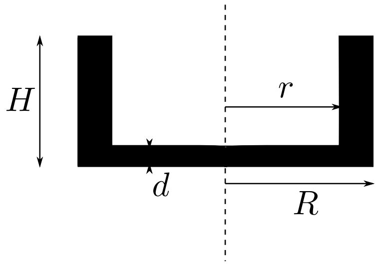
LVII ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2018/2019. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

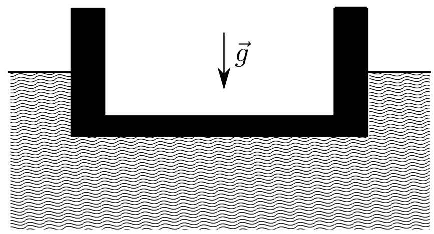
IV разред **ЗАДАЦИ – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА*** **Суботица 22-23. март 2019.**

1. **(20 поена)** Да ли се у емисионом спектру атома водоника може наћи линија таласне дужине:
(а) $\lambda_a = (1{,}973 \pm 0{,}001)\ \mu\text{m}$;
(б) $\lambda_b = (2{,}165 \pm 0{,}001)\ \mu\text{m}$?
У оба случаја, уколико је одговор потврдан, одредити ком прелазу одговара та линија. Ридбергова константа је $R = 10973731{,}6\,\text{m}^{-1}$.

2. **(20 поена)** Атанасије је направио дрвену шерпу чија је основа кружни диск полупречника $R = 42{,}5\,\text{cm}$ и дебљине $d = 1{,}50\,\text{cm}$, а зидови су облика омотача ваљка унутрашњег полупречника $r = 37{,}1\,\text{cm}$, спољашњег полупречника R и висине $H = 6{,}20\,\text{cm}$. Попречни пресек шерпе у равни која садржи осу симетрије поменутог ваљка је приказан на слици 1. Атанасије је ставио шерпу на површину воде, као што је приказано на слици 2, тако да унутрашњост шерпе није испуњена водом. За колико cm и у ком смеру ће се променити положај шерпе ако у њу продре вода (нпр. услед тога што се на њеној основи избуши мали отвор)? Занемарити капиларне појаве. Густина воде је $\rho_v = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, а густина дрвета $\rho_d = 730\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



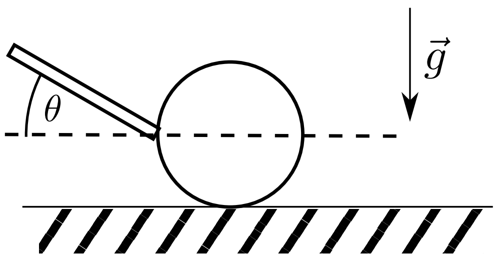
Слика 1: уз задатак 2 - попречни пресек шерпе.



Слика 2: уз задатак 2 - шерпа на површини воде; приказан је попречни пресек у равни која садржи осу симетрије шерпе.

3. **(20 поена)** π^0 честица масе мировања m се креће релативистичком брзином интензитета v и распада се на два фотона. Одредити минималну и максималну могућу енергију емитованих фотона. Интензитет брзине светлости је c.

4. **(20 поена)** Хомогена билијарска кугла масе m која је мировала на хоризонталној подлози ударена је билијарским штапом у тачки која се налази у истој хоризонталној равни као и центар масе кугле, као што је приказано на слици 3. Правац дејства силе којом штап делује на куглу се поклапа са правцем штапа и заклапа угао θ ($\theta \in (0^0, 90^0)$) са хоризонталом, а можете сматрати да је током удара интензитет те силе константан. Судар штапа са куглом је краткотрајан и интензитет импулса силе којом штап делује на куглу је p (прецизније речено $p = F\,(t_+ - t_-)$, где је F интензитет силе, t_- је временски тренутак непосредно пре судара, а t_+ временски тренутак непосредно после судара). Коефицијент трења између кугле и подлоге је μ, а интензитет убрзања силе Земљине теже је g. Који услов треба да испуњавају величине θ и μ да би кугла током даљег кретања поново прошла кроз почетни положај? Одредити временски интервал након којег ће се то десити.



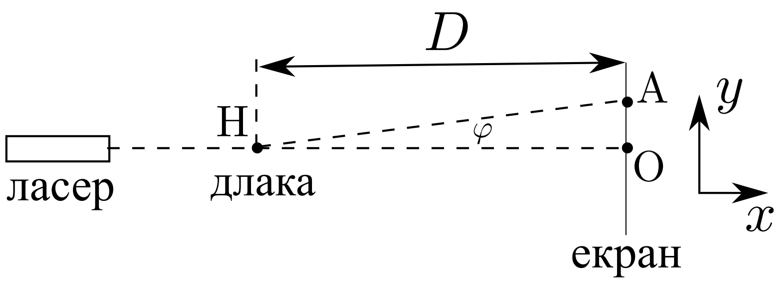
Слика 3: уз задатак 4 - билијарски штап и кугла.

5. **(20 поена)** За мерења дебљине длаке људске косе може се искористити експеримент чија је шема приказана на слици 4. Сноп монохроматске светлости таласне дужине $\lambda = (650 \pm 1)\,\mathrm{nm}$ из ласерског показивача је усмерен у правцу $x-$осе према длаци. Длака је облика дугачке нити која се простире дуж $z-$осе. Попречни пресек длаке у xy-равни је круг пречника d. На растојању $D = (1{,}64 \pm 0{,}01)\,\mathrm{m}$ од длаке је постављен екран на коме се формира слика приказана на слици 5. Коришћењем те слике и цртањем и анализом одговарајућег графика одредити пречник длаке d и проценити грешку мерења овим поступком.

