулс простире кроз светловод разаличити зраци улазе под различитим угловима па самим тим прелазе и различите путеве. Ово доводи до појаве да поједини делови светлосног импулса услед преласка различитих путева кроз светловод стижу до краја светловода у различито време што у принципу проширује дужину трајања импулса. Посматрајмо зрак А који се простире дуж оптичке осе и неки други зрак В који се простире под углом α у односу на оптичку осу. Зрак А ће прећи пут $L_A = L$ **(2п)** док ће зрак В прећи пут $L_B = \dfrac{L}{\cos\beta} = \dfrac{L}{\sin\alpha}$ **(2п)**, где је $\alpha = 90^\circ - \beta$ угао под којим овакав зрак пада на границу језгра и омотача. Кашњење између ова два зрака је максимално када је угао α минималан, тј када је једнак граничном углу за потпуно унутрашње одбијање α_g**(1п)**. Брзина светлости у светловоду је $v = \dfrac{c}{n_j}$ **(1п)**. Следи да је

максимално кашњење измежу два зрака $\Delta t = \frac{L_B - L_A}{v} = \frac{\frac{Ln_j}{n_o} - L}{c} n_j = 516\text{ns}$ **(1п)**. Ово се уједно може узети и за време након којег се импулси неће преклапати па следи да се може послати $\frac{1\text{s}}{516\text{ns}} \approx 1{,}93 \cdot 10^6$ **(1п)**импулса у секунди.



5. Број нераспаднутих језгара у узорку који се испитује након два релевантна временска интервала је

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda \Delta t} \ \textbf{(2п)} \text{ и } N_2 = N_0 e^{-3\lambda \Delta t} \ \textbf{(2п)},$$

па је број распаднутих језгара (емитованих β честица) за време Δt једнак

$$n_1 = N_0 - N_1 = N_0(1 - e^{-\lambda \Delta t}) \ \textbf{(2п)}, \text{ а за време } 3\Delta t \ \ n_2 = N_1 - N_2 = N_0(e^{-\lambda \Delta t} - e^{-3\lambda \Delta t}) \ \textbf{(2п)}.$$

Из претходне две једначине следи

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{e^{-\lambda \Delta t} - e^{-3\lambda \Delta t}}{1 - e^{-\lambda \Delta t}} \ \textbf{(2п)}$$

Ову једначину можемо решити помоћу смене $x = e^{-\lambda \Delta t}$. Тако добијамо

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{x\left(1 - x^2\right)}{1 - x} = x\left(1 + x\right) \ \textbf{(2п)} \text{ односно } \quad x^2 + x - \frac{n_2}{n_1} = 0 \ \textbf{(2п)}.$$

Решења ове једначине су $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4n_2 / n_1}}{2}$ **(2п)**, а физичког смисла има само позитивно решење $x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n_2 / n_1}}{2}$ **(1п)**. Одавде је

$$\lambda = -\frac{1}{\Delta t} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + 4n_2 / n_1} - 1}{2}\right) \ \textbf{(2п)},$$

што за $n_2 / n_1 = 1{,}26$ даје

$$\lambda = 0{,}16\text{s}^{-1} \ \textbf{(1п)}$$

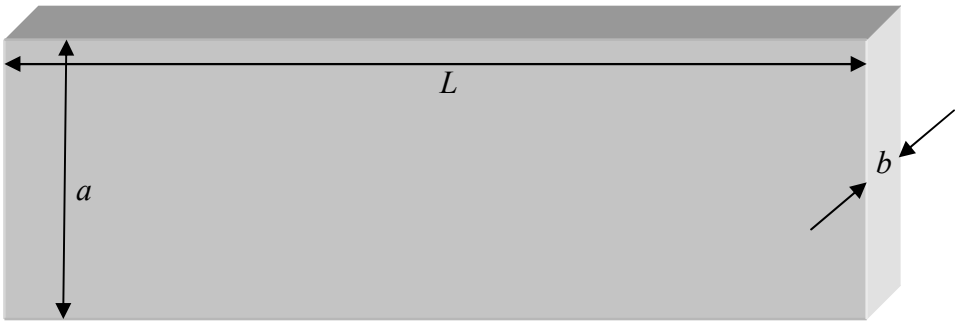
САВИЈАЊЕ ЕЛАСТИЧНЕ ПЛОЧЕ

Циљ експеримента:

Савијање еластичне плоче је један од могућих модова њених деформација. Када се плоча савије па препусти самој себи, она почне да осцилује. Услед губитка енергије осцилације су пригушене. **Основни циљ експеримента** је да се из измереног периода и пригушења осцилација **одреде модул еластичности** E и **параметар** ε **еластичног хистерезиса** материјала од којег је плоча направљена.

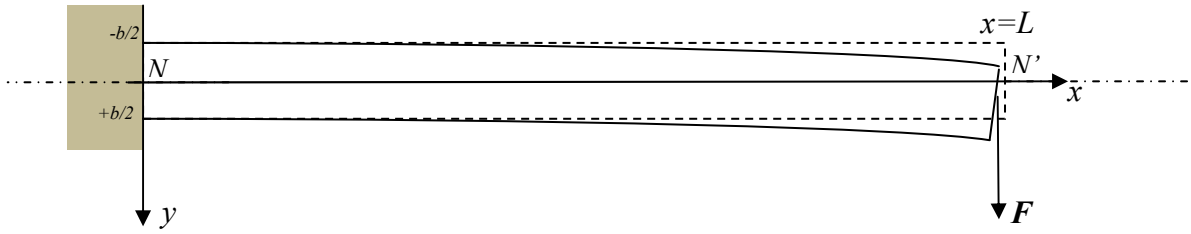
Теоријски увод:

Нека (недеформисана) плоча има облик квадра дужине L, ширине a и дебљине b ($b < a < L$) – слика 1.



Слика 1.

Нека је ова плоча на једном крају (основом нормалном на дужину) учвршћена – слика 2, док је други крај плоче слободан.[1] Дуж NN' представља раван симетрије плоче нормалну на дебљину b.



Слика 2.

Плоча се савија силом $\boldsymbol{F}$ која делује на њен слободни крај, паралелно дебљини b. Дужи паралелне ширини плоче остају такве и не деформишу се. Дужи паралелне дужини плоче се криве и мењају дужину. Изузетак су дужи из равни NN' које се само криве, али не мењају дужину. Стога се за линију NN' каже да је ***неутрална***. Коначно, дужи паралелне висини плоче не мењају дужину, али мењају правац остајући нормалне на неутралну линију.

[1] Слика 2 се добија када се плоча са слике 1 гледа „одозго“. Раван цртежа слике 2 је нормална на ширину плоче и сече је по средини; пресек је правоугаоник страница L и b.

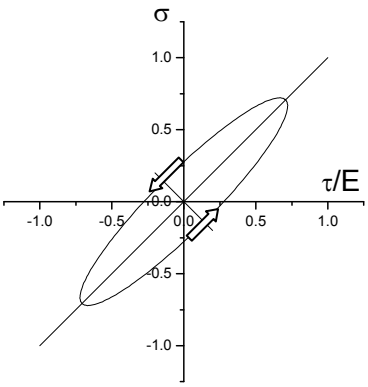
Уведимо x координату дуж неутралне линије пре савијања, y координату усмеримо дуж силе $\boldsymbol{F}$ која изазива савијање, а координатни почетак поставимо у тачку N – слика 2. У овом систему координата једначина неутралне линије (види додатак) при малим деформацијама гласи

$$y(x) = \frac{6F}{Eab^3} x^2 \left(L - \frac{x}{3} \right)$$

одакле померање y краја плоче ($x = L$) под дејством силе F износи

$$y = \frac{4L^3}{Eab^3} F \ .$$

Нека је на крај плоче причвршћена маса M знатно већа од масе плоче. Када се маса изведе из равнотежног положаја померањем у **хоризонталној** равни и пусти, јавиће се пригушене осцилације. Пригушење настаје првенствено услед еластичног хистерезиса у материјалу плоче.



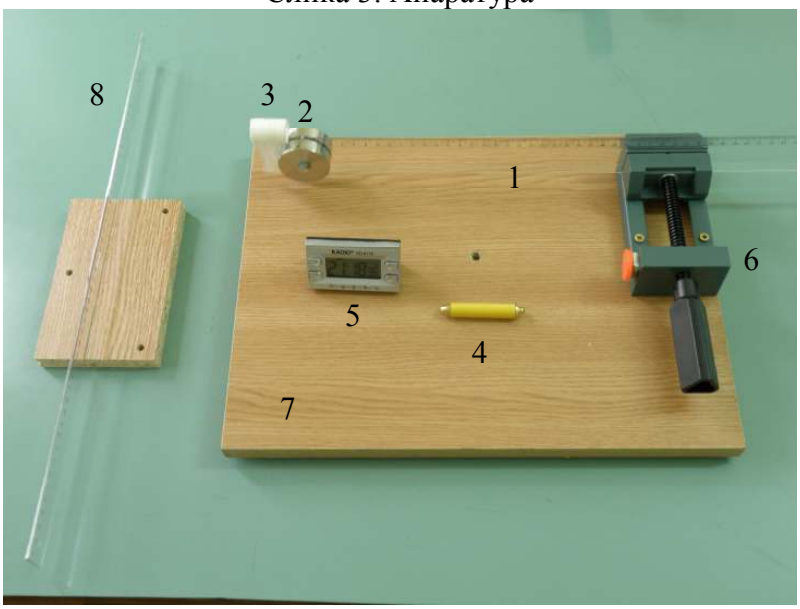
За идеално еластичан материјал релативна деформација је једнака количнику тангенцијалног напона и модула еластичности; $\sigma = \tau / E$ и график је права линија. За реалне материјале σ касни, те се јавља хистерезисна петља – слика лево. Када се деформација и напон мењају **хармонијски** петља је елипса. Величина:

$$\varepsilon = \frac{\text{mala osa}}{\text{velika osa}}$$

је параметар хистерезиса који зависи од фреквенције. Површина оивичена елипсом одговара енергијским губицима услед хистерезиса током једног циклуса.

<u>Опис апаратуре:</u>

Слика 3. Апаратура



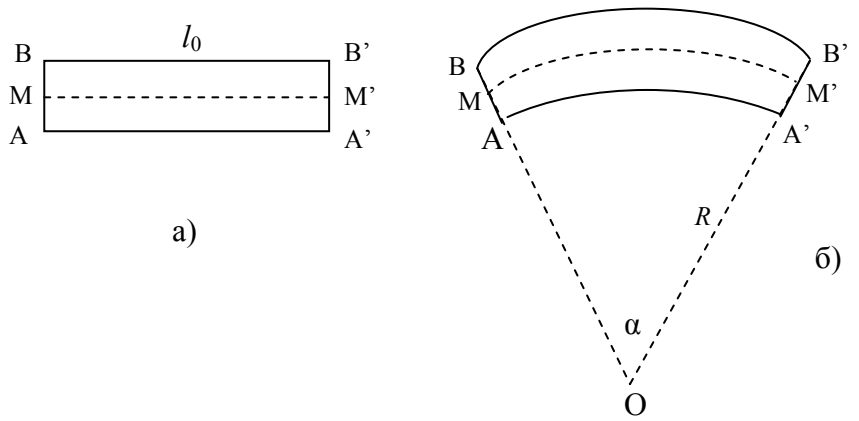
Апаратура (слика 3) се састоји из: пластичног лењира (1), причвршћене масе (2) – узети вредност од техничког сарадника, постоља за ласер (3), ласера (4), дигиталног хронометра (5), стеге (6),

постоља (7) и лењира за очитавање ласерског спота (8). Поред овога на располагању су: и метарска трака, нонијус и микрометар.

Задатак: (носи укупно 100 поена; поени за сваки део задатка су дати у угластим заградама)

1) Измерити параметре лењира: ширину a и дебљину b. Ради једноставнијег приступа занемарити сужења дебљине лењира дуж скале, тј сматрати да је лењир квадар. Прикачена маса: $M = (282{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g}$ **[10]**
2) Написати једначину осциловања масе M занемарујући пригушење. **[5]**
3) Написати формулу која описује зависност периода осциловања T од дужине L дела лењира између стеге и масе M. **[5]**
4) Објасните како се из измерене зависности периода осциловања T од дужине L може одредити модул еластичности пластике од које је лењир направљен и како се може проценити максимална апсолутна грешка тако одређене величине. **[5]**
5) Измерити период осциловања T за неколико дужина L. Мерења вршити у интервалу 250mm < L < 400mm. Резултате мерења приказати табеларно и графички. На основу графика одредити модул еластичности. Проценити апсолутну грешку. **[30]**
6) Наћи једначину пригушених осцилација при малом параметру хистерезиса $\varepsilon \ll 1$. **[15]**
7) Објаснити како се мерењем пригушења амплитуда може одредити параметар хистерезиса ε. **[5]**
8) Измерити параметар хистерезиса ε за фреквенцију која се јавља при $L = 415\mathrm{mm}$. Поставити заклон за праћење ласерског зрака на растојање око 1m од ласера. Затим укључити ласер уз помоћ техничког сарадника. Повлачењем монтиране масе савити лењир тако да се ласерски сноп помери за 8-10cm. Ово померање је пропорционално почетној амплитуди. Пустити систем да осцилује и измерити амплитуду A_2 након $n = 2$ осцилације. Понављати процедуру при **истој почетној амплитуди**, те редом измерити амплитуде A_4, A_6, A_8, … Након завршетка мерења обавезно искључити ласер. Резултате мерења приказати табеларно и графички. На основу графика одредити параметар хистерезиса ε. Због обимности задатка није потребно одређивати грешке. **[25]**

Додатак: (није га неопходно прочитати за успешну реализацију експеримента)



Слика 4.

