ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2018/19. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

III разред

ЗАДАЦИ – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА

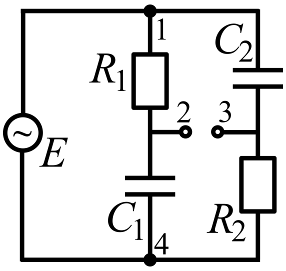
ОКРУЖНИ НИВО
03.03.2019.

1. Маја се пење уз покретне степенице под углом од $\theta = 30^\circ$ и дужине $L = 10\,\mathrm{m}$. Ако је линеарна брзина степеница $v_S = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, а она се у односу на њих креће брзином $v_M = 1{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, одредити колики је однос радова које је извршила она и мотор који покреће степенице. Сматрати да нема трења у механизму степеница. **(20 поена)**

2. Ручни сат се налази у магнетном пољу Земље. Колика електромоторна сила се индукује на крајевима секундне, минутне и часовне казаљке, уколико су њихове дужине $L_s = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, $L_m = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ и $L_h = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, респективно. Узети да је интензитет магнетне индукције $B = 5{,}0\,\mu\mathrm{T}$, а да је његов правац нормалан на раван у којој се казаљке обрћу. Сматрати да су казаљке направљене од метала и да су међусобно изоловане. **(20 поена)**

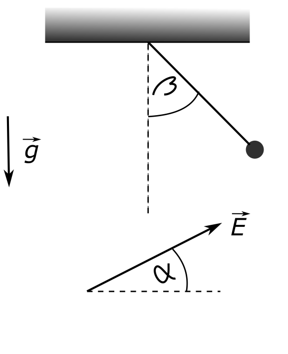
3. Клип облика цилиндра, чија је површина основе S и маса m, налази се у хоризонтално постављеној цеви затвореној са обе стране. У равнотежном положају, клип дели цев на два дела једнаких запремина V_0, у којима се налази исти гас на температури T_0 и притиску p_0. Ако се применом спољашње силе клип измести за мало растојање из равнотежног положаја, а затим се систем препусти сам себи, клип ће почети да осцилује. Сматрајући да су гасни процеси адијабатски, наћи период малих осцилација у зависности од адијабатске константе γ. Сматрати да нема протока енергије кроз зидове цилиндра и кроз клип. Занемарити силу трења која делује на клип.
Помоћ: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, за $\alpha \in \mathbb{R}$ и $|x| \ll 1$. **(20 поена)**

4. У колу наизменичне струје приказаном на слици, позната је ефективна вредност напона извора E. Ако је фазна разлика струја грана 1-2-4 и 1-3-4 једнака α, одредити ефективну вредност излазног напона U_{23}.
Помоћ: $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$. **(20 поена)**



Слика уз задатак 4.

5. Куглица масе $m = 10\,\mathrm{g}$ и наелектрисања $q = 10^{-6}\,\mathrm{C}$, обешена је на изоловану нит у хомогеном електричном пољу јачине $E = 5 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ при чему вектор електричног поља заклапа угао $\alpha = 30^\circ$ у односу на хоризонталу (слика). Куглицу отклонимо удесно тако да нит заклапа угао $\beta = 45^\circ$ са вертикалом, и пустимо. Наћи затезање нити у тренутку проласка куглице кроз вертикални положај. Убрзање Земљине теже је $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. **(20 поена)**



Слика уз задатак 5.

Задатке припремили: *Марко Кузмановић*, Universite Paris-Sud, Француска
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија
Рецензент: *др Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

1. Уколико са t означимо време које је потребно да се Маја попне до врха степеница, радови који изврше Маја и степенице ће бити једнаки $A_M = mgv_M t\sin\theta$ $\boxed{\textbf{7п}}$ и $A_S = mgv_S t\sin\theta$ $\boxed{\textbf{7п}}$. Дељењем ове две једначине се добија $\frac{A_M}{A_S} = \frac{v_M}{v_S} = 0{,}6$ $\boxed{\textbf{4п+2п}}$.

