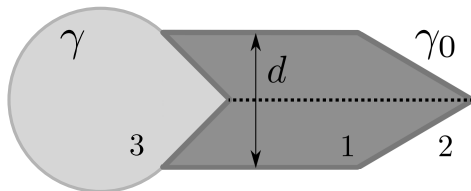




1. (20 поена) Бродић од плуте масе $m = 50 \text{ g}$ и ширине $d = 5,0 \text{ cm}$ мирује на површини воде, видети слику 1. Оса симетрије бродића је обележена испрекиданом линијом. Уколико се у воду дода неколико капи детерџента, бродић ће почети да се креће. Одредити интензитет и нацртати вектор убрзања бродића након додавања детерџента. Коефицијент површинског напона воде је $\gamma_0 = 70 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$, а детерџента $\gamma = 20 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$. Сматрати да се детерџент налази само у осенченој области на слици 1 и да су површине воде и детерџента хоризонталне.

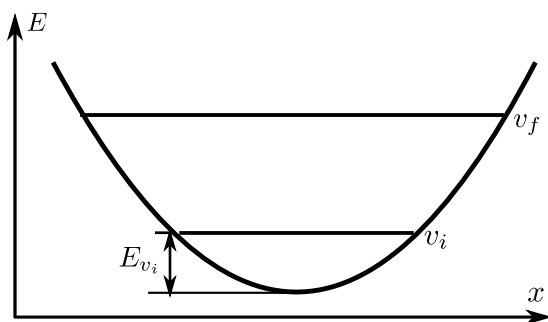


Слика 1: Поглед одозго: 1–бродић, 2–вода, 3–детерџент.

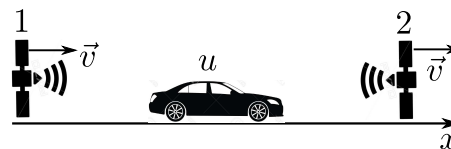
2. Када се хлороводоник (HCl) у гасном стању на температури T изложи дејству електромагнетног зрачења из инфрацрвене области спектра, долази до апсорпције зрачења оних енергија које одговарају прелазима између вибрационих нивоа унутар основног електронског стања молекула HCl , видети слику 2. Интензитет спектралне линије која одговара преласку молекула из иницијалног (i) у финално (f) стање директно је пропорционалан броју молекула у иницијалном стању N_i . При апсорпцији, за промену вибрационог квантног броја $\Delta v_{fi} = v_f - v_i$ важи селекционо правило $\Delta v_{fi} = 1$. У апсорпционом спектру HCl у инфрацрвеној области, најинтензивнија спектрална линија је таласне дужине $\lambda_{\text{max}} = 3,34 \mu\text{m}$.

- (а) (7 поена) Одредити вибрационе квантне бројеве v_i и v_f стања између којих се дешава прелаз који одговара најинтензивнијој спектралној линији. Број молекула у стању са вибрационим квантним бројем v је $N_v = A_1 e^{-E_v/(k_B T)}$, где је E_v енергија тог стања (мерена у односу на енергију основног електронског стања), k_B Болцманова константа, док је A_1 реална константа.

- (б) (13 поена) Сматрајући да су атоми H и Cl класичне куглице повезане безмасеном еластичном опругом, одредити коефицијент еластичности κ те опруге. Узети да центар масе молекула мирује.



Слика 2: Потенцијална крива вибрација двоатомског молекула (E –енергија, x –међуатомско растојање) у основном електронском стању и у околини равнотежне конфигурације молекула са означеним вибрационим нивоима.



Слика 3: уз задатак 4.

3. Боров (Bohr) модел атома водоника претпоставља да се електрон креће око језгра само по стационарним кружним орбитама радијуса r_n које су пребројане вредностима главног квантног броја $n = 1, 2, \dots$, при чему је $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$. Уместо Боровог постулата о квантовању момента импулса, у овом задатку ћемо за одређивање енергија стационарних орбита користити тзв. *принцип кореспонденције*. Према принципу кореспонденције, за велике вредности главног квантног броја n , $n \gg 1$, односно велике радијусе стационарне орбите r_n , вредности физичких величина израчунате у квантном опису су (приближно) једнаке одговарајућим вредностима у класичном опису. Разматраћемо фреквенције којима се у квантном и класичном опису карактерише губитак енергије електрона приликом смањења радијуса његове кружне орбите. У свим деловима задатка сматрати да су маса електрона m_e , елементарно наелектрисање $e > 0$, редукована Планкова константа $\hbar$ и диелектрична пропустљивост вакуума ϵ_0 познате константе.