Једначину неутралне линије налазимо на следећи начин. Уочимо пре савијања делић између два попречна пресека плоче AB и $A'B'$ – слика 4а; растојање l_0 између пресека је веома мала величина, а MM' део неутралне линије између пресека. Облик делића након савијања је дат на слици 4б – то је исечак цилиндричног слоја дебљине b, висине a, средњег полупречника R и угла исечка α (α је мали угао); центар слоја је тачка O. Уочимо да је R полупречник, а O центар

кривине за сегмент *MM'* неутралне линије. Вреди $l_0 = R\alpha$ јер је лук *MM'* део неутралне линије. Уведимо координату ρ коју меримо *M* од ка *B*; тачки *A* одговара $\rho=-b/2$, тачки *M* $\rho=0$, а тачки *B* $\rho=+b/2$. Уочимо пре савијања дуж са координатом ρ, паралелну неутралној линији; њена дужина је l_0. Након савијања ова дуж постаје лук полупречника $R+\rho$ и дужине $l=(R+\rho)\alpha$ обзиром да се ρ услед савијања не мења. Стога је $\Delta l=l-l_0=\rho\alpha$ апсолутно, а $\Delta l/l_0=\rho\alpha/R$ релативно истезање, те се на на крајевима ове линије јавља напон $\tau=E\Delta l/l_0=E\rho/R$, где је *E* модул еластичности. Укупну еластичну силу F_e на пресеку *AB* налазимо интеграцијом напона τ по попречном пресеку: $F_e=\int \tau dS=\int_{-b/2}^{b/2} E\frac{\rho}{R} a d\rho=0$. Укупни момент силе који ствара описана расподела еластичних напона износи $M_e=\int \rho\tau dS=\frac{Ea}{R}\int_{-b/2}^{b/2}\rho^2 d\rho=\frac{Eab^3}{12R}$ и, обзиром да је $F_e=0$, не зависи од избора пола у односу на који се рачуна. У *x-y* систему координата, полупречник кривине *R* је $\frac{1}{R}=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$, где су y' и y'' први и други извод по *x* једначине неутралне линије $y=y(x)$. За мале деформације је $R\approx 1/y''$, тако да је $M_e\approx\frac{Eab^3}{12}y''$. Уочимо сада део плоче од попречног пресека са *x* координатом па до краја плоче. На крају плоче делује сила *F*, а на попречном пресеку еластични напони настали деловањем дела плоче од почетка плоче до уоченог попречног пресека. Како су деформације мале, *x* компоненте дају резултанту $F_e=0$ чији је момент M_e, док *y* компоненте напона дају силу *F'* која уравнотежава силу *F* и са њом образује спрег сила са моментом $(L-x)F$ који уравнотежава еластични момент M_e. Тако налазимо $y''=\frac{12F}{Eab^3}(L-x)$. Двоструком интеграцијом ове диференцијалне једначине, коришћењем услова $y(0)=0$ и $y'(0)=0$, добијамо $y(x)=\frac{6F}{Eab^3}x^2\left(L-\frac{x}{3}\right)$, што је тражена једначина неутралне линије савијене плоче.

Припремио: *др Ђорђе Спасојевић,* Физички факултет, Београд

Председник Комисије за такмичење ДФС: *др Мићо Митровић,*Физички факултет, Београд

РЕШЕЊЕ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ЗАДАТКА

1) Ширину лењира мерити нонијусом (тачност 0,02mm), а дебљину микрометром (тачност 0,01mm). Мерења ширине и дебљине извршити на више места распоређених (приближно) равномерно по целом лењиру. За мерне вредности узети средње вредности. За апсолутне грешке узети максимална одступања од средње вредности (односно тачност мерног инструмента ако је максимално одступање мање). Следе резултати мерења добијених на тест апаратури.

Маса: $M = (282{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g}$

Ширина: (мерено нонијусом тачности 0,02mm)

a [mm]	42,06	42,04	42,14	42,18	42.08

a=(42,10±0,08) mm **[5]**

Дебљина: (мерено микрометром тачности 0,01mm)

b [mm]	3,13	3,05	3,07	3,14	3,12

b=(3,10±0,05)mm **[5]**

2) Када је плоча савијена на причвршћену масу делује сила $F = \frac{Eab^3}{4L^3} y$ која се јавља услед еластичних напона у плочи и која игра улогу реституционе силе за кретање масе M. Стога једначина осциловања масе гласи:

$$M \cdot \ddot{y} = -\frac{Eab^3}{4L^3} y$$

3) На основу претходне једначине угаона фреквенција осцилација износи $\omega = \sqrt{\frac{Eab^3}{4ML^3}}$, **[2]**

одакле је период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ једнак

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4ML^3}{Eab^3}} \quad [3]$$

4) Квадрат периода је линеарна функција куба дужине:

$$T^2 = \frac{16\pi^2 M}{Eab^3} L^3 \quad [1]$$

Нагиб ове праве је $k = \frac{16\pi^2 M}{Eab^3}$, одакле је модул еластичности

$$E = \frac{16\pi^2 M}{kab^3} \quad [2]$$

а његова максимална апсолутна грешка

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b} \quad [2]$$

5) Мерења је потребно извршити за најмање 6 парова вредности L и T.

Мерења дужине L су вршена метарском траком тачности 1mm; стога је узето $\Delta L = 1\,\text{mm}$.

Мерења периода T су вршена тако што је за сваку дужину по 3 пута мерено трајање 10 осцилација t_{10}. Ова трајања су мерена дигиталним хронометром номиналне тачности 0,01s. Обзиром да се хронометар укључује и искључује ручно, грешка Δt_{10} појединачног мерења величине t_{10} је, због нерепродуцибилности рефлекса, већа од номиналне тачности хронометра. Процењено је да је грешка појединачног мерења 0,05s.

За мерну вредност величине t_{10} је узимана средња вредност 3 измерене вредности трајања 10 осцилација, а за њену апсолутну грешку Δt_{10} максимално одступање од средње вредности, односно грешка појадиначног мерења када је већа од максималног одступања.

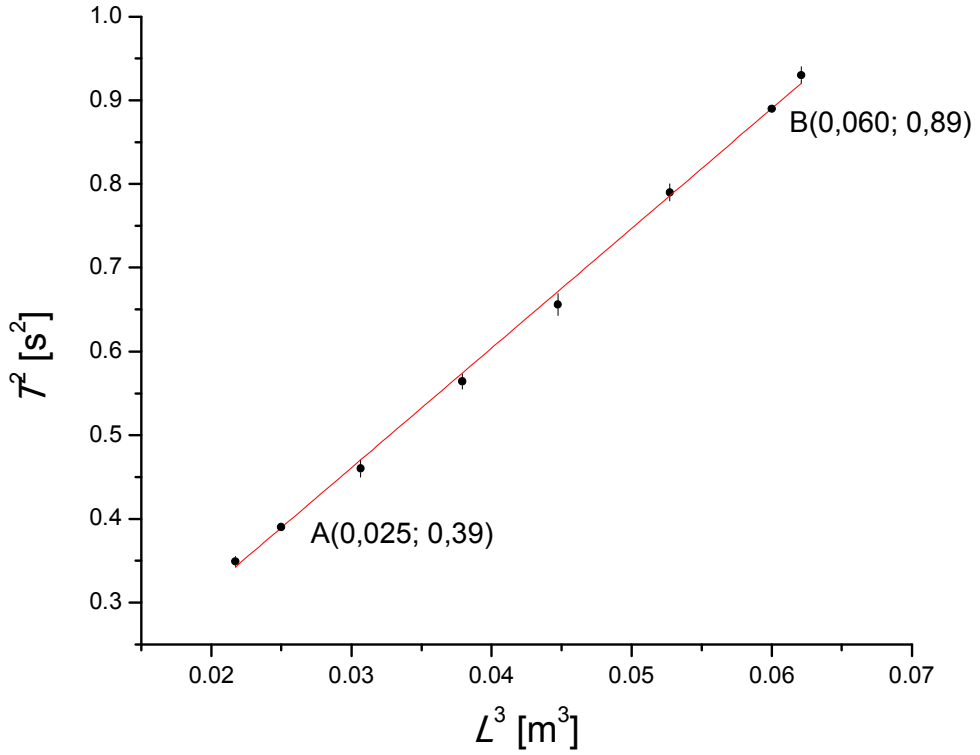
Реултати мерења су приказани у табели 1. Последње две колоне табеле садрже податке потребне за линеаризацију графика.

Табела 1 **[15]**

L [m]	t_{10}^{i} [s]	t_{10} [s]	Δt_{10} [s]	T [s]	ΔT [s]	L^3 [m^3]	T^2 [s^2]	ΔT^2 [s^2]
0,396	9,64	9,65	0,05	0,965	0,005	0,0621	0,93	0,01
	9,62							
	9,69							
0,375	8,96	8,90	0,06	0,890	0,006	0,05273	0,79	0,01
	8,84							
	8,90							
0,355	8,11	8,10	0,08	0,810	0,008	0,04474	0,656	0,013
	8,17							
	8,02							
0,336	7,47	7,51	0,06	0,751	0,006	0,03793	0,564	0,009
	7,57							
	7,49							
0,313	6,89	6,82	0,07	0,682	0,007	0,03066	0,46	0,01
	6,77							
	6,80							
0,279	5,92	5,91	0,05	0,591	0,005	0,02172	0,349	0,006
	5,88							
	5,93							

Грешке: $\Delta T = \Delta t_{10}/10$, $\Delta\left(L^3\right) = 3L^2\Delta L$, $\Delta\left(T^2\right) = 2T\Delta T$.

На слици 5 је дат график зависности квадрата периода (T^2) у функцији куба дужине (L^3). **[10]**



Слика 5: зависност квадрата периода (T^2) у функцији куба дужине (L^3)

Уцртана је најбоља права и изабране тачке А и В из којих одређујемо нагиб k. Апсолутну грешку рачунамо из:

$$\frac{\Delta k}{k} \approx \frac{\Delta y_{\mathrm{A}} + \Delta y_{\mathrm{B}}}{|y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}|} = \frac{0,01+0,01}{|0,39-0,89|} = 0,04 \quad \textbf{[1]}$$

тако да коначно налазимо:

$$k = (14,3 \pm 0,6)\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3} \quad \textbf{[2]}$$

Уз помоћ ове вредности налазимо:

$$E = (2,5 \pm 0,3)\cdot 10^9\,\mathrm{Pa} \quad \textbf{[2]}$$

6) Нека је ξ координата дуж велике, а η координата дуж мале осе елипсе. При хармонијском кретању ове величине се мењају по закону

$$\xi = A\cos\omega t \ \text{ и } \ \eta = \varepsilon A \sin\omega t \ . \ \textbf{[3]}$$

Нека је $x = \tau / E$ и $y = \sigma$. Вреди $x = \dfrac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$ и $y = \dfrac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}$ **[3]**. Одавде је при $\varepsilon \ll 1$

$$x \approx y + 2\frac{\varepsilon}{\omega}\dot{y} \quad \textbf{[3]}$$

Сада на основу пропорционалности закључујемо да је сила

$$F \approx M\omega_0^2\left(y + 2\frac{\varepsilon}{\omega}\dot{y}\right) \quad \textbf{[3]}$$

одакле се види да једначина осциловања приближно гласи

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \textbf{[3]}$$

што претставља једначину пригушених осцилација.

7) Током пригушених осцилација амплитуда се експоненцијално смањује $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ **[1]**, где је $\beta = \varepsilon\omega_0$. Стога је n-та амплитуда ($t_n = nT = 2\pi n / \omega_0$)

$$A_n = A_0 e^{-2\pi\varepsilon n} \quad \textbf{[2]}$$

То значи да се снимањем A_n у функцији од n и линеаризацијом

$$\ln A_n = \ln A_0 - (2\pi\varepsilon) n \quad \textbf{[2]}$$

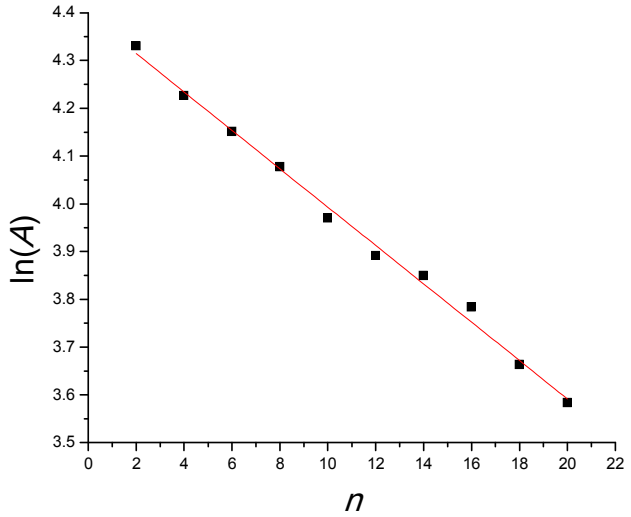
параметар хистерезиса ε може одредити и коефицијента правца ове линеаризоване зависности.

8) Извршити мерења за најмање 6 амплитуда. Мерење сваке амплитуде вршити барем 3 пута. Резултати мерења су дати у табели 2. У табелу су ради једноставности унете само средње вредности амплитуда а не и појединачна мерења.

Табела 2. Амплитуда осцилација у функцији n. Почетна амплитуда је $A_0 = 85$ mm. **[15]**

n	A [mm]	ln(A)
2	76	4.33073
4	68.5	4.22683
6	63.5	4.15104
8	59	4.07754
10	53	3.97029
12	49	3.89182
14	47	3.85015
16	44	3.78419
18	39	3.66356
20	36	3.58352

График линеаризоване зависности је дат на слици 6. **[8]**



Коефицијент правца $k' = -2\pi\varepsilon$ најбоље праве износи -0,0402, одакле је

$\varepsilon = 0,0064$. **[2]**

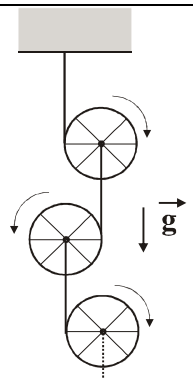
ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2009/2010. ГОДИНЕ

IV РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
Физички факултет

ЗАДАЦИ
Изборно такмичење
28.05.2010.

1. У систему са слике сви обручи су идентични, а све нити су безмасене и неистегљиве. Свака нит је једним крајем намотана на обруч, а другим крајем везана за центар претходног обруча (осим горње нити која је везана за фиксирану подлогу, види слику). Сматрати да су обручи танки и да је маса обруча распоређена хомогено по ободу (маса паока је занемарљива). Занемарити све силе трења у систему и сматрати да су у сваком тренутку све нити вертикалне. Ако је цео систем почео да се креће из стања мировања одредити убрзање првог (горњег) обруча у случају:

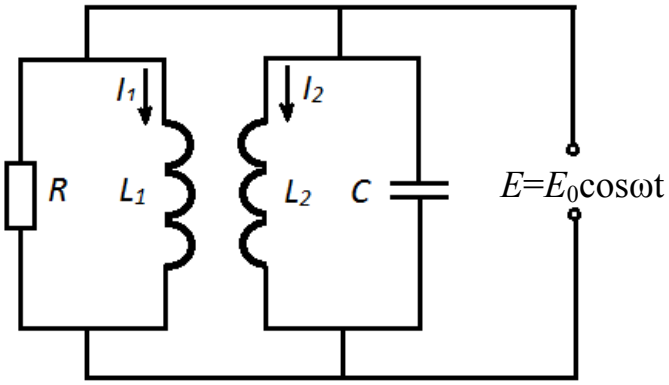


а) ако се систем састоји од $N = 3$ обруча,

б) ако се систем састоји од великог броја обруча тј. $N \to \infty$.

