



1. На слици 1(a) на  $p - V$  дијаграму је представљен Стирлингов циклус ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ) идеалног гаса адијабатске константе  $\gamma$  који се састоји од две изотерме:  $1 \rightarrow 2$  на константној температури грејача и  $3 \rightarrow 4$  на константној температури хладњака, и две изохоре:  $2 \rightarrow 3$  и  $4 \rightarrow 1$ . Притом је запремина гаса у стањима 2 и 3 ( $xV_0$ )  $x$  пута већа од запремине гаса у стањима 1 и 4 ( $V_0$ ), где је  $x > 1$ .

(i) Одредити коефицијент корисног дејства  $\eta_S$  топлотног мотора који се ослања на овај Стирлингов циклус у функцији од  $x$ ,  $\gamma$ , и  $\eta_C$ , где је  $\eta_C$  коефицијент корисног дејства Карноове топлотне машине која би радила између истих топлотних резервоара (грејач+хладњак). Затим, показати да је  $\eta_S < \eta_C, \forall x > 1$ . ..... (12)

(ii) Коефицијент корисног дејства  $\eta_S$  Стирлингове топлотне машине се може побољшати увођењем регенератора ( $p - V$  дијаграм на слици 1(b)). Регенератор је топлотни размењивач, односно уређај који апсорбује целокупну количину топлоте која је одбачена од стране гаса у изохорском процесу  $2 \rightarrow 3$ , а затим је са уделом  $\eta_R$  топлотним провођењем враћа гасу на изохорском процесу  $4 \rightarrow 1$ . У том смислу топлотна регенерација подразумева да грејач врши уштеду енергије на процесу  $4 \rightarrow 1$  када гасу преда мању количину топлоте него иначе, док свеукупно гас изводи исти циклус  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  као у случају без регенератора (слика 1(a)). У функцији од  $x$ ,  $\gamma$ ,  $\eta_C$ , и  $\eta_R$ , одредити коефицијент корисног дејства  $\eta_S^*$  Стирлингове топлотне машине која побољшава своју ефикасност уз помоћ топлотне регенерације ( $\eta_S^* \geq \eta_S$ ). ..... (6)

(iii) За које  $\eta_R$  би формално  $\eta_S^*$  било једнако  $\eta_C$ ? Испитати остваривост овакве ситуације позивајући се на Карноову теорему, тј. на оквире II принципа термодинамике у Клаузијусовој формулацији. .... (2)

**Напомена:** користити да рад изотермског ширења  $n_m$  мола идеалног гаса на температури  $T$  од запремине  $V_1$  до  $V_2$  износи  $A_{12} = n_m RT \ln(V_2/V_1)$ , где је  $R$  универзална гасна константа. Такође важи да је  $\ln x > 0, \forall x > 1$ .

2. Хомогена коцка странице  $a$  приљубљена је уз храпави зид дубоког и широког воденог базена, док се центар коцке налази на дубини  $h$  испод нивоа воде (слика 2). Густина коцке је  $x$  пута већа од густине воде ( $x > 1$ ), а њена страница  $a$  не премашује вредност  $2h$ , тј.  $a \leq 2h$ . Коефицијент трења клизања између коцке и зида износи  $\mu$ . У функцији од  $h$ ,  $\mu$ , и  $x$  одредити максималну вредност коју може имати страница коцке  $a$  тако да коцка не склизне наниже под дејством своје тежине. Дискутовати решење у зависности од вредности  $x \in (1, \infty)$ . Вода не продире између контактних површина зида и коцке, а спољашњи атмосферски притисак је занемарљив. Не узимати у обзир могућност обртања коцке као ни ефекте момента сила. Узети да су дубина и ширина базена знатно веће од странице  $a$  и дубине  $h$ . .... (20)

3. Познато је да кристал графита представља изузетно стабилну алотропску модификацију угљеника  $^{12}\text{C}$ . Кристална решетка графита је хексагонална. Другим речима, графит поседује слојевиту структуру у чијим су слојевима (графенима) атоми угљеника распоређени у теменима бесконачне мреже правилних шестоуглова. На слици 3 је приказан један сегмент периодичне структуре графита. Пошто су суседни слојеви (графени) померени један у односу на други, у зависности од положаја у решетки разликујемо две врсте С атома:  $A$  (приказани плавом бојом) и  $B$  (приказани црвеном бојом). Овакве равни се наизменично понављају у бесконачном низу тако да се сваки други графенски слој преклапа. На  $0^\circ\text{C}$  страница шестоугла графена износи  $a = 141.8 \text{ pm}$ , а растојање између суседних равни износи  $d = 334.6 \text{ pm}$ . По загревању на температури  $t > 0^\circ\text{C}$ , растојања у решетки се мењају по линеарним законима:  $a(t) = a(1 + \alpha_\perp t)$  и  $d(t) = d(1 + \alpha_\parallel t)$ , где је  $\alpha_\perp = -0.2 \times 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$ , а  $\alpha_\parallel = +2.7 \times 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$ . Примећујемо да се равни графена понашају аномално, тј. да унутар једне равни постоји топлотно скупљање. Наћи коефицијент запреминског линеарног топлотног ширења графита  $\beta$  као и зависност густине од температуре  $\rho(t)$ . Одредити такође ћелију кристалне решетке графита (геометријски облик и број атома) и израчунати његову густину  $\rho$  на  $0^\circ\text{C}$ . Масени број угљеника је  $A = 12$ , док атомска јединица масе износи  $m_u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ . За мале вредности  $x \ll 1$  користити апроксимацију  $(1+x)^n \approx 1 + nx$ . .... (20)

4. Капљица воде густине  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$  лежи на хоризонталној идеално равној кварцној плочици коју квази под контактним углом  $\theta$ . Видети слику 4(a). Уколико би се при брзинама споријим од неколико  $\text{cm/s}$  вода у капљицу равномерно убризгавала кроз кварцну плочицу која у реалном случају има неравнине на површини (слика 4(b)), слободна површина капљице би се ширила под константним контактним углом  $\theta_a = \theta + \Delta\theta$ . Разлог се крије у чињеници да слободна површина капљице належе на ваздух заробљен у неравнинама плочице, па је квашење редуковано ( $\theta < \theta_a$ ) у односу на идеалан случај (слика 4(a)). Уколико би се при брзинама споријим од неколико  $\text{cm/s}$  вода из капљице равномерно извлачила кроз кварцну плочицу која у реалном случају има неравнине на површини (слика 4(c)), слободна површина капљице би се повлачила под константним контактним углом  $\theta_r = \theta - \Delta\theta$ . Разлог се крије у чињеници да слободна површина капљице наилази на влажну површину због заостале воде у неравнинама плочице па је квашење појачано ( $\theta > \theta_r$ ) у односу на идеалан случај (слика 4(a)). Да би се одредио коефицијент површинског напона воде  $\gamma$  посматра се спуштање воденог стуба кроз суву вертикалну капилару (слика 4(d)) унутрашњег пречника  $d = 200 \mu\text{m}$  чији су зидови направљени од храпавог кварца попут оног на слици 4(b,c). Висина воденог стуба у капилари износи  $h = (\sqrt{3} - 1) \text{ dm}$  чији је облик приближно цилиндричан. Ефективно, водени стуб се спушта равномерном брзином од  $u = 1 \text{ cm/s}$  попут цилиндричног крутог тела. Између стуба воде и унутрашњих цилиндричних зидова капиларе се јавља вискозно трење ( $F_\eta$ ) које се опире кретању течности, тако да услед цилиндричне геометрије сила



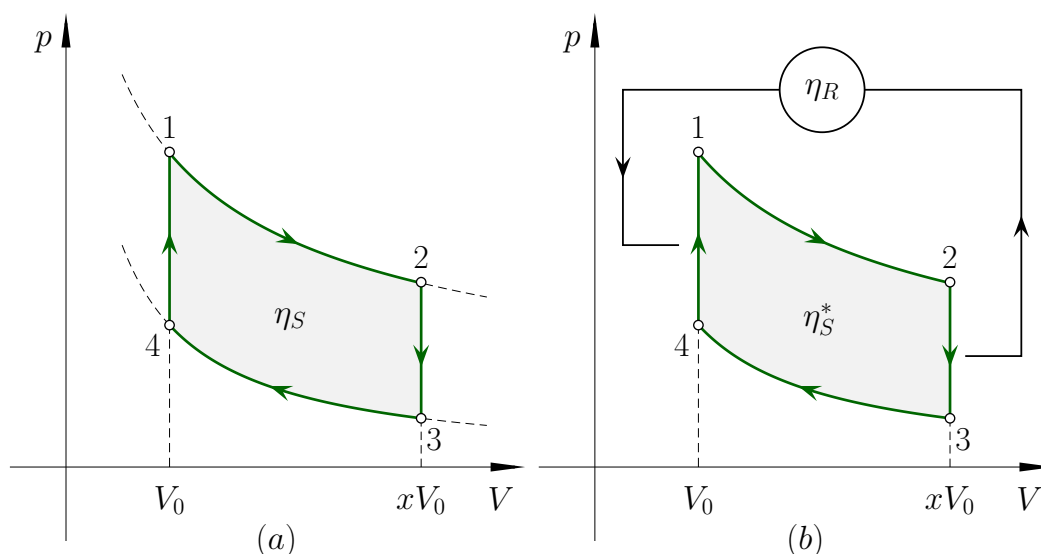
## II разред

отпора по јединици висине течности износи  $\Delta F_\eta / \Delta h = 4\pi\eta u$ , где је  $\eta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ , коефицијент динамичке вискозности воде. Будући да је  $d \ll h$ , и горњи и доњи мениск слободне површине течности у капилари заузимају приближно сферне облике. Израчунати коефицијент површинског напона воде  $\gamma$  ако угао за који  $\theta_a$  и  $\theta_r$  одступају од  $\theta = 45^\circ$  контактнoг угла у идеалном статичком случају износи  $\Delta\theta = 15^\circ$ . Убрзање у пољу Земљине теже је  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , док је потисак ваздуха занемарљив. .... (20)