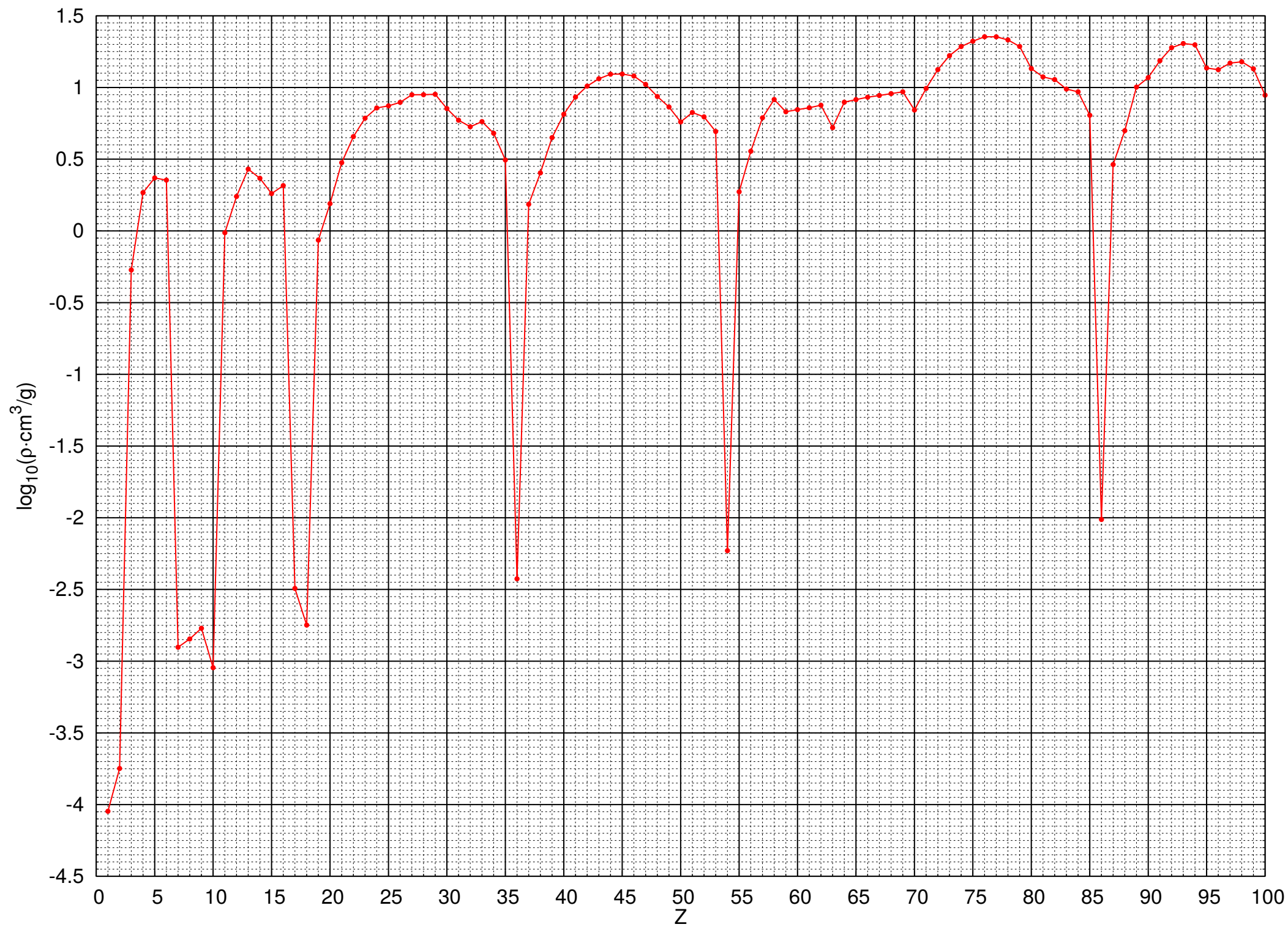


- (а) (7 поена) Одредити кружну фреквенцију ω_q кванта емитованог приликом прелаза између n -те и $(n-1)$ -ве стационарне орбите за $n \gg 1$, када је $\Delta r_n = r_n - r_{n-1}$ знатно мање од r_n и r_{n-1} . Резултат изразити у функцији r_n и Δr_n .
- (б) (2 поена) Према класичној електродинамици, електрон при кружном кретању око језгра емитује електромагнетно зрачење, при чему се радијус његове кружне путање смањује. Одредити кружну фреквенцију ω_c електромагнетног зрачења које према класичној електродинамици емитује електрон који се креће по кружници радијуса r_n знајући да је она једнака кружној фреквенцији његовог кретања.
- (в) (3 поена) Користећи принцип кореспонденције, наћи релацију која повезује r_n и r_{n-1} за $n \gg 1$.
- (г) (8 поена) Релација изведена у делу (в) може се решити по r_n претпостављајући да је $r_n = a \cdot n^\alpha$, где су a и α константе одговарајућих димензија. Одредити радијус r_n и енергију E_n n -те стационарне орбите водониковог атома.
4. Глобални систем за позиционирање (енг. Global Positioning System-GPS) је сателитски навигациони систем који пружа информацију о географском положају, као и временском тренутку и брзини проласка кроз тај положај, објекта на Земљи опремљеног GPS пријемником. Састоји се од 24 сателита који равномерно круже на висини $h = 20,00 \cdot 10^3$ km изнад површине Земље са периодом $T = 11$ h 58 min. Полупречник Земље је $R_E = 6,371 \cdot 10^3$ km.
- (а) (5 поена) Одредити интензитет v линијске брзине сателита.
- Размотримо једнодимензионални модел GPS система. Возило опремљено GPS пријемником креће се брзином интензитета u ($u \ll v$) дуж x осе система везаног за Земљу, док се два сателита предајника GPS сигнала, који је електромагнетни талас, крећу брзинама интензитета v одређеног у делу (а) у правцу и смеру x осе, видети слику 3. Одређивање брзине возила помоћу GPS система врши се на основу помака $\Delta f = f - f_0$ фреквенције f сигнала регистрованог на пријемнику у односу на фреквенцију f_0 сигнала емитованог са сателита, која износи $f_0 = 1,575$ GHz. Фреквентни помак сигнала регистрованог са сателита 1 износи $\Delta f_1 = 20,30$ kHz.
- (б) (7 поена) Одредити фреквентни помак Δf_2 сигнала регистрованог са сателита 2.
- (в) (8 поена) Одредити интензитет и смер брзине возила.
5. (20 поена) На графику датом у прилогу је за првих 100 хемијских елемената у периодном систему елемената дата зависност декадног логаритама густине изражене у јединицама $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ од атомског броја Z . Густине су измерене на температури $T = 273,15$ K и нормалном атмосферском притиску $p = 101,325$ kPa. Одредити вредност универзалне гасне константе R , користећи **само** податке из текста овог задатка, са графика и приложеног периодног система елемената. У овом задатку се не захтева одређивање грешке тражене величине.

У свим задацима можете користити бројне вредности следећих универзалних физичких константи: брзина светлости у вакууму $c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, атомска јединица масе $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg, као и податке из приложеног периодног система елемената. Када је то оправдано, можете користити апроксимацију $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, за $|x| \ll 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У фермионској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима средњих стручних школа, уметничких школа и свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.

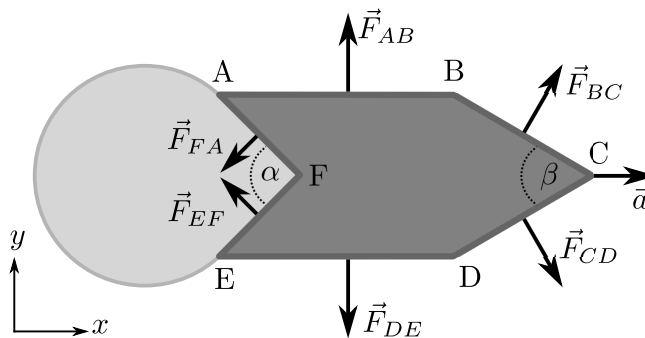


ГРУПА		1	2	ПЕРИОДНИ СИСТЕМ ЕЛЕМЕНАТА																13	14	15	16	17	18				
ПЕРИОДА		1A	IA	2A	IIA																	3B	IVA	VA	VIA	VIIA	VIIIA		
1	K	1,01 H ВОДОНИК	моларна маса у јединицама g/mol хемијски симбол атомски број																2 8 18 8 2 Sr 38 СТРОНЦИЈУМ	распоред електрона по енергетским нивоима						1,01 H ВОДОНИК	4,00 He ХЕЛИЈУМ		
2	L	6,94 Li ЛИТИЈУМ	9,01 Be БЕРИЛИЈУМ																	10,81 B БОР	12,01 C УГЉЕНИК	14,01 N АЗОТ	16,00 O КИСЕОНИК	19,00 F ФЛУОР	20,18 Ne НЕОН				
3	M	22,99 Na НАТРИЈУМ	24,31 Mg МАГНЕЗИЈУМ	3A	IIIB	4A	IVB	5A	VB	6A	VIB	7A	VIIIB	8	VIII	9	VIII	10	VIII	11	IB	12	IIB	26,98 Al АЛУМИНИЈУМ	28,09 Si СИЛИЦИЈУМ	30,97 P ФОСФОР	32,07 S СУЛФОР	35,45 Cl ХЛОР	39,95 Ar АРГОН
4	N	39,10 K КАЛИЈУМ	40,08 Ca КАЛЦИЈУМ	44,96 Sc СКАНДИЈУМ	47,90 Ti ТИТАН	50,94 V ВАНАДИЈУМ	52,00 Cr ХРОМ	54,94 Mn МАНГАН	55,85 Fe ГВОЖЂЕ	58,93 Co КОБАЛТ	58,71 Ni НИКАЛ	63,55 Cu БАКАР	65,39 Zn ЦИНК	69,72 Ga ГАЛИЈУМ	72,59 Ge ГЕРМАНИЈУМ	74,92 As АРСЕН	78,96 Se СЕЛЕН	79,90 Br БРОМ	83,80 Kr КРИПТОН										
5	O	85,47 Rb РУБИДИЈУМ	87,62 Sr СТРОНЦИЈУМ	88,91 Y ИТРИЈУМ	91,22 Zr ЦИРКОНИЈУМ	92,91 Nb НИОБИЈУМ	95,94 Mo МОЛИБДЕН	98,91 Tc ТЕХНЕЦИЈУМ	101,07 Ru РУТЕНИЈУМ	102,91 Rh РОДИЈУМ	106,4 Pd ПАЛАДИЈУМ	107,87 Ag СРЕБРО	112,41 Cd КАДМИЈУМ	114,82 In ИНДИЈУМ	118,71 Sn КАЛАЈ	121,75 Sb АНТИМОН	127,60 Te ТЕЛУР	126,90 I ЈОД	131,30 Xe КСЕНОН										
6	P	132,91 Cs ЦЕЗИЈУМ	137,33 Ba БАРИЈУМ	57-71 La-Lu	178,49 Hf ХАФНИЈУМ	180,95 Ta ТАНТАЛ	183,85 W ВОЛФРАМ	186,21 Re РЕНИЈУМ	190,2 Os ОСМИЈУМ	192,22 Ir ИРИДИЈУМ	195,09 Pt ПЛАТИНА	196,97 Au ЗЛАТО	200,59 Hg ЖИВА	204,37 Tl ТАЛИЈУМ	207,2 Pb ОЛОВО	208,98 Bi БИЗМУТ	209 Po ПОЛОНИЈУМ	210 At АСТАТ	222 Rn РАДОН										
7	Q	223 Fr ФРАНЦИЈУМ	226,03 Ra РАДИЈУМ	89-103 Ac-Lr	261 Rf РИДЕРФОРДИЈУМ	262 Db ДУБИНИЈУМ	263 Sg СИБОРГИЈУМ	264 Bh БОРИЈУМ	265 Hs ХАСИЈУМ	266 Mt МАЈТЕРИЈУМ	269 Ds ДАРМСТАТИЈУМ	272 Rg РЕНДГЕНИЈУМ	277 Uub УНУБИЈУМ	284 Uut УНУТРИЈУМ	288 Uuq УНУКВАДИЈУМ	288 Uup УНУПЕНТИЈУМ													
ЛАНТАНОИДИ				139,91 La ЛАНТАН	140,12 Ce ЦЕРИЈУМ	140,91 Pr ПРАЗЕОДИЈУМ	144,24 Nd НЕОДИЈУМ	145 Pm ПРОМЕТИЈУМ	150,4 Sm САМАРИЈУМ	151,96 Eu ЕУРОПИЈУМ	157,95 Gd ГАДОЛИНИЈУМ	158,93 Tb ТЕРБИЈУМ	162,50 Dy ДИСПРОЗИЈУМ	164,93 Ho ХОЛМИЈУМ	167,29 Er ЕРБИЈУМ	168,93 Tm ТУЛИЈУМ	173,04 Yb ИТЕРБИЈУМ	174,97 Lu ЛУТЕЦИЈУМ											
АКТИНОИДИ				227,03 Ac АКТИНИЈУМ	232,04 Th ТОРИЈУМ	231,04 Pa ПРОАКТИНИЈУМ	238,03 U УРАН	237,05 Np НЕПТУНИЈУМ	244 Pu ПЛУТОНИЈУМ	243 Am АМЕРИЦИЈУМ	247 Cm КИРИЈУМ	247 Bk БЕРКЛИЈУМ	251 Cf КАЛИФОРНИЈУМ	254 Es АЈНШТАЈНИЈУМ	257 Fm ФЕРМИЈУМ	258 Md ИДСЕЈЕВЛИЈУМ	259 No НОБЕЛИЈУМ	260 Lr ЛОРЕНЦИЈУМ											



