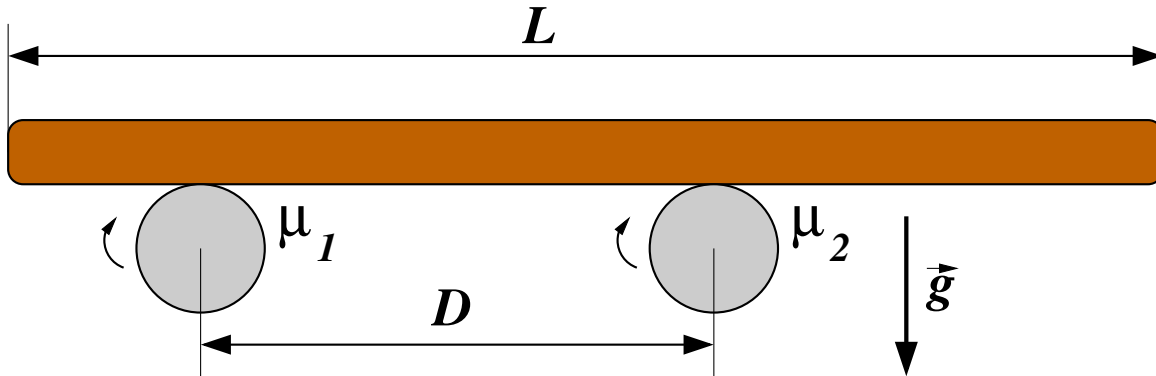




III разред

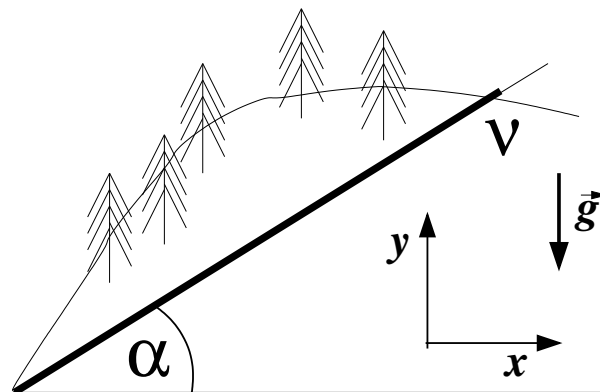
1. Хомоген балван дужине L се креће у хоризонталној равни и нормално на два једнака и паралелна ваљка. Изглед система нормално на осе ваљака је приказан на слици. Растојање између центара ваљака је D . Ваљци се окрећу око својих оса без транслација. Балван проклизава по површинама оба ваљка. Смер ротације сваког од ваљака може бити у смеру казаљке на сату, $s = 1$, или супротном од казаљке на сату, $s = -1$. Смерови приказани на слици илуструју случај $s_1 = s_2 = 1$. Коефицијенти трења између ваљака и балвана су μ_1 и μ_2 . Под којим условима за величине $\mu_{1,2}$, L , D и $s_{1,2}$ балван може бити у равнотежи? Одредите равнотежни положај балвана. Када је та равнотежа стабилна? Ако положај стабилне равнотеже постоји, колика је угаона фреквенца малих осцилација око њега? Убрзање Земљине теже је g . (20 поена)



Слика уз задатак 1.

2. Одрони земље, клизишта и остала померања тла су опасност за људе и објекте. Недавно се у Грделици одронио део брда и уништио део заштитног бедема пута. У овом задатку испитаћете како нестабилан терен и земљотреси могу изазвати одрон. Користићемо модел у коме нестабилност тла потиче од слоја клизавог материјала, који се простире кроз брдо. Слој је у облику равни по којој део брда изнад ње може проклизати. Ова раван је нагнута под углом $\alpha = 20^\circ$ у односу на хоризонталну раван, као на приложеној слици. Слика приказује пројекцију брда на раван $x - y$, где је вертикала дуж y осе. Клизава раван изгледа као дебела линија, пошто је паралелна оси z која је нормална на цртеж. Јасно је да би део брда изнад равни проклизао када би раван била идеално клизава, али се то не дешава због статичког трења са коефицијентом ν .

Током земљотреса, цело брдо са обе стране слоја и сам слој осцилују приближно хармонијски. У једном типу земљотреса кретање је у хоризонталној равни, у смеру x осе на приложеној слици. У другом типу, осцилације су вертикалне, смер y осе на слици. Да ли овакви земљотреси могу померити део брда изнад клизавог слоја? Колики је минимални коефицијент статичког трења ν_c који спречава померање? Амплитуда кретања у земљотресу је $A = 0,010 \text{ m}$, а период је $T = 1,0 \text{ s}$. За убрзање Земљине теже користите $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (20 поена)



Слика уз задатак 2.



3. Електрично поље равног електромагнетног таласа осцилује у равни нормалној на правац простирања. Начин осциловања поља у овој равни одређује поларизацију таласа. На пример, када је поље увек усмерено у истом правцу кажемо да је електромагнетни талас линеарно поларисан. По аналогији, када вектор електричног поља у равни нормалној на правац простирања описује кружницу или елипсу, поларизација је кружна или елиптична. Кружно поларисан талас може бити лево (L) или десно (R) поларисан. Електрично поље L-таласа који се простире дуж z осе је дато компонентама $E_{1x} = E_{10} \cos(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1)$ и $E_{1y} = -E_{10} \sin(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1)$, док је електрично поље R-таласа $E_{2x} = E_{20} \cos(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2)$ и $E_{2y} = E_{20} \sin(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2)$. Увели смо ознаке $E_{1(2)0}$, $k_{1(2)}$, $\omega_{1(2)}$, $\phi_{1(2)}$ за амплитуду електричног поља, интензитет таласног вектора, угаону фреквенцу и фазу лево (десно) кружно поларисаног таласа 1(2).

- Покажите да вектор електричног поља десног кружно поларисаног (R) таласа за константно z описује кружницу у равни нормалној на правац простирања и да се по тој кружници креће у негативном смеру, као казаљка на сату. Слично, покажите да поље левог кружно поларисаног (L) таласа обилази кружницу у супротном смеру.
- Одредите криву коју описује вектор електричног поља за фиксно z , као у делу (а) у случају суперпозиције два кружно поларисана таласа. Један талас је лево а други десно кружно поларисан. Амплитуде таласа су различите, а угаоне фреквенце и фазе једнаке.
- Одредите криву коју описује вектор електричног поља за фиксно z , као у делу (а) у случају суперпозиције два кружно поларисана таласа. Један талас је лево а други десно кружно поларисан. Амплитуде и угаоне фреквенце таласа су једнаке, а фазе су различите.

Помоћ: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$. (20 поена)

4. У овом задатку испитаћете да ли постоји релација неодређености за класични осцилатор. Неодређеност величине $a(t)$ се мери разликом средње вредности њеног квадрата и квадрата њене средње вредности, $\sigma_a = \sqrt{\langle a(t)^2 \rangle - \langle a(t) \rangle^2}$, где симбол $\langle \cdot \rangle$ означава средњу вредност током једног периода осциловања. Осцилатор масе m се креће по закону $x(t) = x_0 + A \cos(\omega t + \varphi)$, где су равнотежни положај x_0 , амплитуда A , угаона фреквенца ω и фаза φ осцилатора познате величине. Пронађите неодређеност координате, σ_x , и неодређеност импулса, σ_p , током овог кретања. Колики је производ класичних неодређености које сте израчунали? Упоредите ваш класични резултат са квантним. У квантном случају, производ неодређености положаја, $\sigma_{x,q}$, и неодређености импулса, $\sigma_{p,q}$, већи је или једнак константи: $\sigma_{x,q} \cdot \sigma_{p,q} \geq \frac{\hbar}{2}$. Помоћ: $\langle \alpha \cdot a(t) + \beta \cdot b(t) \rangle = \alpha \langle a(t) \rangle + \beta \langle b(t) \rangle$ и $\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0$, док је средња вредност константе сама константа $\langle \alpha \rangle = \alpha$. (20 поена)



ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2017/18. ГОДИНА



Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА

ДРЖАВНИ НИВО
22.03.2018.