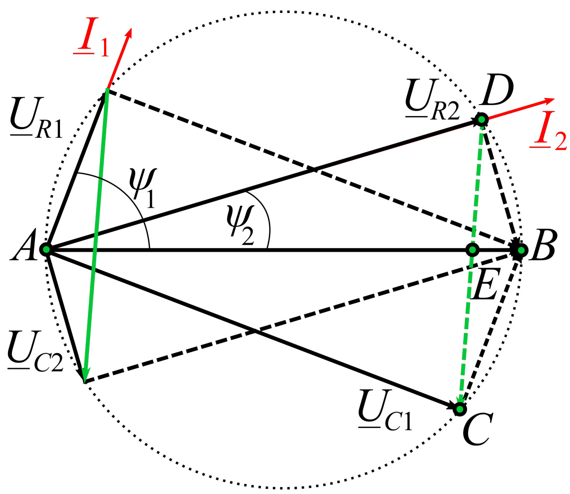
2. Индукована електромоторна сила у казаљкама се може наћи помоћу једначине $\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Промена флукса је једнака $\Delta\Phi_i = B\Delta S_i$ $\boxed{\textbf{2п}}$, док је пребрисана површина $\Delta S_i = L_i^2\pi\frac{\Delta\phi_i}{2\pi}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Како је угао који пребрише казаљка $\Delta\phi_i = \omega_i\Delta t$ $\boxed{\textbf{2п}}$, следи да је $\varepsilon_i = \frac{BL_i^2\omega_i}{2}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Угаоне брзине казаљки се израчунавају помоћу периода казаљки $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, где су периоди $T_s = 60\ \mathrm{s}$, $T_m = 60\ \mathrm{min} = 3600\ \mathrm{s}$ и $T_h = 12\ \mathrm{h} = 43200\ \mathrm{s}$ $\boxed{\textbf{3п}}$ па је коначан израз за индуковане електромоторне силе, односно за напоне $\varepsilon_i = \frac{BL_i^2\pi}{T_i}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Заменом бројних вредности се добија $\varepsilon_s = 235{,}6\ \mathrm{pV}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, $\varepsilon_m = 2{,}73\ \mathrm{pV}$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $\varepsilon_h = 0{,}08\ \mathrm{pV}$ $\boxed{\textbf{1п}}$.

3. При адијабатском процесу важи закон $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Стога је $p(V) = p_0V_0^\gamma V^{-\gamma}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. При промени запремине за δV важи $p(V_0+\delta V) = p_0V_0^\gamma(V_0+\delta V)^{-\gamma} = p_0V_0^\gamma V_0^{-\gamma}(1+\frac{\delta V}{V_0})^{-\gamma}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Применом $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ добијамо $p(V) \approx p_0V_0^\gamma V_0^{-\gamma}(1-\gamma\frac{\delta V}{V_0}) = p_0(1-\gamma\frac{\delta V}{V_0})$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Сила која делује на клип једнака је $F = (p_L - p_D)S$ $\boxed{\textbf{2п}}$, те ако се он помери у десно за $\delta x = \frac{\delta V}{S}$, сила која ће на њега деловати је $F = -S2p_0\gamma\frac{\delta V}{V_0} = -S^2 2p_0\gamma\frac{\delta x}{V_0}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Из претходног се може прочитати да јереституциона константа једнака $k = \frac{S^2 2p_0\gamma}{V_0}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, те је период малих осцилација једнак $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mV_0}{2p_0\gamma S^2}}$ $\boxed{\textbf{3п}}$.