IV разред

1. На сваку од ивица бродиха делује сила површинског напона у правцу нормалном на ту ивицу, видети слику 1. Ако је дужина ивице l , а коефицијент површинског напона течности уз ту ивицу γ , интензитет силе површинског напона је γl . Ова сила тежи да смањи слободну површину течности, тако да је увек усмерена супротно од бродиха [3п]. Због симетрије бродиха, компоненте свих сила дуж y осе се међусобно поништавају [3п]. На бродиху делује резултанта x компоненти преосталих сила $\vec{F} = \vec{F}_{BC,x} + \vec{F}_{CD,x} + \vec{F}_{EF,x} + \vec{F}_{FA,x} = 2\vec{F}_{BC,x} + 2\vec{F}_{FA,x}$ [4п]. Пројекције ових сила на x осу су $F_{BC,x} = F_{BC} \sin \frac{\beta}{2} = l_{BC} \gamma_0 \sin \frac{\beta}{2} = \frac{d}{2} \gamma_0$, односно $F_{FA,x} = F_{FA} \sin \frac{\alpha}{2} = -l_{FA} \gamma \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{d}{2} \gamma$, одакле следи да је пројекција резултанте на x осу $F = (\gamma_0 - \gamma) d$ [7п]. Интензитет убрзања је затим $a = \frac{|F|}{m} = (\gamma_0 - \gamma) \frac{d}{m}$, односно $a = 0,050 \frac{m}{s^2}$. Вектор $\vec{a}$ је приказан на слици 1 [3п].



Слика 1: Силе које делују на бродиху.

2. (а) Вибрациони квантни број v_i иницијалног стања прелаза који одговара најинтензивнијој спектралној линији је одређен условом да је популација N_{v_i} максимална. С обзиром на то да су могуће вредности за v_i ненегативни цели бројеви, да је $E_{v_i} = (v_i + \frac{1}{2}) \hbar \omega$ (где је ω кружна фреквенција вибрација) и $N_{v_i} = A_1 e^{-E_{v_i}/(k_B T)}$, закључујемо да најинтензивнији прелаз полази са вибрационог нивоа $v_i = 0$ [5п]. Имајући у виду селекционо правило при апсорпцији $\Delta v_f = 1$, вибрациони квантни број финалног стања је $v_f = 1$ [2п].
- (б) Пошто је $\frac{hc}{\lambda_{\max}} = E_{v_f} - E_{v_i} = \hbar \omega$, кружна фреквенција вибрација молекула је $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_{\max}}$ [3п]. С друге стране, ако су u_H и u_{Cl} редом помераји атома водоника и хлора из равнотежног положаја, једначина кретања атома водоника је $m_H a_H = -\kappa(u_H - u_{Cl})$, где је a_H убрзање атома водоника, док су m_H и m_{Cl} редом масе атома водоника и хлора. Пошто се центар масе молекула не помера, помераји атома су повезани релацијом $m_H u_H + m_{Cl} u_{Cl} = 0$. Комбиновањем последње две једначине следи $a_H + \kappa \left(\frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_{Cl}} \right) u_H = 0$, што је једначина хармонијског осциловања са кружном фреквенцијом $\omega = \sqrt{\kappa \left(\frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_{Cl}} \right)}$ [7п]. Коефицијент еластичности опруге је онда $\kappa = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_{\max}^2 \left(\frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_{Cl}} \right)}$. Након замене бројних вредности, $\kappa = 518 \frac{N}{m}$ [3п].
3. (а) Други Њутнов закон за кружно кретање електрона око језгра гласи $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$, где су r и v редом полупречник кружне путање и интензитет линијске брзине на тој путањи. Укупна енергија електрона је E је збир кинетичке енергије $T = \frac{m_e v^2}{2}$ и потенцијалне енергије $U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$, па следи $E = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$ [4п]. Кружна фреквенција кванта емитованог при преласку са стационарне орбите полупречника r_n на стационарну орбиту полупречника $r_{n-1} = r_n - \Delta r_n$ је $\omega_q = \frac{1}{2\hbar} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta r_n}{r_n}} - 1 \right) \approx \frac{1}{8\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{e^2 \Delta r_n}{r_n^2}$, при чему је у последњем кораку искоришћен услов $\Delta r_n \ll r_n$ [3п].
- (б) Кружна фреквенција кретања електрона је $\omega = v/r$, односно користећи други Њутнов закон $\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^3}}$. Дакле, кружна фреквенција зрачења које (према класичној електродинамици) емитује електрон који се креће по орбити полупречника r_n је $\omega_c = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r_n^3}}$ [2п].
- (в) Према принципу кореспонденције, за велике полупречнике орбите r_n важи $\omega_q = \omega_c$, одакле се добија релација која повезује r_n и r_{n-1} : $\Delta r_n = r_n - r_{n-1} = 2\sqrt{r_n \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}$ [3п].
- (г) Заменом датог облика решења за r_n у претходну везу добија се $a n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^\alpha \right) = 2\sqrt{a} n^{\alpha/2} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}$. Користећи да веза између r_n и r_{n-1} важи за $n \gg 1$, следи $\alpha \sqrt{a} n^{\alpha-1} = 2 n^{\alpha/2} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}$, тако да параметри a и α



задовољавају једначине $\alpha - 1 = \alpha/2$ и $\alpha\sqrt{a} = 2\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}}$ [5п]. Дакле, $\alpha = 2$ и $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$, па је $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2$ и $E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$ [3п].

4. (а) Интензитет угаоне брзине ротације сателита је $\omega = \frac{v}{h+R_E}$. Такође важи и $\omega = \frac{2\pi}{T}$, па је $v = \frac{2\pi}{T}(h+R_E)$, односно $v = 3,846 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ [5п].

(б) Због $u \ll v$, у систему везаном за возило сателит 1 ће се приближавати возилу, док ће се сателит 2 удаљавати од возила. Зато ће фреквентни помак сигнала примљеног са сателита 1 бити позитиван, док ће фреквентни помак сигнала примљеног са сателита 2 бити негативан. Пошто важи и $v/c \ll 1$, могу се применити нерелативистички изрази за фреквентни помак који гласе $\Delta f_1 = f_0 \frac{v_{\text{rel}}}{c}$ и $\Delta f_2 = -f_0 \frac{v_{\text{rel}}}{c}$, где је v_{rel} интензитет релативне брзине сателита у односу на возило. Дакле, $\Delta f_2 = -\Delta f_1$, односно $\Delta f_2 = -20,30 \text{ kHz}$ [7п].