III разред

5. Над небом јужне Србије је 2010. године примећен болид, метеор изразитог сјаја. Током проласка кроз ниже слојеве атмосфере болид се распрнуо уз гласан прасак. Ударни талас тог праска забележило је више сеизмолошких станица. Уз друге заљубљенике у астрономију Игор покушава да пронађе метеорит, остатак болида који је пао на Земљу. Подаци о координатама станица, процењеним растојањима до места пада и њиховим неодређеностима налазе се у приложеној табели. Помозите Игору.

- (а) Приложена мапа терена издељена је у 'секторе' - квадратне области димензија $20\text{km} \times 20\text{km}$. Одредите координате центра сектора у коме се метеорит највероватније налази. На мапи су уцртане локације станица, као и кружнице радијуса највероватнијег растојања R_i од i -те станице. У овом делу није неопходно било шта рачунати, на скали од 20 km одговор се сам намеће.
- (б) Да су мерења сеизмолошких станица идеална, метеорит би био у тачки (x', y') која истовремено задовољава све три једначине кружница $R_i^2 = (x' - x'_i)^2 + (y' - y'_i)^2$, где су (x'_i, y'_i) координате i -те станице са мапе, а R_i процењено растојање до ње. Нажалост, мерења нису идеална, па се кружнице не секу. Игору је потребна највероватнија тачка пада од које би почео потрагу. Поставите нови координатни почетак у центар сектора највероватнијег пада. Распишите израз за R_i у функцији нових координата пада x, y , њихових квадрата x^2, y^2 и слободног члана, те га упростите. Сведите израз на линеарну једначину по x и y уз образложење зашто изабрана апроксимација важи.
- (в) Добијени систем 3 једначине са 2 непознате није сагласан. Потражите његово приближно решење следећи поступак описан у наставку задатка. Решавамо систем једначина $a_i x + b_i y = c_i$, где су непознате x и y , а коефицијенти a_i, b_i и c_i су резултати мерења познати са неким грешкама. Пошто једначине чији су коефицијенти боље познати прецизније говоре где се налази решење, свакој од једначина доделите тежину $w_i = \frac{1}{(2R_i \Delta R_i)^2}$. Приближно решење задовољава следећи систем једначина: $Ax + By = C$ и $Dx + Ey = F$, где су $A = \sum_{i=1}^3 a_i^2 w_i$, $E = \sum_{i=1}^3 b_i^2 w_i$, $B = D = \sum_{i=1}^3 a_i b_i w_i$, $C = \sum_{i=1}^3 a_i c_i w_i$ и $F = \sum_{i=1}^3 b_i c_i w_i$. Решите овај систем и пронађите координате пада (x, y) .
- (г) Пронађено решење уцртајте на мапу (тачка P), те дуж праваца $S_i P$ на основу ΔR_i уцртајте интервал у коме треба тражити метеорит. Ако нисте решили део (в), узмите да су највероватније координате пада $(x, y) = (-8\text{ km}, -9\text{ km})$ од центра највероватнијег сектора пада. Коначно, уцртајте на мапу шестоугаону област у којој треба трагати за метеоритом.

Станица	$x[\text{km}]$	$y[\text{km}]$	$R[\text{km}]$	$\Delta R[\text{km}]$
S_1	36,21	-14,42	71	8
S_2	-44,77	131,31	136	12
S_3	189,32	122,5	133	10

(20 поена)

Напомена: Образложите своја решења и дефинишите ознаке које користите у њима.

Задатке припремили: **др Владан Павловић**, Природно-математички факултет, Ниш

Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France

Илија Иванишевић, Институт за физику, Београд

Рецензент: **др Димитрије Степаненко**, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: **др Божидар Николић**, Физички факултет, Београд

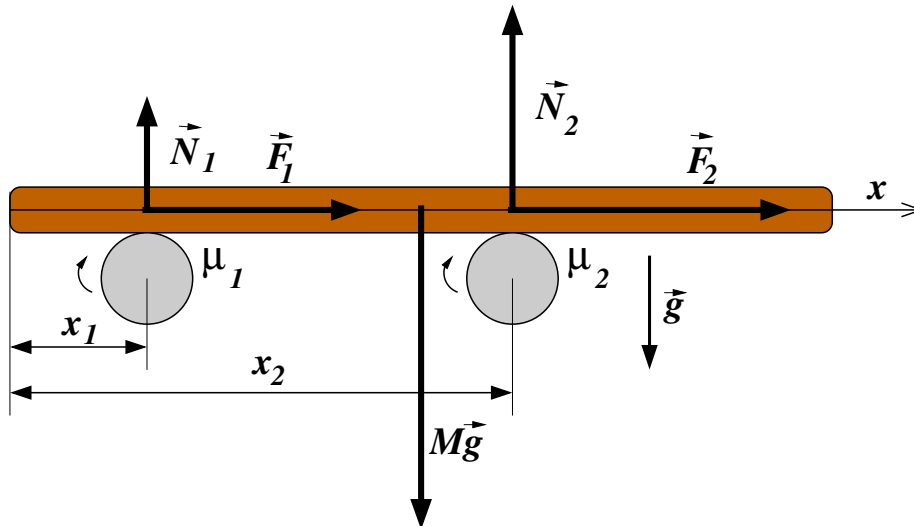


III разред

1. Обележимо растојање између тачке додира првог ваљка и њој ближег краја балвана са x_1 , а растојање између истог краја балвана и тачке додира са другим ваљком са x_2 , као на приложеној слици. Пошто балван лежи на ваљцима, моменти сила реакције у тачкама додира балвана и ваљака и момент тежине балвана се сабирају у нулу. Ако рачунамо моменте у односу на крај балвана ближи ваљку 1, добијамо услов $x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 - \frac{L}{2} \cdot Mg = 0$. Услов равнотеже вертикалних сила даје $N_1 + N_2 = Mg$. У овим условима M је маса балвана, а g убрзање силе теже. Из оба услова и везе $x_2 = x_1 + D$, добијамо интензитете сила реакција у зависности од координате x_1 којом описујемо положаја балвана на ваљцима: $N_1 = Mg \left(1 - \frac{L}{2D} + \frac{x_1}{D}\right)$ и $N_2 = Mg \left(\frac{L}{2D} - \frac{x_1}{D}\right)$. Да балван не би пао, силе реакције морају деловати на балван навише и балван се мора ослањати на оба ваљка, то јест $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$ и $x_2 \leq L$. **5п**

Преостали услов је равнотежа сила трења које делују дуж осе балвана. Узимајући у обзир смерове ротација ваљака, силе трења које делују дуж балвана су $F_1 = \mu_1 N_1 s_1$ и $F_2 = \mu_2 N_2 s_2$ уз позитиван смер од ваљка 1 ка ваљку 2. Дефиниција $s_{1,2} = \pm 1$ за смер ротација ваљака уз и насупрот смера казаљке на сату је као у тексту задатка. Користећи раније резултате, укупна сила дуж балвана је $F(x_1) = F_1 + F_2 = Mg \left[\mu_1 s_1 + \frac{L}{2D} (-\mu_1 s_1 + \mu_2 s_2) + \frac{x_1}{D} (\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2) \right]$, а услов равнотеже је $F(x_e) = 0$ у неком равнотежном положају $x_1 = x_e$. Када је $\mu_1 s_1 \neq \mu_2 s_2$, положај равнотеже је дат са $\frac{x_{1e}}{D} = \frac{L}{2D} - \frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2}$. Директном провером, равнотежни положај не постоји када је $\mu_1 s_1 = \mu_2 s_2$, осим када је трење нула, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Заменом добијеног положаја равнотеже у раније изведене услове да балван не падне са ваљака добијамо да равнотежа постоји ако важи $\frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq \frac{L}{2D}$, $\frac{-\mu_2 s_2}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq \frac{L}{2D}$, $\frac{\mu_2 s_2}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq 0 \leq \frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2}$ и $\mu_1 s_1 \neq \mu_2 s_2$. Описно, да би формално израчунат равнотежни положај постојао ваљци се морају окретати у супротним смеровима и балван мора бити довољно дужи од растојања између ваљака да не би пао са њих у равнотежном положају. **5п**