4. Нека су ψ_1 и ψ_2 фазни помераји струја које теку кроз отпорник R_1 и кондензатор C_1, односно отпорник R_2 и кондензатор C_2, у односу на напон извора. По услову задатка је $\psi_1 - \psi_2 = \alpha$. Напони паралелних грана су једнаки, па су једнаки и њихови фазори и једнаки су фазору напона извора E $\boxed{\textbf{1п}}$. Фазор струје $\underline{I}_1$ у фази је са фазором напона на отпорнику $\underline{U}_{R_1}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, док предњачи у односу на фазор напона на кондензатору $\underline{U}_{C_1}$ за $\pi/2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Слично је и за фазор струје $\underline{I}_2$. На основу тога можемо нацртати фазорски дијаграм као на слици (за исправно нацртани фазорски дијаграм са означеним угловима ψ_1 и ψ_2 $\boxed{\textbf{3п}}$). Тачке A, B, C и D леже на кругу над пречником AB $\boxed{\textbf{2п}}$.
Први начин: Ако са E означимо пресек тетива AB и CD онда на основу тригонометрије важе следеће једнакости: $|CB| = |AB|\cos\psi_1$, $|CE| = |CB|\frac{\sin\psi_1}{\sin(\psi_1+\psi_2)}$, $|AD| = |AB|\cos\psi_2$, $|ED| = |AD|\frac{\sin\psi_2}{\sin(\psi_1+\psi_2)}$. $|CD| = |CE| + |ED| = |AB|\frac{\sin\psi_1\cos\psi_1+\sin\psi_2\cos\psi_2}{\sin(\psi_1+\psi_2)} = |AB|\frac{\frac{1}{2}\sin(2\psi_1)+\frac{1}{2}\sin(2\psi_2)}{\sin(\psi_1+\psi_2)} = |AB|\frac{\sin(\psi_1+\psi_2)\cos(\psi_1-\psi_2)}{\sin(\psi_1+\psi_2)} = E\cos\alpha$ $\boxed{\textbf{5п}}$. Ефективна вредност напона U_{23} једнака је дужини фазора $\underline{U}_{23} = \underline{U}_{C_2} - \underline{U}_{R_1}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, што одговара дужини $|CD|$, па је коначно $U_{23} = E\cos\alpha$ $\boxed{\textbf{3п}}$.
Други начин: Како је четвороугао $ABCD$ тетиван, то можемо применити Птоломејеву теорему која нам даје однос страница и дијагонала $U_{C_1}\cdot U_{C_2} + U_{R_1}\cdot U_{R_2} = E\cdot U_{23}$ $\boxed{\textbf{3п}}$, одакле је $I_1I_2(X_{C_1}X_{C_2} + R_1R_2) = EU_{23}$, где је $X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1}$ и $X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2}$. За струје грана важи $I_1 = \frac{E}{\sqrt{R_1^2+X_{C_1}^2}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $I_2 = \frac{E}{\sqrt{R_2^2+X_{C_2}^2}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Сада је $\frac{E^2}{\sqrt{\left(R_1^2+X_{C_1}^2\right)\left(R_1^2+X_{C_1}^2\right)}}(R_1R_2+X_{C_1}X_{C_2}) = EU_{23}$. Имајући у виду релације $\frac{X_{C_1}}{R_1} = \mathrm{tg}\psi_1$ и $\frac{X_{C_2}}{R_2} = \mathrm{tg}\psi_2$, након сређивања добија се $U_{23} = \frac{E(1+\mathrm{tg}\psi_1\mathrm{tg}\psi_2)}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\psi_1)(1+\mathrm{tg}^2\psi_2)}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$ $\Rightarrow U_{23} = \frac{E(1+\mathrm{tg}\psi_1\mathrm{tg}\psi_2)}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\psi_1\cos^2\psi_2}}}$. Коначно је $U_{23} = E(\cos\psi_1\cos\psi_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2) = E\cos(\psi_1-\psi_2) = E\cos\alpha$ $\boxed{\textbf{3п}}$.
Напомена: *Не давати бодове за елементе и једног и другог начина (комбиновано), већ или једног или другог (искључиво), али тако да је изабрани начин повољнији за такмичара.*