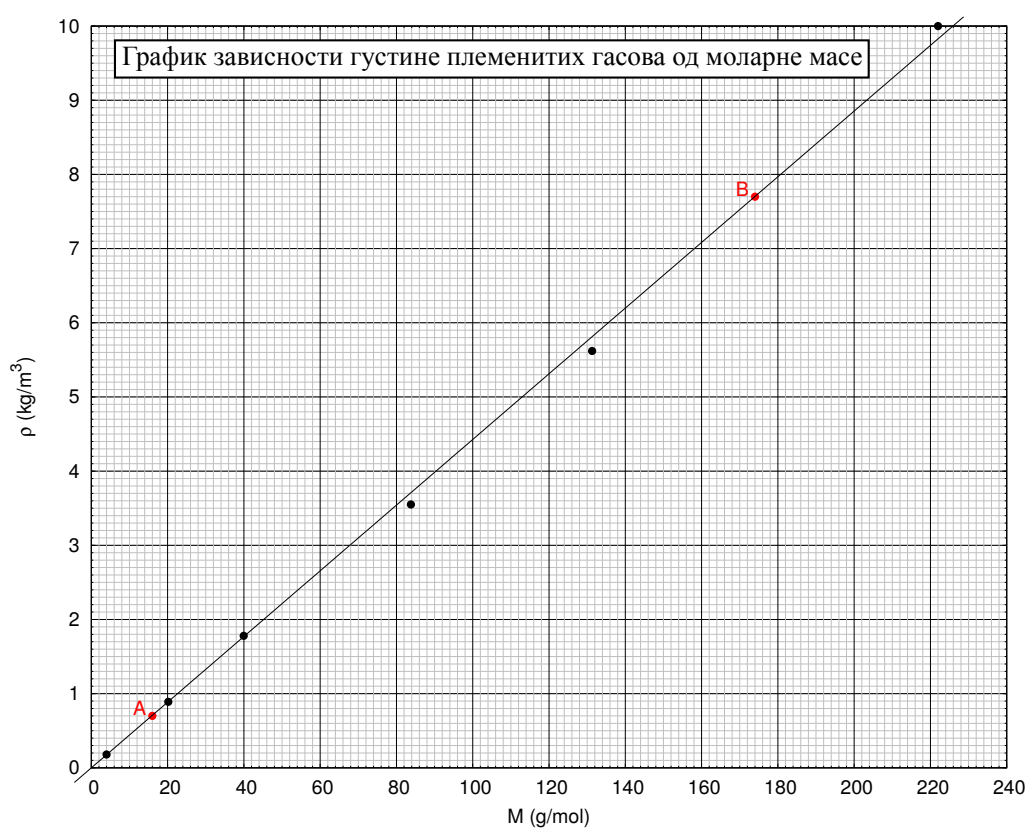
(в) Интензитет релативне брзине сателита у односу на возило је $v_{\text{rel}} = c \frac{\Delta f_1}{f_0}$ и износи $v_{\text{rel}} = 3,864 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, што је веће од v [6п]. Возило се, дакле, креће у смеру супротном од смера x осе брзином интензитета $u = v_{\text{rel}} - v = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ [2п].

5. Племенити гасови су једноатомски и слабо-интерагујући гасови, па се могу добро апроксимирати идеалним гасом. Зато ћемо у овом задатку користити само податке за племените гасове. То су хелијум, неон, аргон, криптон, ксенон и радон, а њихови атомски бројеви су редом 2, 10, 18, 36, 54 и 86 [4п]. Једначина стања идеалног гаса је $pV = n_m RT$, где је V запремина гаса, а $n_m = \frac{m}{M}$ број молова, односно количник укупне масе гаса m и моларне масе M . Густина је једнака маси по јединици запремине $\rho = \frac{m}{V}$, па за идеалне гасове важи $\rho = \frac{pM}{RT}$ [4п]. У периодном систему елемената су дате моларне масе M у јединицама $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Густине племенитих гасова очитане са приложеног графика и њихове моларне масе из периодног система елемената су дате у табели 1 [4п].

Табела 1: Декадни логаритми густине у јединицама g/cm^3 очитани са графика, густине ρ израчунате из ових података и моларне масе M племенитих гасова из периодног система елемената.

	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Rn
$\log_{10}(\rho \cdot \text{cm}^3/\text{g})$	-3,75	-3,05	-2,75	-2,45	-2,25	-2,00
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	0,18	0,89	1,78	3,55	5,62	10,00
$M \text{ (g/mol)}$	4,00	20,18	39,95	83,80	131,30	222

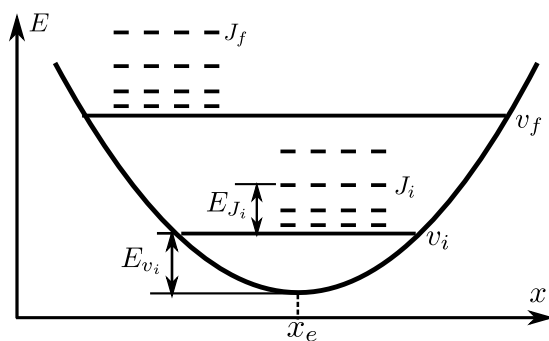
На основу ових података се може нацртати график линеарне зависности густине од моларне масе $\rho = aM$, где је коефицијент правца $a = \frac{p}{RT}$, слика 2, док су p и T редом притисак и температура дати у поставци задатка. На графику је провучена права тако да одступање експерименталних тачака од праве буде што је могуће мање [3п]. Очитавањем две тачке са праве A (16,0 g/mol, 0,70 kg/m³) и B (174,0 g/mol, 7,70 kg/m³) (при чему се A налази између прве и друге, а B између претпоследње и последње експерименталне тачке), за коефицијент правца се добија $a = \frac{\rho_B - \rho_A}{M_B - M_A} = 44,3 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$. Гасна константа се затим може одредити као $R = \frac{p}{aT}$, односно $R = 8,4 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ [5п].



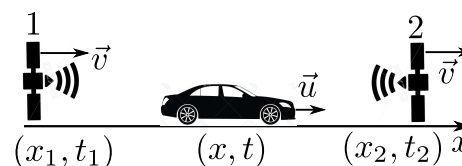
Слика 2: График зависности густине племенитих гасова од моларне масе.



- У стара времена веровало се да је Земља непокретна, бесконачна и хомогена равна плоча.
 - (16 поена) Одредити колика треба да буде дебљина D_E такве Земље тако да интензитет вектора јачине гравитационог поља на њеној површини буде исти као на површини Земље облика лопте полупречника $R_E = 6,37 \cdot 10^3$ km која је хомогена и састављена од истог материјала.
 - (4 поена) Одредити зависност вектора јачине гравитационог поља од висине мерене од површине равне Земље.
 - Када се угљен-моноксид (CO) у гасном стању на температури $T = 300$ K изложи дејству електромагнетног зрачења из инфрацрвене области спектра, долази до апсорпције зрачења оних енергија које одговарају комбинованим вибрационо-ротационим прелазима унутар основног електронског стања молекула CO, видети слику 1. Апсорпциони спектар молекула је тракаст, а интензитет спектралне линије која одговара преласку молекула из иницијалног (i) у финално (f) стање директно је пропорционалан броју молекула N_i у иницијалном стању. При апсорпцији, за промене вибрационог и ротационог квантног броја $\Delta v_{fi} = v_f - v_i$ и $\Delta J_{fi} = J_f - J_i$ важе селекциона правила $\Delta v_{fi} = 1$ и $\Delta J_{fi} = \pm 1$. У апсорпционом спектру CO у инфрацрвеној области, најинтензивнија спектрална линија има таласну дужину $\lambda_{\max} = 4,61$ μm . Равнотежно растојање између атома у молекулу CO износи $x_e = 112,8$ pm, а Болцманова константа је једнака $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ $\frac{\text{J}}{\text{K}}$.
 - (3 поена) Сматрајући да најинтензивнија спектрална линија одговара преласку између вибрационих стања, одредити вибрационе квантне бројеве v_i и v_f тих стања. Број молекула у стању са вибрационим квантним бројем v је $N_v = A_1 e^{-E_v/(k_B T)}$, где је E_v енергија тог стања (мерена у односу на енергију основног електронског стања), док је A_1 реална константа.
 - (7 поена) Сматрајући да су атоми C и O класичне куглице повезане безмасеном еластичном опругом, одредити коефицијент еластичности κ те опруге. Узети да центар масе молекула мирује.
- Опажена спектрална линија, међутим, није оштра, већ се састоји од низа оштрих линија веома блиских енергија које одговарају преласку између ротационих стања $J_i \rightarrow J_f$ који прати прелазак између вибрационих стања $v_i \rightarrow v_f$.
- (10 поена) Одредити вредности J_i и J_f које одговарају најинтензивнијем прелазу између ротационих стања који прати прелаз између вибрационих стања v_i и v_f одређених у делу (а), а потом израчунати таласне дужине најинтензивнијих спектралних линија. Број молекула у стању са вибрационим квантним бројем v и ротационим квантним бројем J је $N_J = A_2(2J+1) e^{-E_J/(k_B T)}$, где је E_J енергија ротационог стања J (мерена у односу на енергију вибрационог стања v), док је A_2 реална константа.