3. Наћи комплексну проводност $\sigma = \dfrac{1}{Z}$ кола са слике у којем су завојнице индуктивно спрегнуте тако да је флукс Φ_1 кроз завојницу индуктивитета L_1 при смеровима струја I_1 и I_2 као на слици једнак $\Phi_1 = LI_1 + MI_2$. Колика је средња снага $\langle P \rangle$ коју даје извор ако вреди:

$$L_1\omega = L_2\omega = 2R_0,\ M\omega = 1/C\omega = R_0,\ R = 3R_0$$



4. Фотони X зрачења енергије 1MeV расејавају се на:
а) електронима који мирују,
б) електронима кинетичке енергије 100keV који се крећу у сусрет фотонима.
Одредити енергију расејаних фотона на углу од 180^0 у оба случаја; енергија мировања електрона је 0,511 MeV.

5. Расположивим прибором и мерним инструментима измерити однос $\dfrac{I_0}{m}$ картона кога сте добили, где су: I_0 - момент инерције картона у односу на осу ротације која пролази кроз његово тежиште и нормална је на раван картона, m - маса картона.
Мерни комплет: Картон, Конац, игла, лењир, хронометар
Напомена: За максималну оцену задатка није потребно понављати мерење другим мерним инструментима, осим хронометром. Другим речима, није потребно мењати односе директно мерених фичичких величина.

Задатке припремио: *мр Александар Крмпот,* Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Ђорђе Спасојевић,* Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,*Физички факултет, Београд

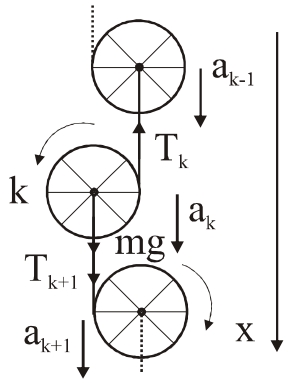
ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2009/2010. ГОДИНЕ

IV РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕШЕЊА
Изборно такмичење
28.05.2010.

1. *а)* претпоставимо да се систем састоји од N обруча који се крећу на доле у смеру x осе. Ако посматрамо кретање k - тог обруча на њега делују (видети слику) сила затезања конца T_k навише (конац који повезује k и $k-1$ обруч) и сила Земљине теже и затезања конца T_{k+1} наниже (конац који повезује k и $k+1$ обруч). Једанчина кретања k - тог ($k=1,...N$) обруча је



$$ma_k = mg + T_{k+1} - T_k \qquad (1)$$

где је m маса обруча, а a_k убрзање центра масе обруча. Иста једначина важи и за кретање последњег (најнижег) обруча при чему је $T_{k+1}=0$ (просто та нит не постоји) па једначина (1) описује систем од N једначина са $2N$ непознатих (a_k и T_k). Додатних N једначина неопходних за решавање система налазимо из закона одржања енергије. Након времена t од почетка кретања обруч k има убрзање a_k при чему је прешао пут $S_k = a_k t^2/2$. У том тренутку центар обруча има брзину $v_k = a_k t$ и угаону брзину ротације, око осе симетрије, ω_k при чему важи $\omega_k R = v_k - v_{k-1}$. Укупна кинетичка енергија транслаторног и ротационог кретања обруча једнака је раду појединих сила и то: позитивном раду на путу S_k силе Земљине теже (тј. промени потенцијалне енергије обруча) и силе T_{k+1} и негативном раду силе T_k на путу S_{k-1}. Закон одржања енергије се може написати у облику (**видети напомену**)

$$\frac{1}{2}mv_k^2 + \frac{1}{2}I\omega_k^2 = mgS_k + T_{k+1}S_k - T_kS_{k-1} \qquad (2)$$

где је $I = mR^2$ момент инерције обруча. Комбинацијом претходних једначина за силе затезања се добија

$$T_k = m(a_k - a_{k-1}) \quad k=1,...N \qquad (3)$$

Једначине (1) и (3) чине систем од $2N$ са $2N$ непознатих. Уврштавањем (3) у (1) добија се веза између појединих убрзања обруча тј.

$$-a_{k-1} + 3a_k - a_{k+1} = g \quad k=1,...N \qquad (4)$$

Очиглено, убрзање $a_0 = 0$ (јер се плафон не креће), а из (3) следи и да је $a_{N+1} = a_N$. У случају $N=3$ ($k=1,2,3$) једначина (4) даје систем

$$\begin{aligned} 3a_1 - a_2 \qquad &= g \\ -a_1 + 3a_2 - a_3 &= g \\ -a_2 + 2a_3 &= g \end{aligned}$$

чије је решење $a_1 = \frac{8}{13}g \quad a_2 = \frac{11}{13}g \;\; a_3 = \frac{12}{13}g$.

б) У случају великок броја обруча у систему, једначина (4) из претходног дела такође важи. Претпоставимо убрзање првог обруча да је облика $a_1 = \lambda g$ где је λ коефицијент (скаларна величина) коју треба одредити. У систему референце везаном за први обруч који се креће убрзањем a_1, кретање свих осталих обруча је описано истим једначинама као и у претходном случају, али са ефективним убрзањем Земљине теже $g' = g - a_1 = (1-\lambda)g$ (обручи ефективно "живе " у свету где је гравитација таква да важи $g' = g - a_1$). Пошто је велики број обруча у питању можемо узети да за убрзање првог обруча у овом систему (а то је у ствари други обруч у непокретном систему) важи иста релација тј. $a_1' = \lambda g'$. За тај други обруч у непокретном систему важи $a_2 = a_1' + a_1 = (2-\lambda)\lambda g$. Узимајући у обзир једначину (4) за први обруч тј. $k=1$ добија се једначина $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ чије је позитивно решење $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (јер смо изабрали позитивна смер убрзања на доле). Коначно је тражено убрзање првог обруча $a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}g$.

Напомена: Треба приметити да се резултат добијен на овај начин (дакле за велики број N),

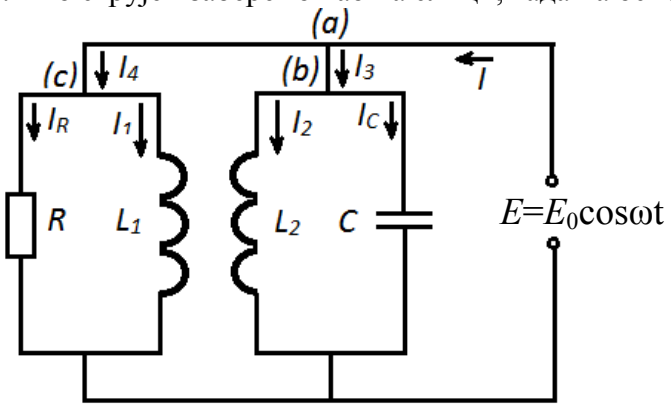
разликује од резултата за случај $N=3$ за 0,5%. Већ за $N=10$ је та разлика реда 10^{-5}, тако да за већи број N је резултат изузетно прецизан.

Напомена за рад силе T_k :

Ова сила врши позитиван рад јер омогућава ротацију обруча тј. $T_k R d\varphi$ и негативан рад јер спречава транслаторно кретање обруча на путу S_k тј. $T_k S_k$. Како је тај пут који пређе обруч једнак збиру пута који пређе претходни котур S_{k-1} и дужини колико се одмота конац $Rd\varphi$ то је укупан рад ове силе $A = T_k R d\varphi - T_k S_k = -T_k S_{k-1}$.

Пример: код силе трење котрљања укупан рад је једнак нули (практично она транслаторно кретање само преводи у ротационо), што је слично као и овај случај (ако силу затезања нити посматрамо као силу котрљања) само што овде осим ротације имамо и заједничко кретање са претходним обручом и на том путу ова сила врши рад.

3. Ако струје изаберемо као на слици, тада на основу 1. Кирхофовог правила следи:



(a) $I = I_3 + I_4$

(b) $I_3 = I_2 + I_C$

(c) $I_4 = I_1 + I_R$

2. Кирхофово правило даје:

$$L_1\dot{I}_1 + M\dot{I}_2 = E_0 \cos\omega t$$
$$L_2\dot{I}_2 + M\dot{I}_1 = E_0 \cos\omega t$$
$$RI_R = E_0 \cos\omega t$$
$$q/C = E_0 \cos\omega t$$

а вреди и $\dot{q} = I_C$. У стационарном стању осциловања све величине (принудно) осцилују фреквенцијом ω уз неки фазни помак. Пређимо на комплексну нотацију. Тада је $E = E_0 e^{i\omega t}$, док нпр. струја I_1 у комплексној нотацији гласи $I_1 = I_{10} e^{i\omega t}$. Овде је $I_{10} = |I_{10}| e^{i\alpha_1}$ комплексна амплитуда, док је α_1 фазни помак струје I_1 у односу на електромоторну силу. Амплитуда струје I_R је $I_{R0} = E_0 / R$. Амплитуду струје I_C која тече кроз кондензатор C налазимо диференцирањем једначине $q/C = E_0 \cos\omega t$ по времену. Тако добијамо $I_C = \dot{q} = C\dot{E}(t)$, што у комплексној нотацији даје $I_C = iC\omega E$. Амплитуде струја кроз завојнице налазимо из система:

$$i\omega L_1 I_{10} + i\omega M I_{20} = E_0$$
$$i\omega M I_{10} + i\omega L_2 I_{20} = E_0$$

чијим се решавањем добија:

$$I_{10} = \frac{L_2 - M}{i\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right)} E_0, \quad I_{20} = \frac{L_1 - M}{i\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right)} E_0.$$

Како је $I = I_1 + I_2 + I_C + I_R$, исти однос вреди за комплексне амплитуде ових величина, одакле је

$$I_0 = \left[\frac{L_1 + L_2 - 2M}{i\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right)} + i\omega C + \frac{1}{R}\right] E_0 = \sigma E$$, те је коначно

$$\sigma = \frac{1}{R} + i\left[\omega C - \frac{L_1 + L_2 - 2M}{\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right)}\right].$$

За $L_1\omega = L_2\omega = 2R_0$, $M\omega = 1/C\omega = R_0$, $R = 3R_0$ је $\sigma = \frac{1-i}{3R_0}$, одакле је $Z = \frac{3R_0}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}$. Стога је

$I = \frac{\sqrt{2}}{3R_0} E_0 \cos\left(\omega t + \pi/4\right)$, те је тренутна снага $P(t) = I(t)E(t) = \frac{\sqrt{2}}{3R_0} E_0^2 \cos\omega t \cos\left(\omega t + \pi/4\right)$.

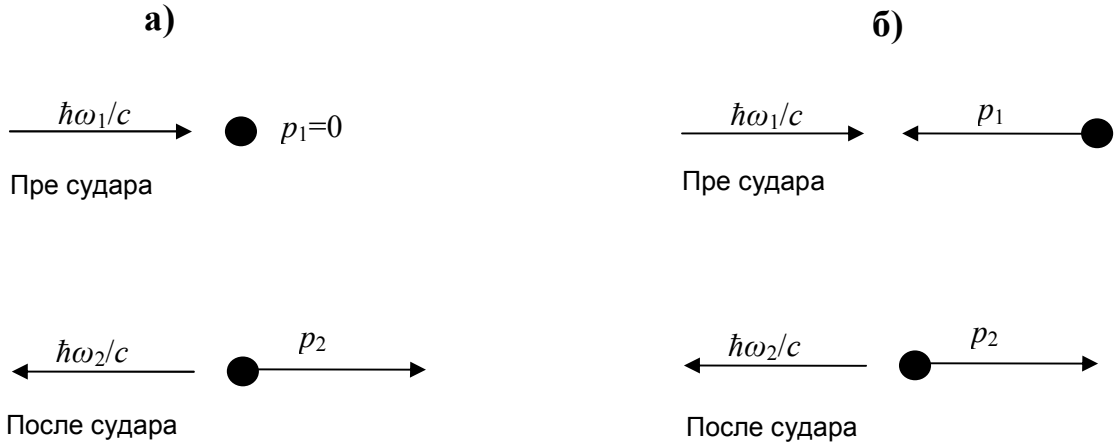
Средња снага је $\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$. Тако налазимо

$$\langle P \rangle = \frac{E_0^2}{6R_0}.$$

4. Нека је енергија упадних фотона $\hbar\omega_1$, а расејаних $\hbar\omega_2$. Нека су E_1, p_1 и E_2, p_2 почетне и крајње енергије и импулси електрона (слика 1). Обзиром да је

$$E^2 - p^2c^2 = \left(m_0c^2\right)^2, \qquad (1)$$

где је m_0 маса мировања електрона, за електрон кинетичке енергије 100 keV је $E_1 = m_0c^2 + T = 0{,}611\text{MeV}$. Одавде је $p_1c = 0{,}335$ MeV, што је мање од енергије фотона. Стога у оба случаја импулс система има исти смер као и импулс фотона. Сударе можемо претставити наредном сликом.



Закон одржања импулса даје:

$$\frac{\hbar\omega_1}{c} - p_1 = p_2 - \frac{\hbar\omega_2}{c}, \qquad (2)$$

а закон одржања енергије

$$\hbar\omega_1 + E_1 = \hbar\omega_2 + E_2. \qquad (3)$$

Да би се добио одговор и под а) и под б) потребно је из претходне две једначине одредити $\hbar\omega_2$. Напишимо их у нешто другачијем облику:

$$E_2 = \hbar(\omega_1 - \omega_2) + E_1 \quad \text{и} \quad p_2c = \hbar(\omega_1 + \omega_2) - p_1c. \qquad (4)$$

Квадрирањем и одузимањем претходне две једначине добија се:

$$4\hbar\omega_1\hbar\omega_2 = 2\hbar\omega_1(E_1 + p_1c) - 2\hbar\omega_2(E_1 - p_1c). \qquad (5)$$

Дељењем последње једначине са $2\hbar^2\omega_1\omega_2$ добија се:

$$\frac{E_1 + p_1c}{\hbar\omega_2} = 2 + \frac{E_1 - p_1c}{\hbar\omega_1}. \qquad (6)$$

а) Када електрон пре судара мирује његов импулс је $p_1 = 0$, а укупна енергија је једнака

енергији мировања $E_1 = m_0c^2 = 0,511\text{MeV}$ па се (6) своди на

$$\frac{E_1}{\hbar\omega_2} = 2 + \frac{E_1}{\hbar\omega_1} \qquad (7)$$

односно

$$\frac{1}{\hbar\omega_2} = \frac{2}{E_1} + \frac{1}{\hbar\omega_1}. \qquad (8)$$

Заменом нумеричких вредности добија се $\hbar\omega_2 = 0,204\text{MeV}$.