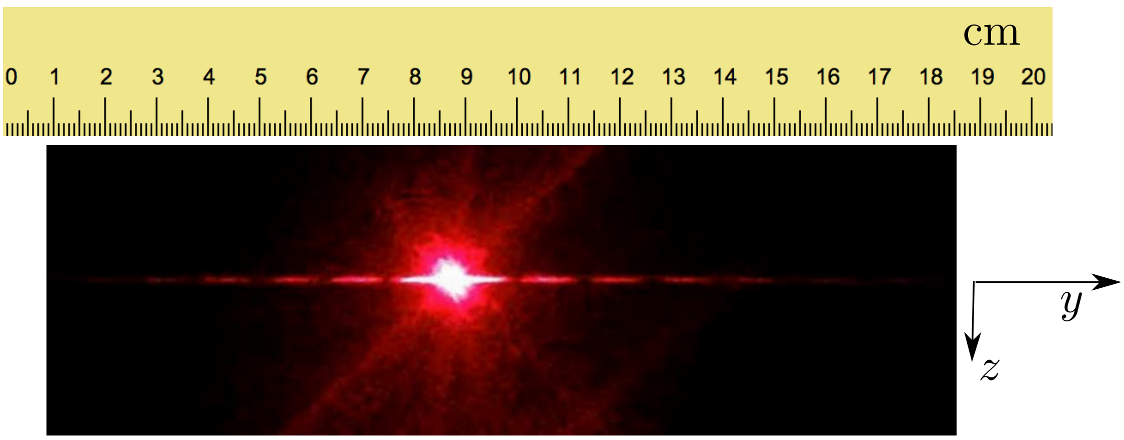
Помоћ: Интензитет светлости у тачки А на y-оси на екрану таквој да је $\angle \mathrm{AHO} = \varphi$ (видети слику 4) је једнак

$$I(\varphi) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}\right)}{\frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}} \right]^2 ,$$

где је I_0 интензитет за $\varphi = 0$. Кад је то оправдано, за мале углове α можете користити апроксимацију $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$.



Слика 4: уз задатак 5 - шема експеримента за мерење дебљине длаке.



Слика 5: уз задатак 5 - слика која се формира на екрану и лењир који се може користити да се мере положаји или растојања на тој слици.

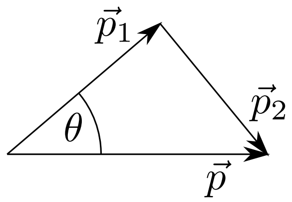
Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У фермионској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима средњих стручних школа, уметничких школа и свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.

1. Таласна дужина спектралне линије која одговара прелазу из стања n у стање m задовољава једначину $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. Серија линија са датим m и $n > m$ тако покрива спектрални опсег $\lambda \in \left(\frac{m^2}{R}, \frac{m^2(m+1)^2}{2m+1}\frac{1}{R}\right)$. Непосредним прорачуном закључујемо да дате линије евентуално могу да припадају серији са $m = 4$ (Брекетова серија) која покрива спектрални опсег $\lambda \in (1{,}458; 4{,}050)\,\mu$m, док су таласне дужине датих линија ван опсега таласних дужина серија са другим вредностима m [серија са $m = 1$ покрива опсег $\lambda \in (0{,}091; 0{,}122)\,\mu$m, серија са $m = 2$ покрива опсег $\lambda \in (0{,}365; 0{,}656)\,\mu$m, серија са $m = 3$ покрива опсег $\lambda \in (0{,}820; 1{,}875)\,\mu$m, серија са $m = 5$ покрива опсег $\lambda \in (2{,}278; 7{,}456)\,\mu$m, серија са $m = 6$ покрива опсег $\lambda \in (3{,}281; 12{,}365)\,\mu$m, итд.]. Даље, непосредним прорачуном линија из Брекетове серије (чије су таласне дужине редом 4,050 μm; 2,624 μm; 2,165 μm; 1,944 μm; 1,817 μm, итд.) налазимо да линија таласне дужине λ_b одговара прелазу из стања 7 у стање 4, док се линија таласне дужине λ_a не може наћи у спектру атома водоника.

2. Маса шерпе је једнака $m = \rho_d\left[R^2\pi d + \left(R^2 - r^2\right)\pi\left(H - d\right)\right]$. Нека се доња површина основе шерпе налази на дубини h_a кад унутрашњост шерпе није испуњена водом. Тад је сила потиска која делује на шерпу по интензитету једнака $F_p^{(a)} = \rho_v V_a g$, где је g интензитет убрзања силе теже, а $V_a = R^2\pi h_a$ запремина шерпе испод нивоа воде, укључујући и део шерпе испуњен ваздухом. Даље, нека је h_b дубина доње површине основе шерпе кад је унутрашњост шерпе испуњена водом. Тада је сила потиска која делује на шерпу по интензитету једнака $F_p^{(b)} = \rho_v V_b g$, где је $V_b = r^2\pi d + \left(R^2 - r^2\right)\pi h_b$ запремина дела шерпе који је испод нивоа воде. У оба случаја је у равнотежи сила потиска по интензитету једнака сили теже, одакле је $mg = F_p^{(a)} = F_p^{(b)}$. Из претходних једначина налазимо да ће се шерпа спустити за $\Delta h = h_b - h_a = \frac{\rho_d r^2}{\rho_v R^2}\left(H - d\right) - \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_v}\right)\frac{r^2 d}{R^2 - r^2}$, односно $\Delta h = 1{,}32$ cm.