Изведимо балван из равнотежног положаја, $x_1 = x_{1e} + \delta$. Убрзање дуж осе ће тада бити $a_x = \frac{F(x_{1e} + \delta)}{M}$. Заменом добијеног резултата за x_{1e} , добијамо $a_x = \frac{g}{D} (\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2) \delta$. Пошто позитивно δ одговара кретању балвана у негативном смеру дуж осе x , равнотежа је стабилна ако је $\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2 > 0$. Тада је угаона фреквенца осцилација $\omega = \sqrt{\frac{g}{D} (\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2)}$. Када стабилна равнотежа постоји, овај израз се своди на $\omega = \sqrt{\frac{g}{D} (\mu_1 + \mu_2)}$. Осцилације су могуће само када се ваљак 1 окреће у смеру казаљке на сату, а ваљак 2 у супротном. Због линеарности сила, осцилације су хармонијске и за велико δ . **10п**



Слика уз решење задатка 1.

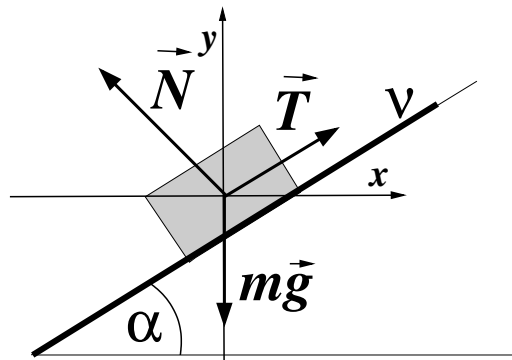


III разред

2. Модел система је стрма раван на којој лежи тело, као на приложеној слици. Силе које делују на део брда изнад клизавог слоја, који ћемо кратко звати капа брда, су тежина капе брда, $-mg\vec{e}_y$, сила реакције подлоге која потиче од дела брда испод слоја, $\vec{N}$, и сила трења, $\vec{T}$, која делује у равни слоја и узбрдо. Убрзање капе брда можемо разложити на компоненте дуж оса са слике. Из другог Њутновог закона добијамо $ma_x = T \cos \alpha - N \sin \alpha$, $ma_y = -mg + N \cos \alpha + T \sin \alpha$. **6п**

У случају хоризонталног земљотреса, брдо се креће хармонијски дуж x осе, $x(t) = A\omega \cos \omega t$, па је његово убрзање дуж ове осе $a_x = -A\omega^2 \cos \omega t$, док дуж y осе нема убрзања, $a_y = 0$. Заменом у једначине за убрзања и користећи дефиницију статичког коефицијента трења $\nu = \frac{T}{N}$, добијамо коефицијент трења у функцији тренутног убрзања $\nu_t = \frac{g \sin \alpha + a_x \cos \alpha}{g \cos \alpha - a_x \sin \alpha}$. Капа брда ће склизнути ако је тренутни коефицијент трења ν_t већи од коефицијента статичког трења. Пошто је $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$, максимални тренутни коефицијент трења одговара максималном тренутном убрзању, које износи $a_{x, \max} = A\omega^2$. Заменом добијамо критични коефицијент статичког трења $\nu_c = \frac{g \sin \alpha + A\omega^2 \cos \alpha}{g \cos \alpha - A\omega^2 \sin \alpha}$. Заменом бројних вредности $\nu_c = 0,41$. **7п**

У вертикалном земљотресу, брдо осцилује у правцу y осе а мирује дуж x , па су убрзања $a_x = 0$ и $a_y(t) = -A\omega^2 \cos \omega t$. Слично као у претходном делу, из кретања дуж x осе добијамо $\nu_t = \tan \alpha$, то јест тренутни коефицијент трења не зависи од времена. Дакле, вертикални земљотрес не може покренути капу брда. Критични коефицијент трења се не мања због земљотреса и износи $\nu_c = \tan \alpha$, са бројном вредношћу $\nu_c = 0,36$. **7п**



Слика уз решење задатка 2.

3. (а) Код десног кружно поларисаног таласа квадрат интензитета електричног поља у фиксној равни је $E_{2x}^2 + E_{2y}^2 = E_{20}^2 (\cos^2 \Psi + \sin^2 \Psi)$, где је $\Psi = k_2 z - \omega_2 t + \phi_2$. То је једначина кружнице $E_{2x}^2 + E_{2y}^2 = E_{20}^2$, са $(E_x, E_y) = E_{20}(\cos \Psi, \sin \Psi)$. Када фиксирамо вредност координате z , вредност параметра Ψ се смањује са протоком времена због члана $-\omega t$. Дакле, електрично поље ротира у негативном смеру у равни $x - y$. Користећи $\sin(-x) = -\sin x$, видимо да се R талас заменом $t \rightarrow -t$ преводи у L талас. Променом смера времена, смер обиласка контуре се мења а сама контура остаје иста, јер поново важи $E_x^2 + E_y^2 = E_{10}^2$. **6п**
- (б) Суперпозицијом компоненти електричних поља дуж x и y осе добијамо $E_x = E_{1x} + E_{2x}$, $E_y = E_{1y} + E_{2y}$. Користићемо нотацију $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Збирови су $E_x = (E_{10} + E_{20}) \cos(kz - \omega t + \phi)$ и $E_y = (-E_{10} + E_{20}) \sin(kz - \omega t + \phi)$. Елиминацијом временске променљиве из ових једначина, увођењем семене $\Psi = kz - \omega t + \phi$, и коришћењем идентитета $\sin^2 \Psi + \cos^2 \Psi = 1$, се добија $\frac{E_x^2}{(E_{10} + E_{20})^2} + \frac{E_y^2}{(-E_{10} + E_{20})^2} = 1$. Како је ово једначина елипсе, у питању је елиптична поларизација. **8п**
- (в) Суперпозицијом компоненти електромагнетних таласа дуж x и y осе добијамо $E_x = E_{1x} + E_{2x}$ и $E_y = E_{1y} + E_{2y}$, као у делу (б). Сада користимо $E_{10} = E_{20} = E_0$, $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Уз коришћење одговарајућих тригонометријских идентитета се добија $E_x = 2E_0 \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \cos \left(kz - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)$ и $E_y = -2E_0 \sin \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \cos \left(kz - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)$. Дељењем ових двеју једначина, добија се $\frac{E_y}{E_x} = \tan \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$. Како је ово једначина праве, резултат суперпозиције дата два електромагнетна таласа је линеарно поларисан талас **6п**.



III разред

4. Потребне су нам средње вредности $\langle x(t) \rangle$, $\langle x(t)^2 \rangle$, $\langle p(t) \rangle$ и $\langle p(t)^2 \rangle$. Из закона кретања $x(t) = x_0 + A \cos(\omega t + \alpha)$ добијамо $p(t) = mv(t) = -mA\omega \sin(\omega t + \varphi)$.