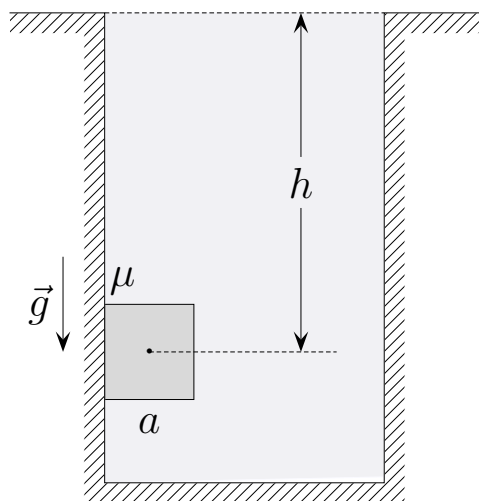
5. У затвореном топлотно изолованом калориметру занемарљивог топлотног капацитета налази се извесна количина леда на константном атмосферском притиску и почетној температури од  $0^\circ\text{C}$ . Унутар калориметра ради грејач константне снаге, што прво доводи до топљења леда, а када се сав лед истопа, грејач даље загрева воду насталу топљењем. Након извесног времена од завршетка топљења леда, у тренутку  $\tau = 0 \text{ min}$ , почело се са мерењима температуре воде. Извршено је шест мерења температуре  $t$ , у временским тренуцима  $\tau$  прочитаним са минутне скале часовника (табела 1). Уз процену апсолутних грешака, на основу нацртаног графика зависности  $t(\tau)$ , израчунати време  $\tau^*$  за које се сав лед истопао (тј. протекло време од укључивања грејача до краја топљења леда), као и температуру загрејане воде  $t_0$ , тј.  $t(\tau = 0)$ , када се започело са одбројавањем времена. Грешке при читавању времена могу се занемарити. Латентна топлота топљења леда при атмосферском притиску је  $\lambda = 2.265 \text{ MJ/kg}$ , а специфични топлотни капацитет воде износи  $c = 4.18 \text{ kJ/(kg}^\circ\text{C)}$ . Ефекте термалног ширења, испаравања, као и топлотне процесе гаса који је све време на атмосферском притиску изнад леда/воде у калориметру занемарити. .... (20)

Табела 1

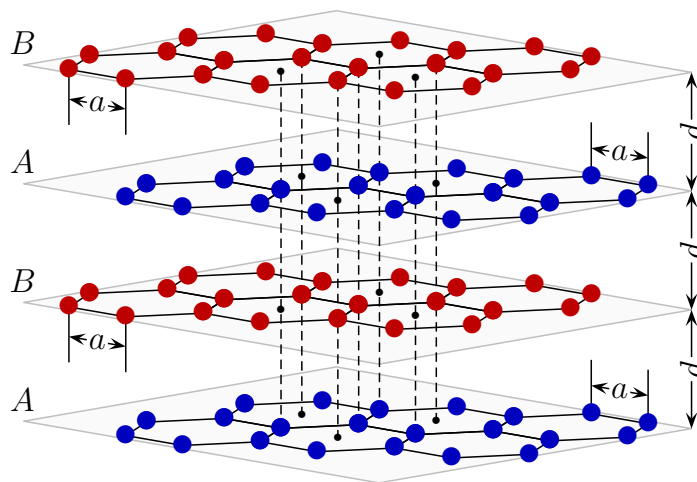
| $\tau [\text{min}]$  | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $t [^\circ\text{C}]$ | $10.9 \pm 0.2$ | $12.1 \pm 0.2$ | $13.1 \pm 0.2$ | $13.9 \pm 0.2$ | $15.0 \pm 0.2$ | $16.1 \pm 0.2$ |



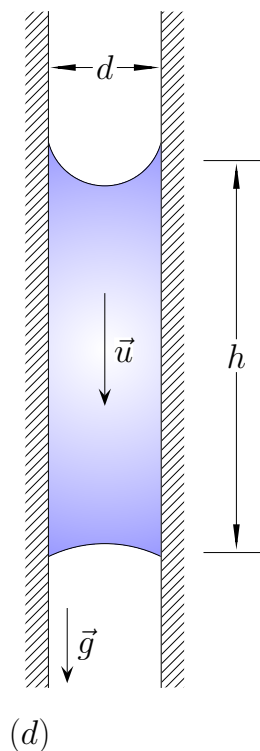
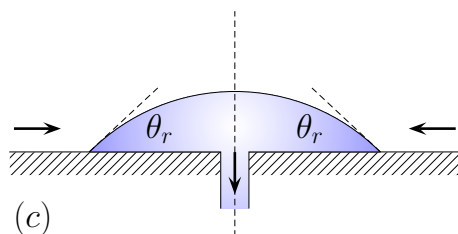
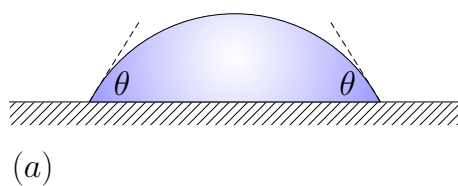
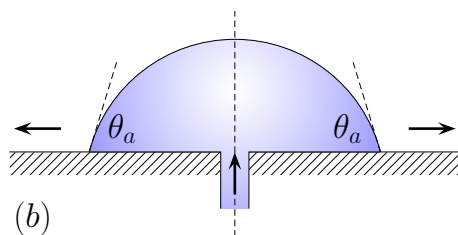
Слика 1



Слика 2



Слика 3



Слика 4



1. Нека је  $T_1$  температура грејача,  $T_2$  температура хладњака, а  $n_m$  број молова гаса.

(i) Коефицијент корисног дејства  $\eta_S$  представља однос корисног рада  $A$  и укупне уложене количине топлоте  $Q_1$  од стране грејача. Односно,  $\eta_S = A/Q_1$ . Гас прими количину топлоте  $Q_{12}$  приликом изотермског ширења  $1 \rightarrow 2$  као и количину топлоте  $Q_{41}$  током изохорског загревања на процесу  $4 \rightarrow 1$ , па је  $Q_1 = Q_{12} + Q_{41}$  [1 п]. Како приликом изотермског ширења нема промене унутрашње енергије имамо да је  $Q_{12} = A_{12} = n_m R T_1 \ln x$ . У процесу  $4 \rightarrow 1$  уложена количина топлоте је једнака промени унутрашње енергије гаса. Дакле,  $Q_{41} = n_m c_V (T_1 - T_2) = n_m R (T_1 - T_2) / (\gamma - 1)$ , где је изохорски моларни топлотни капацитет  $c_V = R / (\gamma - 1)$  [2 п]. Укупна уложена количина топлоте је  $Q_1 = n_m R (T_1 \ln x + (T_1 - T_2) / (\gamma - 1))$  [1 п]. Гас се шири у процесу  $1 \rightarrow 2$  (позитиван рад) и скупља у процесу  $3 \rightarrow 4$  (негативан рад). У процесу  $1 \rightarrow 2$  извршени рад је  $A_{12} = n_m R T_1 \ln x$  [1 п], а у процесу  $3 \rightarrow 4$  извршени рад је  $A_{34} = -n_m R T_2 \ln x$  [1 п], тако да је крајњи користан рад  $A = A_{12} + A_{34} = n_m R (T_1 - T_2) \ln x$  [1 п]. Одавде следи да је коефицијент корисног дејства  $\eta_S = \frac{n_m R (T_1 - T_2) \ln x}{n_m R (T_1 \ln x + (T_1 - T_2) / (\gamma - 1))} = \frac{1 - T_2/T_1}{1 + \frac{1 - T_2/T_1}{(\gamma - 1) \ln x}}$  [1 п]. Како је  $\eta_C = 1 - T_2/T_1$  [1 п] добија се да је

$$\eta_S = \frac{\eta_C}{1 + \frac{\eta_C}{(\gamma - 1) \ln x}} \quad [2 \text{ п}]. \text{ Иначе, } \eta_C > \eta_S, \text{ јер је } \ln x > 0, \forall x > 1 \quad [1 \text{ п}], \text{ а што је у складу са Карноовом теоремом.}$$

(ii) Како је дато у поставци задатка, регенератор током процеса  $4 \rightarrow 1$  враћа гасу  $\eta_R$  од изгубљене количине топлоте  $n_m R (T_1 - T_2) / (\gamma - 1)$  у процесу  $2 \rightarrow 3$ . Ово значи да грејач на процесу  $4 \rightarrow 1$  не улаже  $Q_{41}$  као раније, већ мање  $Q'_{41} = Q_{41} - \eta_R n_m R (T_1 - T_2) / (\gamma - 1) = n_m R (1 - \eta_R) (T_1 - T_2) / (\gamma - 1)$  [2 п]. Тиме је и укупна уложена количина топлоте  $Q'_1$  мања од  $Q_1$ , односно количина топлоте коју гас прими од грејача приликом изохорског загревања умањена је за ону количину топлоте која је регенерисана приликом хлађења. Другим речима,  $Q'_1 = Q'_{41} + Q_{12} = n_m R (T_1 \ln x + (1 - \eta_R) (T_1 - T_2) / (\gamma - 1))$  [2 п]. Гас врши исти рад  $A$  као у случају без регенерације, јер изводи идентичан циклус, па је  $\eta_S^* = A/Q'_1$  [1 п]. Коначно,  $\eta_S^* = \frac{\eta_C}{1 + \frac{(1 - \eta_R) \eta_C}{(\gamma - 1) \ln x}}$  [1 п].