5. Сила затезања нити, када је нит у вертикалном положају, је једнака $T = \frac{mv^2}{l} + mg - qE_y$ $\boxed{\textbf{4п}}$. Брзина куглице, када је нит у вертикалном положају се са друге стране може наћи из закона одржања енергије $mg(l - l\cos\beta) = \frac{mv^2}{2} + qE_xl\sin\beta + qE_y(l - l\cos\beta)$ $\boxed{\textbf{4п}}$, где су хоризонтална и вертикална компонента електричног поља $E_x = E\cos\alpha$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $E_y = E\sin\alpha$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Из ове формуле следи да је $\frac{mv^2}{l} = 2mg(1-\cos\beta) - 2qE(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha) = 2mg(1-\cos\beta) - 2qE(\sin(\beta-\alpha)+\sin\alpha)$ $\boxed{\textbf{5п}}$, па се заменом у израз за силу затезања добија $T = mg(3-2\cos\beta) - qE(2\sin(\beta-\alpha)+3\sin\alpha) = 54{,}7\ \mathrm{mN}$ $\boxed{\textbf{3п+2п}}$.

Задатке припремили: *Марко Кузмановић*, Universite Paris-Sud, Француска
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија
Рецензент: *др Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд



Слика уз задатак 4.

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2018/19. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА

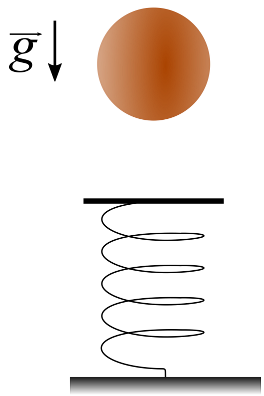
III разред

ОКРУЖНИ НИВО
03.03.2019.

1. Дејан и Јован играју кошарку за два различита кошаркашка клуба. У току утакмице, Дејан шутира тројку са удаљености $D = 7{,}25$ m. Након што подигне руке при избачају, лопта је на висини $h_D = 210$ cm изнад земље. Јован, који се налази $d = 100$ cm далеко од Дејана, покушава да га изблокира и скаче вертикално увис, тако да су му врхови прстију руке којом покушава да изблокира на висини $h = 310$ cm. Лопта прелеће непосредно изнад Јованових прстију и касније улеће у кош. Која је највећа висина на којој се налази лопта у току свог лета? Обруч коша се налази на висини $H = 3{,}05$ m. **(20 поена)**

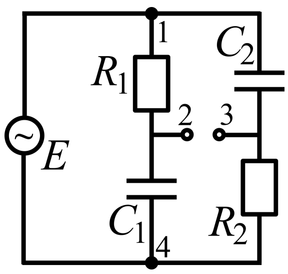
2. Ручни сат се налази у магнетном пољу Земље. Колика електромоторна сила се индукује на крајевима секундне, минутне и часовне казаљке, уколико су њихове дужине $L_s = 3{,}0$ cm, $L_m = 2{,}5$ cm и $L_h = 1{,}5$ cm, респективно. Узети да је интензитет магнетне индукције $B = 5{,}0\,\mu$T, а да је његов правац нормалан на раван у којој се казаљке обрћу. Сматрати да су казаљке направљене од метала и да су међусобно изоловане. **(20 поена)**

3. Лопта масе M пуштена је да пада у тренутку $t = 0$ са висине H без почетне брзине. Испод лопте налази се лака опруга коефицијента еластичности k са хоризонталним тасом занемарљиве масе (слика). Опруга у недеформисаном стању има дужину l_0 и све време остаје вертикална.
а) Одредити тренутак удара лопте о тас t_1 и висину равнотежног положаја лопте h_r.
б) Наћи угаону учестаност ω и амплитуду A успостављених осцилација.
в) Скицирати график висине лопте у зависности од времена $h(t)$, $t \geq 0$ и на њему означити величине одређене у претходним деловима.
г) Колика је енергија осцилација? **(20 поена)**



Слика уз задатак 3.

4. У колу наизменичне струје приказаном на слици, позната је ефективна вредност напона извора E. Ако је фазна разлика струја грана 1-2-4 и 1-3-4 једнака α, одредити ефективну вредност излазног напона U_{23}.
Помоћ: $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$. **(20 поена)**



Слика уз задатак 4.