Усредњавања функција координате дају $\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle + A\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = x_0$, $\langle x(t)^2 \rangle = \langle x_0^2 + A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + 2Ax_0 \cos(\omega t + \varphi) \rangle = x_0^2 + A^2 \langle \frac{1}{2}(1 + \cos 2(\omega t + \varphi)) \rangle + 2Ax_0 \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = x_0^2 + \frac{1}{2}A^2$. Из резултата добијамо $\sigma_x = \frac{A}{\sqrt{2}}$. **7п**

Усредњавања функција импулса дају $\langle p(t) \rangle = -mA\omega \langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0$ и $\langle p(t)^2 \rangle = m^2 A^2 \omega^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}m^2 A^2 \omega^2$. Замена у израз за неодређеност даје $\sigma_p = \frac{mA\omega}{\sqrt{2}}$. **7п**

Производ неодређености је $\sigma_x \cdot \sigma_p = \frac{m\omega A^2}{2}$. За довољно малу амплитуду, ниску фреквенцу и малу масу осцилатора ова вредност може бити произвољно мала, те релација неодређености не важи у класичној механици. **6п**

5. Уз помоћ приложене мапе се може, на основу учртаних кружница, одредити у ком ' сектору ' је метеорит завршио. Да се све три кружнице секу, смислено би било тражити метеорит у троуглу између тачака пресека. Пошто се кружнице не секу, највероватније место пада је у области где су кружнице најближе. Координате центра сектора који обухвата ову област су $x'_c = 70 \text{ km}$ $y'_c = 50 \text{ km}$. Према предлогу у задатку, центар овог сектора је нови координатни почетак са новим координатама $x_c = 0$ и $y_c = 0$. **4п**

Расписивањем једначине $R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ добија се $2x_i x - x^2 + 2y_i y - y^2 = x_i^2 + y_i^2 - R_i^2$. Уколико је $|2x_i x| \gg x^2$, као и $|2y_i y| \gg y^2$, чланови x^2 и y^2 се могу занемарити и тиме се систем једначина линеаризује. Да би то било задовољено мора вредети $|x_i| \gg x$ и $|y_i| \gg y$ што добија приближним постављањем тачке (x, y) у близину координатног почетка. На основу претходног дела решења, знамо да смо ово урадили постављањем центра највероватнијег сектора пада у координатни почетак. **4п**

Читањем коефицијената уз x , y и слободног члана, у нотацији дефинисаној у тексту задатка, имамо $a_i = 2x_i$, $b_i = 2y_i$ и $c_i = x_i^2 + y_i^2 - R_i^2$. Вредности ових коефицијената, заједно са w_i , налазе се у приложеној табели. **4п**

Станица	$x_i[\text{km}]$	$y_i[\text{km}]$	$R[\text{km}]$	$\Delta R[\text{km}]$	$a_i[\text{km}]$	$b_i[\text{km}]$	$c_i[\text{km}^2]$	$w_i[\text{km}^{-4}]$
S_1	-33,79	-64,42	71	8	-67,58	-128,84	250,75	7,75e-7
S_2	-114,77	81,31	136	12	-229,54	162,62	1287,47	9,39e-8
S_3	119,32	72,50	133	10	238,64	145	1804,51	1,4e-7

Заменом у формуле из поставке задатка имамо: $A = \sum_{i=1}^3 a_i^2 w_i = 0,0165 \text{ km}^{-2}$, $E = \sum_{i=1}^3 b_i^2 w_i = 0,0183 \text{ km}^{-2}$, $B = D = \sum_{i=1}^3 a_i b_i w_i = 0,0081 \text{ km}^{-2}$, $C = \sum_{i=1}^3 a_i c_i w_i = 0,02 \text{ km}^{-1}$ и $F = \sum_{i=1}^3 b_i c_i w_i = 0,0316 \text{ km}^{-1}$. Решавањем овог система добија се $x = 0,46 \text{ km}$ и $y = 1,52 \text{ km}$, односно у старим координатама $x = 70,46 \text{ km}$ и $y = 51,52 \text{ km}$, учртано на мапи. **8п**



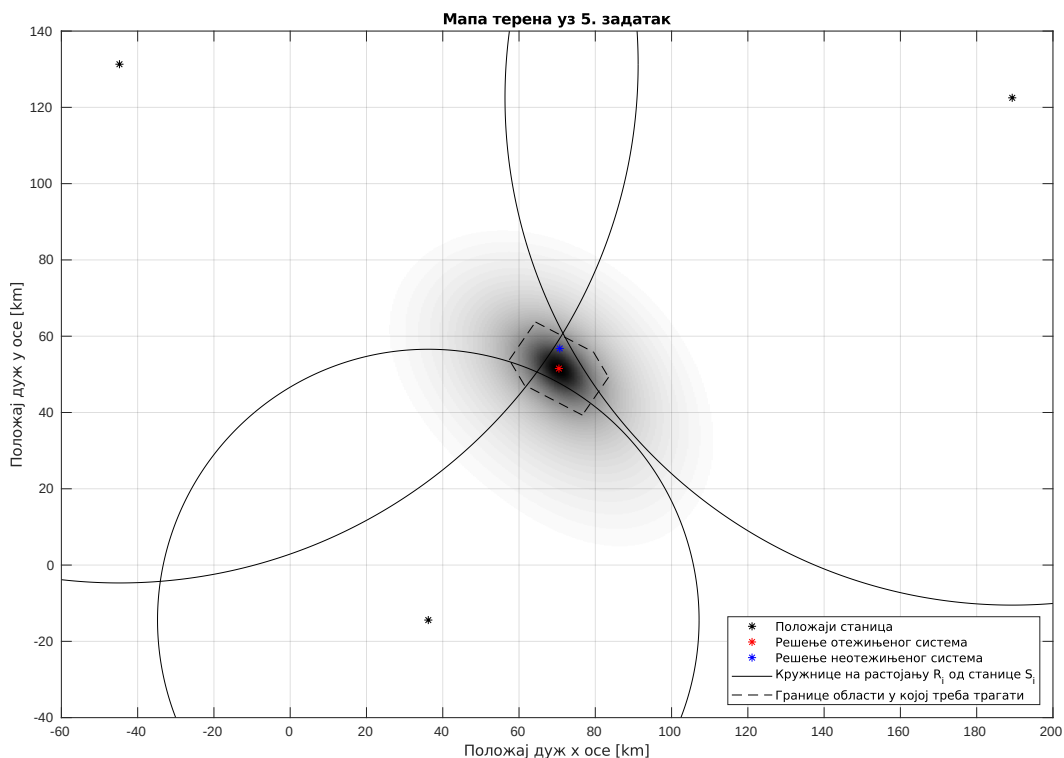
ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2017/18. ГОДИНА



III разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА

ДРЖАВНИ НИВО
22.03.2018.



Поређења ради, приложена мапа садржи учртану и тачку која је решење неотежињеног система која видно одступа од решења отежињеног система. Учртана 'осенченост' је пропорционална отежињеном одступању од решења нелинеарног система, те видимо да је апроксимација занемаривања квадратних чланова била оправдана у овом случају.