(iii) Лако се уочава да је  $\eta_S^* = \eta_C$  за  $\eta_R = 1$  [1 п]. Међутим, ово би значило да постоји не-Карноова топлотна машина чији је коефицијент корисног дејства једнак  $\eta_C$ , што је у колизији са Карноовом теоремом. Зачкољица се крије у чињеници да по II закону термодинамике  $\eta_R$  мора бити мање од 1, јер бисмо у противном могли имати *perpetuum mobile* друге врсте у Клаузијусовој формулацији. Процес провођења топлоте код регенератора у одсуству вршења рада је ирверзибилан услед коначне температурске разлике, што указује на постојање извесног дела енергије расположивог за употребу који је отишао у неповрат услед позитивног прираштаја ентропије. Карноова топлотна машина је у целости реверзибилна. Она се ослања на идеалне адијабатске и изотермске процесе, који су такође реверзибилни. Стога, реализација регенератора са  $\eta_R = 1$  физички није могућа [1 п].

2. Силе које делују на коцку су:  $mg = \rho a^3 g$  сила Земљине теже,  $F_{tr}$  сила трења која се противи сили теже, јер је ова јача од силе потиска  $F_p = \rho_0 a^3 g$  и може довести до проклизавања наниже, где је  $\rho$  густина материјала од којег је направљена коцка, а  $\rho_0$  густина воде ( $\rho/\rho_0 \equiv x > 1$ ) [3 п]. Поред ових сила постоји и нормална реакција зида  $N$  која је једнака сили средњег хидростатичког притиска на страну коцке који линеарно варира од  $\rho_0 g (h - a/2)$  до  $\rho_0 g (h + a/2)$ , па је  $N = \rho_0 g h a^2$ . Ова сила се не поништава са уобичајеном бочном противном силом хидростатичког притиска течности (слика 1), јер воде нема између зида и коцке [3 п]. Услов одсуства проклизавања између коцке и зида намеће  $F_{tr} \leq \mu N$  [3 п]. С друге стране, како се коцка не креће  $F_{tr} = mg - F_p = (x - 1) \rho_0 a^3 g$  [3 п]. Тако добијамо неједнакост  $a \leq \mu h / (x - 1)$  код које разликујемо два случаја [2 п]. Први случај је онда када је  $\mu h / (x - 1) \geq 2h$ , тј.  $x \in (1, 1 + \mu/2]$ , онда је  $a_{max} = 2h$ , јер не може бити веће по услову задатка [3 п]. Други случај је онда када је  $\mu h / (x - 1) < 2h$ , тј.  $x \in (1 + \mu/2, \infty)$ , онда је  $a_{max} = \frac{\mu h}{(x - 1)}$  [3 п].

3. Ћелија кристалне решетке графита, којом се трансляторним померањем унутар графенских равни и нормално на њих може покривати цела решетка графита, има запремину  $V(t)$  на температури  $t$  као  $V(t) \propto a^2(t) d(t)$  [2 п]. Односно, како  $\alpha_\perp$  и  $\alpha_\parallel$  важе за изузетно мале вредности,  $V(t) = V(1 + \alpha_\perp t)^2 (1 + \alpha_\parallel t) \approx V(1 + 2\alpha_\perp t)(1 + \alpha_\parallel t) \approx V(1 + (2\alpha_\perp + \alpha_\parallel)t)$ , где је запремина ћелије  $V$  на  $0^\circ \text{C}$  на истоветан начин као  $V(t)$  сразмерна производу  $a^2 d$  [2 п]. Тако је коефицијент запреминског линеарног термалног ширења графита  $\beta = 2\alpha_\perp + \alpha_\parallel = +2.3 \times 10^{-5} \text{C}^{-1}$ , па се у коначном исходу графит ипак запремински шири са порастом температуре [4 п]. Маса графита при загревању се не мења, па је  $\rho(t) = \rho / (1 + \beta t) \approx \rho(1 - \beta t)$ , где је  $\rho$  густина графита на  $0^\circ \text{C}$  [2 п]. Густину  $\rho$  налазимо тако што прво одредимо запремину ћелије у функцији од  $a$  и  $d$ , а затим нађемо број атома  $C$  који је њом обухваћен. Наиме, ћелија је призма висине  $2d$ , јер се свака друга графенска равна поклапа дуж правца нормалног на њих [2 п]. Базу ћелије представља ромб странице  $a\sqrt{3}$  (дијагонале:  $3a \times a\sqrt{3}$ ), као што је дато



на слици 2. Она осликава графенски слој  $A$  који је изнад графенског слоја  $B$  [2 п]. Доња и горња база хелије, унутар два графена типа  $B$ , заједно садрже:  $2 \times 4$  атома  $C$  у рогљевима и  $2 \times 1$  атом  $C$  на површини, при чему је сваки атом у рогљевима дељен од стране 8 хелија, а на површини дељен од стране 2 хелије. Запремински хелија обухвата 2 атома  $C$  која нису дељена и припадају графену типа  $A$ . Тако једна хелија ефективно садржи  $z = 8 \times 1/8 + 2 \times 1/2 + 2 = 4$  атома  $C$  [2 п]. Запремина хелије је  $V = (3a \times a\sqrt{3}/2) \times 2d = 3\sqrt{3}a^2d$  [1 п]. Укупна маса свих атома  $C$  по хелији  $m = z \times (Am_u) = 48m_u$  [1 п]. Тако је  $\rho = (16m_u\sqrt{3})/(3a^2d) = 2.279 \text{ g/cm}^3$  [2 п].

**Напомена:** признати решења са узетом хелијом која  $3D$  просторним трансляцијама покрива укупну решетку графита ако је запремина  $V$  онолико пута већа/мања колико пута је  $z$  веће/мање, при чему минимални просторни период нормално на графенске равни мора износити  $2d$ . Иначе, иста вредност за густину се могла добити хипотетичким померањем слојева  $A$  и  $B$  тако да се њихови атоми поклопе дуж правца који је нормалан на ове равни. Тада се густина налази из запремине шестоугаоне призме базне странице  $a$  и висине  $d$ . У овом случају такмичар осваја максималних [6 п] од максимално предвиђених [10 п] бодова из кључа по питању овог дела. Ако је такмичар узео овакву призму као хелију без аргументације да се померањем равни густина не мења, онда такмичар добија максимално [2 п] бода на тачан резултат за густину од максимално предвиђених [10 п] бодова из кључа по питању овог дела.

4. Како се горњи мениск повлачи према области у којој су унутрашњи зидови капиларе већ наклашени водом, контактни угао износи  $\theta_r = \theta - \Delta\theta = 30^\circ$ , те је вертикална пројекција силе површинског напона усмерена навиши и износи  $F_r = \pi d\gamma\sqrt{3}/2$  [4 п]. Како доњи мениск напредује према области у којој су унутрашњи зидови капиларе потпуно суви, контактни угао износи  $\theta_a = \theta + \Delta\theta = 60^\circ$ , те је вертикална пројекција силе површинског напона усмерена наниже и износи  $F_a = \pi d\gamma/2$  [4 п]. Тежина воденог цилиндричног стуба износи  $mg = \rho Vg = \rho g\pi d^2 h/4$  [3 п]. Сила отпора воденог цилиндричног стуба по целој висини  $h$  која делује навише износи  $F_\eta = 4\pi\eta hu$  [3 п]. Услов равнотеже свих сила воденог стуба доводи до  $mg + F_a = F_r + F_\eta$ , јер је кретање стуба равномерно ( $u = \text{const}$ ) [2 п]. После краћих трансформација добија се да је  $\gamma = \frac{\rho g h d^2 - 16\eta h u}{2d(\sqrt{3} - 1)} = 0.06 \text{ N/m}$  [4 п].