Слика 1: Потенцијална крива вибрација двоатомског молекула (E —енергија, x —међуатомско растојање) у основном електронском стању и у околини равнотежне конфигурације молекула са означеним вибрационим (пуне линије) и ротационим (испрекидане линије) нивоима.



Слика 2: уз задатак 4.

- Боров (Bohr) модел атома водоника претпоставља да се електрон креће око језгра само по стационарним кружним орбитама радијуса r_n које су пребројане вредностима главног квантног броја $n = 1, 2, \dots$, при чему је $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$. Уместо Боровог постулата о квантовању момента импулса, у овом задатку ћемо за одређивање енергија стационарних орбита користити тзв. *принцип кореспонденције*. Према принципу кореспонденције, за велике вредности главног квантног броја n , $n \gg 1$, односно велике радијусе стационарне орбите r_n , вредности физичких величина израчунате у квантном опису су (приближно) једнаке одговарајућим вредностима у класичном опису. Разматраћемо фреквенције којима се у квантном и класичном опису карактерише губитак енергије електрона приликом смањења радијуса његове кружне орбите. У свим деловима задатка сматрати да су маса електрона m_e , елементарно наелектрисање $e > 0$, редукована Планкова константа $\hbar$ и диелектрична пропустљивост вакуума ϵ_0 познате константе.

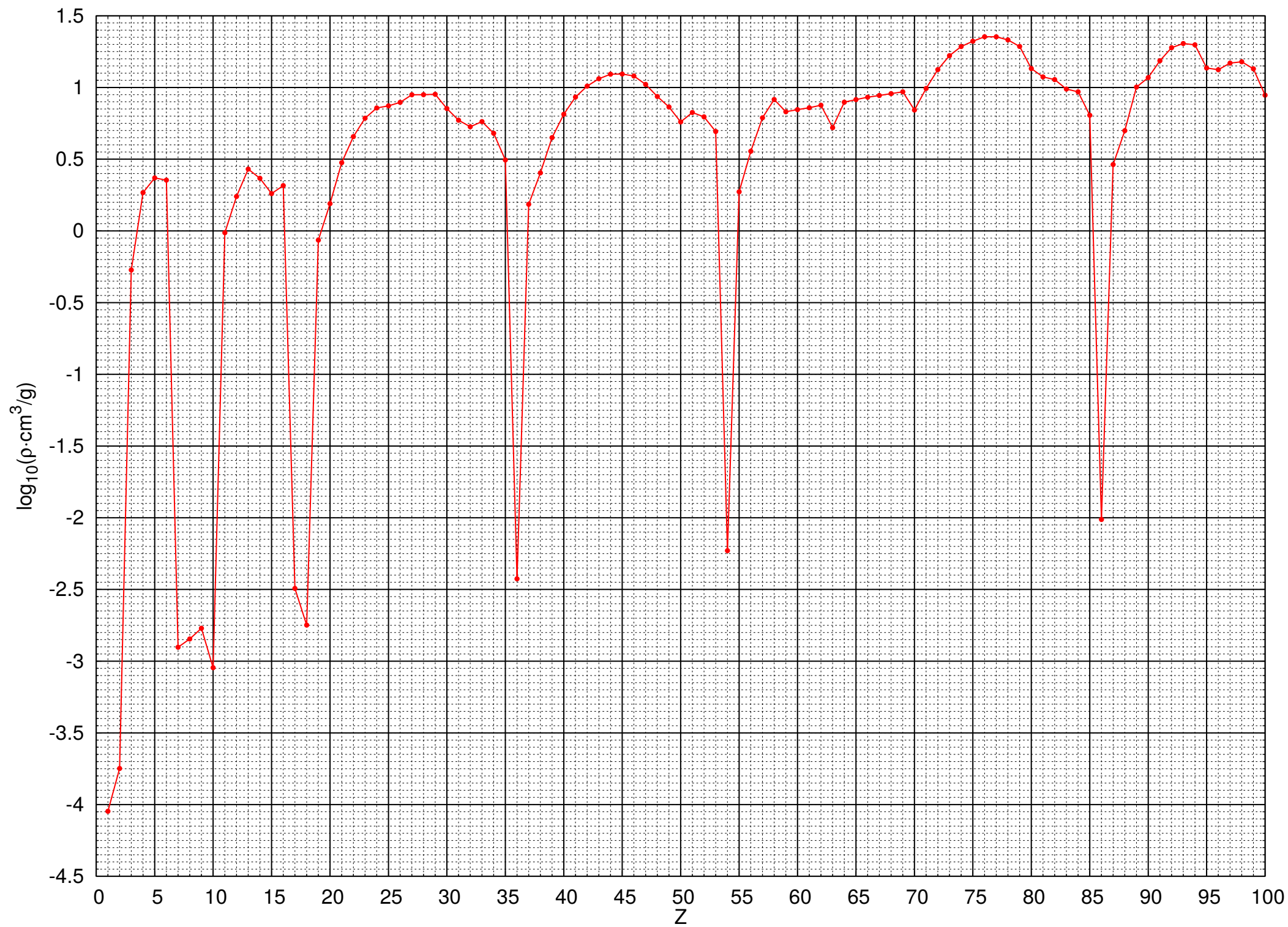


- (а) (7 поена) Одредити кружну фреквенцију ω_q кванта емитованог приликом прелаза између n -те и $(n-1)$ -ве стационарне орбите за $n \gg 1$, када је $\Delta r_n = r_n - r_{n-1}$ знатно мање од r_n и r_{n-1} . Резултат изразити у функцији r_n и Δr_n .
- (б) (2 поена) Према класичној електродинамици, електрон при кружном кретању око језгра емитује електромагнетно зрачење, при чему се радијус његове кружне путање смањује. Одредити кружну фреквенцију ω_c електромагнетног зрачења које према класичној електродинамици емитује електрон који се креће по кружници радијуса r_n знајући да је она једнака кружној фреквенцији његовог кретања.
- (в) (3 поена) Користећи принцип кореспонденције, наћи релацију која повезује r_n и r_{n-1} за $n \gg 1$.
- (г) (8 поена) Релација изведена у делу (в) може се решити по r_n претпостављајући да је $r_n = a \cdot n^\alpha$, где су a и α константе одговарајућих димензија. Одредити радијус r_n и енергију E_n n -те стационарне орбите водониковог атома.
4. Глобални систем за позиционирање (енг. Global Positioning System-GPS) је сателитски навигациони систем који пружа информацију о географском положају, као и временском тренутку и брзини проласка кроз тај положај, објекта на Земљи опремљеног GPS пријемником. Састоји се од 24 сателита који круже око Земље. У овом задатку ћете се уверити да су ефекти које предвиђа специјална теорија релативности (СТР) важни за прецизно одређивање положаја објекта користећи GPS.
- Размотримо једнодимензионални модел GPS система. Возило опремљено GPS пријемником креће се брзином интензитета u ($u \ll v$) у правцу и смеру x осе референтног система S везаног за Земљу, док се два сателита предајника GPS сигнала, који је електромагнетни талас, крећу брзинама интензитета $v = 3,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ у правцу и смеру x осе, видети слику 2. Сателит 1 се налази у координатном почетку референтног система S' везаног за сателите. Растојање између сателита у систему S' је $L = 2,4 \cdot 10^4 \text{ km}$. У тренутку $t = t' = 0$, координатни почеци система S и S' се поклапају. Сателити 1 и 2 емитују сигнале у тренуцима t_1 и t_2 када су им координате x_1 и x_2 , респективно (ове величине су задате у систему S). Пријемник у возилу истовремено региструје сигнале са оба сателита.
- (а) (6 поена) Одредити координату возила x у систему S у тренутку пријема сигнала у функцији x_1, x_2, t_1, t_2 и брзине светлости у вакууму c . Сматрати да је $x_1 \leq x \leq x_2$.
- Тренуци емитовања сигнала са сателита, као и одговарајући положаји, најчешће нису познати у систему S , већ у систему S' . Стога одређивање положаја возила користећи израз добијен у делу (а) захтева трансформацију координата између два система.
- (б) (11 поена) Израчунати разлику $\Delta x_{\text{r-nr}} = |x_{\text{r}} - x_{\text{nr}}|$ положаја возила одређених коришћењем СТР (x_{r}) и коришћењем нерелативистичке механике (x_{nr}).
- Напомена: Уколико је неопходно, када се користи нерелативистичка механика, сматрати да је брзина светлости у систему S једнака c , док је у систему S' задата нерелативистичким законом слагања брзина.
- (в) (3 поена) Сателити су опремљени атомским часовницима који омогућавају одређивање тренутка емитовања сигнала (у систему S') са тачношћу $\Delta t' = 1,0 \text{ ns}$. Израчунати апсолутну грешку одређивања координате возила x која потиче од грешке мерења времена атомским часовником.
5. (20 поена) На графику датом у прилогу је за првих 100 хемијских елемената у периодном систему елемената дата зависност декадног логаритама густине изражене у јединицама $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ од атомског броја Z . Густине су измерене на температури $T = 273,15 \text{ K}$ и нормалном атмосферском притиску $p = 101,325 \text{ kPa}$. Одредити вредност универзалне гасне константе R , користећи **само** податке из текста овог задатка, са графика и приложеног периодног система елемената. У овом задатку се не захтева одређивање грешке тражене величине.