Задатке припремили: **др Владан Павловић**, Природно-математички факултет, Ниш

Марко Кузмановић, Université Paris-Sud, France

Илија Иванишевић, Институт за физику, Београд

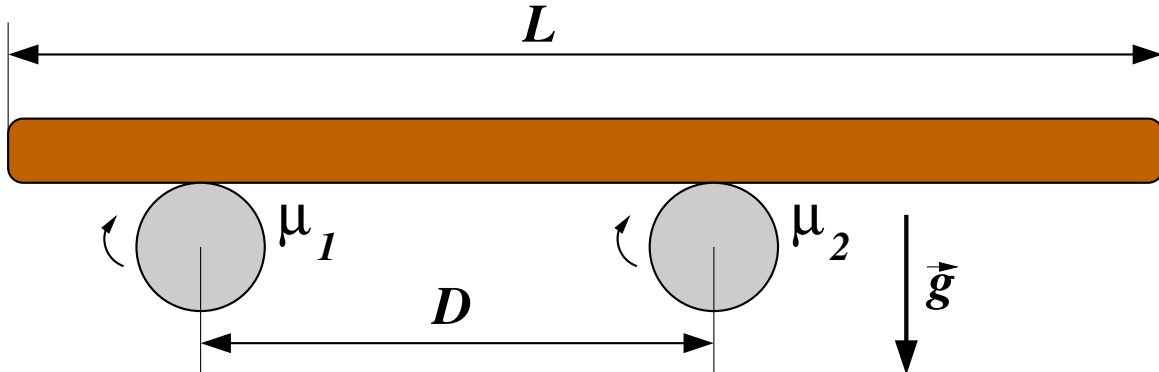
Рецензент: **др Димитрије Степаненко**, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: **др Божидар Николић**, Физички факултет, Београд



III разред

1. Хомоген балван дужине L се креће у хоризонталној равни и нормално на два једнака и паралелна ваљка. Изглед система нормално на осе ваљака је приказан на слици. Растојање између центара ваљака је D . Ваљци се окрећу око својих оса без транслација. Балван проклизава по површинама оба ваљка. Смер ротације сваког од ваљака може бити у смеру казаљке на сату, $s = 1$, или супротном од казаљке на сату, $s = -1$. Смерови приказани на слици илуструју случај $s_1 = s_2 = 1$. Коефицијенти трења између ваљака и балвана су μ_1 и μ_2 . Под којим условима за величине $\mu_{1,2}$, L , D и $s_{1,2}$ балван може бити у равнотежи? Одредите равнотежни положај балвана. Када је та равнотежа стабилна? Ако положај стабилне равнотеже постоји, колика је угаона фреквенца малих осцилација око њега? Убрзање Земљине теже је g . (20 поена)



Слика уз задатак 1.

2. Инспирисан гледањем Зимских олимпијских игара Милан је решио да се опроба у уметничком клизању. Нарочито му је пажњу привукао такозвани Акселов скок (назван по норвешком клизачу Акселу Паулсену), током кога клизач скочи са залетом унапред, у ваздуху се ротира око своје осе а дочека у назад. Тако постоје једноструки (у коме клизач изврши 1,5 пуну ротацију), двоструки (2,5 ротације) и троструки (3,5 ротације) Акселов скок, док четвороструки, услед изузетне тежине, није ни покушан у оквиру званичних такмичења.

Решен да буде први који ће у томе успети, након вишегодишњег тренирања, Милан је успео да савлада једноструки, двоструки и троструки скок, док му четвороструки никако није успевао. Због тога је Милан позвао своју другарицу Ивану, која важи за врсног физичара међу својим пријатељима, у помоћ. Након посматрања Милановог тренинга она је приметила следеће ствари: у свим скоковима Милан проведе приближно исто време $t = 0.8\text{s}$ у ваздуху, док је хоризонтална компонента његове брзине приликом одскока била $v_{1h} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (једноструки), $v_{2h} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (двоструки) и $v_{3h} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (троструки). Под претпоставком да је у скакању Милан ограничен укупном енергијом коју може да утроши на скок, као и да сваки пут да све од себе, помозимо Ивани да утврди да ли са тренутним нивоом спремности Милан може остварити четвороструки скок, те да ли више времена треба да посвети клизачкој техници или тренингу снаге. (20 поена)



III разред

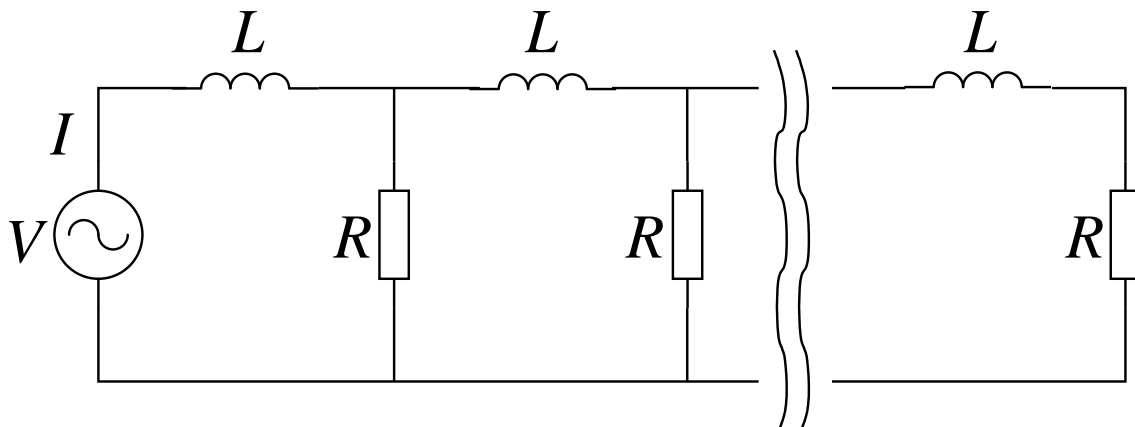
3. Електрично поље равнoг електромагнетног таласа осцилује у равни нормалној на правац простирања. Начин осциловања поља у овој равни одређује поларизацију таласа. На пример, када је поље увек усмерено у истом правцу кажемо да је електромагнетни талас линеарно поларисан. По аналогији, када вектор електричног поља у равни нормалној на правац простирања описује кружницу или елипсу, поларизација је кружна или елиптична. Кружно поларисан талас може бити лево (L) или десно (R) поларисан. Електрично поље L-таласа који се простире дуж z осе је дато компонентама $E_{1x} = E_{10} \cos(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1)$ и $E_{1y} = -E_{10} \sin(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1)$, док је електрично поље R-таласа $E_{2x} = E_{20} \cos(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2)$ и $E_{2y} = E_{20} \sin(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2)$. Увели смо ознаке $E_{1(2)0}$ $k_{1(2)}$ $\omega_{1(2)}$ $\phi_{1(2)}$ за амплитуду електричног поља, интензитет таласног вектора, угаону фреквенцу и фазу лево (десно) кружно поларисаног таласа 1(2).

- Покажите да вектор електричног поља десног кружно поларисаног (R) таласа за константно z описује кружницу у равни нормалној на правац простирања и да се по тој кружници креће у негативном смеру, као казаљка на сату. Слично, покажите да поље левог кружно поларисаног (L) таласа обилази кружницу у супротном смеру.
- Одредите криву коју описује вектор електричног поља за фиксно z , као у делу (а) у случају суперпозиције два кружно поларисана таласа. Један талас је лево а други десно кружно поларисан. Амплитуде таласа су различите, а угаоне фреквенце и фазе једнаке.
- Одредите криву коју описује вектор електричног поља за фиксно z , као у делу (а) у случају суперпозиције два кружно поларисана таласа. Један талас је лево а други десно кружно поларисан. Амплитуде и угаоне фреквенце таласа су једнаке, а фазе су различите.

Помоћ: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$. (20 поена)

4. Импеданса кола кроз које тече хармонијска наизменична струја се може рачунати као отпор кола једносмерне струје, уз замену реалних отпора комплексним импедансама елемената. Фаза комплексне струје онда одговара фазној разлици између струје и напона. У овом задатку, можете искористити комплексне импедансе да израчунате струју кроз мрежу индуктора и отпорника у облику бесконачне лестве, приказану на слици.