5. Нека је снага грејача  $P$ , а маса леда (воде)  $m$ . Тада количина топлоте неопходна за топљење читавог леда на  $0^\circ\text{C}$  износи  $P\tau^* = m\lambda$  [2 п]. Извесно време након топљења, количина топлоте коју је грејач предао води за време  $\tau$ , при чему се вода загрејала од  $t_0$  до  $t$ , износи  $P\tau = mc(t - t_0)$  [2 п]. Тако долазимо до линеарне зависности  $t(\tau)$ :  $t = \frac{\lambda}{c} \frac{1}{\tau^*} \tau + t_0$ , односно  $\underbrace{y}_t =$

$k \underbrace{x}_\tau + n$  [2 п]. Одавде имамо да је  $t_0 = n$ , а  $\tau^* = \frac{\lambda}{c} \frac{1}{k}$ , где се  $k$  и  $n$  читавају са графика [2 п]. Такође, грешке се рачунају као

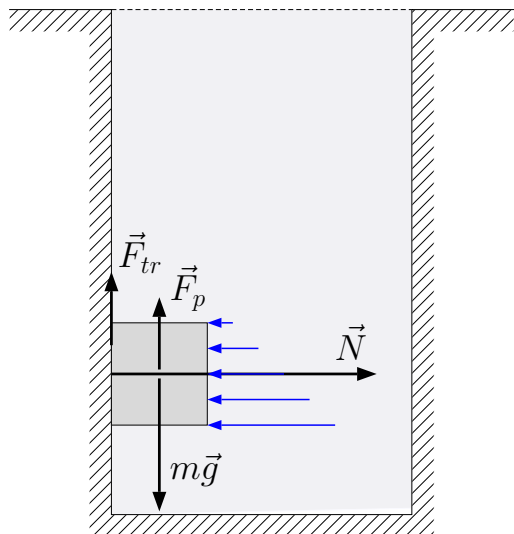
$\Delta t_0 = \Delta n$ , а  $\Delta \tau^* = \delta \tau^* \times \tau^* = \delta k \times \tau^* = \frac{\lambda}{k} \frac{1}{c} \frac{\Delta k}{k^2} \Delta k$ , где се " $\Delta$ " односи на апсолутне, а " $\delta$ " на релативне грешке [2 п].

На графику линеарне зависности  $t(\tau)$  са насловом је представљено шест тачака кроз које је провучена права унутар граница апсолутних грешки (слика 3). Осе су јасно скалиране и обележене физичким величинама:  $\tau$  [min] на  $x$ -оси и  $t$  [ $^\circ\text{C}$ ] на  $y$ -оси. Одабране су две довољно удаљене тачке  $A(x_A, y_A) = (1.25 \text{ min}, 11.30^\circ\text{C})$  и  $B(x_B, y_B) = (5.75 \text{ min}, 15.75^\circ\text{C})$  унутар интервала измерених тачака [4 п]. Апсолутне грешке за  $\Delta y_A$  и  $\Delta y_B$  су једнаке и максимално мајоризоване као  $\Delta y = 0.2^\circ\text{C}$ . Апсолутна грешка читавања на  $x$ -оси је реда  $0.5 \text{ mm}$  на  $\text{mm}$ -папиру. У преводу  $\Delta x_A = \Delta x_B \equiv \Delta x = 0.0125 \text{ min}$ . Одсечак на  $y$ -оси добијамо као  $n = \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A} := 10.0638...^\circ\text{C}$ , док је  $\Delta n = \frac{x_B + x_A}{x_B - x_A} \Delta y + \frac{3x_B y_A - 3x_A y_B + x_B y_B - x_A y_A}{(x_B - x_A)^2} \Delta x :=$

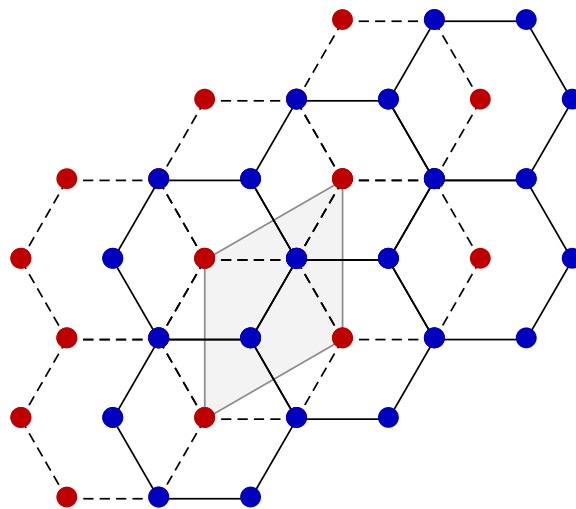
$0.4421...^\circ\text{C}$  [2 п]. Коефицијент правца добијамо као  $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} := 0.9888...^\circ\text{C/min}$ , док је  $\Delta k = \frac{2(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)^2} \Delta x + \frac{2}{x_B - x_A} \Delta y := 0.0943...^\circ\text{C/min}$ . Тиме је,  $\tau^* := 547.9544... \text{ min}$ , а  $\Delta \tau^* := 52.2498... \text{ min}$  [2 п]. На крају,  $t_0 = (10.1 \pm 0.5)^\circ\text{C}$  и  $\tau^* = (5.5 \pm 0.6) \times 10^2 \text{ min}$  [2 п].

**Напомена:** коришћено је:  $\Delta(z_1 \pm z_2) = \Delta z_1 + \Delta z_2$ ,  $\Delta(z_1 z_2) = (z_1 z_2) \delta(z_1 z_2) = (z_1 z_2) (\delta z_1 + \delta z_2) = z_1 \Delta z_2 + z_2 \Delta z_1$ , и  $\Delta(z_1/z_2) = (z_1/z_2) \delta(z_1/z_2) = (z_1/z_2) (\delta z_1 + \delta z_2) = \Delta z_1/z_2 + z_1 \Delta z_2/z_2^2$ . Признати решења у којима је грешка читавања са  $\text{mm}$ -папира од  $0.5 \text{ mm}$  ( $1.0 \text{ mm}$  неретко) изостављена.

**Erratum:** Таблична вредност за латентну топлоту топљења леда  $\lambda$  на атмосферском притиску је пре  $0.334 \text{ MJ/kg}$  него  $2.265 \text{ MJ/kg}$ . У том смеру би процена времена за које се сав лед истопио довела до  $\tau^* = (81 \pm 8) \text{ min}$ .



Слика 1



Слика 2



Слика 3



1. На слици 1(a) на  $p - V$  дијаграму је представљен Стирлингов циклус ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ) идеалног гаса адијабатске константе  $\gamma$  који се састоји од две изотерме:  $1 \rightarrow 2$  на константној температури грејача и  $3 \rightarrow 4$  на константној температури хладњака, и две изохоре:  $2 \rightarrow 3$  и  $4 \rightarrow 1$ . Притом је запремина гаса у стањима 2 и 3 ( $xV_0$ )  $x$  пута већа од запремине гаса у стањима 1 и 4 ( $V_0$ ), где је  $x > 1$ .

(i) Одредити коефицијент корисног дејства  $\eta_S$  топлотног мотора који се ослања на овај Стирлингов циклус у функцији од  $x$ ,  $\gamma$ , и  $\eta_C$ , где је  $\eta_C$  коефицијент корисног дејства Карноове топлотне машине која би радила између истих топлотних резервоара (грејач+хладњак). Затим, показати да је  $\eta_S < \eta_C, \forall x > 1$ . ..... (12)

(ii) Коефицијент корисног дејства  $\eta_S$  Стирлингове топлотне машине се може побољшати увођењем регенератора ( $p - V$  дијаграм на слици 1(b)). Регенератор је топлотни размењивач, односно уређај који апсорбује целокупну количину топлоте која је одбачена од стране гаса у изохорском процесу  $2 \rightarrow 3$ , а затим је са уделом  $\eta_R$  топлотним провођењем враћа гасу на изохорском процесу  $4 \rightarrow 1$ . У том смислу топлотна регенерација подразумева да грејач врши уштеду енергије на процесу  $4 \rightarrow 1$  када гасу преда мању количину топлоте него иначе, док свеукупно гас изводи исти циклус  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  као у случају без регенератора (слика 1(a)). У функцији од  $x$ ,  $\gamma$ ,  $\eta_C$ , и  $\eta_R$ , одредити коефицијент корисног дејства  $\eta_S^*$  Стирлингове топлотне машине која побољшава своју ефикасност уз помоћ топлотне регенерације ( $\eta_S^* \geq \eta_S$ ). ..... (6)

(iii) За које  $\eta_R$  би формално  $\eta_S^*$  било једнако  $\eta_C$ ? Испитати остваривост овакве ситуације позивајући се на Карноову теорему, тј. на оквире II принципа термодинамике у Клаузијусовој формулацији. .... (2)

**Напомена:** користити да рад изотермског ширења  $n_m$  мола идеалног гаса на температури  $T$  од запремине  $V_1$  до  $V_2$  износи  $A_{12} = n_m RT \ln(V_2/V_1)$ , где је  $R$  универзална гасна константа. Такође важи да је  $\ln x > 0, \forall x > 1$ .