3. Из закона одржања енергије је $E = E_1 + E_2$, а из закона одржања импулса је $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, где су E и $\vec{p}$ енергија и импулс π^0-честице пре распада, а E_1, $\vec{p}_1$, E_2 и $\vec{p}_2$ редом енергија и импулс првог и другог фотона насталих у распаду. Нека је θ угао који правац кретања првог фотона заклапа са правцем кретања π^0-честице. Применом косинусне теореме на троугао приказан на дијаграму импулса честица (слика 1) следи $p_2^2 = p_1^2 + p^2 - 2pp_1\cos\theta$. Из претходних једначина и релација између енергије и импулса $E_1 = p_1 c$, $E_2 = p_2 c$ и $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, налазимо $E_1 = \frac{m^2c^4}{2(E - pc\cos\theta)}$. E_1 је минимално кад је $\cos\theta = -1$, а максимално кад је $\cos\theta = 1$. Коришћењем релација $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ и $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, налазимо да је тражена минимална енергија фотона $E_{\min} = \frac{1}{2}mc^2\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$, а максимална енергија фотона је $E_{\max} = \frac{1}{2}mc^2\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$.



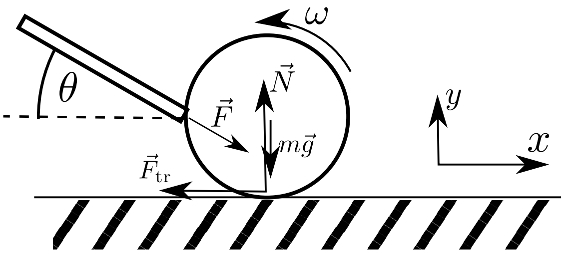
Слика 1: уз решење задатка 3.

4. Уколико током судара са штапом кугла не проклизава по подлози, након завршетка судара кугла ће наставити да се креће без проклизавања константном брзином коју је стекла током удара и неће се вратити у почетни положај. Размотримо зато случај кад кугла током судара проклизава по подлози. Из другог Њутновог закона за транслацију дуж $x-$осе налазимо да за кретање током судара важи једначина $\left(F\cos\theta - F_{\text{tr}}\right)\left(t - t_-\right) = mv(t)$, где $v(t)$ представља $x-$компоненту брзине кугле у тренутку t током судара, а F_{tr} је сила трења између кугле и подлоге. Из другог Њутновог закона за ротацију следи $\left(F\sin\theta - F_{\text{tr}}\right)R\left(t - t_-\right) = \frac{2}{5}mR^2\omega(t)$, где је R полупречник кугле, $\frac{2}{5}mR^2$ је момент инерције кугле у односу на осу која пролази кроз њен центар, а $\omega(t)$ је њена угаона брзина у тренутку t, при чему је њен претпостављени смер приказан на слици 2. Из услова да се кугла не креће дуж $y-$осе следи $N = F\sin\theta + mg$, где је N сила реакције подлоге. Кад кугла проклизава по подлози важи $F_{\text{tr}} = \mu N$. Из претходних једначина налазимо

$$v(t) = \left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right)\frac{F\left(t - t_-\right)}{m}, \qquad (1)$$

$$R\omega(t) = \frac{5}{2}\sin\theta\left(1 - \mu\right)\frac{F\left(t - t_-\right)}{m}, \qquad (2)$$

при чему су сви чланови облика $mg\left(t - t_-\right)$ занемарени јер је $\left(t - t_-\right)$ мало с обзиром да је судар краткотрајан, а mg је ограничена величина (чланови облика $F\left(t - t_-\right)$ и $N\left(t - t_-\right)$ се не могу занемарити јер F и N немају горњу граничну вредност). Да би кугла проклизавала током судара, потребно је да буде задовољен услов $v(t)+R\omega(t)>0$, одакле користећи једначине (1) и (2) налазимо $\mu<\frac{2}{7}\mathrm{ctg}\theta+\frac{5}{7}$, што је први потребан услов да би кугла током даљег кретања могла да се врати у почетни положај.



Слика 2: уз решење задатка 4.

Даље, заменом $t=t_+$ у једначине (1) и (2) добијамо брзину и угаону брзину кугле непосредно након судара:

$$v_0=(\cos\theta-\mu\sin\theta)\,\frac{p}{m}, \tag{3}$$

$$R\omega_0=\frac{5}{2}\sin\theta\,(1-\mu)\,\frac{p}{m}. \tag{4}$$

За кретање кугле након судара док кугла проклизава по подлози важе једначине

$$m\,[v(\tau)-v_0]=-F_{\mathrm{tr}}\tau, \tag{5}$$

$$\frac{2}{5}mR^2\,[\omega(\tau)-\omega_0]=-F_{\mathrm{tr}}R\tau \tag{6}$$

и

$$F_{\mathrm{tr}}=\mu mg, \tag{7}$$

где је τ протекли временски интервал од краја судара, а $v(\tau)$ и $\omega(\tau)$ брзина и угаона брзина у том тренутку. Кугла престаје да проклизава кад је задовољен услов $v(\tau_k)+R\omega(\tau_k)=0$, одакле коришћењем једначина (3)-(7) следи:

$$\tau_k=\frac{2p}{7\mu mg}\left(\cos\theta+\frac{5}{2}\sin\theta-\frac{7}{2}\mu\sin\theta\right). \tag{8}$$

Кугла ће се вратити у почетни положај ако је $v(\tau_k)<0$, одакле коришћењем једначина (3), (5), (7) и (8) следи $\theta>45^0$. **Дакле, кугла ће се вратити у почетни положај ако су испуњени услови $\mu<\frac{2}{7}\mathrm{ctg}\theta+\frac{5}{7}$ и $\theta>45^0$.**