- Научили сте да је имагинарни део импедансе позитиван за завојнице и негативан за кондензаторе. Са друге стране, реални део импедансе описује отпорнике и увек је позитиван. Дискутујте Џулове губитке у случају отпорника са негативним отпором? Шта резултат ваше дискусије говори о оваквим елементима кола?
- Коло на слици се састоји од бесконачне лестве завојница и отпорника. Индуктивност сваке од завојница је $L = 1,0 \text{ mH}$, а отпор сваког отпорника је $R = 180 \Omega$. Коло се напаја извором напона амплитуде $V = 1,0 \text{ V}$ и угаоне фреквенце $\omega = 6,3 \cdot 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Колика је еквивалентна импеданса бесконачног кола на овој угаоној фреквенци? Колика је амплитуда I струје у главној грани кола која садржи извор?



Слика уз задатак 4.

(20 поена)



ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2017/18. ГОДИНА



Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА

ДРЖАВНИ НИВО
22.03.2018.

III разред

5. Над небом јужне Србије је 2010. године примећен болид, метеор изразитог сјаја. Током проласка кроз ниже слојеве атмосфере болид се распрнуо уз гласан прасак. Ударни талас тог праска забележило је више сеизмолошких станица. Уз друге заљубљенике у астрономију Игор покушава да пронађе метеорит, остатак болида који је пао на Земљу. Подаци о координатама станица, процењеним растојањима до места пада и њиховим неодређеностима налазе се у приложеној табели. Помозите Игору.

- (а) Приложена мапа терена издељена је у 'секторе' - квадратне области димензија $20\text{km} \times 20\text{km}$. Одредите координате центра сектора у коме се метеорит највероватније налази. На мапи су уцртане локације станица, као и кружнице радијуса највероватнијег растојања R_i од i -те станице. У овом делу није неопходно било шта рачунати, на скали од 20 km одговор се сам намеће.
- (б) Да су мерења сеизмолошких станица идеална, метеорит би био у тачки (x', y') која истовремено задовољава све три једначине кружница $R_i^2 = (x' - x'_i)^2 + (y' - y'_i)^2$, где су (x'_i, y'_i) координате i -те станице са мапе, а R_i процењено растојање до ње. Нажалост, мерења нису идеална, па се кружнице не секу. Игору је потребна највероватнија тачка пада од које би почео потрагу. Поставите нови координатни почетак у центар сектора највероватнијег пада. Распишите израз за R_i у функцији нових координата пада x, y , њихових квадрата x^2, y^2 и слободног члана, те га упростите. Сведите израз на линеарну једначину по x и y уз образложење зашто изабрана апроксимација важи.
- (в) Добијени систем 3 једначине са 2 непознате није сагласан. Потражите његово приближно решење следећи поступак описан у наставку задатка. Решавамо систем једначина $a_i x + b_i y = c_i$, где су непознате x и y , а коефицијенти a_i, b_i и c_i су резултати мерења познати са неким грешкама. Пошто једначине чији су коефицијенти боље познати прецизније говоре где се налази решење, свакој од једначина доделите тежину $w_i = \frac{1}{(2R_i \Delta R_i)^2}$. Приближно решење задовољава следећи систем једначина: $Ax + By = C$ и $Dx + Ey = F$, где су $A = \sum_{i=1}^3 a_i^2 w_i$, $E = \sum_{i=1}^3 b_i^2 w_i$, $B = D = \sum_{i=1}^3 a_i b_i w_i$, $C = \sum_{i=1}^3 a_i c_i w_i$ и $F = \sum_{i=1}^3 b_i c_i w_i$. Решите овај систем и пронађите координате пада (x, y) .
- (г) Пронађено решење уцртајте на мапу (тачка P), те дуж праваца $S_i P$ на основу ΔR_i уцртајте интервал у коме треба тражити метеорит. Ако нисте решили део (в), узмите да су највероватније координате пада $(x, y) = (-8\text{ km}, -9\text{ km})$ од центра највероватнијег сектора пада. Коначно, уцртајте на мапу шестоугаону област у којој треба трагати за метеоритом.

Станица	$x[\text{km}]$	$y[\text{km}]$	$R[\text{km}]$	$\Delta R[\text{km}]$
S_1	36,21	-14,42	71	8
S_2	-44,77	131,31	136	12
S_3	189,32	122,5	133	10

(20 поена)

Напомена: Образложите своја решења и дефинишите ознаке које користите у њима.

Задатке припремили: **др Владан Павловић**, Природно-математички факултет, Ниш

Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France

Илија Иванишевић, Институт за физику, Београд

Рецензент: **др Димитрије Степаненко**, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: **др Божидар Николић**, Физички факултет, Београд

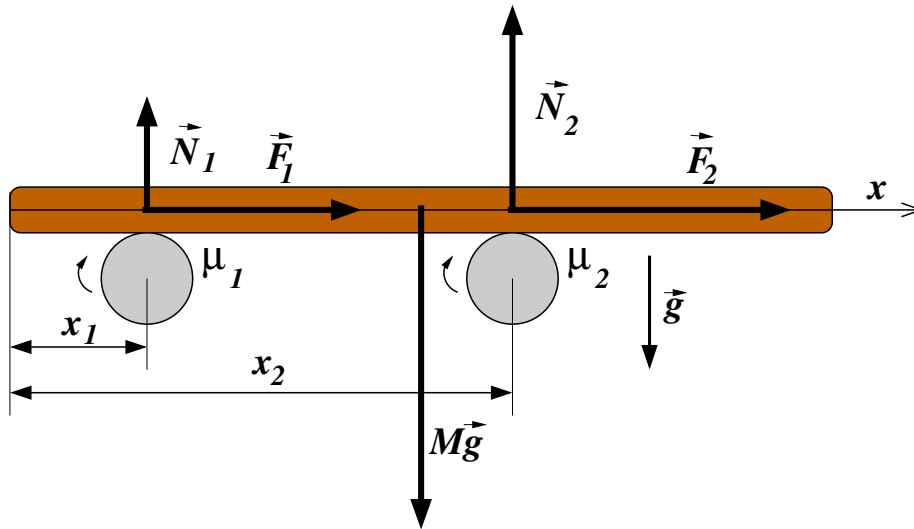


III разред

1. Обележимо растојање између тачке додира првог ваљка и њој ближег краја балвана са x_1 , а растојање између истог краја балвана и тачке додира са другим ваљком са x_2 , као на приложеној слици. Пошто балван лежи на ваљцима, моменти сила реакције у тачкама додира балвана и ваљака и момент тежине балвана се сабирају у нулу. Ако рачунамо моменте у односу на крај балвана ближи ваљку 1, добијамо услов $x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 - \frac{L}{2} \cdot Mg = 0$. Услов равнотеже вертикалних сила даје $N_1 + N_2 = Mg$. У овим условима M је маса балвана, а g убрзање силе теже. Из оба услова и везе $x_2 = x_1 + D$, добијамо интензитете сила реакција у зависности од координате x_1 којом описујемо положаја балвана на ваљцима: $N_1 = Mg \left(1 - \frac{L}{2D} + \frac{x_1}{D}\right)$ и $N_2 = Mg \left(\frac{L}{2D} - \frac{x_1}{D}\right)$. Да балван не би пао, силе реакције морају деловати на балван навише и балван се мора ослањати на оба ваљка, то јест $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$ и $x_2 \leq L$. **5п**