У свим задацима можете користити бројне вредности следећих универзалних физичких константи: брзина светлости у вакууму $c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, атомска јединица масе $u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, редукована Планкова константа $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, као и податке из приложеног периодног система елемената. Када је то оправдано, можете користити апроксимацију $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, за $|x| \ll 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

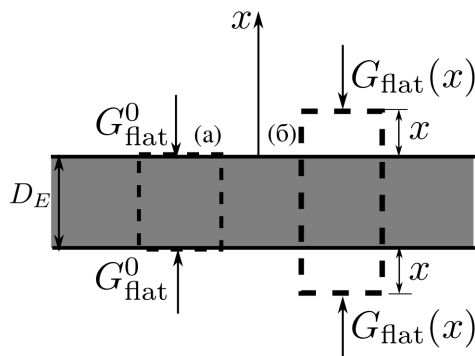
*У бозонској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.



ГРУПА		1	2	ПЕРИОДНИ СИСТЕМ ЕЛЕМЕНАТА																13	14	15	16	17	18																
ПЕРИОДА		1A	IA	2A	IIA																	3B	IVA	VA	VIA	VIIA	VIIIA														
1	K	1,01 H ВОДОНИК	моларна маса у јединицама g/mol хемијски симбол атомски број																2 8 18 8 2 Sr 38 СТРОНЦИЈУМ	распоред електрона по енергетским нивоима						1,01 H ВОДОНИК	4,00 He ХЕЛИЈУМ														
2	L	6,94 Li ЛИТИЈУМ	9,01 Be БЕРИЛИЈУМ																	10,81 B БОР	12,01 C УГЉЕНИК	14,01 N АЗОТ	16,00 O КИСЕОНИК	19,00 F ФЛУОР	20,18 Ne НЕОН																
3	M	22,99 Na НАТРИЈУМ	24,31 Mg МАГНЕЗИЈУМ	3A	IIIB	4A	IVB	5A	VB	6A	VIB	7A	VIIIB	8	VIII	9	VIII	10	VIII	11	IB	12	IIB	13	AL	АЛУМИНИЈУМ	14	Si	СИЛИЦИЈУМ	15	P	ФОСФОР	16	S	СУЛФОР	17	Cl	ХЛОР	18	Ar	АРГОН
4	N	39,10 K КАЛИЈУМ	40,08 Ca КАЛЦИЈУМ	44,96 Sc СКАНДИЈУМ	47,90 Ti ТИТАН	50,94 V ВАНАДИЈУМ	52,00 Cr ХРОМ	54,94 Mn МАНГАН	55,85 Fe ГВОЖЂЕ	58,93 Co КОБАЛТ	58,71 Ni НИКАЛ	63,55 Cu БАКАР	65,39 Zn ЦИНК	69,72 Ga ГАЛИЈУМ	72,59 Ge ГЕРМАНИЈУМ	74,92 As АРСЕН	78,96 Se СЕЛЕН	79,90 Br БРОМ	83,80 Kr КРИПТОН																						
5	O	85,47 Rb РУБИДИЈУМ	87,62 Sr СТРОНЦИЈУМ	88,91 Y ИТРИЈУМ	91,22 Zr ЦИРКОНИЈУМ	92,91 Nb НИОБИЈУМ	95,94 Mo МОЛИБДЕН	98,91 Tc ТЕХНЕЦИЈУМ	101,07 Ru РУТЕНИЈУМ	102,91 Rh РОДИЈУМ	106,4 Pd ПАЛАДИЈУМ	107,87 Ag СРЕБРО	112,41 Cd КАДМИЈУМ	114,82 In ИНДИЈУМ	118,71 Sn КАЛАЈ	121,75 Sb АНТИМОН	127,60 Te ТЕЛУР	126,90 I ЈОД	131,30 Xe КСЕНОН																						
6	P	132,91 Cs ЦЕЗИЈУМ	137,33 Ba БАРИЈУМ	57-71 La-Lu	178,49 Hf ХАФНИЈУМ	180,95 Ta ТАНТАЛ	183,85 W ВОЛФРАМ	186,21 Re РЕНИЈУМ	190,2 Os ОСМИЈУМ	192,22 Ir ИРИДИЈУМ	195,09 Pt ПЛАТИНА	196,97 Au ЗЛАТО	200,59 Hg ЖИВА	204,37 Tl ТАЛИЈУМ	207,2 Pb ОЛОВО	208,98 Bi БИЗМУТ	209 Po ПОЛОНИЈУМ	210 At АСТАТ	222 Rn РАДОН																						
7	Q	223 Fr ФРАНЦИЈУМ	226,03 Ra РАДИЈУМ	89-103 Ac-Lr	261 Rf РИДЕРФОРДИЈУМ	262 Db ДУБИНИЈУМ	263 Sg СИБОРГИЈУМ	264 Bh БОРИЈУМ	265 Hs ХАСИЈУМ	266 Mt МАЈТЕРНИЈУМ	269 Ds ДАРМСТАТИЈУМ	272 Rg РЕНДГЕНИЈУМ	277 Uub УНУБИЈУМ	284 Uut УНУТРИЈУМ	288 Uuq УНУКВАДИЈУМ	288 Uup УНУПЕНТИЈУМ																									
ЛАНТАНОИДИ				139,91 La ЛАНТАН	140,12 Ce ЦЕРИЈУМ	140,91 Pr ПРАЗЕОДИЈУМ	144,24 Nd НЕОДИЈУМ	145 Pm ПРОМЕТИЈУМ	150,4 Sm САМАРИЈУМ	151,96 Eu ЕУРОПИЈУМ	157,95 Gd ГАДОЛИНИЈУМ	158,93 Tb ТЕРБИЈУМ	162,50 Dy ДИСПРОЗИЈУМ	164,93 Ho ХОЛМИЈУМ	167,29 Er ЕРБИЈУМ	168,93 Tm ТУЛИЈУМ	173,04 Yb ИТЕРБИЈУМ	174,97 Lu ЛУТЕЦИЈУМ																							
АКТИНОИДИ				227,03 Ac АКТИНИЈУМ	232,04 Th ТОРИЈУМ	231,04 Pa ПРОАКТИНИЈУМ	238,03 U УРАН	237,05 Np НЕПТУНИЈУМ	244 Pu ПЛУТОНИЈУМ	243 Am АМЕРИЦИЈУМ	247 Cm КИРИЈУМ	247 Bk БЕРКЛИЈУМ	251 Cf КАЛИФОРНИЈУМ	254 Es АНШТАЈНИЈУМ	257 Fm ФЕРМИЈУМ	258 Md ИДСЕЛЕНБИЈУМ	259 No НОБЕЛИЈУМ	260 Lr ЛОРЕНЦИЈУМ																							



1. (а) Интензитет вектора јачине гравитационог поља на површини Земље облика лопте је $G_{\text{ball}}^0 = \gamma \frac{M_E}{R_E^2}$, где је γ гравитациона константа, а M_E маса Земље. Ако је густина Земље константна и износи ρ_E , следи $G_{\text{ball}}^0 = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_E R_E$ **[3п]**. Да бисмо одредили јачину гравитационог поља на површини равне Земље, користимо формалну аналогију која



Слика 1: уз решење задатка 1.