б) За електрон кинетичке енергије 100keV смо већ нашли да $E_1 = m_0c^2 + T = 0,611\text{MeV}$ и $p_1c = 0,335\text{MeV}$. Заменом ових вредности у (6) добија се $\hbar\omega_2 = 0,416\text{MeV}$.

5. Пробадањем картона на два места, његовим вешањем о конац одређују се два правца на којима лежи тежиште, које се налази у пресеку ових праваца. (3 п, 2 п ако правци не заклапају угао већи од $70°$, или ако су прободена места удаљена од ивице картона више од 1,5cm)

Формирати физичко клатно са осом ротације око једног од прободених места (1п)

Период осциловања физичког клатна износи

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mgl}}$, па је

$$\frac{I_0}{m} = \frac{T^2gl}{4\pi^2} - l^2 \quad (2\text{п})$$

Мерење периода (2п)

	t[s]
1	8.16
2	8.18
3	8.24

$t_s = 8.193\ s$, $|t - t_s|_{\max} = 0.047\ s$, $t = (8.19 \pm 0.5)\ s$, $T = (0.819 \pm 0.05)\ s$ (2п)

$l = (0.187 \pm 0.001)\ m$ (2п)

$$\frac{I_0}{m} = \frac{T^2gl}{4\pi^2} - l^2 = \frac{0.819^2 \cdot 9.81 \cdot 0.187}{4\pi^2} m^2 - 0.187^2 m^2 \approx 0.0308 m^2 \quad (4\text{п})$$

$$\Delta\left(\frac{I_0}{m}\right) = \frac{T^2gl}{4\pi^2}\left(\frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta l}{l}\right) + 2l\Delta l = 0.031\left(\frac{2 \cdot 0.0047}{0.8193} + \frac{0.001}{0.187}\right)m^2 + 2 \cdot 0.187 \cdot 0.001 m^2 \approx 8.9 \cdot 10^{-4} m^2 \quad (2\text{п})$$

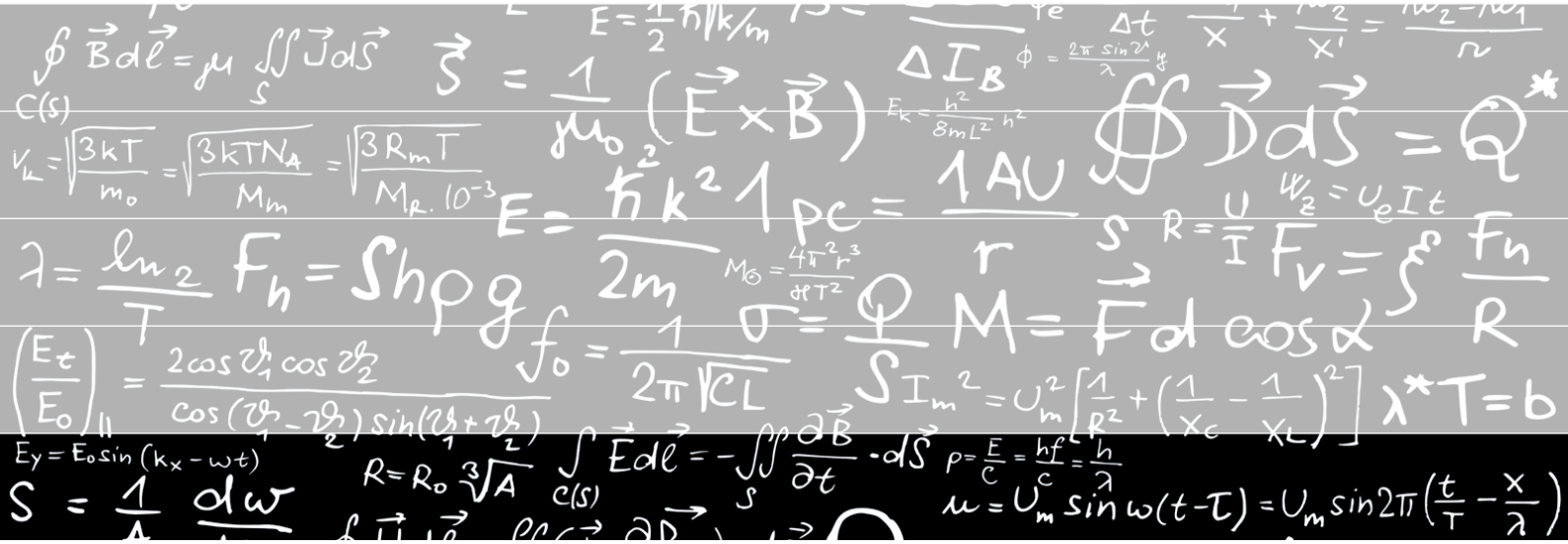
$\frac{I_0}{m} = (0.0308 \pm 0.0009)m^2 = (3.08 \pm 0.09) \cdot 10^{-2} m^2$ или

$\frac{I_0}{m} = (0.031 \pm 0.001)m^2 = (3.1 \pm 0.1) \cdot 10^{-2} m^2$ (1п)

Друштво Физичара Србије
РЕЗУЛТАТИ

Екипу Србије на 41. Међународној физичкој олимпијади су представљали: Наташа Димић, Александар Васиљковић, Јездимир Милошевић и Душан Перовић сви из Математичке гимназије у Београду, као и Угљеша Стојановић из Рачунарске гимназије у Београду.

5. Српска физичка олимпијада, Београд 2011.



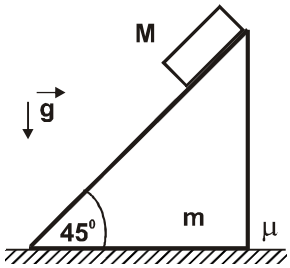
5. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2010/11

Средња школа

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ - ТЕОРИЈА

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
4. и 5. мај 2011.

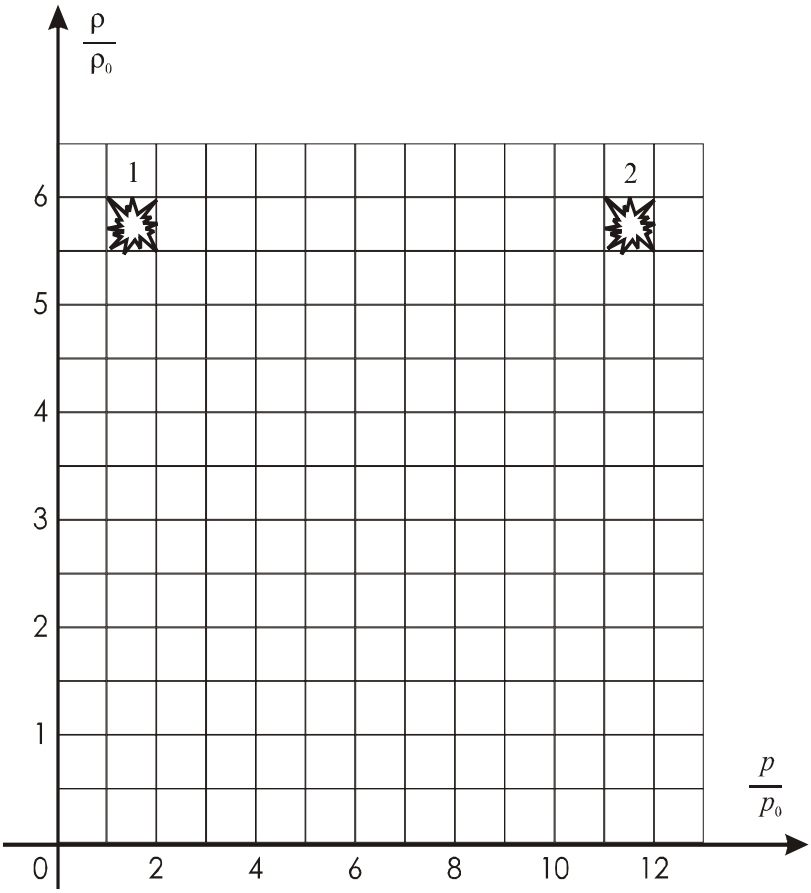
1. На хоризонталној подлози се налази клин масе m и нагибног угла $\alpha = 45^\circ$ (слика). На клин се пажљиво стави блок масе $M >> m$ тако да се цео систем почне да креће из стања мировања. Коефицијент трења имеђу подлоге и клина је μ, док се трење између блока и клина може занемарити. Одредити силу којом блок делује на клин. **(25 п)**



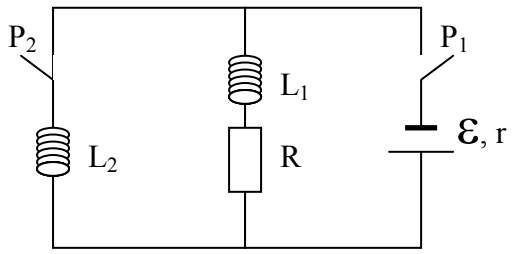
Слика

2. При нормалним условима кисеоник се, као идеални гас, састоји од двоатомских молекула O_2. Приликом повећања температуре тог гаса део молекула кисеоника може дисосовати тако да се од сваког молекула O_2 образују два атома O. На слици су приказана два идентична термодинамичка процеса 1 и 2 у (ρ, p) координатном систему, где је ρ - густина гаса, а p - његов притисак. На осама су бездимензионе величине ρ/ρ_0 и p/p_0, где су ρ_0 и p_0 произвољне константе. Први циклус одговара експерименту у коме је радно тело био молекулски кисеоник O_2. Други циклус одговара експерименту изведеном на знатно вишим температурама, тако да се радно тело састојало од кисеоника као гаса који је делом био у молекулском (O_2) а делом у атомском (O) стању. Степен дисоцијације α кисеоника током експеримента био је константан. Укупна маса гаса у оба експеримента била је иста. Познато је да је однос максималних температура у ова два експеримента једнак $k_{max} = T_{2max}/T_{1max} = 5{,}0$.

а) Израчунајте бројну вредност степена дисоцијације α (део дисосованих молекула) кисеоника у другом експерименту. б) Израчунајте бројну вредност односа k_{min} минималних температура у овим експериментима. Имајте на уму да увек важи Далтонов закон да је притисак смеше $p = p_O + p_{O_2}$. **(25 п)**

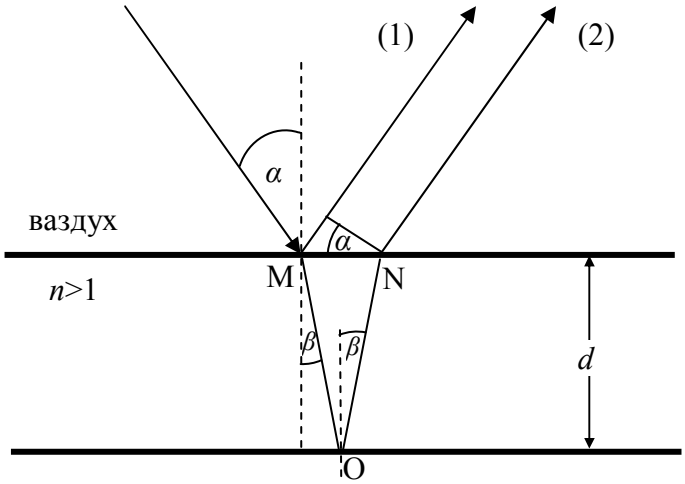


3. На шеми са слике оба прекидача су у почетку искључена. Затим се прекидач P_1 затвори. После успостављања стационарног режима затвори се и прекидач P_2. Одредити колико наелектрисање протекне кроз отпорник R после затварања прекидача P_2. Величине R, r, ε, L_1 и L_2 су познате, а отпорности калемова су занемарљиве. **(20 п)**



4. **Оптички резонатор**. Оптички резонатор чине две рефлектујуће паралелне површине на које светлосни сноп пада нормално (или под неким углом) и узастопно се рефлектује бесконачно много пута између тих површина. У реалности се овакав систем реализује тако што се два огледала поставе једно према другоме и такав уређај се назива Фабри-Перо интерферометар, назван по његовим проналазачима, француским физичарима, Шарлу Фабрију (Maurice Paul Auguste Charles Fabry 1867- 1945), познатом такође и по открићу озонског слоја у Земљиној атмосфери, и Алфреду Пероу (Jean-Baptiste Alfred Perot 1863- 1925). Примене овог уређаја су вишеструке. Он се користи као: резонатор у ласерима, оптички спектрални анализатор високе моћи разлагања (резолуције), а ако се уместо физички раздвојених огледала на танку планпаралелну плочицу нанесу рефлективни слојеви, онда се такав уређај користи као изразито ускопојасни оптички филтер тзв. еталон. Код Фабри-Перо интерферометра се интерференција одиграва између бесконачно много зракова за разлику од Мајкелсоновог и сличних интерферометара где се интерференција одиграва између два зрака. Фабри-Перо интерферометри, или у општем случају оптички резонатори, се зато битно другачије понашају од Мајкелсоновог интерферометра и имају другачије особине што ће бити предмет задатка.

А) Претпоставимо да раван монохромаски талас, таласне дужине λ, пада из ваздуха под малим углом α на планпаралелну плочицу индекса преламања n и дебљине d. Одредити фазну разлику ϕ насталу <u>искључиво</u> услед <u>половине</u> путне разлике између таласа (1) и (2) – види слику 1.



Слика 1

Б) Када раван електромагнетни талас, интензитета I_0, пада на планпаралелну плочицу занемариве апсорпције део таласа се рефлектује, а остатак пролази (трансмитује се). Квадрат односа амлитуде рефлектованог и упадног таласа је једнак коефицијенту рефлексије, односно $\left(A_R / A_0\right)^2 = R$. Посматрајући бесконачно много узастопних рефлексија између страна планпаралелне плочице наћи како зависи интензитет I_T пропуштеног (трансмитованог) таласа од фазне разлике ϕ (нађене у претходном делу задатка) и познатог коефицијента рефлексије R. Обе стране планпаралелне плочице имају исти коефицијент рефлексије[2]. Сви зраци који пролазе кроз плочицу имају <u>паран</u> број рефлексија на граници оптички гушћа – оптички ређа средина те зато по изласку из плочице нема скока фазе. (<u>Помоћ:</u> временски независна <u>комплексна</u> амплитуда таласа (насталих рефлексијама и трансмисијама упадног таласа) је $A = kA_0 e^{i\delta}$, где је δ <u>укупна</u> фазна разлика у односу на упадни талас, док је k реалан број који показује колико пута се модуо амплитуде посматраног таласа смањио у односу на амплитуду A_0 упадног таласа; интензитет електромагнетног таласа комплексне амплитуде A је $I = \frac{c\varepsilon_0}{2}|A|^2 = \frac{c\varepsilon_0}{2} AA^*$, где звездица у горњем индексу означава комплексну коњугацију. Ојлерова формула: $e^{ix} = \sin x + i\cos x$)

В) Наћи зависност интензитета I_R рефлектованог таласа од фазне разлике ϕ и коефицијента рефлексије R.