Преостали услов је равнотежа сила трења које делују дуж осе балвана. Узимајући у обзир смерове ротација ваљака, силе трења које делују дуж балвана су $F_1 = \mu_1 N_1 s_1$ и $F_2 = \mu_2 N_2 s_2$ уз позитиван смер од ваљка 1 ка ваљку 2. Дефиниција $s_{1,2} = \pm 1$ за смер ротација ваљака уз и насупрот смера казаљке на сату је као у тексту задатка. Користећи раније резултате, укупна сила дуж балвана је $F(x_1) = F_1 + F_2 = Mg \left[\mu_1 s_1 + \frac{L}{2D} (-\mu_1 s_1 + \mu_2 s_2) + \frac{x_1}{D} (\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2) \right]$, а услов равнотеже је $F(x_e) = 0$ у неком равнотежном положају $x_1 = x_e$. Када је $\mu_1 s_1 \neq \mu_2 s_2$, положај равнотеже је дат са $\frac{x_{1e}}{D} = \frac{L}{2D} - \frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2}$. Директном провером, равнотежни положај не постоји када је $\mu_1 s_1 = \mu_2 s_2$, осим када је трење нула, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Заменом добијеног положаја равнотеже у раније изведене услове да балван не падне са ваљака добијамо да равнотежа постоји ако важи $\frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq \frac{L}{2D}$, $\frac{-\mu_2 s_2}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq \frac{L}{2D}$, $\frac{\mu_2 s_2}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2} \leq 0 \leq \frac{\mu_1 s_1}{\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2}$ и $\mu_1 s_1 \neq \mu_2 s_2$. Описно, да би формално израчунат равнотежни положај постојао ваљци се морају окретати у супротним смеровима и балван мора бити довољно дужи од растојања између ваљака да не би пао са њих у равнотежном положају. **5п**

Изведимо балван из равнотежног положаја, $x_1 = x_{1e} + \delta$. Убрзање дуж осе ће тада бити $a_x = \frac{F(x_{1e} + \delta)}{M}$. Заменом добијеног резултата за x_{1e} , добијамо $a_x = \frac{g}{D} (\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2) \delta$. Пошто позитивно δ одговара кретању балвана у негативном смеру дуж осе x , равнотежа је стабилна ако је $\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2 > 0$. Тада је угаона фреквенца осцилација $\omega = \sqrt{\frac{g}{D} (\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2)}$. Када стабилна равнотежа постоји, овај израз се своди на $\omega = \sqrt{\frac{g}{D} (\mu_1 + \mu_2)}$. Осцилације су могуће само када се ваљак 1 окреће у смеру казаљке на сату, а ваљак 2 у супротном. Због линеарности сила, осцилације су хармонијске и за велико δ . **10п**



Слика уз решење задатка 1.



III разред

2. Укупна кинетичка енергија коју Милан има на почетку скока се састоји од енергија транслационих кретања дуж хоризонталне, x , осе и вертикалне, y , осе, те од кинетичке енергије ротације. Њихов збир износи $E_{total} = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$. Како Милан у ваздуху проведе једнако време током сваког скока, вертикална компонента његове брзине на почетку скока је увек једнака, па се и део кинетичке енергије који одговара вертикалном кретању не мења од скока до скока. Тако за сваки скок важи $\frac{mv_i^2}{2} + \frac{I\omega_i^2}{2} = E = const$, где v_i одговара x компоненти брзине, а ω_i средњој угаоној брзини приликом скока са $i + \frac{1}{2}$ ротација. **[6п]** Тако је $\omega_i = \frac{(2i+1)\pi}{t}$, односно нумерички $\omega_1 \approx 11,78 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_2 \approx 19,635 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ и $\omega_3 \approx 27,49 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Преписивањем једначине за енергију као $\epsilon - \omega_i^2 \kappa = v_i^2$, где су $\epsilon = \frac{2E}{m}$ и $\kappa = \frac{I}{m}$, те решавањем било ког пара једначина по κ и ϵ добија се $\epsilon \approx 42 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ и $\kappa \approx 0,0437 \text{ m}^2$. Ако би Милан при четвороструком скоку провео једнако време у ваздуху као при осталим скоковима, његова средња угаона брзина би морала бити $\omega_4 \approx 35,343 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Заменом ове угаоне брзине у петходно добијену једначину за енергију, добијамо квадрат хоризонталне компоненте почетне брзине у могућем четвороструком скоку, $v_4^2 = \epsilon - \omega_4^2 \kappa \approx -12,63 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \leq 0$. Негативни квадрат брзине је нефизички, те долазимо до закључка да Милан нема довољно енергије за четвороструки скок. Могуће опције су тренинзи којима би повећао укупну расположиву енергију, смањιο масу и смањιο момент инерције. **[14п]**
3. (а) Код десног кружно поларисаног таласа квадрат интензитета електричног поља у фиксној равни је $E_{2x}^2 + E_{2y}^2 = E_{20}^2 (\cos^2 \Psi + \sin^2 \Psi)$, где је $\Psi = k_2 z - \omega_2 t + \phi_2$. То је једначина кружнице $E_{2x}^2 + E_{2y}^2 = E_{20}^2$, са $(E_x, E_y) = E_{20}(\cos \Psi, \sin \Psi)$. Када фиксирамо вредност координате z , вредност параметра Ψ се смањује са протоком времена због члана $-\omega t$. Дакле, електрично поље ротира у негативном смеру у равни $x - y$. Користећи $\sin(-x) = -\sin x$, видимо да се R талас заменом $t \rightarrow -t$ преводи у L талас. Променом смера времена, смер обиласка контуре се мења а сама контура остаје иста, јер поново важи $E_x^2 + E_y^2 = E_{10}^2$. **[6п]**
- (б) Суперпозицијом компоненти електричних поља дуж x и y осе добијамо $E_x = E_{1x} + E_{2x}$, $E_y = E_{1y} + E_{2y}$. Користимо нотацију $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Збирови су $E_x = (E_{10} + E_{20}) \cos(kz - \omega t + \phi)$ и $E_y = (-E_{10} + E_{20}) \sin(kz - \omega t + \phi)$. Елиминацијом временске променљиве из ових једначина, увођењем семене $\Psi = kz - \omega t + \phi$, и коришћењем идентитета $\sin^2 \Psi + \cos^2 \Psi = 1$, се добија $\frac{E_x^2}{(E_{10} + E_{20})^2} + \frac{E_y^2}{(-E_{10} + E_{20})^2} = 1$. Како је ово једначина елипсе, у питању је елиптична поларизација. **[8п]**
- (в) Суперпозицијом компоненти електромагнетних таласа дуж x и y осе добијамо $E_x = E_{1x} + E_{2x}$ и $E_y = E_{1y} + E_{2y}$, као у делу (б). Сада користимо $E_{10} = E_{20} = E_0$, $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Уз коришћење одговарајућих тригонометријских идентита се добија $E_x = 2E_0 \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \cos \left(kz - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)$ и $E_y = -2E_0 \sin \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \cos \left(kz - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)$. Дељењем ових двеју једначина, добија се $\frac{E_y}{E_x} = \tan \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$. Како је ово једначина праве, резултат суперпозиције дата два електромагнетна таласа је линеарно поларисан талас. **[6п]**

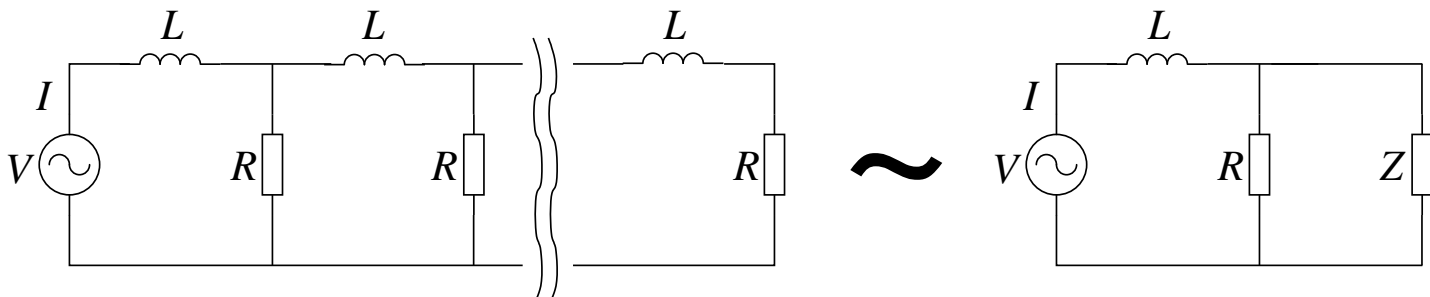


III разред

4. Решићемо проблем користећи комплексне импедансе. За све величине подразумевамо хармонијску временску зависност, а апсолутна вредност и фаза комплексних бројева описује амплитуде и фазе одговарајућих величина.