постоји између израза за интензитет вектора јачине гравитационог поља на растојању r од тачкасте масе m , $G = \gamma \frac{m}{r^2}$, и израза за интензитет вектора јачине електричног поља на растојању r од тачкастог наелектрисања q , $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$. Приликом успостављања аналогије, треба водити рачуна о томе да линије силе гравитационог поља пониру у изворе поља (масе), што код електричног поља одговара понирању линија силе у негативна наелектрисања (за која је $|q| = -q$). Стога се формална аналогија може описати заменама $E \leftrightarrow G$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow \gamma$, $-q \leftrightarrow m$ **[3п]**. Веза између флука вектора јачине електричног поља Φ_E кроз затворену површину и укупне количине наелектрисања Q унутар те површине дата је Гаусовом теоремом $\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$. Аналогна веза између флука вектора јачине гравитационог поља Φ_G кроз затворену површину и укупне масе M унутар те површине гласи $\Phi_G = -4\pi\gamma M$. Због симетрије проблема, вектор јачине гравитационог поља је у свакој тачки простора у правцу x осе означене на слици 1, док му је смер увек према равни Земље. Применимо Гаусову теорему на цилиндар (а) на слици 1, чија је висина D_E и површина база S . Флукс вектора јачине гравитационог поља кроз површину тог цилиндра је $\Phi_G = -2G_{\text{flat}}^0 S$, где је G_{flat}^0 интензитет вектора јачине гравитационог поља на површини равне Земље. Маса обухваћена посматраним цилиндром је $M = \rho_E S D_E$. Дакле, интензитет вектора јачине гравитационог поља на површини равне Земље је $G_{\text{flat}}^0 = 2\pi\gamma\rho_E D_E$ **[8п]**. Услов $G_{\text{ball}}^0 = G_{\text{flat}}^0$ даје $D_E = \frac{2}{3}R_E$, па је након замене бројних вредности $D_E = 4,25 \cdot 10^3 \text{ km}$ **[2п]**.

(б) Применимо Гаусову теорему на цилиндар (б) на слици 1, чија је висина $D_E + 2x$ (x је висина мерена од површине равне Земље), и површина база S . Пошто је маса унутар оваквог цилиндра једнака маси унутар цилиндра посматраног у делу (а), следи да је $G_{\text{flat}}(x) = G_{\text{flat}}^0$, односно вектор јачине гравитационог поља не зависи од висине мерене од површине равне Земље **[4п]**.

2. (а) Вибрациони квантни број v_i иницијалног стања прелаза који одговара најинтензивнијој спектралној линији је одређен условом да је популација N_{v_i} максимална. С обзиром на то да су могуће вредности за v_i ненегативни цели бројеви, да је $E_{v_i} = (v_i + \frac{1}{2}) \hbar\omega$ (где је ω кружна фреквенција вибрација) и $N_{v_i} = A_1 e^{-E_{v_i}/(k_B T)}$, закључујемо да најинтензивнији прелаз полази са вибрационог нивоа $v_i = 0$. Имајући у виду селекционо правило при апсорпцији $\Delta v_{fi} = 1$, вибрациони квантни број финалног стања је $v_f = 1$. **[3п]**

(б) Пошто је $\frac{\hbar c}{\lambda_{\text{max}}} = E_{v_f} - E_{v_i} = \hbar\omega$, кружна фреквенција вибрација молекула је $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_{\text{max}}}$. С друге стране, ако су u_C и u_O редом помераји атома угљеника и кисеоника из равнотежног положаја, једначина кретања атома угљеника је $m_C a_C = -\kappa(u_C - u_O)$, где је a_C убрзање атома угљеника, док су m_C и m_O редом масе атома угљеника и кисеоника. Пошто се центар масе молекула не помера, помераји атома су повезани релацијом $m_C u_C + m_O u_O = 0$. Комбиновањем последње две једначине следи $a_C + \kappa \left(\frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_O} \right) u_C = 0$, што је једначина хармонијског осциловања са кружном фреквенцијом $\omega = \sqrt{\kappa \left(\frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_O} \right)}$. Коефицијент еластичности опруге је онда $\kappa = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_{\text{max}}^2 \left(\frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_O} \right)}$.

Након замене бројних вредности, $\kappa = 1,90 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ **[7п]**.

(в) Иницијално стање најинтензивнијег прелаза између ротационих стања који прати прелаз између вибрационих стања $v_i = 0 \rightarrow v_f = 1$ је одређено условом да је N_J максимално. Енергија ротационог нивоа J је $E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$, при чему су могуће вредности ротационог квантног броја $J = 0, 1, 2, \dots$, док је $I = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} x_e^2$ момент инерције молекула у односу на осу која пролази кроз центар масе молекула и нормална је на њега (бројна вредност му је



$I = 1,449 \cdot 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$). Анализом датог израза за N_J добија се да је N_J максимално за $J = 7$, па је ротациони квантни број иницијалног стања $J_i = 7$, док су могући ротациони квантни бројеви финалног стања $J_f = 8$ или $J_f = 6$ [6п]. За таласне дужине најинтензивнијих линија важи $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} + \frac{h^2}{2I} [J_f(J_f + 1) - J_i(J_i + 1)]$, одакле је $\lambda = \frac{\lambda_{\max}}{1 + \frac{h\lambda_{\max}}{4\pi c I} [J_f(J_f + 1) - J_i(J_i + 1)]}$. Таласна дужина линије која одговара прелазу ($v_i = 0, J_i = 7$) $\rightarrow$ ($v_f = 1, J_f = 8$) је $\lambda_{(0,7) \rightarrow (1,8)} = 4,55 \mu\text{m}$, док је таласна дужина линије која одговара прелазу ($v_i = 0, J_i = 7$) $\rightarrow$ ($v_f = 1, J_f = 6$) је $\lambda_{(0,7) \rightarrow (1,6)} = 4,67 \mu\text{m}$ [4п].

3. (а) Други Њутнов закон за кружно кретање електрона око језгра гласи $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$, где су r и v редом полупречник кружне путање и интензитет линијске брзине на тој путањи. Укупна енергија електрона је E је збир кинетичке енергије $T = \frac{m_e v^2}{2}$ и потенцијалне енергије $U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$, па следи $E = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$ [4п]. Кружна фреквенција кванта емитованог при преласку са стационарне орбите полупречника r_n на стационарну орбиту полупречника $r_{n-1} = r_n - \Delta r_n$ је $\omega_q = \frac{1}{2\hbar} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta r_n}{r_n}} - 1 \right) \approx \frac{1}{8\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{e^2 \Delta r_n}{r_n^2}$, при чему је у последњем кораку искоришћен услов $\Delta r_n \ll r_n$ [3п].

(б) Кружна фреквенција кретања електрона је $\omega = v/r$, односно користећи други Њутнов закон $\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^3}}$. Дакле, кружна фреквенција зрачења које (према класичној електродинамици) емитује електрон који се креће по орбити полупречника r_n је $\omega_c = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r_n^3}}$ [2п].

(в) Према принципу кореспонденције, за велике полупречнике орбите r_n важи $\omega_q = \omega_c$, одакле се добија релација која повезује r_n и r_{n-1} : $\Delta r_n = r_n - r_{n-1} = 2\sqrt{r_n \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}$ [3п].

(г) Заменом датог облика решења за r_n у претходну везу добија се $a n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha\right) = 2\sqrt{a} n^{\alpha/2} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}$. Користећи да веза између r_n и r_{n-1} важи за $n \gg 1$, следи $\alpha\sqrt{a} n^{\alpha-1} = 2 n^{\alpha/2} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}$, тако да параметри a и α задовољавају једначине $\alpha - 1 = \alpha/2$ и $\alpha\sqrt{a} = 2\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}$ [5п]. Дакле, $\alpha = 2$ и $a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$, па је $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2$ и $E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$ [3п].

4. (а) Координата возила x и тренутак t симултаног пријема сигнала са оба сателита се у систему S одређују из једначина $|x - x_1| = c(t - t_1)$, $|x - x_2| = c(t - t_2)$. Користећи $x_1 \leq x \leq x_2$ и решавајући добијени систем једначина следи да је $x = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) + \frac{c}{2}(t_2 - t_1)$ [6п].