Како се кугла од тренутка краја судара креће успорено са успорењем интензитета μg, она ће се вратити у почетни положај у тренутку $\tau_v^{(1)}=\frac{2v_0}{\mu g}$, под условом да је $\tau_v^{(1)}<\tau_k$, тј. да проклизавање престаје тек након тренутка $\tau_v^{(1)}$. Одатле користећи једначине (3) и (8) следи да се кугла враћа у почетни положај у тренутку $\tau_v^{(1)}=\frac{2p}{\mu mg}(\cos\theta-\mu\sin\theta)$ ако је $\mu>\frac{12\mathrm{ctg}\theta-5}{7}$. С друге стране, ако је испуњен услов $\mu\leq\frac{12\mathrm{ctg}\theta-5}{7}$, кугла се враћа у почетни положај тек након што престане проклизавање и тренутак у коме се то дешава је одређен са $\tau_v^{(2)}=\tau_k+\frac{x(\tau_k)}{-v(\tau_k)}$, где је $x(\tau_k)=v_0\tau_k-\frac{1}{2}\mu g\tau_k^2$ положај кугле у тренутку кад престане проклизавање. Користећи једначине (3), (5), (7) и (8) налазимо $\tau_v^{(2)}=\frac{2p}{35\mu mg}\frac{\left(\cos\theta+\frac{5}{2}\sin\theta-\frac{7}{2}\mu\sin\theta\right)^2}{\sin\theta-\cos\theta}$.

5. Из једначине за интензитет дате у задатку следи да се дифракциони минимуми јављају када је испуњен услов $\frac{\pi d\sin\varphi_m}{\lambda}=m\pi$, где је m цео број који није једнак нули. Из геометрије проблема следи да је $\mathrm{tg}\varphi_m=\frac{y_m-y_0}{D}$, где је y_m координата m-тог дифракционог минимума на екрану, а y_0 је координата централног максимума на екрану. Користећи апроксимацију $\sin\varphi_m\approx\mathrm{tg}\varphi_m$, из претходних једначина следи $y_m=y_0+\frac{\lambda D}{d}m$.

Мерена је зависност y_m од m и резултати су приказани у табели 1. Грешка очитавања положаја дифракционог минимума је процењена на $\Delta y_m=0{,}1$ cm с обзиром да се положај минимума процењује на основу места где је слика локално најтамнија, па је тешко проценити положај минимума са бољом тачношћу од ове.

m	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
y_m(cm)	2,5	3,7	5,0	6,2	7,5	10,0	11,3	12,7	14,0	15,4

Табела 1: Измерена зависност положаја дифракционог минимума од реда тог минимума.

Слика 3: уз решење задатка 5 - график зависности положаја дифракционог минимума од реда тог минимума.

На слици 3 је приказан график зависности y_m од m. Коефицијент правца k у линеарној зависности $y_m = y_0 + k \cdot m$ налазимо провлачењем праве која најбоље пролази кроз дате тачке и избором двеју тачака A и B на тој правој (где се A налази између прве и друге, а B између претпоследње и последње експерименталне тачке). Коефицијент правца је тада једнак $k = \frac{y_B - y_A}{m_B - m_A}$. У нашем случају је $y_B = 14{,}6\,\mathrm{cm}$, $y_A = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, $m_B = 4{,}5$, $m_A = -4{,}5$. Одатле следи $k = 1{,}289\,\mathrm{cm}$. Релативна грешка одређивања k се добија из $\frac{\Delta k}{k} = \left|\frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{y_A - y_B}\right| \approx 0{,}0172$. Дебљина длаке је једнака $d = \frac{\lambda D}{k} = 82{,}7\,\mu\mathrm{m}$, а грешка одређивања d је $\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta k}{k}$, одакле је $\Delta d = 2{,}06\,\mu\mathrm{m}$. Коначно се добија $d = (83 \pm 2)\,\mu\mathrm{m}$.

LVII ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2018/2019. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

IV разред — **ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА***

Суботица
22-23. март 2019.

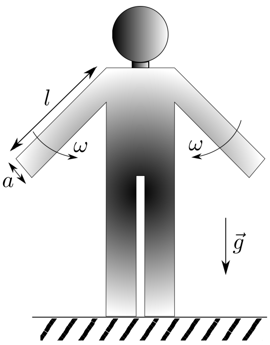
1. **(20 поена)** Да ли се у емисионом спектру атома водоника може наћи линија таласне дужине:
(а) $\lambda_a = (1{,}973 \pm 0{,}001)\ \mu\mathrm{m}$;
(б) $\lambda_b = (2{,}165 \pm 0{,}001)\ \mu\mathrm{m}$?
У оба случаја, уколико је одговор потврдан, одредити ком прелазу одговара та линија. Ридбергова константа је $R = 10973731{,}6\,\mathrm{m}^{-1}$.

2. Човек масе $m = 70{,}0\,\mathrm{kg}$ и запремине $V = 69{,}0\,\mathrm{dm}^3$ стоји на хоризонталној подлози. Густина ваздуха је $\rho = 1{,}10\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, а интензитет убрзања силе Земљине теже $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

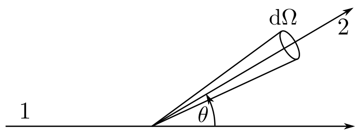
   (а) **(5 поена)** Одредити правац, смер и интензитет резултујуће силе којом честице ваздуха делују на човека. Сматрати да ваздух продире и у простор између ципела и подлоге.

   Човек потом покушава да полети тако што маше рукама. У почетном тренутку руке су раширене и налазе се у хоризонталном положају, а затим их човек спушта тако да свака рука ротира угаоном брзином интензитета $\omega = 20{,}0\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ око рамена, као што је приказано на слици 1. Сматрати да су руке облика квадра чија је дужина $l = 75{,}0\,\mathrm{cm}$, а попречни пресек је облика квадрата странице $a = 5{,}00\,\mathrm{cm}$. Раван једне од страна квадра се поклапа са равни у којој се крећу руке. Сматрати да приликом кретања руке кроз ваздух, рука саопштава честицама ваздуха које се налазе непосредно испод ње средњу брзину која је једнака брзини дела руке који је у контакту са тим честицама, као и да не мења средњу брзину честица ваздуха које се налазе непосредно изнад ње.