2. Капљица воде густине  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$  и коефицијента површинског напона  $\gamma = 60 \text{ mJ/m}^2$  лежи на хоризонталној идеално равnoj кварцној плочици коју кваси под контактним углом  $\theta$ . Видети слику 2(a). Уколико би се при брзинама споријим од неколико  $\text{cm/s}$  вода у капљицу равномерно убризгавала кроз кварцну плочицу која у реалном случају има неравнине на површини (слика 2(b)), слободна површина капљице би се ширила под константним контактним углом  $\theta_a = \theta + \Delta\theta$ . Разлог се крије у чињеници да слободна површина капљице налаже на ваздух заробљен у неравнинама плочице, па је квашење редуковано ( $\theta < \theta_a$ ) у односу на идеалан случај (слика 2(a)). Уколико би се при брзинама споријим од неколико  $\text{cm/s}$  вода из капљице равномерно извлачила кроз кварцну плочицу која у реалном случају има неравнине на површини (слика 2(c)), слободна површина капљице би се повлачила под константним контактним углом  $\theta_r = \theta - \Delta\theta$ . Разлог се крије у чињеници да слободна површина капљице наилази на влажну површину због заостале воде у неравнинама плочице па је квашење појачано ( $\theta > \theta_r$ ) у односу на идеалан случај (слика 2(a)). Да би се одредило  $\Delta\theta$  посматра се спуштање воденог стуба кроз суву вертикалну капилару (слика 2(d)) унутрашњег пречника  $d = 200 \text{ }\mu\text{m}$  чији су зидови направљени од храпавог кварца попут оног на слици 2(b,c). Висина воденог стуба у капилари износи  $h = \sqrt{2} \text{ dm}$  чији је облик приближно цилиндричан. Ефективно, водени стуб се спушта равномерном брзином од  $u = 1 \text{ cm/s}$  попут цилиндричног крутог тела. Између стуба воде и унутрашњих цилиндричних зидова капиларе се јавља вискозно трење ( $F_\eta$ ) које се опире кретању течности, тако да услед цилиндричне геометрије сила отпора по јединици висине течности износи  $\Delta F_\eta / \Delta h = 4\pi\eta u$ , где је  $\eta = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ , коефицијент динамичке вискозности воде. Будући да је  $d \ll h$ , и горњи и доњи мениск слободне површине течности у капилари заузимају приближно сферне облике. Израчунати угао  $\Delta\theta$  за који  $\theta_a$  и  $\theta_r$  одступају од контактнoг угла у идеалном статичком случају када је  $\theta = 45^\circ$ . Убрзање у пољу Земљине теже је  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , док је потисак ваздуха занемарљив. Уколико је потребно, користити тригонометријски идентитет  $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ . .... (20)

3. Познато је да кристал графита представља изузетно стабилну алотропску модификацију угљеника  $^{12}\text{C}$ . Кристална решетка графита је хексагонална. Другим речима, графит поседује слојевиту структуру у чијим су слојевима (графенима) атоми угљеника распоређени у теменима бесконачне мреже правилних шестоуглова. На слици 3 је приказан један сегмент периодичне структуре графита. Пошто су суседни слојеви (графени) померени један у односу на други, у зависности од положаја у решетки разликујемо две врсте С атома: А (приказани плавом бојом) и В (приказани црвеном бојом). Овакве равни се наизменично понављају у бесконачном низу тако да се сваки други графенски слој преклапа. На  $0^\circ\text{C}$  страница шестоугла графена износи  $a = 141.8 \text{ pm}$ , а растојање између суседних равни износи  $d = 334.6 \text{ pm}$ . По загревању на температурама  $t > 0^\circ\text{C}$ , растојања у решетки се мењају по линеарним законима:  $a(t) = a(1 + \alpha_\perp t)$  и  $d(t) = d(1 + \alpha_\parallel t)$ , где је  $\alpha_\perp = -0.2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , а  $\alpha_\parallel = +2.7 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Примећујемо да се равни графена понашају аномално, тј. да унутар једне равни постоји топлотно скупљање. Наћи коефицијент запреминског линеарног топлотног ширења графита  $\beta$  као и зависност густине од температуре  $\rho(t)$ . Одредити такође ћелију кристалне решетке графита (геометријски облик и број атома) и израчунати његову густину  $\rho$  на  $0^\circ\text{C}$ . Масени број угљеника је  $A = 12$ , док атомска јединица масе износи  $m_u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ . За мале вредности  $x \ll 1$  користити апроксимацију  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ . .... (20)



4. Микроскопска структура танке равне безмасене еластичне мембране се може моделирати квадратном мрежом екстремно малих идентичних еластичних опруга, свака константе еластичности  $\kappa$ . Један сегмент ове мембране је приказан на слици 4. Површина нерастегнуте мембране износи  $S_0$ . Мембрана је непропустљива и понаша се као топлотни изолатор занемарљивог топлотног капацитета.

(i) Не ослањајући се на димензиону анализу, показати да при равномерном растезању мембране, подједнако дуж свих праваца у равни, до површине  $S > S_0$ , потенцијална енергија еластичне деформације  $E$  се мења по закону  $E(S) = \kappa (\sqrt{S} - \sqrt{S_0})^2$ ..... (8)

(ii) Од овакве мембране направљен је сферни балон. Балон испуњен идеалним гасом адијабатског експонента  $\gamma$  има полу-пречник  $r_0$  у незатегнутом стању. Одредити зависност  $p(r)$  притиска гаса у балону од полупречника балона  $r$ , када се балон споро радијално шири, за случај веома раширеног балона ( $r \gg r_0$ ). Балон се налази у вакууму, па је спољашњи притисак једнак нули. .... (7)

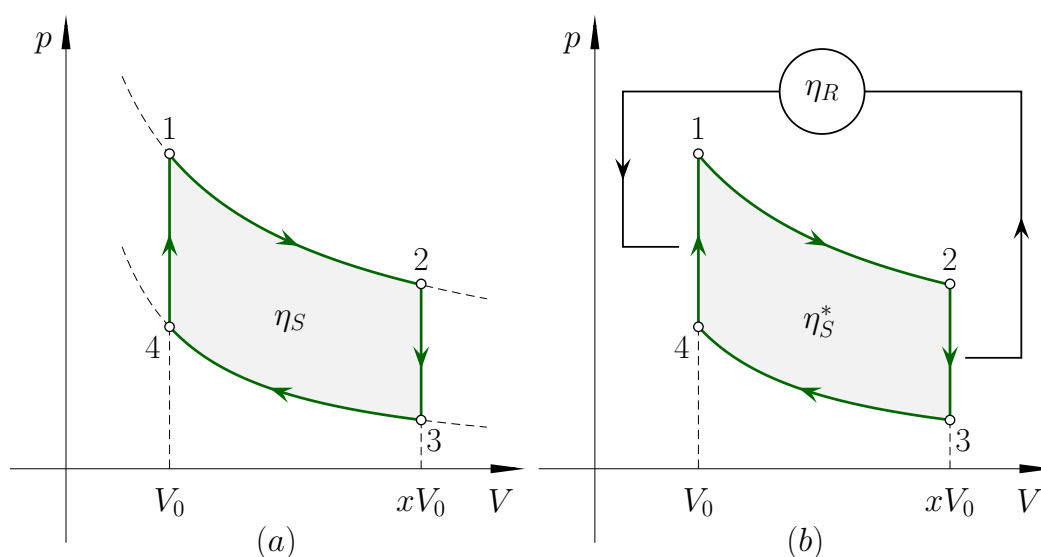
(iii) Одредити моларни топлотни капацитет овог идеалног гаса при његовом спором загревању у случају  $r \gg r_0$ , уколико претпоставимо да унутар балона постоји минијатурни грејач којим се загревање врши. .... (5)

Користити апроксимацију  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , за  $x \ll 1$ . Универзалну гасну константу  $R$  сматрати познатом.