Г) Користећи резултат добијен под Б) наћи услов при којем је интензитет пропуштеног (трансмитованог) таласа највећи. Колики је тај интензитет? Колики је тада интензитет рефлектованог таласа?

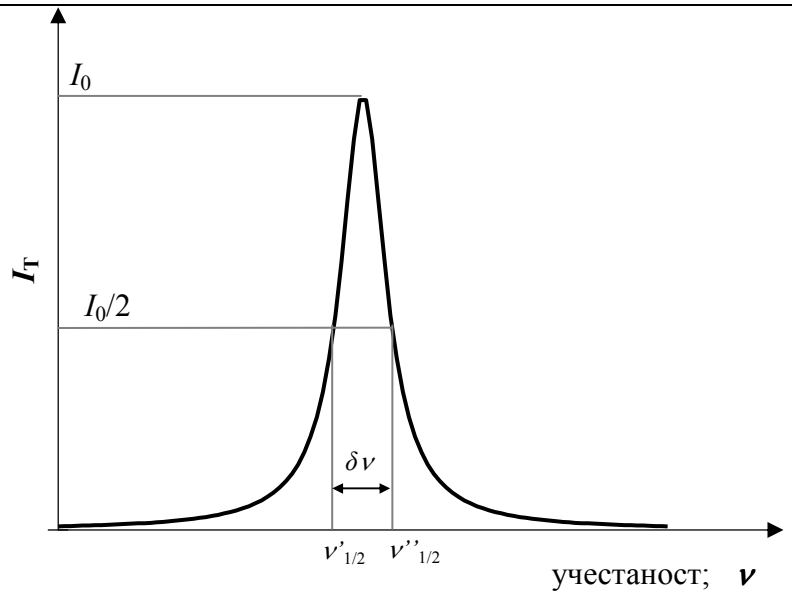
Д) На основу претходног резултата наћи разлику учестаности $\Delta\nu$ између два узастопна трансмисиона максимума (слободни спектрални интервал интерферометра). Колика је та разлика приликом нормалног упада светлосног снопа на планпаралелну плочицу?

Ђ) Показати да се упрошћеним разматрањем помоћу модела цеви затворене са оба краја добија претходни резултат за нормални упад. Максимуму трансмисије одговара услов за стварање стојећег таласа у цеви затвореној са оба краја.

Е) За типичну дужину резонатора од 30cm код He-Ne ласера који емитује на 632,8nm израчунати слободни спектрални интервал $\Delta\nu$ и наћи његов однос према учестаности на којој ласер емитује. Узети да је индекс преламања унутар резонатора n=1.

Ж) Наћи колика је ширина $\delta\nu$ на половини висине једног трансмисионог максимума (лонгитудиналног мода). Посматрати нормални упад. (Ширина на половини висине је разлика учестаности тачака са супротних страна трансмисионог максимума за које је $I_T = I_0 / 2$ - слика 2.) . Сматрати да је коефицијент рефлексије близак јединици.

[2] За нормални упад (α=0) је $R = \left(n-1\right)^2 / \left(n+1\right)^2$; иако R зависи од α, за мале упадне углове је $R \approx const$.



Слика 2

З) За пример под Е) одредити ширину лонгитудиналног мода $\delta\nu$ ако је коефицијент рефлекије огледала 98%. Наћи однос ширине мода према учестаности на којој ласер емитује. Појачање средине се занемарује.

И) Финеса оптичког резонатора или Фабри-Перо интерферометра је однос $\Delta\nu/\delta\nu$ слободног спектралног интервала $\Delta\nu$ и ширине мода $\delta\nu$. Другим речима, финеса је једнака броју модова који могу да се сместе у један слободни спектрални интервал. Финеса је врло битна особина која се наводи уз сваки уређај такве врсте јер говори о реалној моћи разлагања (резолуцији) резонатора. На основу резултата под Д) и Ж) наћи израз за финесу оптичког резонатора. Колика је финеса резонатора He-Ne ласера из примера под З)? **(30 п)**

Задатке припремили: Зоран Мијић, Александар Крмпот, Андријана Жекић и Драган Маркушев
Рецензент: Мићо Митровић
Председник Комисије за такмичење ДФС: Проф. др Мићо Митровић, Физички факултет, Београд

5. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2010/11

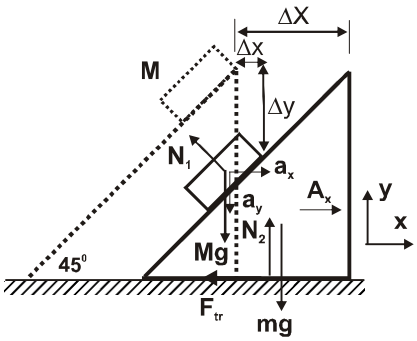
Средња школа

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
04. и 05. мај 2011.

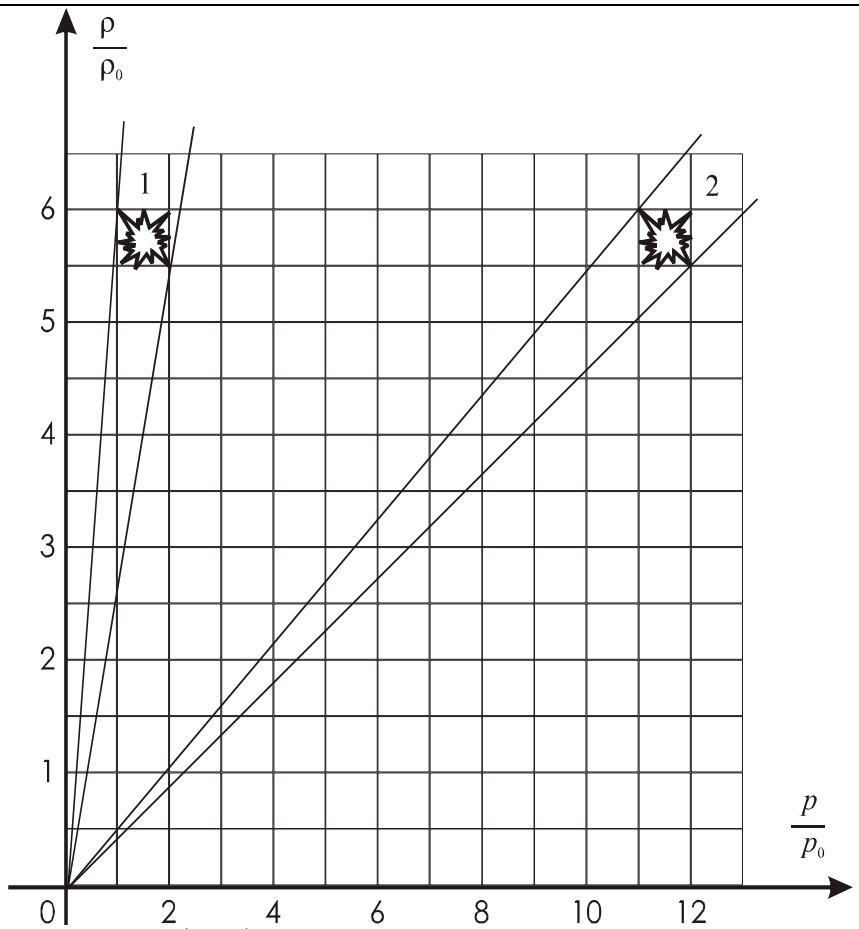
РЕШЕЊА ТЕОРИЈСКИХ ЗАДАТАКА

1. На слици су приказане силе које делују у систему, као и претпостављени смерови кретања блока и клина. Ако се изабере координатни систем као на слици једначина кретања клина може да се напишу у облику $mA_x = N_1 \sin\alpha - F_{tr}$ **(2п)** где је A_x убрзање клина, N_1 тражена сила, а $F_{tr} = \mu N_2$ **(2п)** сила трења између клина и подлоге при чему важи $N_2 = N_1 \cos\alpha + mg$ **(2п)**. За кретање блока у односу на подлогу важи $Ma_x = -N_1 \sin\alpha$ **(2п)** и $Ma_y = Mg - N_1 \cos\alpha$ **(2п)** где су a_x и a_y одговарајуће компоненте убрзања блока. Са слике се закључује да мора да важи $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta X - \Delta x}$ **(3п)** где су Δx и Δy одговарајућа померања блока, док је ΔX померај клина. Узимајући у обзир да је $tg45^\circ = 1$, као и да је систем почео да се креће из стања мировања закључује се да важи једнакост $a_y = A_x - a_x$ **(3п)**. Из претходних једначина се за тражену силу налази $N_1 = \dfrac{\sqrt{2}Mmg(1+\mu)}{2m + M(1-\mu)}$ **(3п)** односно имајући у виду услов $M >> m$ коначно се добија $N_1 \approx \sqrt{2}mg\dfrac{(1+\mu)}{(1-\mu)}$ **(1п)**.



Слика

2. Нека је ν број молова O_2 пре дисоцијације, и нека је α део дисосованих молекула. Број молова молекулског кисеоника O_2 после дисоцијације износиће $\nu_{O_2} = (1-\alpha)\nu$ **(1 п)**, док ће број молова атомског кисеоника O износити $\nu_O = 2\alpha\nu$ **(1 п)**. Једначине стања идеалног гаса за молекулски и атомски кисеоник биће:



$p_{O_2}V = \nu_{O_2}RT = (1-\alpha)\nu RT$, **(1 п)** и $p_O V = \nu_O RT = 2\alpha\nu RT$. **(1 п)**

Сагласно Далтоновом закону притисак смеше је $p = p_O + p_{O_2}$, одакле је

$$pV = (1+\alpha)\nu RT = \frac{m}{M_{O_2}}RT(1+\alpha), \textbf{ (1 п)}$$

где је M_{O_2} - моларна маса O_2 . Последњу једначину можемо преписати у виду

$$p = \frac{\rho}{M_{O_2}}RT(1+\alpha), \text{ или } \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 = \frac{RT_2}{M_{O_2}}(1+\alpha), \textbf{ (1 п)}$$

где индекс 2 означава да се ради о другом циклусу. Аналогно се за први циклус добија

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_1 = \frac{RT_1}{M_{O_2}}. \textbf{ (1 п)}$$

Ови односи дају везу p/ρ са температуром T . Ако сада погледамо добијене графике циклуса 1 и 2, можемо видети да је

$$\left(\frac{\rho}{p}\right)_{1,\max} = \frac{M_{O_2}}{R}\frac{1}{T_{1,\max}}, \textbf{ (2 п)} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\rho}{p}\right)_{2,\max} = \frac{M_{O_2}}{R(1+\alpha)}\frac{1}{T_{2,\max}}. \textbf{ (2 п)}$$

а) Величине $(\rho/p)_{1,\max}$ и $(\rho/p)_{2,\max}$ одређене су нагибом тангенти циклуса 1 и 2, а које крећу из координатног почетка. За вредности максималних температура то су тангенте са *најнижим* **(1 п)** нагибом у датим циклусима. Са графика се јасно види да је однос $r_{\max}$ ових тангенти једнак

$$r_{\max}=\frac{\left(\frac{\rho}{p}\right)_{1,\max}}{\left(\frac{\rho}{p}\right)_{2,\max}}=\frac{\left(\frac{\rho/\rho_0}{p/p_0}\right)_{1,\max}}{\left(\frac{\rho/\rho_0}{p/p_0}\right)_{2,\max}}=\frac{\frac{5,5}{2}}{\frac{5,5}{12}}=\frac{12}{2}=6\,.\ \textbf{(3 п)}$$

Пошто је

$$r_{\max}=\frac{\left(\frac{\rho}{p}\right)_{1,\max}}{\left(\frac{\rho}{p}\right)_{2,\max}}=\frac{\frac{M_{O_2}}{R}\frac{1}{T_{1,\max}}}{\frac{M_{O_2}}{R(1+\alpha)}\frac{1}{T_{2,\max}}}=(1+\alpha)\frac{T_{2,\max}}{T_{1,\max}}=(1+\alpha)k_{\max}\,,\ \textbf{(1 п)}$$

имамо да је

$$6=(1+\alpha)k_{\max}\,,$$

одакле је

$$\boxed{\alpha=\frac{6}{k_{\max}}-1=\frac{6}{5}-1=0,2.}\ \textbf{(2 п)}$$

б) Сада можемо одредити $r_{\min}$ који би одговарао односу тангенти са *највишим* **(1 п)** нагибом:

$$r_{\min}=\frac{\left(\frac{\rho}{p}\right)_{1,\min}}{\left(\frac{\rho}{p}\right)_{2,\min}}=\frac{\left(\frac{\rho/\rho_0}{p/p_0}\right)_{1,\min}}{\left(\frac{\rho/\rho_0}{p/p_0}\right)_{2,\min}}=\frac{\frac{6}{1}}{\frac{6}{11}}=\frac{11}{1}=11\,.\ \textbf{(3 п)}$$

Пошто је

$$r_{\min}=\frac{\left(\frac{\rho}{p}\right)_{1,\min}}{\left(\frac{\rho}{p}\right)_{2,\min}}=\frac{\frac{M_{O_2}}{R}\frac{1}{T_{1,\min}}}{\frac{M_{O_2}}{R(1+\alpha)}\frac{1}{T_{2,\min}}}=(1+\alpha)\frac{T_{2,\min}}{T_{1,\min}}=(1+\alpha)k_{\min}\,,\ \textbf{(1 п)}$$

имамо да је

$$11=(1+\alpha)k_{\min}\,,$$

одакле је

$$\boxed{k_{\min}=\frac{11}{(1+\alpha)}=\frac{11}{1,2}\approx 9,2.}\ \textbf{(2 п)}$$

3. У стационарном стању кроз L_1 протиче струја $I_{10} = \frac{\varepsilon}{R+r}$ **(2п)**. После затварања прекидача P_2 струја крож калем L_2 расте од нуле до $I_{20} = \frac{\varepsilon}{r}$ **(1п)**, а кроз калем L_1 опада од I_{10} до нуле, јер је отпорност гране са калемом L_2 занемарљива.