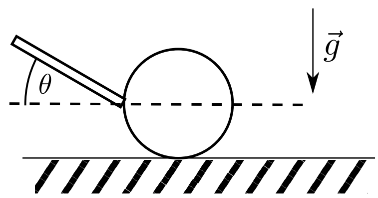
   (б) **(15 поена)** Одредити временску зависност интензитета резултујуће силе којом честице ваздуха делују на човека, и израчунати максималну вредност интензитета ове силе. На основу добијеног резултата прокоментарисати да ли човек може полетети на овај начин.



Слика 1: уз задатак 2 - човек који маше рукама.



Слика 2: уз задатак 3 - 1 означава правац кретања π^0 честице пре распада, а 2 означава правац кретања емитованог фотона.



Слика 3: уз задатак 4 - билијарски штап и кугла.

3. π^0 честица масе мировања m се креће релативистичком брзином интензитета v и распада се на два фотона. Интензитет брзине светлости је c.

   (а) **(8 поена)** Одредити минималну и максималну могућу енергију емитованих фотона.

   Угаона расподела емитованих фотона се дефинише као $I(\theta) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$, где је $\theta \in \left[0^0, 180^0\right]$ угао између правца емитованог фотона и правца кретања π^0 честице пре распада, а $\mathrm{d}P$ представља вероватноћу да настали фотон буде емитован унутар малог просторног угла $\mathrm{d}\Omega$, видети слику 2. Познато је да се при распаду π^0 честице која мирује фотони емитују изотропно (са једнаком вероватноћом у свим правцима).

   (б) **(12 поена)** Одредити угаону расподелу емитованих фотона.

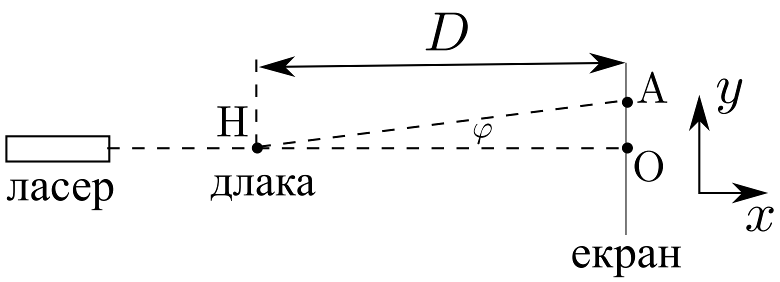
4. **(20 поена)** Хомогена билијарска кугла масе m која је мировала на хоризонталној подлози ударена је билијарским штапом у тачки која се налази у истој хоризонталној равни као и центар масе кугле, као што је приказано на слици 3. Правац дејства силе којом штап делује на куглу се поклапа са правцем штапа и заклапа угао θ ($\theta \in (0^0, 90^0)$) са хоризонталом, а можете сматрати да је током удара интензитет те силе константан. Судар штапа са куглом је краткотрајан и интензитет импулса силе којом штап делује на куглу је p (прецизније речено $p = F(t_+ - t_-)$, где је F интензитет силе, t_- је временски тренутак непосредно пре судара, а t_+ временски тренутак непосредно после судара). Коефицијент трења између кугле и подлоге је μ, а интензитет убрзања силе Земљине теже је g. Који услов треба да испуњавају величине θ и μ да би кугла током даљег кретања поново прошла кроз почетни положај? Одредити временски интервал након којег ће се то десити.

5. **(20 поена)** За мерења дебљине длаке људске косе може се искористити експеримент чија је шема приказана на слици 4. Сноп монохроматске светлости таласне дужине $\lambda = (650 \pm 1)\,\mathrm{nm}$ из ласерског показивача је усмерен у правцу $x-$осе према длаци. Длака је облика дугачке нити која се простире дуж $z-$осе. Попречни пресек длаке у xy-равни је круг пречника d. На растојању $D = (1{,}64 \pm 0{,}01)\,\mathrm{m}$ од длаке је постављен екран на коме се формира слика приказана на слици 5. Коришћењем те слике и цртањем и анализом одговарајућег графика одредити пречник длаке d и проценити грешку мерења овим поступком.

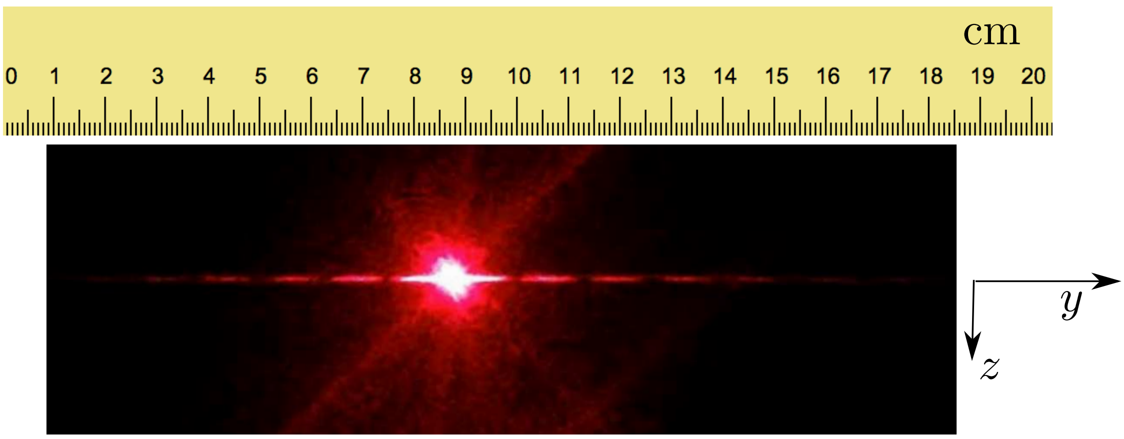
Помоћ: Интензитет светлости у тачки A на y-оси на екрану таквој да је $\angle \mathrm{AHO} = \varphi$ (видети слику 4) је једнак

$$I(\varphi) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}\right)}{\frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}} \right]^2 ,$$

где је I_0 интензитет за $\varphi = 0$. Кад је то оправдано, за мале углове α можете користити апроксимацију $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$.