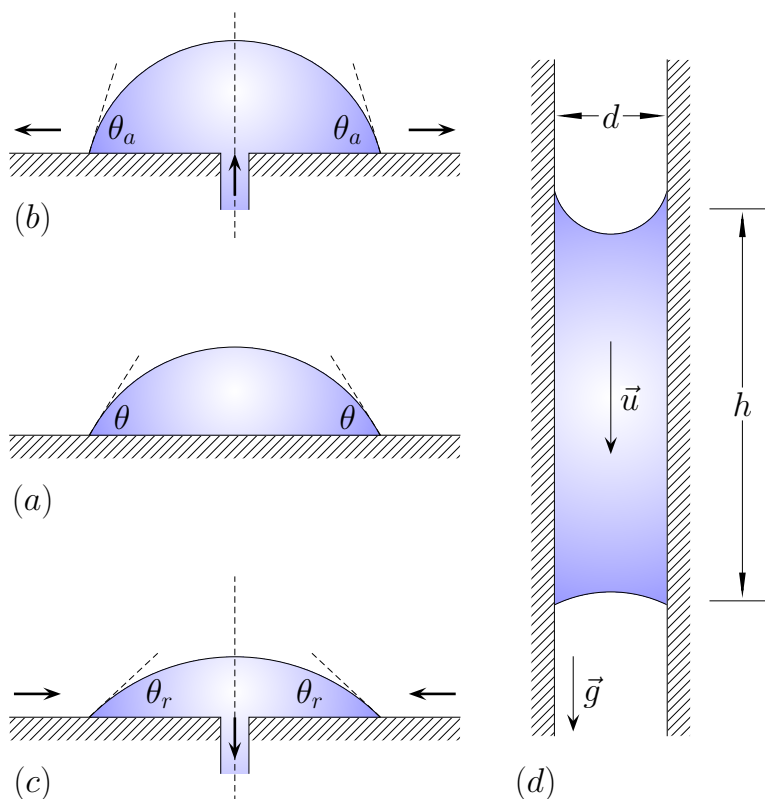
5. У затвореном топлотно изолованом калориметру занемарљивог топлотног капацитета налази се извесна количина леда на константном атмосферском притиску и почетној температури од  $0^\circ\text{C}$ . Унутар калориметра ради грејач константне снаге, што прво доводи до топљења леда, а када се сав лед истопи, грејач даље загрева воду насталу топљењем. Након извесног времена од завршетка топљења леда, у тренутку  $\tau = 0 \text{ min}$ , почело се са мерењима температуре воде. Извршено је шест мерења температуре  $t$ , у временским тренуцима  $\tau$  прочитаним са минутне скале часовника (табела 1). Уз процену апсолутних грешака, на основу нацртаног графика зависности  $t(\tau)$ , израчунати време  $\tau^*$  за које се сав лед истопио (тј. протекло време од укључивања грејача до краја топљења леда), као и температуру загрејане воде  $t_0$ , тј.  $t(\tau = 0)$ , када се започело са одбројавањем времена. Грешке при читавању времена могу се занемарити. Латентна топлота топљења леда при атмосферском притиску је  $\lambda = 2.265 \text{ MJ/kg}$ , а специфични топлотни капацитет воде износи  $c = 4.18 \text{ kJ/(kg}^\circ\text{C)}$ . Ефекте термалног ширења, испаравања, као и топлотне процесе гаса који је све време на атмосферском притиску изнад леда/воде у калориметру занемарити. .... (20)

Табела 1

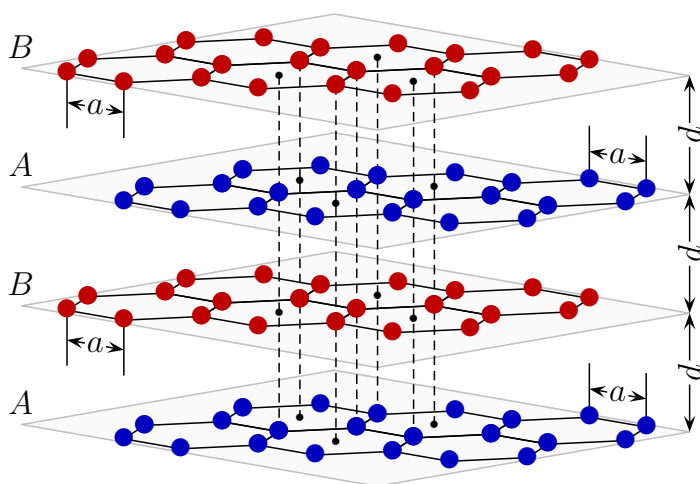
| $\tau [\text{min}]$  | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $t [^\circ\text{C}]$ | $10.9 \pm 0.2$ | $12.1 \pm 0.2$ | $13.1 \pm 0.2$ | $13.9 \pm 0.2$ | $15.0 \pm 0.2$ | $16.1 \pm 0.2$ |



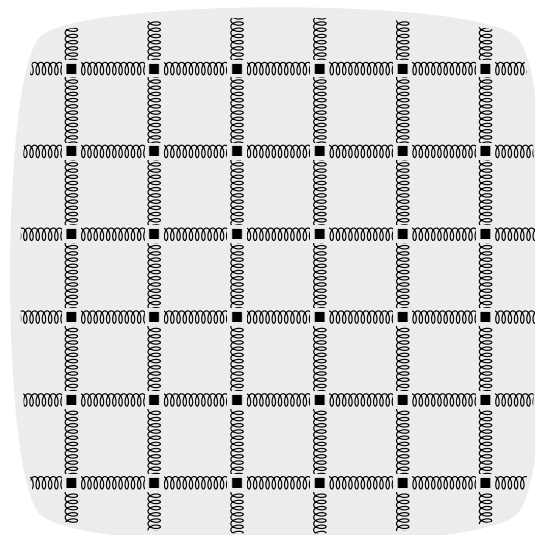
Слика 1



Слика 2



Слика 3



Слика 4



1. Нека је  $T_1$  температура грејача,  $T_2$  температура хладњака, а  $n_m$  број молова гаса.

(i) Коефицијент корисног дејства  $\eta_S$  представља однос корисног рада  $A$  и укупне уложене количине топлоте  $Q_1$  од стране грејача. Односно,  $\eta_S = A/Q_1$ . Гас прими количину топлоте  $Q_{12}$  приликом изотермског ширења  $1 \rightarrow 2$  као и количину топлоте  $Q_{41}$  током изохорског загревања на процесу  $4 \rightarrow 1$ , па је  $Q_1 = Q_{12} + Q_{41}$  [1 п]. Како приликом изотермског ширења нема промене унутрашње енергије имамо да је  $Q_{12} = A_{12} = n_m R T_1 \ln x$ . У процесу  $4 \rightarrow 1$  уложена количина топлоте је једнака промени унутрашње енергије гаса. Дакле,  $Q_{41} = n_m c_V (T_1 - T_2) = n_m R (T_1 - T_2) / (\gamma - 1)$ , где је изохорски моларни топлотни капацитет  $c_V = R / (\gamma - 1)$  [2 п]. Укупна уложена количина топлоте је  $Q_1 = n_m R (T_1 \ln x + (T_1 - T_2) / (\gamma - 1))$  [1 п]. Гас се шири у процесу  $1 \rightarrow 2$  (позитиван рад) и скупља у процесу  $3 \rightarrow 4$  (негативан рад). У процесу  $1 \rightarrow 2$  извршени рад је  $A_{12} = n_m R T_1 \ln x$  [1 п], а у процесу  $3 \rightarrow 4$  извршени рад је  $A_{34} = -n_m R T_2 \ln x$  [1 п], тако да је крајњи користан рад  $A = A_{12} + A_{34} = n_m R (T_1 - T_2) \ln x$  [1 п]. Одавде следи да је коефицијент корисног дејства  $\eta_S = \frac{n_m R (T_1 - T_2) \ln x}{n_m R (T_1 \ln x + (T_1 - T_2) / (\gamma - 1))} = \frac{1 - T_2/T_1}{1 + \frac{1 - T_2/T_1}{(\gamma - 1) \ln x}}$  [1 п]. Како је  $\eta_C = 1 - T_2/T_1$  [1 п] добија се да је  $\eta_S = \frac{\eta_C}{1 + \frac{\eta_C}{(\gamma - 1) \ln x}}$  [2 п]. Иначе,  $\eta_C > \eta_S$ , јер је  $\ln x > 0, \forall x > 1$  [1 п], а што је у складу са Карноовом теоремом.

(ii) Како је дато у поставци задатка, регенератор током процеса  $4 \rightarrow 1$  враћа гасу  $\eta_R$  од изгубљене количине топлоте  $n_m R (T_1 - T_2) / (\gamma - 1)$  у процесу  $2 \rightarrow 3$ . Ово значи да грејач на процесу  $4 \rightarrow 1$  не улаже  $Q_{41}$  као раније, већ мање  $Q'_{41} = Q_{41} - \eta_R n_m R (T_1 - T_2) / (\gamma - 1) = n_m R (1 - \eta_R) (T_1 - T_2) / (\gamma - 1)$  [2 п]. Тиме је и укупна уложена количина топлоте  $Q'_1$  мања од  $Q_1$ , односно количина топлоте коју гас прими од грејача приликом изохорског загревања умањена је за ону количину топлоте која је регенерисана приликом хлађења. Другим речима,  $Q'_1 = Q'_{41} + Q_{12} = n_m R (T_1 \ln x + (1 - \eta_R) (T_1 - T_2) / (\gamma - 1))$  [2 п]. Гас врши исти рад  $A$  као у случају без регенерације, јер изводи идентичан циклус, па је  $\eta_S^* = A/Q'_1$  [1 п]. Коначно,  $\eta_S^* = \frac{\eta_C}{1 + \frac{(1 - \eta_R) \eta_C}{(\gamma - 1) \ln x}}$  [1 п].

(iii) Лако се уочава да је  $\eta_S^* = \eta_C$  за  $\eta_R = 1$  [1 п]. Међутим, ово би значило да постоји не-Карноова топлотна машина чији је коефицијент корисног дејства једнак  $\eta_C$ , што је у колизији са Карноовом теоремом. Зачколица се крије у чињеници да по II закону термодинамике  $\eta_R$  мора бити мање од 1, јер бисмо у противном могли имати *perpetuum mobile* друге врсте у Клаузијусовој формулацији. Процес провођења топлоте код регенератора у одсуству вршења рада је ирверзибилан услед коначне температурске разлике, што указује на постојање извесног дела енергије расположивог за употребу који је отишао у неповрат услед позитивног прираштаја ентропије. Карноова топлотна машина је у целости реверзибилна. Она се ослања на идеалне адијабатске и изотермске процесе, који су такође реверзибилни. Стога, реализација регенератора са  $\eta_R = 1$  физички није могућа [1 п].