У сваком малом временском интервалу кроз отпрност R протекне количина наелектрисања $\Delta q = I_1 \Delta t$ **(1п)**, при чему је

$$I_1 R + L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \ \textbf{(3п)}, \qquad \text{тј.} \qquad R\Delta q + L_1 \Delta I_1 = L_2 \Delta I_2 \ .\textbf{(1п)}$$

Пошто је

$$\sum \Delta q = q \ \textbf{(3п)}, \qquad \sum \Delta I_1 = -I_{10} = -\frac{\varepsilon}{R+r} \ \textbf{(3п)} \quad \text{и} \quad \sum \Delta I_2 = I_{20} = \frac{\varepsilon}{r} \ \textbf{(3п)}, \quad \text{то је}$$

$$q = \frac{\varepsilon}{R}\left(\frac{L_1}{R+r} + \frac{L_2}{r}\right) \textbf{(3п)}$$

4. А) Са слике 1 је јасно да зраци (1) и (2) имају оптичку путну разлику

$$\Delta s = n(\overline{\mathrm{MO}} + \overline{\mathrm{ON}}) - \overline{\mathrm{MN}} \sin\alpha = 2nd / \cos\beta - 2\mathrm{d} \cdot \mathrm{tg}\beta \sin\alpha \ , \ \textbf{(1п)}$$

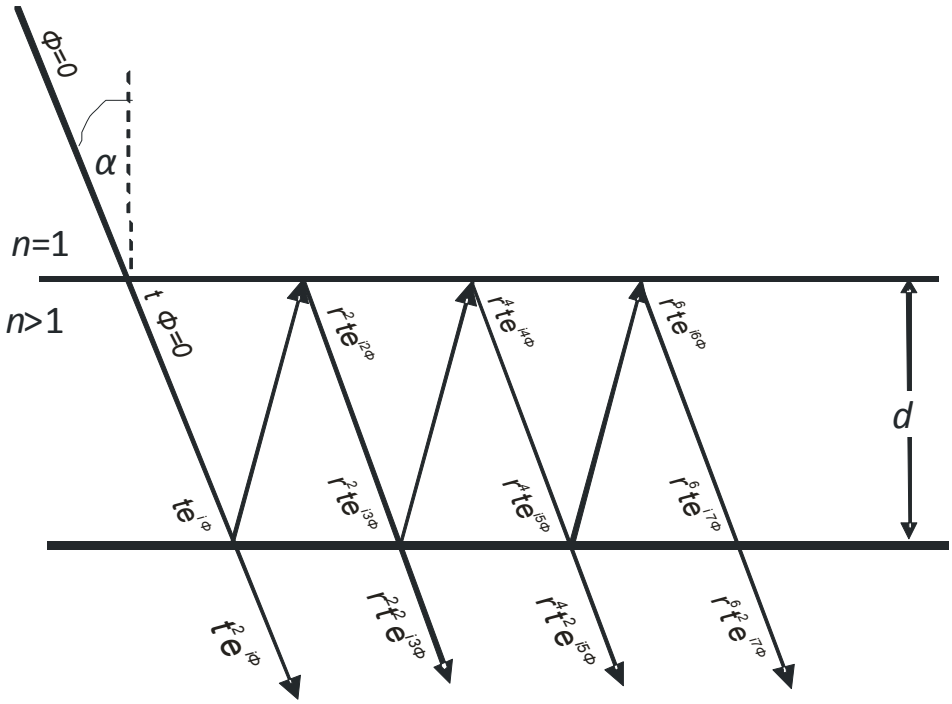
одакле се применом Снеловог закона преламања $\sin\alpha = n \sin\beta$ добија

$$\Delta s = 2nd \cos\beta = 2nd\sqrt{1-\sin^2\beta} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} . \textbf{(1п)}$$

Одавде је тражена фазна разлика

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\Delta s}{2} = \frac{2\pi nd}{\lambda}\sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{2\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \ . \textbf{(1п)}$$

Б) Приликом упада на провидну плочицу део таласа се рефлектује, а остатак прође. Ако је I_0 интензитет упадног таласа, онда је интензитет таласа који се рефлектовао $I_R = RI_0$, а интензитет таласа који је прошао $I_T = I_0 - I_R = (1-R)I_0 = TI_0$; овде је R коефицијент рефлексије, T коефицијент трансмисије и вреди $R + T = 1$ јер је плочица провидна. Ако је A_0 амплитуда упадног таласа, онда је модуо амплитуде рефлектованог таласа $A_t = rA_0$, а таласа који је прошао $A_t = tA_0$ где су $r = \sqrt{R}$ и $t = \sqrt{T} = \sqrt{1-R}$.



Са слике је јасно да је комплексна амплитуда <u>укупног</u> пропуштеног таласа једнака

$$A_T = A_0(t^2e^{i\phi} + t^2r^2e^{i3\phi} + t^2r^4e^{i5\phi} + ... + t^2e^{i\phi}(re^{i2\phi})^q + ... = t^2e^{i\phi}\sum_{q=0}^{\infty}(r^2e^{i2\phi})^q \quad .\textbf{(3п)}$$

Пошто је $\left|re^{i2\phi}\right| < 1$ онда горњи геометријски ред има збир $\sum_{q=0}^{\infty} x^q = \frac{1}{1-x}$, где је $x = re^{i2\phi}$. Следи:

$$A_T = A_0 \frac{t^2e^{i\phi}}{1-r^2e^{i2\phi}} \quad .\textbf{(2п)}$$

Одавде је интензитет I_T трансмитованог (пропуштеног) таласа:

$$I_T = I_0 \frac{t^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\phi} \quad ,\textbf{(1п)}$$

где је $I_0 = \frac{c\varepsilon_0}{2}A_0^2$. Како је $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi$, $r^2 = R$ и $t^2 = T = 1-R$, коначно налазимо:

$$I_T = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\phi} \quad .\textbf{(2п)}$$

В) Збир интензитета рефлектованог и пропуштеног таласа је једнак интензитету I_0 упадног таласа јер је апсорпција занемарљива. Уз помоћ претходног израза, одавде налазимо

$$I_R = I_0 \frac{4R\sin^2\phi}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\phi} \quad .\textbf{(1п)}$$

Г) Максимум трансмисије се добија када функција $\frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\phi}$ има максимум, а то се дешава када је $\sin\phi = 0$, односно $\phi = m\pi$ **(1п)**. У том случају је $I_T = I_0$ и $I_R = 0$ **(0,5 п +0,5п)**.

Д) Обзиром да се фазна разлика може написати у облику $\phi = \nu\frac{2\pi d}{c}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$ **(1п)**, видимо да максимумима трансмисије (тада је $\phi_m = m\pi$) одговарају учестаности ν_m за које је

$\nu_m \frac{2\pi d}{c}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = m\pi$ **(1п)**. Одавде је разлика учестаности $\Delta\nu$ између два узастопна трансмисиона максимума (тј слободни спектрални интервал) једнака

$$\Delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \text{ ,}\textbf{(1п)}$$

који за вертикалан упад (α=0) износи

$$\Delta\nu\big|_{\alpha=0} = \frac{c}{2nd} \text{ .}\textbf{(1п)}$$

Ђ) Услов за стварање стојећег таласа у цеви затвореној са оба краја је да је целобројан умножак половине таласне дужине λ'_m једнак дужини цеви d, тј $d = m\frac{\lambda'_m}{2}$ **(1п)**. Како таласној дужини λ'_m одговара учестаност $\nu_m = \frac{v}{\lambda'_m} = \frac{c}{n\lambda'_m}$ **(1п)**, где је $v = c/n$ брзина светлости у средини индекса преламања n, опет налазимо да је $\Delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nd}$ **(1п)**.

Стојећи таласи различитих учестаности који се успостављају у оптичком резонатору се називају лонгитудинални (уздужни) модови резонатора.

Е) $\Delta\nu = \frac{3\cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\cdot 1\cdot 0,3\text{m}} = 500\text{MHz}$ **(0,5п)**што представља типично растојање између лонгитудиналних модова код He-Ne ласера. Учестаност зрачења He-Ne ласера је $\nu_{He-Ne} = 474,0834\text{THz}$, тако да је однос $\frac{\Delta\nu}{\nu_{He-Ne}} = 1,055\cdot 10^{-6}$ **(0,5п)**.

Ж) Вредност када трансмитовани интензитет достиже половину своје максималне вредности се добија из услова

$$\frac{I_0}{2} = I_0\frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\phi_{1/2}} \text{ ,}\textbf{(1п)}$$

одакле је

$$(1-R)^2 + 4R\sin^2\phi_{1/2} = 2(1-R)^2 \text{ , }\textbf{(0,5п)}$$

односно

$$\sin\phi_{1/2} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \text{ .}\textbf{(0,5п)}$$

Како је $1-R << R$ следи да је, то је $\phi_{1/2}$ мали угао, па је

$$\phi_{1/2} \approx \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \text{.}\textbf{(1п)}$$

Према слици приказаној у поставци задатка ширина на половини висине је једнака

$$\delta\nu = \nu''_{1/2} - \nu'_{1/2} \text{ .}$$

Веза између фазе и учестаности се може добити користећи резултат добијен под А) за нормалан упад $\phi = \frac{2\pi nd}{\lambda}$ и познату везу између учестаности и таласне дужине $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Следи да је $\nu = \frac{c}{2\pi nd}\phi$ **(0,5п)**, па је

$$\delta\nu = \frac{c}{2\pi nd}(\phi''_{1/2} - \phi'_{1/2}) \textbf{ (0,5п)} \qquad (1)$$

Како је $\phi'_{1/2} = m\pi - \phi_{1/2}$ и $\phi''_{1/2} = m\pi + \phi_{1/2}$ **(0,5п)**, једначина (1) постаје $\delta\nu = \frac{c}{2\pi nd} 2\phi_{1/2}$ **(0,5п)**, односно

$$\delta\nu = \frac{c}{2nd} \cdot \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} \text{ , } \mathbf{(1п)}$$

што представља тражену ширину на половини висине лонгитудиналног мода оптичког резонатора. Из добијеног резултата се види да је ширина мода мања уколико је рефлективност огледала већа. Наиме, повећањем рефлективности огледала повећава се време боравка фотона унутар резонатора што, према Хајзенберговим релацијама неодређености смањује фреквентну ширину мода.

З)

$$\delta\nu = \frac{3\cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\cdot 1\cdot 0,3\mathrm{m}} \cdot \frac{1-0,98}{\pi\sqrt{0,98}} = 3,217\mathrm{MHz} \text{ . } \mathbf{(0,5п)}$$

Однос ширине лонгитудиналног мода и учестаности зрачења He-Ne ласера је

$$\frac{\delta\nu}{\nu_{He-Ne}} = 6,786\cdot 10^{-9} \text{ . } \mathbf{(0,5п)}$$

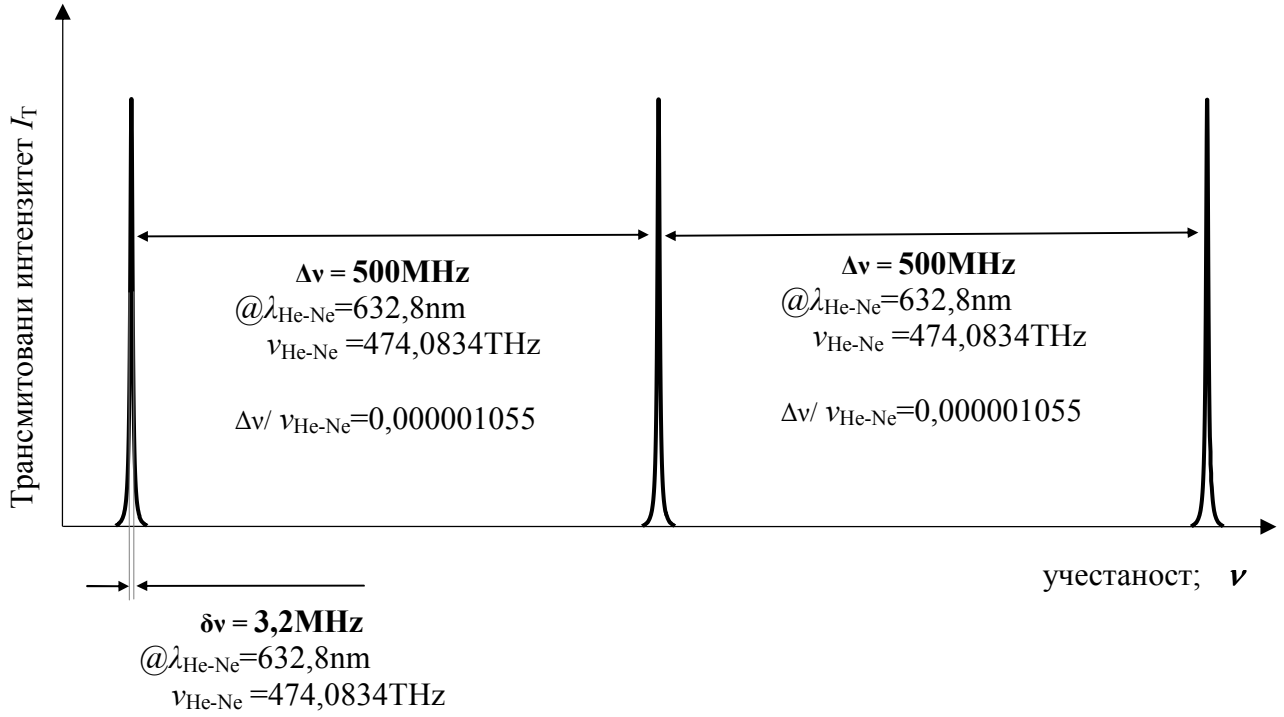
И)

$$F = \frac{\Delta\nu}{\delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \approx 155 \text{ . } \mathbf{(0,5\ п\ +0,5п)}$$

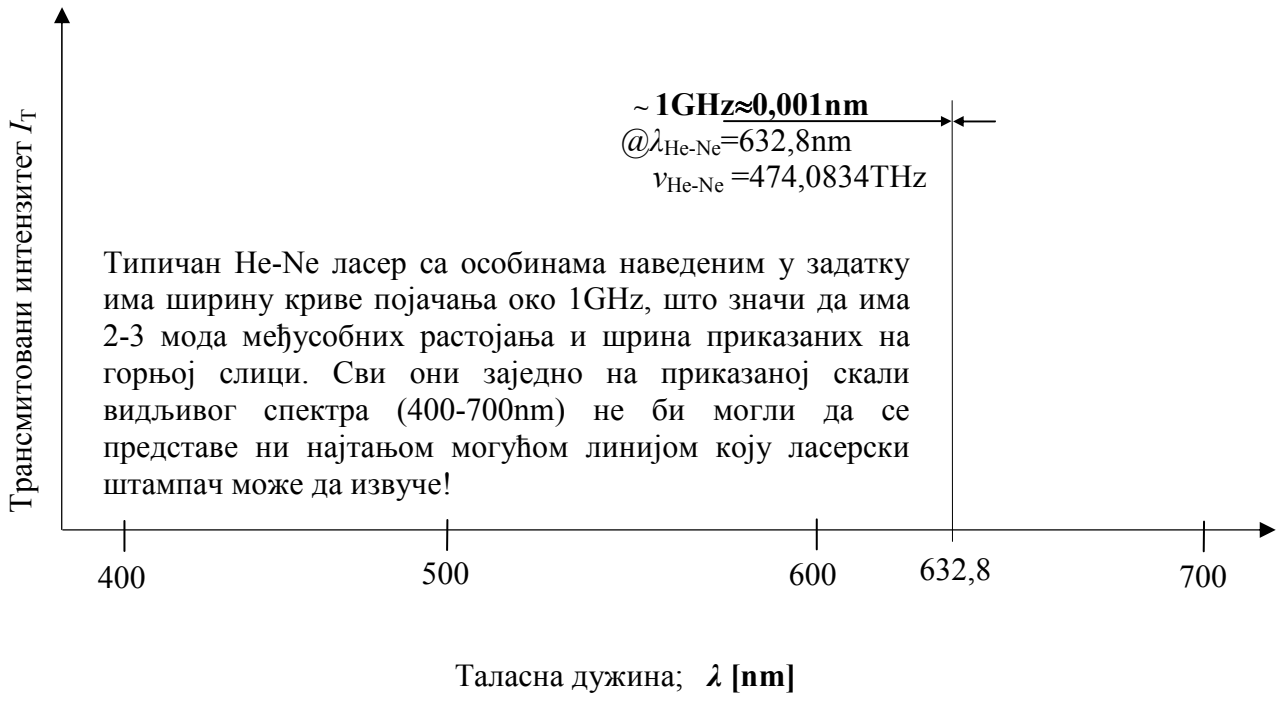
Напомена: Појачање активне средине ласера додатно смањује ширину мода, тако да када би се на приказаном примеру He-Ne ласера урачунало и појачање, ширина мода би била око или испод 1MHz!