Слика 4: уз задатак 5 - шема експеримента за мерење дебљине длаке.



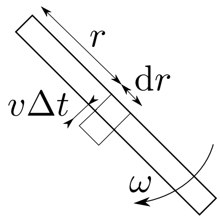
Слика 5: уз задатак 5 - слика која се формира на екрану и лењир који се може користити да се мере положаји или растојања на тој слици.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У бозонској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

1. Таласна дужина спектралне линије која одговара прелазу из стања n у стање m задовољава једначину $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. Серија линија са датим m и $n > m$ тако покрива спектрални опсег $\lambda \in \left(\frac{m^2}{R}, \frac{m^2(m+1)^2}{2m+1}\frac{1}{R}\right)$. Непосредним прорачуном закључујемо да дате линије евентуално могу да припадају серији са $m = 4$ (Брекетова серија) која покрива спектрални опсег $\lambda \in (1{,}458; 4{,}050)\,\mu$m, док су таласне дужине датих линија ван опсега таласних дужина серија са другим вредностима m [серија са $m = 1$ покрива опсег $\lambda \in (0{,}091; 0{,}122)\,\mu$m, серија са $m = 2$ покрива опсег $\lambda \in (0{,}365; 0{,}656)\,\mu$m, серија са $m = 3$ покрива опсег $\lambda \in (0{,}820; 1{,}875)\,\mu$m, серија са $m = 5$ покрива опсег $\lambda \in (2{,}278; 7{,}456)\,\mu$m, серија са $m = 6$ покрива опсег $\lambda \in (3{,}281; 12{,}365)\,\mu$m, итд.]. Даље, непосредним прорачуном линија из Брекетове серије (чије су таласне дужине редом 4,050 μm; 2,624 μm; 2,165 μm; 1,944 μm; 1,817 μm, итд.) налазимо да линија таласне дужине λ_b одговара прелазу из стања 7 у стање 4, док се линија таласне дужине λ_a не може наћи у спектру атома водоника.

2. (а) Сила којом честице ваздуха делују на човека је сила потиска ваздуха која је усмерена вертикално навише и по интензитету је једнака $F_p = \rho V g = 0{,}745$ N. (б) Услед тога што рука саопштава честицама ваздуха одговарајућу средњу брзину, по закону акције и реакције честице ваздуха делују на руку и јавља се додатна резултујућа сила усмерена навише која делује на руку. Део руке мале дужине $\mathrm{d}r$ који се налази на растојању r од рамена за време Δt интерагује са честицама ваздуха које се налазе унутар запремине $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \cdot v\Delta t \cdot a$, где је $v = r\omega$ брзина тог дела руке (видети слику 1). Тим честицама рука саопштава импулс интензитета $\Delta p = \rho \mathrm{d}V \cdot v$, па је интензитет силе којом рука делује на те честице $\mathrm{d}F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, одакле користећи претходне једначине следи $\mathrm{d}F = \rho a \omega^2 r^2 \mathrm{d}r$. На основу закона акције и реакције силом истог интензитета, а супротног смера честице ваздуха делују на руку. Зато је интензитет укупне силе (која се јавља због кретања руке) којом честице ваздуха делују на једну руку једнак $F = \int_0^l \mathrm{d}F = \int_0^l \rho a \omega^2 r^2 \mathrm{d}r$, односно $F = \frac{1}{3}\rho a \omega^2 l^3$. Интензитет укупне силе којом честице ваздуха делују на човека је онда $F_y = 2F\cos(\omega t) + F_p$, где фактор 2 потиче од чињенице да човек има две руке, а ωt је угао који рука заклапа са хоризонталом у тренутку t, при чему је урачуната и сила потиска одређена у делу (а). Максимална вредност интензитета ове силе је $F_{\max} = \frac{2}{3}\rho a \omega^2 l^3 + \rho V g$, односно $F_{\max} = 6{,}93$ N. Ова сила је много мања од силе Земљине теже која делује на човека (која износи $mg = 687$ N), па човек не може полетети на овај начин.



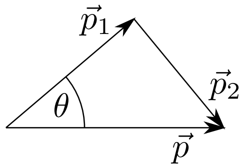
Слика 1: уз решење задатка 2.

3. (а) Из закона одржања енергије је $E = E_1 + E_2$, а из закона одржања импулса је $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, где су E и $\vec{p}$ енергија и импулс π^0-честице пре распада, а E_1, $\vec{p}_1$, E_2 и $\vec{p}_2$ редом енергија и импулс првог и другог фотона насталих у распаду. Нека је θ угао који правац кретања првог фотона заклапа са правцем кретања π^0-честице. Применом косинусне теореме на троугао приказан на дијаграму импулса честица (слика 2) следи $p_2^2 = p_1^2 + p^2 - 2pp_1\cos\theta$. Из претходних једначина и релација између енергије и импулса $E_1 = p_1 c$, $E_2 = p_2 c$ и $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, налазимо $E_1 = \frac{m^2c^4}{2(E - pc\cos\theta)}$. E_1 је минимално кад је $\cos\theta = -1$, а максимално кад је $\cos\theta = 1$. Коришћењем релација $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ и $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, налазимо да је тражена минимална енергија фотона $E_{\min} = \frac{1}{2}mc^2\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$, а максимална енергија фотона је $E_{\max} = \frac{1}{2}mc^2\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$.