5. На глатком столу налазе се два стална магнета различитих маса. Магнети су постављени тако да је северни пол једног окренут ка јужном полу другог и оба магнета се одржавају у стању мировања. Након што се пусти први магнет, до судара дође за $T_1 = 0{,}6$ s. Ако бисмо из почетног положаја уместо првог пустили други магнет, до судара би дошло за $T_2 = 0{,}8$ s. Ако из истог почетног положаја истовремено из мировања пустимо оба магнета, за колико времена дође до судара? Сматрати да потенцијална енергија магнетне интеракције зависи само од растојања између два магнета. **(20 поена)**

Задатке припремили: *Марко Кузмановић*, Universite Paris-Sud, Француска
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија
Рецензент: *др Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2018/19. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

III разред

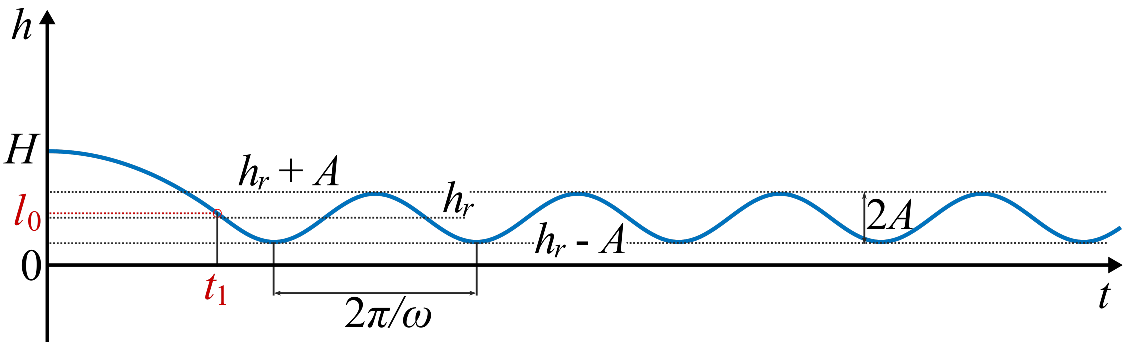
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА

ОКРУЖНИ НИВО
03.03.2019.

1. Путања лопте је парабала, односно, дата је једначином $y = ax^2 + bx + c$ $\boxed{\text{3п}}$. Из услова задатка су позната три положаја лопте. Уколико се координатни почетак постави на место на коме се Дејан налази при шуту, координате ова три положаја су: $(x_1, y_1) = (0, h_D)$, $(x_2, y_2) = (d, h_J)$ и $(x_3, y_3) = (D, H)$ $\boxed{\text{3п}}$. Потребно је дакле, најпре одредити коефицијенте a, b и c. Из првог положаја лопте се добија $c = h_D$ $\boxed{\text{1п}}$. Из преостала два положаја имамо две једначине са две непознате $h_J = ad^2 + bd + h_D$ $\boxed{\text{1п}}$ и $H = aD^2 + bD + h_D$ $\boxed{\text{1п}}$. Њиховим решавањем се добија $a = \frac{(h_J - h_D)D - (H - h_D)d}{dD(d - D)} = -0{,}139\,\mathrm{m}^{-1}$ $\boxed{\text{3п}}$ и $b = \frac{(H - h_D)d^2 - (h_J - h_D)D^2}{dD(d - D)} = 113{,}9$ $\boxed{\text{3п}}$. Квадратна функција има само један екстремум, и то за вредност $x_{max} = -\frac{b}{2a}$ $\boxed{\text{1п}}$, када је $y_{max} = c - \frac{b^2}{4a}$ $\boxed{\text{1п}}$. Заменом израчунатих константи a, b и c се коначно добија да је максимална висина коју достигне лопта једнака $y_{max} = 4{,}43\,\mathrm{m}$ $\boxed{\text{3п}}$.