НАРАВОУЧЕНИЈЕ [које се не бодује :)] :

На датом примеру He-Ne ласера важи:



δν/ ν_{He-Ne}=0,00000000678
приказана скала је нереална!!!
δν је ипак пар стотина пута мање од Δν!!!



Торичелијева теорема
истицање течности из широког суда кроза мали отвор

Приликом истицања течности кроз мали отвор пречник маза је мањи од пречника отвора. Та појава се назива контракција млаза, а описује се такозваним коефицијентом контракције који је једнак односу површине пресека млаза S у близини отвора и површине пресека отвора S_0:

$$k = \frac{S}{S_0}.$$

Задаци

1. Одредити коефцијент контракције млаза воде која истице из боце коју имате на располагању Мерење праћењем спуштања течности у боци.

2. Проценити грешку мерења.

Пречник отвора на боци

$$D_0 = 1\,\mathrm{mm}$$

Грешку овог пречника занемарите.

Унутрашњи пречник боце у делу у коме треба да пратите истицање износи:

$$D_1 = (89.0 \pm 0.5)\,\mathrm{mm}$$

Сматрати да приликом наведеног истицања важи Торичелијева теорема.

На располагању су вам:
- Пластична боца са малим отвором на дну
- Вертикалан милиметарски папир на боци. Нула на њему се на налаз на висини средине отвора .
- Хронометар
- Држачи
- Посуда за воду

Задатак припремила: доц. др Андријана Жекић
Рецензент: проф. др Мићо Митровић
Председникм комисије за такмичења ДФС: проф. др Мићо Митровић

Према условима задатка важе Торичелијева теорема и једначина континуитета

$$S_1 v_1 = Sv \qquad \text{и} \qquad \rho g h = \rho v^2 / 2 \,. \ \textbf{(2п)}$$

Брзина спуштања нивоа воде је $v_1 = -dh/dt$, па је **(2п)**

$$S_1 \, dh/dt = S\sqrt{2gh} \,, \ \textbf{(2п)} \qquad \text{тј.} \qquad -\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{S}{S_1}\sqrt{2g}\,dt \ \textbf{(3п)}$$

$$\sqrt{h} = -\frac{S}{S_1}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t + const = k\frac{S_0}{S_1}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t + const \,. \ \textbf{(8п)}$$

Из линеарне зависности корена из висине течности од времена истицања, тј. коефициента правца ове зависности *a*, могуће је одредити тражену величину.

$$a = k\frac{S_0}{S_1}\sqrt{\frac{g}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad k = a\frac{S_1}{S_0}\sqrt{\frac{2}{g}} \ \textbf{(3п)}$$

Са графика нацртаног према резултатима мерења приказаним у табели на следећој страни одређује се

$$a = \frac{\sqrt{h_2}-\sqrt{h_1}}{t_2 - t_1} = \frac{..-..}{..-..} = -1.91\cdot 10^{-3}\,\frac{\sqrt{\text{cm}}}{\text{s}} \ \textbf{(20п - добар избор линеарног дела)}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta\left(\sqrt{h_2}\right)+\Delta\left(\sqrt{h_1}\right)}{\sqrt{h_2}-\sqrt{h_1}} + \frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{..+..}{..-..} + \frac{..+..}{..-..}\right) = 0.01 \ \textbf{(5п)}$$

$$k = a\frac{S_1}{S_0}\sqrt{\frac{2}{g}} = -1.91\cdot 10^{-3}\left(\frac{8.9}{0.1}\right)^2\sqrt{\frac{2}{981}} \approx 0.68 \ \textbf{(15п)}$$

$$\Delta k = k\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta S_1}{S_1}\right) = k\left(\frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta D_1}{D_1}\right) = 0.682\left(0.012 + 2\frac{0.5}{89}\right) \approx 0.016 \ \textbf{(5п)}$$

$$k = 0.682 \pm 0.016$$

Табела: 20п - 6 и више тачака и тири мерења, 1 мерење 20% мање од свих резултата
График: 15п - 6 и више тачака и тири мерења, 1 мерење 20% мање од свих резултата
За једноставне грешке у табели и на графику одузимати 1п, за остале по процени.

Висина h [cm]	$\sqrt{h}$ [$\sqrt{\text{cm}}$]	Време t_i [s]	Време t [s]	Dt [s]
9.5	3.08	37.24	38.6	
		40.04		
		38.52		
9.0	3.00	79.86	80.6	
		84.24		
		77.74		
8.5	2.92	124.74	124.87	
		124.72		
		125.08		
8.0	2.83	169.74	169.82	
		170.00		
		169.72		
7.5	2.74	214.74	213.8	
		213.88		
		212.86		
7.0	2.65	263.68	261.9	
		263.44		
		258.72		
6.5	2.55	318.08	310.8	
		310.04		
		304.24		
6.0	2.45	366.76	363.2	
		366.32		
		356.74		
5.5	2.35	422.96	415.8	
		410.66		
		413.74		
5.0	2.24	458.00	480.0	
		481.32		
		473.82		
4.5	2.12	548.92	539.0	
		535.86		
		532.22		
4.0	2.00	612.94	610.8	
		615.04		
		604.32		

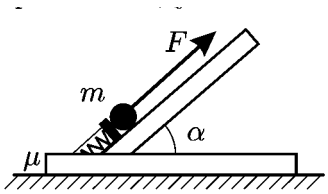
ПРИПРЕМНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА МЕЂУНАРОДНУ ОЛИМПИЈАДУ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2010/11

ОПШТА ГРУПА

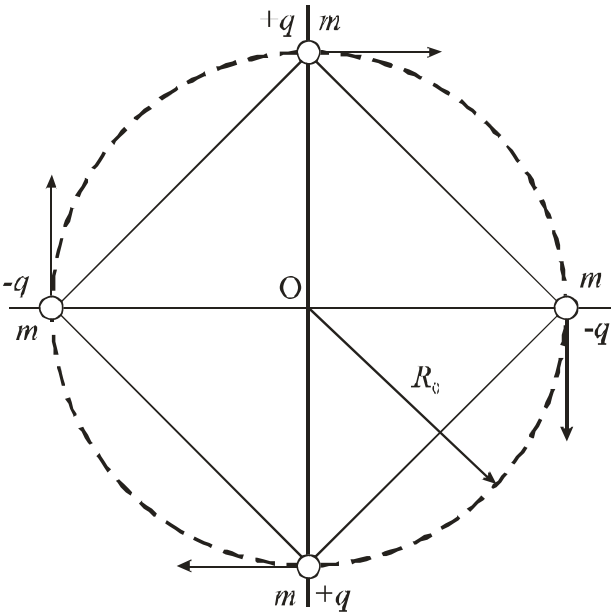
Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ - ТЕОРИЈА

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
20.05.2011.

1. Катапулт је платформа са које се опуштањем сабијене опруге може избацити тело под различитим угловима. Сила која при томе делује на тело које се избацује је много већа од његове тежине, тј. $F \gg mg$. Маса катапулта је при томе много мања од масе тела које се избацује m. Коефицијент трења између платформе и подлоге је μ. Одредити максимално хоризонтално убрзање које катапулт може саопштити телу које избацује. **(20п)**



2. У слободном простору на кружници полупречника R_0 по врховима уписаног квадрата распоређују се четири материјалне тачке масе m. Две од њих су наелектрисане са $-q$ свака, а преостале две са $+q$ свака. У почетном тренутку свим материјалним тачкама саопштимо брзину истог интензитета, која је усмерена дуж тангенти на кружницу у датој тачки у смеру казаљке на сату (погледајте слику). Познато је да ће, током кретања, свака материјална тачка достићи минимално растојање R_1 до центра O кружнице, и да ће увек важити да је $R_1 < R_0$. Сматрајте да се у било ком тренутку кретања материјалне тачке налазе у рогљевима квадрата са центром у тачки O. Утицај гравитационих сила у потпуности занемарите. а) Сведите ово кретање на кретање два тела наелектрисања q и Q. Изведите општи израз за Q и израчунајте његову бројну вредност. У каквом су односу предзнаци q и Q? Дефинишите облик трајекторије сваке материјалне тачке; б) Изведите општи израз и израчунајте бројну вредност времена кретања τ материјалних тачака од њиховог почетног положаја до положаја са растојањем R_1 до центра O кружнице. **(20п)**



3. Најкраће растојање између кристалографских равни једне фамилије датог кристала је d=0,21nm. На кристал пада сноп неутрона брзине v =1,33 $\cdot 10^3$ m/s.
А) Објаснити како гласи услов за максимум рефлексије неутрона од кристала?
Б) Колики је угао који неутронски сноп треба да заклапа са кристалографском равни при којем ће највећи број неутрона бити рефлектован?
В) Ако се брзина неутрона у снопу утростучи колики је максимални угао при којем постоји локални максимум вероватноће за рефлексију неутрона?
Планкова константа износи h = 6,625$\cdot 10^{-34}$Js, а маса неутрона 1,675$\cdot 10^{-27}$kg. **(20п)**

4. Радиоактивни ^{24}Na распада се емитујући бета честице и његов период полураспада износи $T_{1/2}$=14,9h. Израчунати број распаднутих језгара у препарату датог радиоактивног изотопа масе m=5mg за а) 1 μs и б) 10h. Авогадров број је $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$. **(20п)**

5. Коришћењем расположивог мерног комплета измерити коефицијент површинског напона дате течности. Проценити грешку мерења. **(20п)**

Препорука: Не пратити никаву линеарну зависност међу физичким величинама.

Задатке припремили и рецензенти: Мићо Митровић, Драган Д. Маркушев, Александар Крмпо и Ђорђе Спасојевић

Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,* Физички факултет, Београд

ПРИПРЕМНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА МЕЂУНАРОДНУ ОЛИМПИЈАДУ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2010/11

ОПШТА ГРУПА

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
РЕШЕЊА ТЕОРИЈСКИХ ЗАДАТАКА

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
20.05.2011.

1. У зависности од угла под којим избацује тело, катапулт може да ради у два режима: а) да проклиже или б) да не проклиже по подлози при избацивању тела.
Услов за проклизавање. Катапулт делује на тело силом а тело на катапулт силом истог интензитета, супротног смера. Пошто је ова сила F mg , сила којом катапулт притишће подлогу је $F\sin\alpha_0$, а сила трења између катапулта и подлоге износи $\mu F\sin\alpha_0$. Услов почетка проклизавања је $F\cos\alpha_0 = \mu F\sin\alpha_0$, односно гранични угао проклизавања је $\mathrm{tg}\alpha_0 = 1/\mu$.
Режим проклизавања $\alpha < \alpha_0$: У том режиму катапулт на тело не мозе да делује већом силом у хоризонталном правцу од силе трења, па је хоризонтална компонента убрзања тела највише

$$a_1 = \frac{\mu N}{m} = \frac{\mu F\sin\alpha}{m}$$

Режим непроклизавања $\alpha \geq \alpha_0$: У овом режиму тело добија хоризонталну компоненту убрзања:

$$a_2 = \frac{F\cos\alpha}{m}$$

Очигледно, прво убрзање расте порастом α од нуле, а друго расте опадањем α од $\pi/2$. Максимум достижу оба убразања када је $\alpha = \alpha_0$, тј. у тренутку почетка проклизавања. Уврштавањем услова проклизавања у било које од убрзања добија се тражено убрзање, које износи

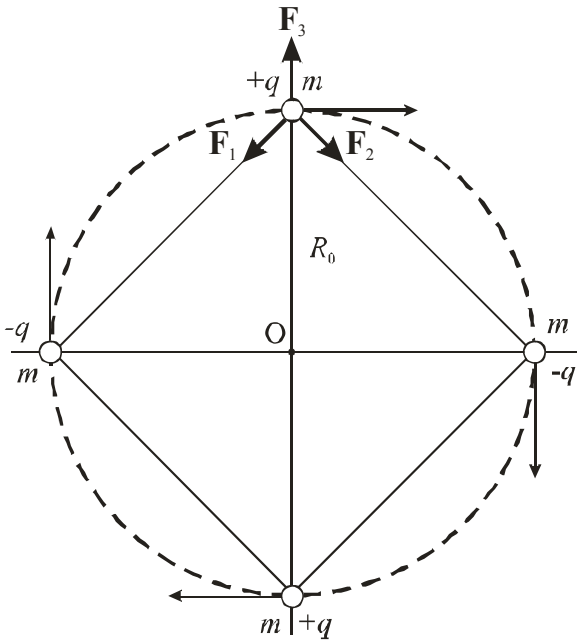
$$a_{\max} = \frac{F}{m}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

2. а) Посматрајмо једну од материјалних тачака. На њу делују силе $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$ (види слику). По Кулоновом закону интензитети тих сила биће

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2r^2}, \textbf{ (2 п)}$$

и

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4r^2}. \textbf{ (2 п)}$$



У било ком тренутку кретања резултујућа сила $F(r)$ је увек усмерена ка центру О кружнице. Интензитет резултујуће силе једнак је