2. Како се горњи мениск повлачи према области у којој су унутрашњи зидови капиларе већ наплављени водом, контактни угао износи  $\theta_r = \theta - \Delta\theta$ , те је вертикална пројекција силе површинског напона усмерена навише и износи  $F_r = \pi d \gamma \cos \theta_r$  [4 п]. Како доњи мениск напредује према области у којој су унутрашњи зидови капиларе потпуно суви, контактни угао износи  $\theta_a = \theta + \Delta\theta$ , те је вертикална пројекција силе површинског напона усмерена наниже и износи  $F_a = \pi d \gamma \cos \theta_a$  [4 п]. Тежина воденог цилиндричног стуба износи  $mg = \rho V g = \rho g \pi d^2 h / 4$  [3 п]. Сила отпора воденог цилиндричног стуба по целој висини  $h$  која делује навише износи  $F_\eta = 4\pi \eta h u$  [3 п]. Услов равнотеже свих сила воденог стуба доводи до  $mg + F_a = F_r + F_\eta$ , јер је  $u = \text{const}$  [2 п]. После краћих трансформација и коришћењем да је  $\cos(\theta - \Delta\theta) - \cos(\theta + \Delta\theta) = 2 \sin \theta \sin \Delta\theta$  добија се да је  $\sin \Delta\theta = \frac{\rho g h d^2 - 16 \eta h u}{8 d \gamma \sin \theta} = 1/2$ , па је  $\Delta\theta = 30^\circ$  [4 п].

3. Ћелија кристалне решетке графита, којом се трансляторним померањем унутар графенских равни и нормално на њих може покривати цела решетка графита, има запремину  $V(t)$  на температури  $t$  као  $V(t) \propto a^2(t) d(t)$  [2 п]. Односно, како  $\alpha_\perp$  и  $\alpha_\parallel$  важе за изузетно мале вредности,  $V(t) = V(1 + \alpha_\perp t)^2 (1 + \alpha_\parallel t) \approx V(1 + 2\alpha_\perp t)(1 + \alpha_\parallel t) \approx V(1 + (2\alpha_\perp + \alpha_\parallel)t)$ , где је запремина ћелије  $V$  на  $0^\circ \text{C}$  на истоветан начин као  $V(t)$  сразмерна производу  $a^2 d$  [2 п]. Тако је коефицијент запреминог линеарног термалног ширења графита  $\beta = 2\alpha_\perp + \alpha_\parallel = +2.3 \times 10^{-5} \text{C}^{-1}$ , па се у коначном исходу графит ипак запремински шири са порастом температуре [4 п]. Маса графита при загревању се не мења, па је  $\rho(t) = \rho / (1 + \beta t) \approx \rho(1 - \beta t)$ , где је  $\rho$  густина графита на  $0^\circ \text{C}$  [2 п]. Густину  $\rho$  налазимо тако што прво одредимо запремину ћелије у функцији од  $a$  и  $d$ , а затим нађемо број атома  $C$  који је њом обухваћен. Наиме, ћелија је призма висине  $2d$ , јер се свака друга графенска раван поклапа дуж правца нормалног на њих [2 п]. Базу ћелије представља ромб странице  $a\sqrt{3}$  (дијагонале:  $3a \times a\sqrt{3}$ ), као што је дато



на слици 1. Она осликава графенски слој  $A$  који је изнад графенског слоја  $B$  [2 п]. Доња и горња база хелије, унутар два графена типа  $B$ , заједно садрже:  $2 \times 4$  атома  $C$  у рогљевима и  $2 \times 1$  атом  $C$  на површини, при чему је сваки атом у рогљевима дељен од стране 8 хелија, а на површини дељен од стране 2 хелије. Запремински хелија обухвата 2 атома  $C$  која нису дељена и припадају графену типа  $A$ . Тако једна хелија ефективно садржи  $z = 8 \times 1/8 + 2 \times 1/2 + 2 = 4$  атома  $C$  [2 п]. Запремина хелије је  $V = (3a \times a\sqrt{3}/2) \times 2d = 3\sqrt{3}a^2d$  [1 п]. Укупна маса свих атома  $C$  по хелији  $m = z \times (Am_u) = 48m_u$  [1 п]. Тако је  $\rho = (16m_u\sqrt{3})/(3a^2d) = 2.279 \text{ g/cm}^3$  [2 п].

**Напомена:** признати решења са узетом хелијом која  $3D$  просторним трансляцијама покрива укупну решетку графита ако је запремина  $V$  онолико пута већа/мања колико пута је  $z$  веће/мање, при чему минимални просторни период нормално на графенске равни мора износити  $2d$ . Иначе, иста вредност за густину се могла добити хипотетичким померањем слојева  $A$  и  $B$  тако да се њихови атоми поклопе дуж правца који је нормалан на ове равни. Тада се густина налази из запремине шестоугаоне призме базне странице  $a$  и висине  $d$ . У овом случају такмичар осваја максималних [6 п] од максимално предвиђених [10 п] бодова из кључа по питању овог дела. Ако је такмичар узео овакву призму као хелију без аргументације да се померањем равни густина не мења, онда такмичар добија максимално [2 п] бода на тачан резултат за густину од максимално предвиђених [10 п] бодова из кључа по питању овог дела.

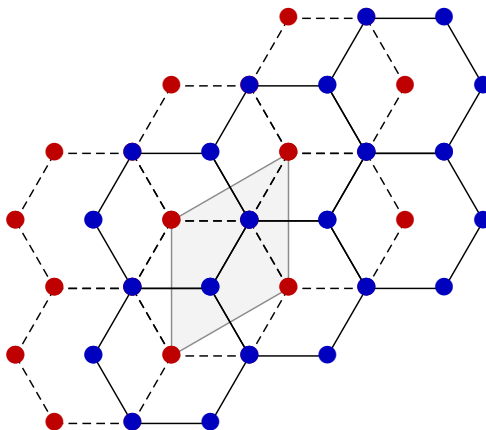
4. (i) Нека је број чворова на крајевима мембране дуж једне осе опруга  $N_1 \gg 1$ , а дуж друге ортогоналне на ову  $N_2 \gg 1$ . Одавде добијамо да је укупан број чворова  $N_1 \times N_2$ , док је укупан број опруга  $N_2 \times (N_1 - 1) + N_1 \times (N_2 - 1) \approx 2N_1N_2$ , а број елементарних квадрата  $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \approx N_1N_2$ . Иначе због симетрије проблема  $N_1 \approx N_2$  [2 п]. Нека је дужина неистегнуте опруге  $a_0$ , а истегнуте  $a$  коју има свака опруга при равномерном и изотропном растезању мембране. Тада је  $S_0 = N_1N_2 \times a_0^2$  и  $S = N_1N_2 \times a^2$  [2 п]. Енергија еластичне деформације једне опруге износи  $\kappa(a - a_0)^2/2$ , па је укупна  $E = 2N_1N_2 \times \kappa(a - a_0)^2/2 = N_1N_2 \times \kappa(a - a_0)^2$  [2 п]. Даље,  $E = \kappa(\sqrt{N_1N_2}a^2 - \sqrt{N_1N_2}a_0^2)^2$ , па је заиста  $E(S) = \kappa(\sqrt{S} - \sqrt{S_0})^2$  [2 п].
- (ii) Како је  $r \gg r_0$  закључујемо да је  $S \gg S_0$ , те је  $E(S) = \kappa S = 4\pi\kappa r^2$  [1 п]. Замислимо да гас врши елементарни рад  $\Delta A = p\Delta V$  повећавајући своју запремину за  $\Delta V = 4\pi r^2\Delta r$  против сила еластичности мембране у вакууму.  $\Delta V$  је запремина танке сферне луске базе  $4\pi r^2$ , дебљине  $\Delta r$ . Иначе,  $r \rightarrow r + \Delta r$ ,  $\Delta r \ll r$  [2 п]. Промена еластичне потенцијалне енергије мембране износи  $\Delta E = 4\pi\kappa((r + \Delta r)^2 - r^2)$ . Односно,  $\Delta E = 4\pi\kappa r^2((1 + \Delta r/r)^2 - 1) \approx 4\pi\kappa(1 + 2\Delta r/r - 1) = 8\pi\kappa r\Delta r$  [2 п]. Како је  $\Delta A = \Delta E \Rightarrow p(r) = 2\kappa/r$  [2 п]. Обавезно признати решење без детаљног извођења уколико се такмичар позвао на Лапласов закон у аналогiji са површинским напонам слободне сферне површине течности:  $E(S) = \kappa S \Rightarrow p(r) = 2\kappa/r$ .
- (iii) Како је притисак гаса у сваком тренутку ширења  $pr = \text{const}$ , закључујемо да се гас греје у процесу  $pV^{1/3} = \text{const}$ , где је  $V$  тренутна запремина гаса ( $r \propto V^{1/3}$ ), односно  $V \propto T^{3/2}$ , користећи једначину стања идеалног гаса броја мола  $n_m$  ( $pV = n_mRT$ ) [2 п]. Приликом загревања идеалног гаса од  $T \rightarrow T + \Delta T$  ( $\Delta T \ll T$ ) сва топлота  $\Delta Q = cn_m\Delta T$  иде на промену унутрашње енергије гаса  $\Delta U = c_V n_m\Delta T$  ( $c_V = R/(\gamma - 1)$ ) и елементарни рад  $\Delta A = p\Delta V$ , па је  $c = R/(\gamma - 1) + (p\Delta V)/(n_m\Delta T) = R/(\gamma - 1) + (RT\Delta V)/(V\Delta T)$ . Како је  $V \propto T^{3/2}$ , онда је  $V + \Delta V \propto (T + \Delta T)^{3/2}$ . Односно, дељењем је  $1 + \Delta V/V = (1 + \Delta T/T)^{3/2} \approx 1 + 3\Delta T/2T$ , па је  $\Delta V/\Delta T = 3V/2T$ . Другим речима,  $c = R/(\gamma - 1) + (3VRT)/(2VT)$  [2 п]. На крају,  $c = (3\gamma - 1)R/(2(\gamma - 1))$  [1 п].
5. Нека је снага грејача  $P$ , а маса леда (воде)  $m$ . Тада количина топлоте неопходна за топљење читавог леда на  $0^\circ\text{C}$  износи  $P\tau^* = m\lambda$  [2 п]. Извесно време након топљења, количина топлоте коју је грејач предао води за време  $\tau$ , при чему се вода загрејала од  $t_0$  до  $t$ , износи  $P\tau = mc(t - t_0)$  [2 п]. Тако долазимо до линеарне зависности  $t(\tau)$ :  $t = \frac{\lambda}{c} \frac{1}{\tau^*} \tau + t_0$ , односно  $\underbrace{y}_t = k \underbrace{x}_\tau + n$  [2 п]. Одавде имамо да је  $t_0 = n$ , а  $\tau^* = \frac{\lambda}{c} \frac{1}{k}$ , где се  $k$  и  $n$  читавају са графика [2 п]. Такође, грешке се рачунају као  $\Delta t_0 = \Delta n$ , а  $\Delta \tau^* = \delta \tau^* \times \tau^* = \delta k \times \tau^* = \frac{\Delta k}{k} \tau^* = \frac{\lambda}{c} \frac{1}{k^2} \Delta k$ , где се ” $\Delta$ ” односи на апсолутне, а ” $\delta$ ” на релативне грешке [2 п]. На графику линеарне зависности  $t(\tau)$  са насловом је представљено шест тачака кроз које је провучена права унутар граница апсолутних грешки (слика 2). Осе су јасно скалиране и обележене физичким величинама:  $\tau$  [min] на  $x$ -оси и  $t$  [ $^\circ\text{C}$ ] на  $y$ -оси. Одабране су две довољно удаљене тачке  $A(x_A, y_A) = (1.25 \text{ min}, 11.30^\circ\text{C})$  и  $B(x_B, y_B) = (5.75 \text{ min}, 15.75^\circ\text{C})$  унутар интервала измерених тачака [4 п]. Апсолутне грешке за  $\Delta y_A$  и  $\Delta y_B$  су једнаке и максимално мајоризоване као  $\Delta y = 0.2^\circ\text{C}$ . Апсолутна грешка читавања на  $x$ -оси је реда  $0.5 \text{ mm}$  на  $\text{mm}$ -папиру. У преводу  $\Delta x_A = \Delta x_B \equiv \Delta x = 0.0125 \text{ min}$ . Одсечак на  $y$ -оси добијамо као  $n = \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A} := 10.0638...^\circ\text{C}$ , док је  $\Delta n = \frac{x_B + x_A}{x_B - x_A} \Delta y + \frac{3x_B y_A - 3x_A y_B + x_B y_B - x_A y_A}{(x_B - x_A)^2} \Delta x :=$