2. Индукована електромоторна сила у казаљкама се може наћи помоћу једначине $\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t}$ $\boxed{\text{2п}}$. Промена флукса је једнака $\Delta\Phi_i = B\Delta S_i$ $\boxed{\text{2п}}$, док је пребрисана површина $\Delta S_i = L_i^2 \pi \frac{\Delta\phi_i}{2\pi}$ $\boxed{\text{2п}}$. Како је угао који пребрише казаљка $\Delta\phi_i = \omega_i \Delta t$ $\boxed{\text{2п}}$, следи да је $\varepsilon_i = \frac{BL_i^2\omega_i}{2}$ $\boxed{\text{2п}}$. Угаоне брзине казаљки се израчунавају помоћу периода казаљки $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ $\boxed{\text{1п}}$, где су периоди $T_s = 60\,\mathrm{s}$, $T_m = 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s}$ и $T_h = 12\,\mathrm{h} = 43200\,\mathrm{s}$ $\boxed{\text{3п}}$ па је коначан израз за индуковане електромоторне силе, односно за напоне $\varepsilon_i = \frac{BL_i^2\pi}{T_i}$ $\boxed{\text{3п}}$. Заменом бројних вредности се добија $\varepsilon_s = 235{,}6\,\mathrm{pV}$ $\boxed{\text{1п}}$, $\varepsilon_m = 2{,}73\,\mathrm{pV}$ $\boxed{\text{1п}}$ и $\varepsilon_h = 0{,}08\,\mathrm{pV}$ $\boxed{\text{1п}}$.

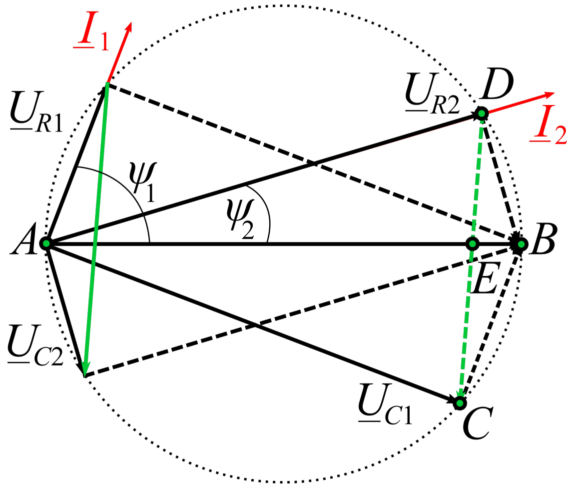
3. Након удара о тас, у тренутку $t_1 = \sqrt{\frac{2(H - l_0)}{g}}$ $\boxed{\text{1п}}$, лопта наставља да гура тас наниже непромењеном почетном брзином и креће се по хармонијском закону $Ma = Mg - kx$ $\boxed{\text{2п}}$, где је x померај таса у односу на почетни положај, усмерен вертикално наниже. Равнотежни положај лопте се добија за $x = Mg/k$, односно, у односу на површину земље: $h_r = l_0 - Mg/k$ $\boxed{\text{2п}}$. Угаона учестаност осцилација је $\omega = \sqrt{k/M}$ $\boxed{\text{2п}}$. Ако са h означимо висину лопте у положајима у којима је њена брзина једнака нули, онда на основу закона одржања енергије можемо писати: $Mg(H - h) = \frac{1}{2}k(l_0 - h)^2$ $\boxed{\text{2п}}$. Решења ове квадратне једначине одговарају горњем и доњем амплитудном положају лопте: $h_{1,2} = l_0 - \frac{Mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 + 2\frac{Mg}{k}(H - l_0)}$ $\boxed{\text{2п}}$, одакле се може изразити амплитуда осциловања као $2A = |h_1 - h_2|$, односно $A = \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 + 2\frac{Mg}{k}(H - l_0)}$ $\boxed{\text{2п}}$. График је приказан на слици (параболична зависност од тренутка 0 до t_1 $\boxed{\text{1п}}$, тачно означене висине у тренутку $t = 0$ и $t = t_1$ $\boxed{\text{0,5п}}+\boxed{\text{0,5п}}$, косинусна зависност од тренутка t_1 надаље са тачно означеним периодом $\boxed{\text{1п}}$, тачно означени равнотежни положај $\boxed{\text{1п}}$ и тачно означена амплитуда $\boxed{\text{1п}}$). Енергија осциловања је $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{(Mg)^2}{2k} + Mg(H - l_0)$ $\boxed{\text{2п}}$.