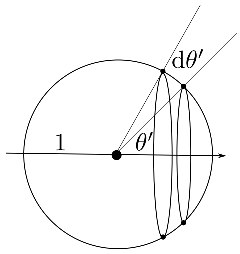
(б) Нека се π^0 честица креће дуж $x-$осе, нека је S референтни лабораторијски систем и нека је S' референтни систем који се у односу на S креће брзином v дуж $x-$осе. У референтном систему S' честица мирује, тако да изотропно емитује фотоне. Одатле следи да је угаона расподела $I'(\theta')$ (где је θ' угао који правац кретања фотона заклапа са $x-$осом у систему S') у референтном систему S' константа. Пошто је вероватноћа да се фотон емитује унутар пуног просторног угла од 4π једнака 1, следи $I'(\theta') = \frac{1}{4\pi}$.

Даље, нађимо везу између углова θ и θ'. $x-$компонента брзине фотона је у систему S једнака $v_{xf} = c\cos\theta$, а у систему S' је $v'_{xf} = c\cos\theta'$. Из закона слагања брзина следи $v'_{xf} = \frac{v_{xf} - v}{1 - \frac{vv_{xf}}{c^2}}$, одакле је

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v\cos\theta}{c}}. \quad (1)$$



Слика 2: уз решење задатка 3(а).



Слика 3: уз решење задатка 3(б).

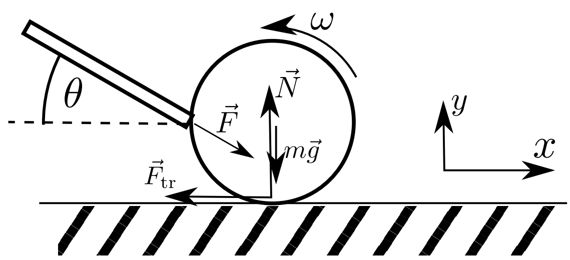
Вероватноћа да се емитовани фотон у систему S' креће под углом из интервала $(\theta',\theta'+\mathrm{d}\theta')$ у односу на $x-$осу је једнака $\mathrm{d}P'_{(\theta',\theta'+\mathrm{d}\theta')} = I'(\theta')\cdot 2\pi\sin\theta'\mathrm{d}\theta'$, где је $2\pi\sin\theta'\mathrm{d}\theta'$ просторни угао под којим се види прстен приказан на слици (3). Аналогно је вероватноћа да се емитовани фотон у систему S креће под углом из интервала $(\theta,\theta+\mathrm{d}\theta)$ у односу на $x-$осу једнака $\mathrm{d}P_{(\theta,\theta+\mathrm{d}\theta)} = I(\theta)\cdot 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$. Кад углови θ и θ' задовољавају релацију (1) важи $\mathrm{d}P'_{(\theta',\theta'+\mathrm{d}\theta')} = \mathrm{d}P_{(\theta,\theta+\mathrm{d}\theta)}$. Одатле следи $I(\theta) = I'(\theta')\frac{\mathrm{d}(\cos\theta')}{\mathrm{d}(\cos\theta)}$. Коришћењем релације (1) налазимо $\frac{\mathrm{d}(\cos\theta')}{\mathrm{d}(\cos\theta)} = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}$, одакле је коначно $I(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}$.

4. Уколико током судара са штапом кугла не проклизава по подлози, након завршетка судара кугла ће наставити да се креће без проклизавања константном брзином коју је стекла током удара и неће се вратити у почетни положај. Размотримо зато случај кад кугла током судара проклизава по подлози. Из другог Њутновог закона за транслацију дуж $x-$осе налазимо да за кретање током судара важи једначина $(F\cos\theta - F_{\mathrm{tr}})(t-t_-) = mv(t)$, где $v(t)$ представља $x-$компоненту брзине кугле у тренутку t током судара, а F_{tr} је сила трења између кугле и подлоге. Из другог Њутновог закона за ротацију следи $(F\sin\theta - F_{\mathrm{tr}})R(t-t_-) = \frac{2}{5}mR^2\omega(t)$, где је R полупречник кугле, $\frac{2}{5}mR^2$ је момент инерције кугле у односу на осу која пролази кроз њен центар, а $\omega(t)$ је њена угаона брзина у тренутку t, при чему је њен претпостављени смер приказан на слици 4. Из услова да се кугла не креће дуж $y-$осе следи $N = F\sin\theta + mg$, где је N сила реакције подлоге. Кад кугла проклизава по подлози важи $F_{\mathrm{tr}} = \mu N$. Из претходних једначина налазимо

$$v(t) = (\cos\theta - \mu\sin\theta)\frac{F(t-t_-)}{m}, \tag{2}$$

$$R\omega(t) = \frac{5}{2}\sin\theta(1-\mu)\frac{F(t-t_-)}{m}, \tag{3}$$

при чему су сви чланови облика $mg(t-t_-)$ занемарени јер је $(t-t_-)$ мало с обзиром да је судар краткотрајан, а mg је ограничена величина (чланови облика $F(t-t_-)$ и $N(t-t_-)$ се не могу занемарити јер F и N немају горњу граничну вредност). Да би кугла проклизавала током судара, потребно је да буде задовољен услов $v(t)+R\omega(t) > 0$, одакле користећи једначине (2) и (3) налазимо $\mu < \frac{2}{7}\mathrm{ctg}\theta + \frac{5}{7}$, што је први потребан услов да би кугла током даљег кретања могла да се врати у почетни положај.