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2r^2}\sqrt{2} - \frac{q^2}{4r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right).$$

(2 п)

Одавде следи да ће се свака материјална тачка кретати тако као да у центру кружнице имамо неко резултујуће наелектрисање Q, супротно по знаку али исто по интензитету **(2 п)**, које ће привлачно деловати на ту материјалну тачку. Апсолутна вредност тог замишљеног наелектрисања износи

$$Q = q\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right).$$ **(2 п)**

Као што је и напоменуто у поставци задатка, види се да ће се све материјалне тачке кретати са истим обликом трајекторија, стално се налазећи у рогљевима квадрата променљивих страница дужине $a(t) = \sqrt{2}\cdot r(t)$, где је $r(t)$ променљиви полупречник описане кружнице око тог квадрата. Пошто је $F(r) \sim 1/r^2$ видимо да је сила аналогна сили гравитационог међудејства, па можемо рећи да је трајекторија сваке материјалне тачке елипса са великом осом $R_0 + R_1$. Тачка O се налази у једном од фокуса ових елипси. **(2 п)**

б) Време кретања τ материјалних тачака од њиховог почетног положаја до положаја са растојањем R_1 до центра O кружнице може се добити као $\tau = T/2$, где је T период обиласка по елиптичној орбити. Он се добија из трећег Кеплеровог закона (по услову задатка)

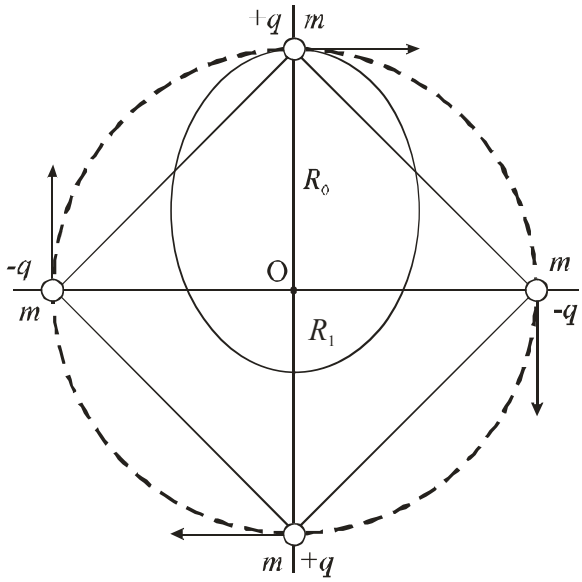
$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0+R_1}{2R_0}\right)^3 \text{ или } T = T_0\left(\frac{R_0+R_1}{2R_0}\right)^{3/2},$$ **(2 п)**

где је T_0 период обиласка материјалне тачке масе m по кружној орбити полупречника R_0. Овај период је, по дефиницији, једнак

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0},$$ **(2 п)**

где је v_0 брзина кретања материјалне тачке по кружници полупречника R_0. Ако је то кретање условљено дејством силе $F(r)$ онда је

$$\frac{mv_0^2}{R_0} = F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}.$$ **(2 п)**



Из последње једначине се добија да је

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qQ}{mR_0}} = q\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)}{4mR_0}}.$$ **(2 п)**

Сада је

$$T_0 = \frac{2\pi}{q}\sqrt{4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{4mR_0^3}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}},$$ **(2 п)**

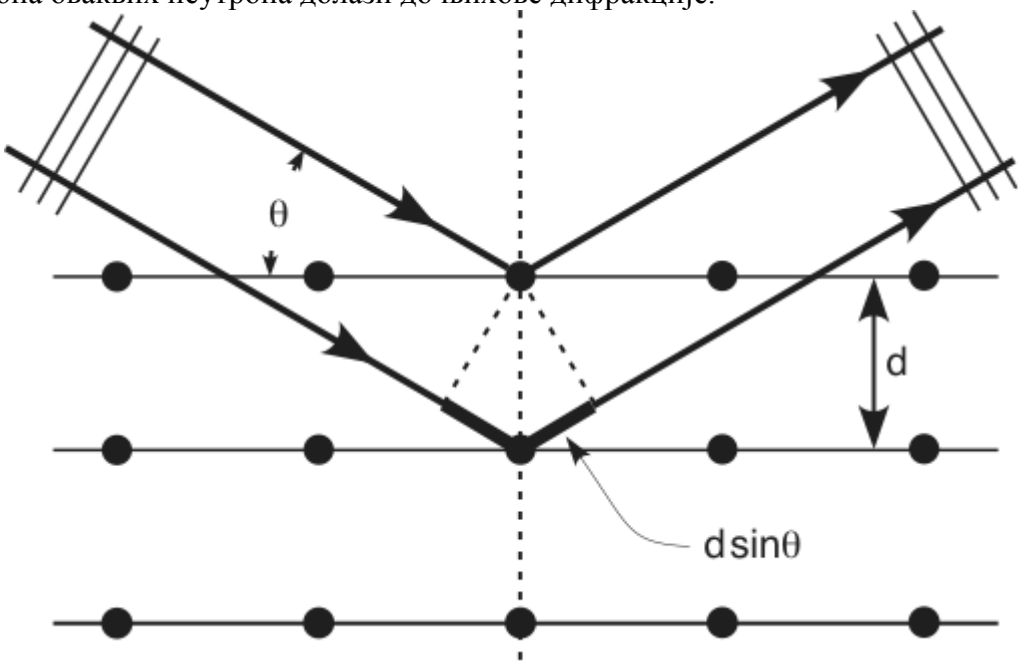
па је

$$\boxed{T = \pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0}{2}\cdot\frac{m\left(R_0+R_1\right)^3}{qQ}} = \frac{\pi}{q}\sqrt{2\pi\pi_0\cdot\frac{m\left(R_0+R_1\right)^3}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}}.}$$ **(3 п)**

3. А) За неутроне брзине $v = 1{,}33 \cdot 10^3$ m/s Де Бројева (**Louis-Victor-Pierre-Raymond de Broglie** 1892 – 1987) таласна дужина износи

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 2{,}97 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\,,$$

што је упоредиво са константом кристалне решетке. Стога, приликом рефлексије од кристалне решетке снопа оваквих неутрона долази до њихове дифракције.



Са слике се види да путна разлика између неутрона рефлектованих од две суседне кристалографске равни износи $2d\sin\theta$, где је θ угао који неутронски сноп заклапа са нормалом на кристалографске равни. Дифракциони максимум се јавља онда када је ова путна разлика једнака целобројном умношку (Де Бројевих) таласних дужина, тј када је

$$2d\sin\theta = n\lambda\,,$$

што представља Брегов (Sir **William Lawrence Bragg** 1890 – 1971) дифракциони услов, односно Брегову формулу.

Б) За дату брзину неутрона, односно за израчунату таласну дужину, уочава се да постоји само један дифркациони ред јер је

$$\sin\theta = n\frac{\lambda}{2d} = n \cdot 0{,}708$$

па је јасно да n мора бити једнако 1. У том случају је

$$\theta = \arcsin 0{,}707 \approx 45^0\,.$$

В) Ако се брзина неутрона утростручи, таласна дужина ће се смањити три пута те важи

$$\sin\theta = n\frac{3\lambda}{2d} = n \cdot 0{,}236\,,$$

одакле следи да је

$$n_{\max} = [\frac{1}{0{,}236}] = 4\,.$$

Одавде следи да се ради о четвртом дифракционом реду, а угао на којем се он јавља је

$$\theta = \arcsin(n \cdot 0{,}236) \approx 70{,}7^0\,.$$

4. а) Број језгара распаднутих за мали интервал времена није могуће израчунати директно из закона радиоактивног распада користећи СЦИЕНТИФИЦ ЦАЛЦУЛАТОР ☺ .
Из природе радиоактивног распада се зна да је

$$dN = -\lambda N dt$$

где је dN број језгара која се распадну за време dt, λ је константа распада, а N број језгара у тренутку t. Када је временски интервал врло мали, број распаднутих језгара је $\Delta N = N - N_0$ где је N_0 број језгара у почетном тренутку. Обзиром на $N \approx N_0$, горња једначина се своди на:

$$N - N_0 = -\lambda N_0 \Delta t \ ,$$

односно

$$N_0 - N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 \Delta t \ .$$

На основу података следи да је број језгара на почетку распада $N_0 = \frac{m}{M} N_A = 1,255 \cdot 10^{20}$, где је $M = 24$ g/mol моларна маса ^{24}Na, тако да је број распаднутих језгара

$$N_0 - N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{M} N_A \Delta t = 1,62 \cdot 10^9 \ .$$

б) Када је време распада велико може се директно користити закон радиоактивног распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \ ,$$

одакле следи да је број распаднутих језгара

$$N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) = N_0 (1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}) = 4,65 \cdot 10^{19} \ .$$

5. Капи се одвајају од игле када им тежина постане већа од силе површинског напона, односно једнака: $mg = \rho g V / N = 2\gamma R \pi$, па је

$$\gamma = \frac{\rho g V}{2\pi R} \frac{1}{N} \ . \ \textbf{(3п)}$$

Коефицијент површинског напона се може одредити бројањем капи које одговарају одређеној истеклој запремини.
Измерено је да запремина од $V = 2\,\text{ml}$ истиче са следећим бројем капи:

130, 124, 128, 125, 134, **(5п за најмање 3 мерења са најмањом запремином 1ml)**

па је N_s= 128.2 .

$$\gamma = \frac{\rho g V}{2\pi R} \frac{1}{N} = \frac{10^3 \cdot 9.81 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \frac{1}{128.2} \approx 0.0609 \frac{\text{N}}{\text{m}} \ \textbf{(8п)}$$

$\Delta V = 0.1\,\text{ml}$, $\Delta N = 5$ (**1п** за $\Delta V = 0.1\,\text{ml}$ или 0.2 ml)

$$\Delta\gamma = \gamma \left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta N}{N} \right) = 0.0609 \left(\frac{0.1}{2} + \frac{5}{128.2} \right) \frac{\text{N}}{\text{m}} = 0.0609 \cdot 0.089 \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 0.006 \frac{\text{N}}{\text{m}} \ \textbf{(3п)}$$

$$\gamma = (0.061 \pm 0.006) \frac{\text{N}}{\text{m}} = (6.1 \pm 0.6) 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}} .$$

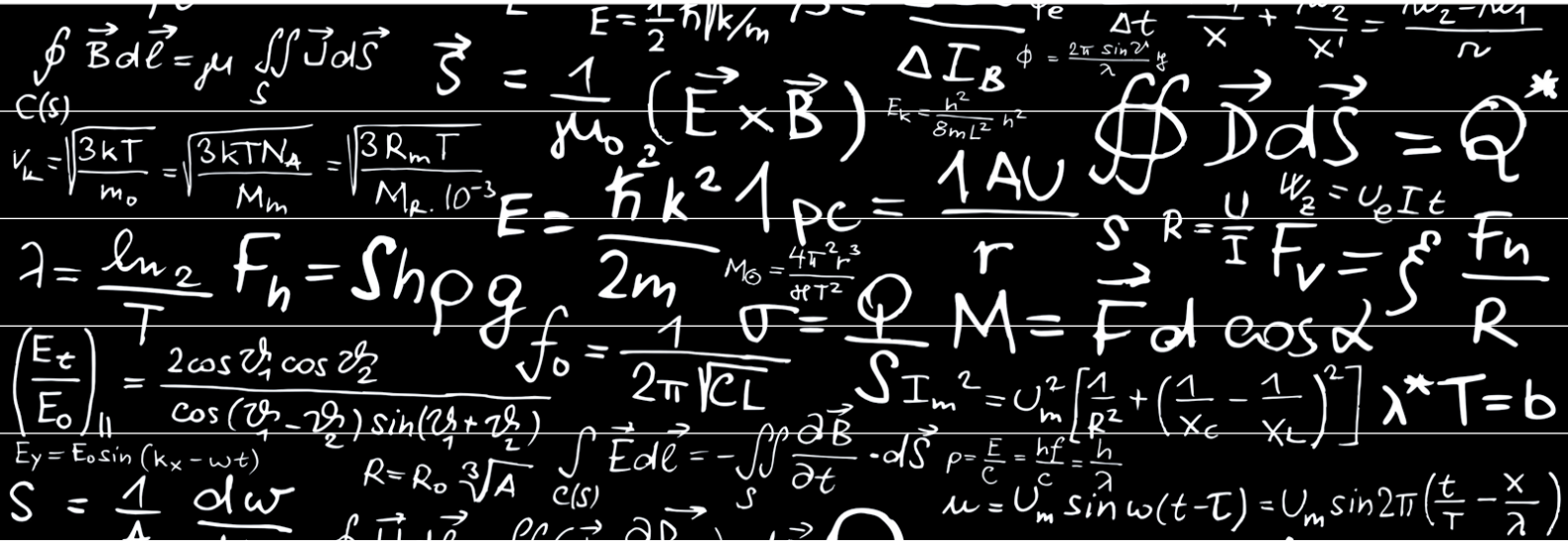
5. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2010/2011. ГОДИНЕ

Друштво Физичара Србије
РЕЗУЛТАТИ

Олимпијада

	Име и презиме	Школа	Место	Наставник	Teo.	Експ.	Изб.	Укупно
1	**Огњен Марковић**	**Мат. гимназија**	**Београд**	**Д. Латас, И. Станић**	**73,5**	**100**	**91,5**	**376,96**
2	**Марко Кузмановић**	**Мат. гимназија**	**Београд**	**Д. Латас, И. Станић**	**83**	**83**	**73**	**328,61**
3	**Тамара Ђорђевић**	**Светозар Марковић**	**Ниш**	**Ђорђевић Горан**	**77,8**	**76**	**65**	**316,46**
4	**Стефан Станојевић**	**Мат. гимназија**	**Београд**	**Д. Латас, И. Станић**	**95,5**	**28**	**77,5**	**299,45**
5	Милан Крстајић	Мат. гимназија	Београд	Наташа Чалуковић	73	69	58	263,05
6	Тамара Шумарац	Мат. гимназија	Београд	В. Рапаић, Б.Цветковић	80	17	75	259,85
7	Душан Шобот	Мат. гимназија	Београд	В. Рапаић, Б. Цветковић	67,9	17	76	257,91
8	**Милован Ђокић**	**Гим. "В. Караџић"**	**Лозница**	**Драган Станковић**	**58,5**	**14**	**33**	**142,05**
9	Александар Тарановић	1.краг. гимназија	Крагујевац	Драган Карајовић	28	36	24	133,12

На међународну олимпијаду су се пласирали ученици редних бројева 1-4 и 8



9 770351 557997