Слика уз задатак 3.

4. Нека су ψ_1 и ψ_2 фазни помераји струја које теку кроз отпорник R_1 и кондензатор C_1, односно отпорник R_2 и кондензатор C_2, у односу на напон извора. По услову задатка је $\psi_1 - \psi_2 = \alpha$. Напони паралелних грана су једнаки, па су једнаки и њихови фазори и једнаки су фазору напона извора E $\boxed{\text{1п}}$. Фазор струје $\underline{I}_1$ у фази је са фазором напона на отпорнику $\underline{U}_{R_1}$ $\boxed{\text{2п}}$, док предњачи у односу на фазор напона на кондензатору $\underline{U}_{C_1}$ за $\pi/2$ $\boxed{\text{2п}}$. Слично је и за фазор струје $\underline{I}_2$. На основу тога можемо нацртати фазорски дијаграм као на слици (за исправно нацртани фазорски дијаграм са означеним угловима ψ_1 и ψ_2 $\boxed{\text{3п}}$). Тачке A, B, C и D леже на кругу над пречником AB $\boxed{\text{2п}}$.

Први начин: Ако са E означимо пресек тетива AB и CD онда на основу тригонометрије важе следеће једнакости: $|CB| = |AB|\cos\psi_1$, $|CE| = |CB|\frac{\sin\psi_1}{\sin(\psi_1+\psi_2)}$, $|AD| = |AB|\cos\psi_2$, $|ED| = |AD|\frac{\sin\psi_2}{\sin(\psi_1+\psi_2)}$. $|CD| = |CE| + |ED| = |AB|\frac{\sin\psi_1\cos\psi_1+\sin\psi_2\cos\psi_2}{\sin(\psi_1+\psi_2)} = |AB|\frac{\frac{1}{2}\sin(2\psi_1)+\frac{1}{2}\sin(2\psi_2)}{\sin(\psi_1+\psi_2)} = |AB|\frac{\sin(\psi_1+\psi_2)\cos(\psi_1-\psi_2)}{\sin(\psi_1+\psi_2)} = E\cos\alpha$ $\boxed{\text{5п}}$. Ефективна вредност напона U_{23} једнака је дужини фазора $\underline{U}_{23} = \underline{U}_{C_2} - \underline{U}_{R_1}$ $\boxed{\text{2п}}$, што одговара дужини $|CD|$, па је коначно $U_{23} = E\cos\alpha$ $\boxed{\text{3п}}$.
Други начин: Како је четвороугао $ABCD$ тетиван, то можемо применити Птоломејеву теорему која нам даје однос страница и дијагонала $U_{C_1}\cdot U_{C_2} + U_{R_1}\cdot U_{R_2} = E\cdot U_{23}$ $\boxed{\text{3п}}$, одакле је $I_1 I_2(X_{C_1}X_{C_2} + R_1R_2) = EU_{23}$, где је $X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1}$ и $X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2}$. За струје грана важи $I_1 = \frac{E}{\sqrt{R_1^2+X_{C_1}^2}}$ $\boxed{\text{1п}}$ и $I_2 = \frac{E}{\sqrt{R_2^2+X_{C_2}^2}}$ $\boxed{\text{1п}}$. Сада је $\frac{E^2}{\sqrt{\left(R_1^2+X_{C_1}^2\right)\left(R_1^2+X_{C_1}^2\right)}}(R_1R_2+X_{C_1}X_{C_2}) = EU_{23}$. Имајући у виду релације $\frac{X_{C_1}}{R_1} = \mathrm{tg}\psi_1$ и $\frac{X_{C_2}}{R_2} = \mathrm{tg}\psi_2$, након сређивања добија се $U_{23} = \frac{E(1+\mathrm{tg}\psi_1\mathrm{tg}\psi_2)}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\psi_1)(1+\mathrm{tg}^2\psi_2)}}$ $\boxed{\text{2п}}$ $\Rightarrow U_{23} = \frac{E(1+\mathrm{tg}\psi_1\mathrm{tg}\psi_2)}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\psi_1\cos^2\psi_2}}}$. Коначно је $U_{23} = E(\cos\psi_1\cos\psi_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2) = E\cos(\psi_1-\psi_2) = E\cos\alpha$ $\boxed{\text{3п}}$.
Напомена: *Не давати бодове за елементе и једног и другог начина (комбиновано), већ или једног или другог (искључиво), али тако да је изабрани начин повољнији за такмичара.*