$0.4421... ^\circ\text{C}$  [2 п]. Коефицијент правца добијамо као  $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} := 0.9888... ^\circ\text{C}/\text{min}$ , док је  $\Delta k = \frac{2(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)^2} \Delta x + \frac{2}{x_B - x_A} \Delta y := 0.0943... ^\circ\text{C}/\text{min}$ . Тиме је,  $\tau^* := 547.9544... \text{min}$ , а  $\Delta\tau^* := 52.2498... \text{min}$  [2 п]. На крају,  $t_0 = (10.1 \pm 0.5) ^\circ\text{C}$  и  $\tau^* = (5.5 \pm 0.6) \times 10^2 \text{min}$  [2 п].

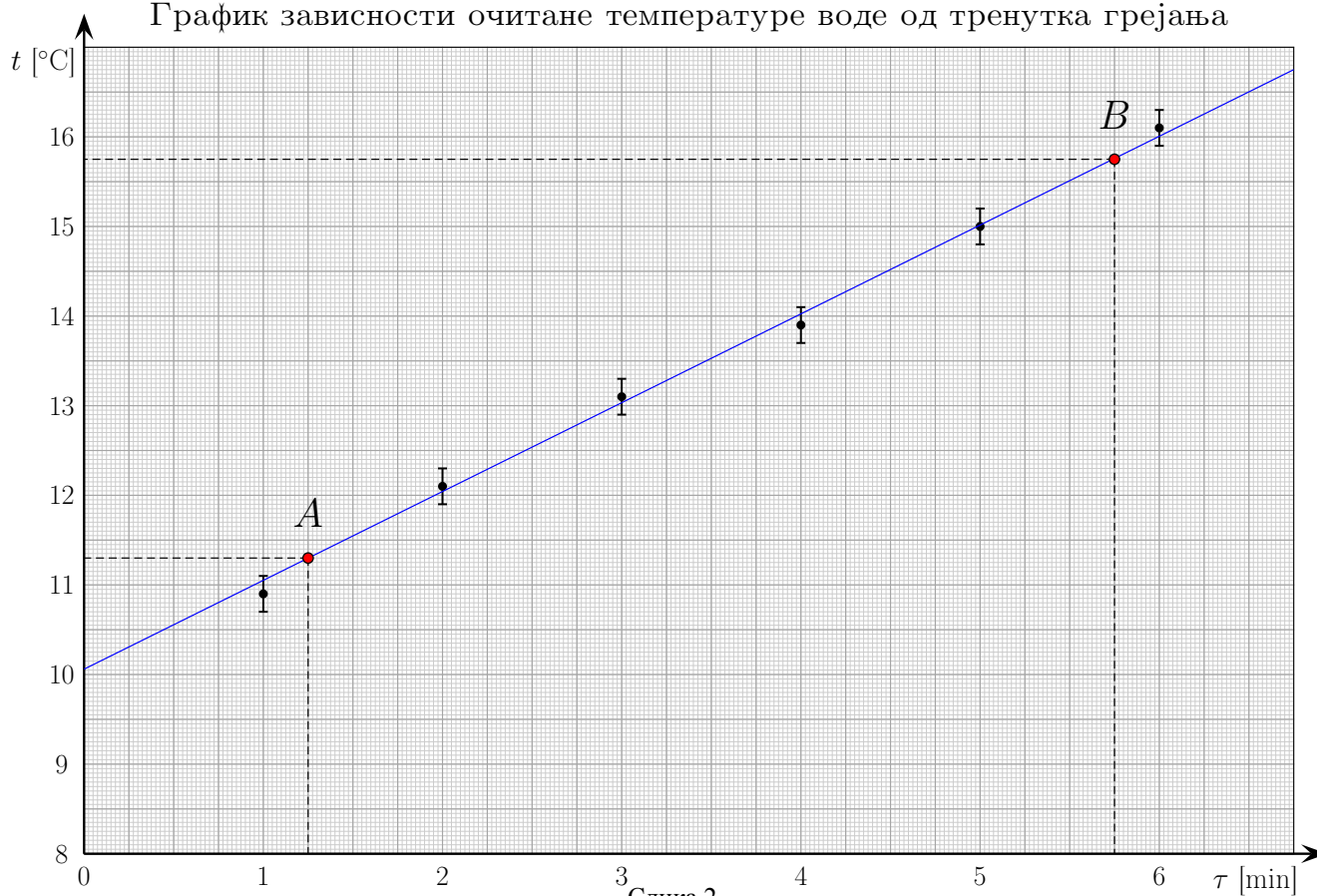
**Напомена:** коришћено је:  $\Delta(z_1 \pm z_2) = \Delta z_1 + \Delta z_2$ ,  $\Delta(z_1 z_2) = (z_1 z_2) \delta(z_1 z_2) = (z_1 z_2) (\delta z_1 + \delta z_2) = z_1 \Delta z_2 + z_2 \Delta z_1$ , и  $\Delta(z_1/z_2) = (z_1/z_2) \delta(z_1/z_2) = (z_1/z_2) (\delta z_1 + \delta z_2) = \Delta z_1/z_2 + z_1 \Delta z_2/z_2^2$ . Признати решења у којима је грешка читавања са mm-папира од 0.5 mm (1.0 mm неретко) изостављена.

**Erratum:** Таблична вредност за латентну топлоту топљења леда  $\lambda$  на атмосферском притиску је пре 0.334 MJ/kg него 2.265 MJ/kg. У том смеру би процена времена за које се сав лед истопио довела до  $\tau^* = (81 \pm 8) \text{min}$ .



Слика 1

График зависности очитане температуре воде од тренутка грејања



Слика 2