Слика 4: уз решење задатка 4.

Даље, заменом $t = t_+$ у једначине (2) и (3) добијамо брзину и угаону брзину кугле непосредно након судара:

$$v_0 = (\cos\theta - \mu\sin\theta)\frac{p}{m}, \tag{4}$$

$$R\omega_0 = \frac{5}{2}\sin\theta(1-\mu)\frac{p}{m}. \tag{5}$$

За кретање кугле након судара док кугла проклизава по подлози важе једначине

$$m\left[v(\tau)-v_0\right]=-F_{\rm tr}\tau, \tag{6}$$

$$\frac{2}{5}mR^2\left[\omega(\tau)-\omega_0\right]=-F_{\rm tr}R\tau \tag{7}$$

и

$$F_{\rm tr}=\mu mg, \tag{8}$$

где је τ протекли временски интервал од краја судара, а $v(\tau)$ и $\omega(\tau)$ брзина и угаона брзина у том тренутку. Кугла престаје да проклизава кад је задовољен услов $v(\tau_k)+R\omega(\tau_k)=0$, одакле коришћењем једначина (4)-(8) следи:

$$\tau_k=\frac{2p}{7\mu mg}\left(\cos\theta+\frac{5}{2}\sin\theta-\frac{7}{2}\mu\sin\theta\right). \tag{9}$$

Кугла ће се вратити у почетни положај ако је $v(\tau_k)<0$, одакле коришћењем једначина (4), (6), (8) и (9) следи $\theta>45^0$. **Дакле, кугла ће се вратити у почетни положај ако су испуњени услови $\mu<\frac{2}{7}{\rm ctg}\theta+\frac{5}{7}$ и $\theta>45^0$.**

Како се кугла од тренутка краја судара креће успорено са успорењем интензитета μg, она ће се вратити у почетни положај у тренутку $\tau_v^{(1)}=\frac{2v_0}{\mu g}$, под условом да је $\tau_v^{(1)}<\tau_k$, тј. да проклизавање престаје тек након тренутка $\tau_v^{(1)}$. Одатле користећи једначине (4) и (9) следи да се кугла враћа у почетни положај у тренутку $\tau_v^{(1)}=\frac{2p}{\mu mg}(\cos\theta-\mu\sin\theta)$ ако је $\mu>\frac{12{\rm ctg}\theta-5}{7}$. С друге стране, ако је испуњен услов $\mu\leq\frac{12{\rm ctg}\theta-5}{7}$, кугла се враћа у почетни положај тек након што престане проклизавање и тренутак у коме се то дешава је одређен са $\tau_v^{(2)}=\tau_k+\frac{x(\tau_k)}{-v(\tau_k)}$, где је $x(\tau_k)=v_0\tau_k-\frac{1}{2}\mu g\tau_k^2$ положај кугле у тренутку кад престане проклизавање. Користећи једначине (4), (6), (8) и (9) налазимо $\tau_v^{(2)}=\frac{2p}{35\mu mg}\frac{\left(\cos\theta+\frac{5}{2}\sin\theta-\frac{7}{2}\mu\sin\theta\right)^2}{\sin\theta-\cos\theta}$.

Слика 5: уз решење задатка 5 - график зависности положаја дифракционог минимума од реда тог минимума.

5. Из једначине за интензитет дате у задатку следи да се дифракциони минимуми јављају када је испуњен услов $\frac{\pi d\sin\varphi_m}{\lambda}=m\pi$, где је m цео број који није једнак нули. Из геометрије проблема следи да је ${\rm tg}\varphi_m=\frac{y_m-y_0}{D}$, где је y_m координата m-тог дифракционог минимума на екрану, а y_0 је координата централног максимума на екрану. Користећи апроксимацију $\sin\varphi_m\approx{\rm tg}\varphi_m$, из претходних једначина следи $y_m=y_0+\frac{\lambda D}{d}m$.

Мерена је зависност y_m од m и резултати су приказани у табели 1. Грешка очитавања положаја дифракционог минимума је процењена на $\Delta y_m=0{,}1$ cm с обзиром да се положај минимума процењује на основу места где је слика локално најтамнија, па је тешко проценити положај минимума са бољом тачношћу од ове.

m	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
y_m(cm)	2,5	3,7	5,0	6,2	7,5	10,0	11,3	12,7	14,0	15,4

Табела 1: Измерена зависност положаја дифракционог минимума од реда тог минимума.

На слици 5 је приказан график зависности y_m од m. Коефицијент правца k у линеарној зависности $y_m = y_0 + k \cdot m$ налазимо провлачењем праве која најбоље пролази кроз дате тачке и избором двеју тачака A и B на тој правој (где се A налази између прве и друге, а B између претпоследње и последње експерименталне тачке). Коефицијент правца је тада једнак $k = \frac{y_B - y_A}{m_B - m_A}$. У нашем случају је $y_B = 14{,}6\,\mathrm{cm}$, $y_A = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, $m_B = 4{,}5$, $m_A = -4{,}5$. Одатле следи $k = 1{,}289\,\mathrm{cm}$. Релативна грешка одређивања k се добија из $\frac{\Delta k}{k} = \left|\frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{y_A - y_B}\right| \approx 0{,}0172$. Дебљина длаке је једнака $d = \frac{\lambda D}{k} = 82{,}7\,\mu\mathrm{m}$, а грешка одређивања d је $\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta k}{k}$, одакле је $\Delta d = 2{,}06\,\mu\mathrm{m}$. Коначно се добија $d = (83 \pm 2)\,\mu\mathrm{m}$.