(а) Негативан и реалан отпор значи да је фазна разлика између струје и напона у том елементу кола π . У том случају напон на елементу и струја кроз елемент имају супротне знаке, пошто је $i(t)u(t) \propto \cos(\omega t + \phi + \pi) \cos(\omega t + \phi)$. Пошто је $\cos(x + \pi) = -\cos x$, добијамо $i(t)u(t) \propto -\cos^2(\omega t + \phi)$ и производ тренутне струје и тренутног напона на елементу је увек негативан. Како је овај производ једнак дисипацији енергије на елементу кола, такав елемент би додавао енергију у коло и нарушавао одржање енергије. Према томе, импедансе елемената кола који не додају енергију у коло морају имати позитивне реалне делове. **6п**

(б) Бесконачну леству можемо поделити на једну грану са завојницом, једну грану са отпорником и бесконачни остатак кола идентичан почетном колу. У новом колу, обележимо импедансу бесконачног дела са Z , као на приложеној слици. Поставимо једначину која тврди да су импедансе почетног неподељеног кола и његове подељене верзије једнаке. Из правила слагања импеданси добијамо $Z = i\omega L + \frac{RZ}{R+Z}$, где је $i\omega L$ импеданса завојнице на угаоној фреквенци ω , а R импеданса отпорника. Сређивањем добијамо квадратну једначину по Z , $Z^2 - i\omega LZ - i\omega LR = 0$ са решењима $Z_{1,2} = \frac{1}{2}\omega L \left(i \pm \sqrt{-1 + i\frac{4R}{\omega L}} \right)$. **6п** Два решења ће имати супротне знаке реалног дела, и треба изабрати оно са позивним, према резултату дела (а). Директним рачуном $\sqrt{-1 + i\frac{4R}{\omega L}} = \sqrt[4]{1 + \frac{16R^2}{\omega^2 L^2}} e^{i\frac{\phi_z}{2}}$, где је $\tan \phi_z = -\frac{\omega L}{4R}$ и угао лежи у интервалу $\frac{\pi}{2} < \phi_z < \pi$. Заменом бројних вредности добијамо $\frac{\phi_z}{2} = 1.21 \text{ rad}$ за фазу и $Z = (160 + 670i) \Omega$. Апсолутна вредност импедансе је $|Z| = 690 \Omega$ а амплитуда струје је $I = \frac{V}{|Z|} = 1,5 \text{ mA}$. **8п**



Слика уз решење задатка 4.

5. Уз помоћ приложене мапе се може, на основу уцртаних кружница, одредити у ком 'сектору' је метеорит завршио. Да се све три кружнице секу, смислено би било тражити метеорит у троуглу између тачака пресека. Пошто се кружнице не секу, највероватније место пада је у области где су кружнице најближе. Координате центра сектора који обухвата ову област су $x'_c = 70 \text{ km}$ и $y'_c = 50 \text{ km}$. Према предлогу у задатку, центар овог сектора је нови координатни почетак са новим координатама $x_c = 0$ и $y_c = 0$. **4п**

Расписивањем једначине $R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ добија се $2x_i x - x^2 + 2y_i y - y^2 = x_i^2 + y_i^2 - R_i^2$. Уколико је $|2x_i x| \gg x^2$, као и $|2y_i y| \gg y^2$, чланови x^2 и y^2 се могу занемарити и тиме се систем једначина линеаризује. Да би то било задовољено мора вредети $|x_i| \gg x$ и $|y_i| \gg y$ што добија приближним постављањем тачке (x, y) у близину координатног почетка. На основу претходног дела решења, знамо да смо ово урадили постављањем центра највероватнијег сектора пада у координатни почетак. **4п**

Читањем коефицијената уз x , y и слободног члана, у нотацији дефинисаној у тексту задатка, имамо $a_i = 2x_i$, $b_i = 2y_i$ и $c_i = x_i^2 + y_i^2 - R_i^2$. Вредности ових коефицијената, заједно са w_i , налазе се у приложеној табели. **4п**

Заменом у формуле из поставке задатка имамо: $A = \sum_{i=1}^3 a_i^2 w_i = 0,0165 \text{ km}^{-2}$, $E = \sum_{i=1}^3 b_i^2 w_i = 0,0183 \text{ km}^{-2}$, $B = D = \sum_{i=1}^3 a_i b_i w_i = 0,0081 \text{ km}^{-2}$, $C = \sum_{i=1}^3 a_i c_i w_i = 0,02 \text{ km}^{-1}$ и $F = \sum_{i=1}^3 b_i c_i w_i = 0,0316 \text{ km}^{-1}$. Решавањем овог система добија се $x = 0,46 \text{ km}$ и $y = 1,52 \text{ km}$, односно у старим координатама $x = 70,46 \text{ km}$ и $y = 51,52 \text{ km}$, уцртано на мапи. **8п**



ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2017/18. ГОДИНА

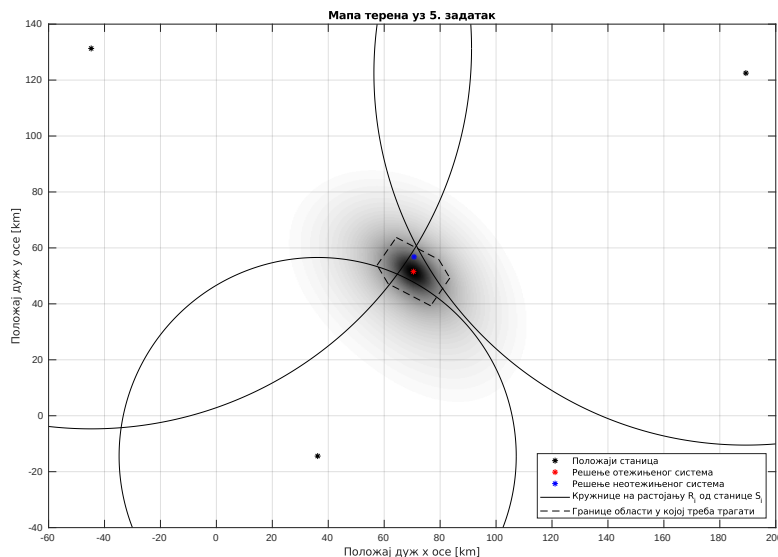


Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА

ДРЖАВНИ НИВО
22.03.2018.

III разред

Станица	x_i [km]	y_i [km]	R [km]	ΔR [km]	a_i [km]	b_i [km]	c_i [km ²]	w_i [km ⁻⁴]
S_1	-33,79	-64,42	71	8	-67,58	-128,84	250,75	7,75e-7
S_2	-114,77	81,31	136	12	-229,54	162,62	1287,47	9,39e-8
S_3	119,32	72,50	133	10	238,64	145	1804,51	1,4e-7



Поређења ради, приложена мапа садржи уцртану и тачку која је решење неотежињеног система која видно одступа од решења отежињеног система. Уцртана 'осенченост' је пропорционална отежињеном одступању од решења нелинеарног система, те видимо да је апроксимација занемаривања квадратних чланова била оправдана у овом случају.

Задатке припремили: **др Владан Павловић**, Природно-математички факултет, Ниш

Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France

Илија Иванишевић, Институт за физику, Београд

Рецензент: **др Димитрије Степаненко**, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: **др Божидар Николић**, Физички факултет, Београд