(б) Уколико су трансформације координата као у СТР, тј. Лоренцове, координате x_i, t_i ($i = 1, 2$) предаје сигнала са сателита i у систему S су са одговарајућим координатама x'_i, t'_i у систему S' повезане једначинама $x_i = \frac{x'_i + vt'_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

$t_i = \frac{t'_i + \frac{v}{c^2} x'_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. С друге стране, уколико су трансформације координата Галилејеве, аналогне везе гласе $x_i = x'_i + vt'_i$,

$t_i = t'_i$. Узимајући у обзир да је $x'_1 = 0$ и $x'_2 = L$, следи да је $x_r = \frac{(1 + \frac{v}{c})L + (1 + \frac{v}{c})ct'_2 - (1 - \frac{v}{c})ct'_1}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, док је $x_{nr} =$

$\frac{L}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) ct'_2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) ct'_1$ [7п]. Због $v/c \ll 1$, у изразу за x_r може се искористити $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$, тако да је $x_r = x_{nr} + \frac{v}{2c} L + \dots$, при чему су изостављени чланови пропорционални са другим или вишим степеном мале величине v/c . Стога је $\Delta x_{r-nr} = \frac{v}{2c} L$, па је након замене бројних вредности $\Delta x_{r-nr} = 1,5 \cdot 10^2 \text{ m}$ [4п].

Напомена: Задатак је могуће решити и тако што се једначине које описују симултани пријем сигнала у возилу напишу у систему S' , а потом се добијени резултат за координату возила x' трансформише у систем S .

Ако се користи СТР, једначине које одређују координату x' и временски тренутак t' симултаног пријема сигнала одаслатих у (x'_1, t'_1) и (x'_2, t'_2) су формално идентичне онима изведеним у делу (а), па је $x' = \frac{1}{2}(x'_2 + x'_1) + \frac{c}{2}(t'_2 - t'_1)$ и $t' = \frac{1}{2c}(x'_2 - x'_1) + \frac{1}{2}(t'_2 + t'_1)$. Дакле, $x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, при чему се добија израз истоветан горе добијеном изразу за x_r .

Ако се користи нерелативистичка механика, знајући да је брзина сигнала у систему S једнака c , једначине које описују симултани пријем импулса су облика $x' - x'_1 = (c - v)(t' - t'_1)$, $x'_2 - x' = (c + v)(t' - t'_2)$, где смо брзине сигнала у систему S' добили користећи нерелативистички закон слагања брзина. Решавањем овог система једначина следи $x' = \frac{(c+v)(c-v)}{2c}(t'_2 - t'_1) + \frac{c-v}{2c}x'_2 + \frac{c+v}{2c}x'_1$, $t' = \frac{1}{2c}(x'_2 - x'_1) + \frac{c+v}{2c}t'_2 + \frac{c-v}{2c}t'_1$. Применом Галилејевих трансформација, за координату возила у тренутку симултаног пријема сигнала се добија $x = x' + vt'$, а након преуређивања се добија израз истоветан горе добијеном изразу за x_{nr} .



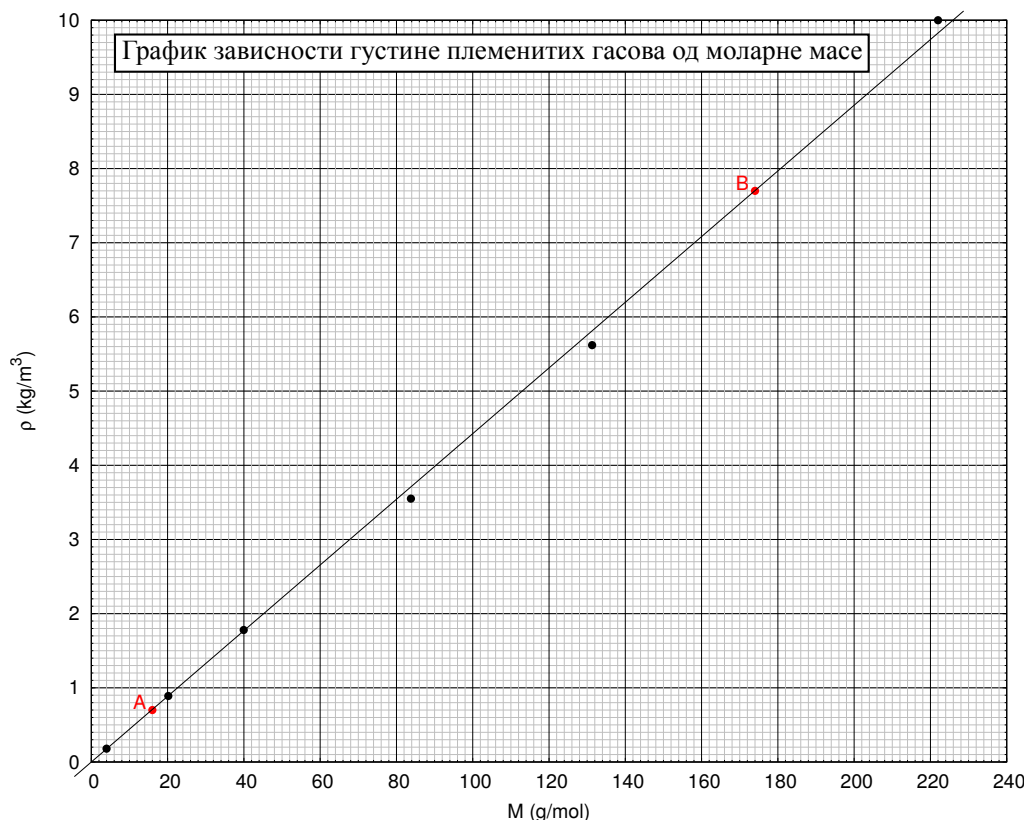
(в) Абсолютна грешка одређивања координате x која потиче од грешке мерења времена атомским часовником је $\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} [(c+v)\Delta t'_2 + (c-v)\Delta t'_1] = \frac{c\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx c\Delta t'$, при чему је искоришћено $\Delta t'_1 = \Delta t'_2 = \Delta t'$. Након замене бројних вредности, следи $\Delta x = 30 \text{ cm}$ **[3п]**.

5. Племенити гасови су једноатомски и слабо-интерагујући гасови, па се могу добро апроксимирати идеалним гасом. Зато ћемо у овом задатку користити само податке за племените гасове. То су хелијум, неон, аргон, криптон, ксенон и радон, а њихови атомски бројеви су редом 2, 10, 18, 36, 54 и 86 **[4п]**. Једначина стања идеалног гаса је $pV = n_m RT$, где је V запремина гаса, а $n_m = \frac{m}{M}$ број молова, односно количник укупне масе гаса m и моларне масе M . Густина је једнака маси по јединици запремине $\rho = \frac{m}{V}$, па за идеалне гасове важи $\rho = \frac{pM}{RT}$ **[4п]**. У периодном систему елемената су дате моларне масе M у јединицама $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Густине племенитих гасова очитане са приложеног графика и њихове моларне масе из периодног система елемената су дате у табели 1 **[4п]**.

Табела 1: Декадни логаритми густине у јединицама g/cm^3 очитани са графика, густине ρ израчунате из ових података и моларне масе M племенитих гасова из периодног система елемената.

	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Rn
$\log_{10}(\rho \cdot \text{cm}^3/\text{g})$	-3,75	-3,05	-2,75	-2,45	-2,25	-2,00
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	0,18	0,89	1,78	3,55	5,62	10,00
$M \text{ (g/mol)}$	4,00	20,18	39,95	83,80	131,30	222

На основу ових података се може нацртати график линеарне зависности густине од моларне масе $\rho = aM$, где је коефицијент правца $a = \frac{p}{RT}$, слика 2, док су p и T редом притисак и температура дати у поставци задатка. На графику је провучена права тако да одступање експерименталних тачака од праве буде што је могуће мање **[3п]**. Очитавањем две тачке са праве A (16,0 g/mol, 0,70 kg/m³) и B (174,0 g/mol, 7,70 kg/m³) (при чему се A налази између прве и друге, а B између претпоследње и последње експерименталне тачке), за коефицијент правца се добија $a = \frac{\rho_B - \rho_A}{M_B - M_A} = 44,3 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$. Гасна константа се затим може одредити као $R = \frac{p}{aT}$, односно $R = 8,4 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ **[5п]**.



Слика 2: График зависности густине племенитих гасова од моларне масе.