Слика уз задатак 4.

5. Нека је d чеоно растојање магнета у почетном тренутку, а x тренутно растојање у неком посматраном тренутку. Ако са $W(x)$ означимо потенцијалну енергију магнетне интеракције, за први случај важи: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + W(x) = W(d)$ $\boxed{\text{2п}}$. Без умањења општости можемо усвојити нулти ниво потенцијалне енергије $W(d) = 0$. Пошто је магнетна сила између ова два магнета привлачна, потенцијална енергија интеракције је негативна за $x < d$. Како је $v_1 = \sqrt{\frac{-2W(x)}{m_1}}$, то је $\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{\sqrt{-2W(x)}}\sqrt{m_1}$ $\boxed{\text{2п}}$ време потребно да први магнет пређе инфинитезимално мало растојање Δx. Потпуно аналогним резоновањем, за други случај можемо писати $\Delta t_2 = \frac{\Delta x}{\sqrt{-2W(x)}}\sqrt{m_2}$ $\boxed{\text{2п}}$. У случају да се оба магнета пусте из почетног положаја из мировања, њихов центар масе се неће померити, с обзиром на то да нема страних сила у хоризонталном правцу $\boxed{\text{1п}}$. Одатле следи $m_1v_1 = m_2v_2$ $\boxed{\text{2п}}$. Релативна брзина једног магнета у односу на други је $v_r = v_1 + v_2$ $\boxed{\text{1п}}$, одакле је $\Delta t_3 = \frac{\Delta x}{v_r} = \frac{\Delta x}{v_1}\frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{\Delta x}{v_2}\frac{m_1}{m_1+m_2}$. На основу закона одржања енергије је $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + W(x) = 0$ $\boxed{\text{2п}}$, одакле је $v_1^2\frac{m_1}{m_2}(m_1+m_2) = -2W(x)$. Сређивањем се добија $\Delta t_3 = \frac{\Delta x}{\sqrt{-2W(x)}}\frac{\sqrt{m_1m_2}}{\sqrt{m_1+m_2}}$ $\boxed{\text{2п}}$. На основу једначина за Δt_1, Δt_2 и Δt_3 сабирањем по свим вредностима x од $x = d$ до $x = 0$, добијамо $T_1 = C\cdot\sqrt{m_1}$ $\boxed{\text{1п}}$, $T_2 = C\cdot\sqrt{m_2}$ $\boxed{\text{1п}}$, $T_3 = C\cdot\frac{\sqrt{m_1m_2}}{\sqrt{m_1+m_2}}$ $\boxed{\text{1п}}$, где је C константа која се добија из суме $\sum_{x=d}^{x=0}\frac{\Delta x}{\sqrt{-2W(x)}} = C$. Очигледно важи $\frac{1}{T_3^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}$ $\boxed{\text{2п}}$, одакле се добија $T_3 = \frac{T_1T_2}{\sqrt{T_1^2+T_2^2}} = 0{,}48\,\mathrm{s}$ $\boxed{\text{1п}}$.

Задатке припремили: *Марко Кузмановић*, Universite Paris-Sud, Француска
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија
Рецензент: *др Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд