ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2017/18. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

ЗАДАЦИ – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА

II разред

ДРЖАВНИ НИВО
22.03.2018.

1. Један мол хелијума налази се у калориметру на температури $T_1 = 273\text{K}$. Гас ставимо у следећи процес: прво се шири при константном топлотном капацитету $C = 100\text{J/K}$ $(1 \to 2)$, потом се изохорски хлади до почетне температуре $(2 \to 3)$, па се најзад изотермски сабија до почетне запремине $(3 \to 1)$. У првом делу процеса хелијум је примио топлоту $Q = 1\text{J}$. Наћи рад гаса у процесу $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Обратити пажњу да се, због $Q \ll U$ (где је U унутрашња енергија гаса), процес $1 \to 2 \to 3 \to 1$ се може приближно представити троуглом, а разлике $T_2 - T_1$ и $V_2 - V_1$ су мале у односу на T_1,V_1, па може бити од користи формула $1/(1+\epsilon) \approx 1 - \epsilon$ која важи за $\epsilon \ll 1$.

(20 поена)

2. До које висине се подиже вода у конусној капилари угла α $(\alpha \ll 1)$, која је потопљена у воду на ужем крају, ако је квашење потпуно, а коефицијент површинског напона воде γ? Сматрати полупречник капиларе на ужем крају занемарљиво малим. Густина воде је ρ, а гравитационо убрзање g. Да ли се решење мења ако се суд са капиларом налази у комори под притиском 3 атмосфере?

(20 поена)

3. Мала Софија проучава систем са два нивоа као на слици испод. Систем се састоји од N неинтерагујућих честица које могу да имају енергију $-\epsilon$ или ϵ зависно да ли се налазе на горњем или доњем нивоу. Помозимо Софији да одреди термодинамичке карактеристике оваквог система.

   (а) Болцманова енртопија оваквог система је одређена као $S_E = k_B \ln \Omega_E$, где је Ω_E број начина на које можемо расподелити N честица у два нивоа, тако да укупна енергија система буде E. Одредити Болцамновцу ентропију S_E у зависности од укупне енергије система E. Помоћ: број комбинација класе k од N честица, тј. број начина на који од N честица можемо изабрати k честица, износи $N!/(k!(N-k)!)$.

   (б) Сада желимо да нађемо израз за температуру система користећи израз за ентропију одређен у претходном кораку. Софија зна да се инверзна температура може изразити као промена ентропије при малој промени енергије система, тј. када једну честицу пребацимо са нивоа енергије ϵ на ниво енергије $-\epsilon$. Ову реченицу можемо математички записати као $\frac{1}{T} = \frac{S_{E+\epsilon} - S_{E-\epsilon}}{2\epsilon}$ (сматрамо да је $\epsilon \ll E$).

   (в) Узмимо сада конкретан систем који се састоји од $N = 1000$ честица и где је $\epsilon = 1\,\text{eV}$. Одредити температуру система за енергије $E_1 = -200\text{eV}$ и $E_2 = 200\text{eV}$. Чудан резултат за енергију E_2 можемо разумети као последицу чињенице да су честице у побуђеним стањима, тј. да нису у уобичајеном стању термодинамичке равнотеже $(1\,\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}, k_B = 8.617 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{eV}}{\text{K}})$.

(20 поена)

4. Дугачка жица негативног линијског наелектрисања $\lambda = 10^{-5}\,\frac{\text{C}}{\text{m}}$ окачена је о две нити дужине $l = 10\,\text{cm}$ и коефицијента линеарног топлотног ширења $\alpha = 1.77 \cdot 10^{-4}\,\text{K}^{-1}$, на висини $H = 1\,\text{m}$ од пода. Испод жице се налази опруга коефицијента истегљивости $k = 80\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ која у неистегнутом стању има дужину $d = 3\,\text{cm}$. На опругу се постави куглица масе $m = 50\,\text{g}$ и позитивног наелектрисања $Q = 10^{-5}\,\text{C}$ при чему долази до мале деформације опруге. Одредити висину куглице пре загревања нити и пошто се нити загреју за $\Delta T = 800\,\text{K}$. Гравитационо убрзање Земље је $g = 9.81\text{m/s}^2$, а диелектрична константа $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. (20 поена)

5. У течном хелијуму на довољно ниској температури формира се суперфлуид који се може схватити као квантна течност која тече без отпора и вискозности. Проучићемо прелаз из хелијума 1 (обични) у хелијум 2 (суперфлуидни). У табели су дата мерења тзв. ренормализованог коефицијента термичког ширења α у зависности од температуре T (R. J. Donelli and C. F. Barenghi 1998, J. Phys. Chem. Ref. Data 27, 6, 1217).

T [K]	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
α $[10^{-3}\text{K}^{-1}]$	171.73	165.04	157.52	150.26	142.12	133.18	124.26	114.03	102.76	90.38	74.89	56.03

T [K]	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9	4.1	4.3	4.5	4.7	4.9
α $[10^{-3}\text{K}^{-1}]$	23.64	43.85	67.49	85.19	100.02	113.06	125.10	135.90	145.87	155.00	164.42	172.96	180.88

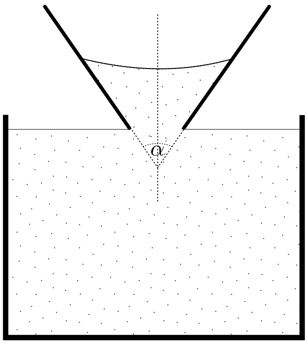
Коефицијент термичког ширења у функцији температуре

   (а) Познато је да у тачки суперфлуидног фазног прелаза ренормализовани коефицијент термичког ширења достиже минимум, а удаљавањем од критичне тачке (у било ком смеру температурне осе) расте. На основу тога проценити из података у табели критичну температуру T_c, као и вредност коефицијента α_c у критичној тачки.

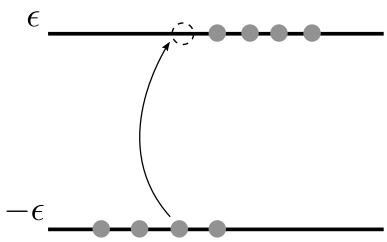
(б) Представити зависност $\alpha(T)$ на графику са логаритамском скалом на обе осе. Приметимо да у великом опсегу температура постоји скалирање облика $\alpha - \alpha_c \propto |T - T_c|^{\gamma_-}$ за температуре ниже од критичне и $\alpha_c - \alpha \propto |T - T_c|^{\gamma_+}$ за температуре изнад критичне. Овакво понашање је карактеристично за критичне појаве, тј. фазне прелазе другог реда. Одредити приближно експоненте γ_+ и γ_-.

(20 поена)

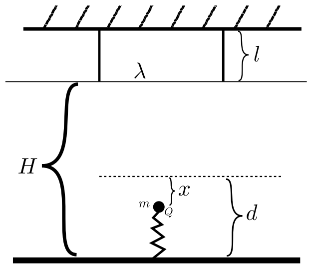
Математички подсетник Природни логаритам $\ln x$ је дефинисан на следећи начин: $\ln x = a$ ако и само ако је $e^a = x$, где је $e = 2.7172\ldots$ тзв. Ојлерова константа, основа природног логаритма. За логаритам производа важи $\ln xy = \ln x + \ln y$, а за логаритам количника $\ln x/y = \ln x - \ln y$, где су x и y позитивни реални бројеви. За логаритам степена важи $\ln x^a = a \cdot \ln x$.



Слика уз 2. задатак



Слика уз 3. задатак



Слика уз 4. задатак

Задатке припремили: ***Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

1. Пошто је примљена топлота мала, процес се на $p-V$ дијаграму може приближно представити троуглом. Рад је тада једнак $A \approx (p_2 - p_3)(V_2 - V_1)/2$ **[2 п]**. У делу 1-2 имамо $Q \approx p_1(V_2 - V_1) + C_V\Delta T$ одакле $T_2 - T_1 = Q/C_V - p_2(V_2 - V_1)/C_V$ **[2 п]**. Са друге стране, пошто на делу 1-2 знамо топлотни капацитет, важи $T_2 - T_1 = Q/C$ **[1 п]**. Изједначавањем ова два израза $V_2 - V_1$ можемо изразити као $V_2 - V_1 = Q/p_1 \times (1 - C_V/C)$ **[2 п]**. За притиске имамо $p_3 = p_1V_1/V_2 = p_1/(1 + (V_2 - V_1)/V_1) \approx p_1(1 - (V_2 - V_1)/V_1)$ **[3 п]**, где смо искористили приближну формулу из задатка, и $p_2 = RT_2/V_2 = R(T_2 - T_1 + T_1)/(V_1 + V_2 - V_1) = RT_1/V_1 \times (1 + (T_2 - T_1)/T_1 - (V_2 - V_1)/V_1)$ **[3 п]** уз исту приближну формулу. Тако одузимањем добијамо $p_2 - p_3 = p_1(T_2 - T_1)/T_1 = p_1Q/CT_1$ **[2 п]**. Сада у изразу за рад имамо $A = Q^2(1 - C_V/C)/2CT_1$ **[3 п]**, $A = 1.6 \times 10^{-5}\text{J}$ **[2 п]**.

2. Притисак течности у подножју капиларе мора бити исти као и ван капиларе, а он је умањен за Лапласов притисак и увећан због хидростатичког притиска течности која се попела уз капилару, што даје $2\gamma/r = \rho g h$, где је h тражена висина, а r полупречник капиларе на висини h **[5 п]**. За мали угао α имамо $r = h\alpha/2$ **[5 п]**. Заменом добијамо $h = \sqrt{4\gamma/\rho g\alpha}$ **[5 п]**. Видимо да резултат не зависи од притиска ваздуха (који делује на цео систем, унутар и изван капиларе), па се неће променити ако се овај повећа 3 пута **[5 п]**.

3. (а) Узмимо да је број честица у стању са енергијом $-\epsilon$ једнак $N_\downarrow$ док је број честица са енергијом ϵ једнак $N_\uparrow$. Означимо разлику ова два броја са $\xi = N_\uparrow - N_\downarrow$. Сада број честица у горњем и доњем стању можемо да изразимо преко ξ и укупног броја честица N: $N_\downarrow = \frac{N-\xi}{2}$ и $N_\uparrow = \frac{N+\xi}{2}$. Број комбинација којима можемо да реализујемо стање са укупном енергијом $E = \epsilon\xi$ је $\Omega_E = \frac{N!}{(\frac{N-\xi}{2})!(\frac{N+\xi}{2})!}$ **[3 п]**. Одавде следи да је Болцманова ентропија за задату вредност енергије $S_E = k_B \ln\left(\frac{N!}{(\frac{N-\xi}{2})!(\frac{N+\xi}{2})!}\right)$ **[3 п]**.

   (б) Користећи добијену зависност за ентропију система и задату релацију за температуру имамо $\frac{1}{T} = \frac{k_B}{2\epsilon}\ln\left(\frac{N-\xi+1}{N+\xi+1}\right)$ **[5 п]**, одавде можемо да изразимо ξ као $\xi = \frac{E}{\epsilon}$ и да вратимо у претходни израз да бисмо добили $T(E) = \frac{2\epsilon}{k_B}\ln^{-1}\left(\frac{(N+1)\epsilon - E}{(N+1)\epsilon + E}\right)$ **[5 п]**.

   (в) Убацимо задатке нумеричке вредности из задатка у добијени израз за температуру на енергији E_1 добијамо $T(E_1) = 57.3 \cdot 10^3$ K **[2 п]** док за енергију E_2 имамо $T(E_2) = -57.3 \cdot 10^3$ K **[2 п]**. *Коментар.* Видимо да је температура за другу енергију негативна. Ова појава на први поглед изгледа парадоксално да је температура система негативна, међутим ова ситуација је могућа ако постоји тзв. инверзна насељеност, тј. ако много честица седи у нивоима са високим енергијама. Ако се при додавању енергије систему ентропија смањује тада, по дефиницији, имамо негативну температуру. Негативна температура је чак топлија од позитивне, ако бисмо довели два тела, једно са позитивном а друго са негативном температуром у контакт, енергија би прелазила са тела са негативном температуром на тело са позитивном.

4. У равнотежном случају важи: $mg - kx - \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0(H-d+x)} = 0$ **[3 п]**. Електрично поље жице је добијено применом теореме Гаус-Остроградског $E2r\pi h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$, тј. јачина поља је $E = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}$ **[4 п]**. Решење полазне квадратне једначине је
$x_{1,2} = \frac{-mg + k(H-d) \pm \sqrt{(mg - k(H-d))^2 + 4k(mg(H-d) - \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0})}}{-2k}$ **[4 п]**. Убацивањем бројних вредности датих у задатку добијамо за решења $x_1 = -946.4\,\text{mm}, x_2 = -17.5\,\text{mm}$ **[2 п]**. Како је речено да је деформација мала, бирамо друго решење и висина куглице ће бити $d - x_2 = 47.5\,\text{mm}$ **[1 п]**. Ако се нити загревају, долази до њиховог истезања и на куглицу делује већа Кулонова сила. Једино што се мења у решењу за равнотежни положај јесте да је висина H умањена и постаје $H - \Delta l$, где је $\Delta l = \alpha l \Delta T$ **[4 п]**. Убацивањем бројних вредности добијамо да је нови равнотежни положај $x_2 = -17.8\,\text{mm}$ **[1 п]**. Нова висина куглице је $47.8\,\text{mm}$ **[1 п]**.

5. (а) Критична тачка одговара тачки у којој зависност из опадајуће постаје растућа. Из табеле видимо да се ово дешава између $T = 2.5\text{K}$ и $T = 2.6\text{K}$, па је $T_c \approx 2.55$ **[4 п]** (признати и било коју другу процену између $T = 2.5\text{K}$ и $T = 2.6\text{K}$). Ренормализовани коефицијент термичког ширења у тој тачки је по табели приближно једнак нули: $\alpha_c \approx 0$ **[3 п]** (такође признати и друге разумне процене).

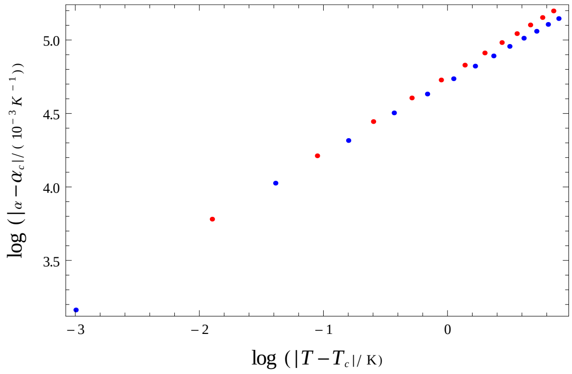
   (б) *1. начин* Зависност $|\alpha - \alpha_c| = f(|T - T_c|)$ можемо приказати на логаритамској скали, као $\ln|\alpha - \alpha_c| = g(\ln|T - T_c|)$. Дата је табела са вредностима логаритама, за податке лево и десно од критичне тачке **[2 п]**.

   Приказујући садржај табеле на графику **[4 п]**, видимо да је зависност приближно линеарна, тј. облика $\ln|\alpha - \alpha_c| = k_\pm \cdot \ln|T - T_c| + n_\pm$. Из зависности $\alpha - \alpha_c = A_\pm \cdot |T - T_c|^{\gamma_\pm}$ датих у задатку логаритмовањем добијамо

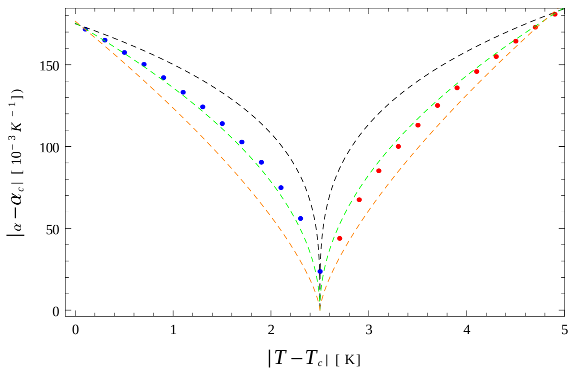
$\ln\frac{T_c-T}{1\mathrm{K}}$	0.896	0.811	0.718	0.615	0.501	0.372	0.223	0.049	-0.163	-0.431	-0.799	-1.386	-3.000
$\ln\frac{\lvert\alpha-\alpha_c\rvert}{10^{-3}\mathrm{K}^{-1}}$	5.146	5.106	5.060	5.012	4.957	4.891	4.822	4.736	4.632	4.504	4.316	4.026	3.163

$\ln\frac{T-T_c}{1\mathrm{K}}$	-1.897	-1.050	-0.598	-0.288	-0.051	0.140	0.223	0.300	0.438	0.560	0.668	0.765	0.854
$\ln\frac{\lvert\alpha-\alpha_c\rvert}{10^{-3}\mathrm{K}^{-1}}$	3.781	4.212	4.445	4.606	4.728	4.891	4.829	4.912	4.982	5.043	5.102	5.153	5.198

$\ln|\alpha-\alpha_c| = \gamma_\pm \cdot \ln|T-T_c| + \ln A_\pm$, тј. исту линеарну зависност логаритама као што график сугерише $\boxed{\textbf{3 п}}$. Дакле, можемо "од ока"повући праве кроз оба скупа података, и наћи приближно коефицијенте правца $\gamma_\pm$: $\gamma_+ \approx \gamma_- \approx 0.5$ $\boxed{\textbf{4 п}}$ (тачан линеарни МНК фит даје $\gamma_+ = 0.50, \gamma_- = 0.52$).



(б) *2. начин* Можемо представити зависност $|\alpha-\alpha_c| = f(|T-T_c|)$ на графику $\boxed{\textbf{4 п}}$, и потом скицирати функцију $f_\pm(x) = a_\pm x^{\gamma_\pm}$ за неколико вредности $\gamma_\pm$ (за сваки скуп података посебно, слика: црне криве $\gamma = 0.3$, зелене криве $\gamma = 0.5$, наранџасте криве $\gamma = 0.7$) $\boxed{\textbf{5 п}}$, уз услов да крива пролази кроз нулу и последњу тачку. На тај начин видимо да функција са $\gamma_+ \approx \gamma_- \approx 0.5$ најбоље пролази кроз тачке, па је то приближна вредност тражених експонената. $\boxed{\textbf{4 п}}$



Задатке припремили: ***Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

1. Влажан ваздух адијабатски струји око планинског ланца на коме се налазе метеоролошке станице M0 и M3 (у подножју, M0 са леве, а M3 са десне стране планине, на нултој надморској висини), M1 (на доњој граници облака) и M2 (на врху планине). У станицама M0 и M3 измерен је ваздушни притисак $p_0 = 101\text{kPa}$, а у M2 притисак $p_2 = 70\text{kPa}$. У тачки M0 измерена је температура $t_0 = 20^0\text{C}$ и густина ваздуха $\rho_0 = 1.189\text{kg/m}^3$. Познато је да се облак формира на притиску од $p_1 = 84.5\text{kPa}$ у тачки M1. При даљем пењању, ваздух достиже врх планине (станицу M2) после времена $t = 1500\text{s}$. У току струјања од M1 до M2 пада $r = 0.45\text{g/kg}$ кише (изражено у грамима кише по килограму ваздуха), из облака чија је површинска густина $m_0 = 300\text{kg/m}^2$. По доласку у M2 облак се подиже вертикално, тј. не креће се даље ка M3.

   (а) Наћи температуру T_1 у M1 (на доњој граници облака).

   (б) На којој висини h_1 се налази доња граница облака, ако густина ваздуха приближно линеарно опада с висином на висинама реда величине висине облака?

   (в) Колико износи температура T_2 измерена на врху (M2), а колико температура T_3 измерена са друге стране планине, у M3?

   (г) Наћи количину падавина у току $T = 3\text{h}$ непрестане кише, ако је концентрација кише константна између M1 и M2. Количина падавина се изражава као висина воденог стуба над површином од 1m^2, тј. висина до које ће киша испунити суд површине 1m^2 у току времена T.

   Атмосфера се може сматрати двоатомским идеалним гасом, чија густина и специфична топлота практично не зависе од концентрације водене паре. Специфична топлота ваздуха у овом интервалу температура је $c_p = 1005\text{J/kg}\cdot\text{K}$, а специфична топлота испаравања воде $\Lambda = 2500\text{kJ/kg}$. Густина воде је $\rho_v = 1000\text{kg/m}^3$, и њена зависност од притиска и температуре може се игнорисати. Гравитационо убрзање Земље је $g = 9.81\text{m/s}^2$.

   (20 поена)

2. До које висине се подиже вода у конусној капилари висине H и угла α, ако је квашење потпуно, а коефицијент површинског напона воде γ? Размотрити случај када је капилара окренута ужим крајем наниже и случај када је окренута навише (слика). Полупречник капиларе на ужем крају износи r_0. Густина воде је ρ, а гравитационо убрзање g.

   (20 поена)

3. Мала Софија проучава систем са два нивоа као на слици испод. Систем се састоји од N неинтерагујућих честица које могу да имају енергију $-\epsilon$ или ϵ зависно да ли се налазе на горњем или доњем нивоу. Помозимо Софији да одреди термодинамичке карактеристике оваквог система.

   (а) Болцманова енртопија оваквог система је одређена као $S_E = k_B \ln \Omega_E$, где је Ω_E број начина на које можемо расподелити N честица у два нивоа, тако да укупна енергија система буде E. Одредити Болцамновцу ентропију S_E у зависности од укупне енергије система E.

   (б) Сада желимо да нађемо израз за температуру система користећи израз за ентропију одређен у претходном кораку. Софија зна да се инверзна температура може изразити као промена ентропије при малој промени енергије система, тј. када једну честицу пребацимо са нивоа енергије ϵ на ниво енергије $-\epsilon$. Ову реченицу можемо математички записати као $\frac{1}{T} = \frac{S_{E+\epsilon} - S_{E-\epsilon}}{2\epsilon}$ (сматрамо да је $\epsilon \ll E$).

   (в) Узмимо сада конкретан систем који се састоји од $N = 1000$ честица и где је $\epsilon = 1\,\text{eV}$. Одредити температуру система за енергије $E_1 = -200\text{eV}$ и $E_2 = 200\text{eV}$. Чудан резултат за енергију E_2 можемо разумети као последицу чињенице да су честице у побуђеним стањима, тј. да нису у уобичајеном стању термодинамичке равнотеже ($1\,\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}, k_B = 8.617 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{eV}}{\text{K}}$).

   (20 поена)

4. Дугачка жица негативног линијског наелектрисања $\lambda = 10^{-5}\,\frac{\text{C}}{\text{m}}$ окачена је о две нити дужине $l = 10\,\text{cm}$ и коефицијента линеарног топлотног ширења $\alpha = 1.77 \cdot 10^{-4}\,\text{K}^{-1}$, на висини $H = 1\,\text{m}$ од пода. Испод жице се налази опруга коефицијента истегљивости $k = 80\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ која у неистегнутом стању има дужину $d = 3\,\text{cm}$. На опругу се постави куглица масе $m = 50\,\text{g}$ и позитивног наелектрисања $Q = 10^{-5}\,\text{C}$ при чему долази до мале деформације опруге. Одредити висину куглице пре загревања нити и пошто се нити загреју за $\Delta T = 800\,\text{K}$. Гравитационо убрзање Земље је $g = 9.81\text{m/s}^2$, а диелектрична константа $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$.

   (20 поена)

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2017/18. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

II разред — **ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА** — **ДРЖАВНИ НИВО** **22.03.2018.**

5. У течном хелијуму на довољно ниској температури формира се суперфлуид који се може схватити као квантна течност која тече без отпора и вискозности. Проучићемо прелаз из хелијума 1 (обични) у хелијум 2 (суперфлуидни). У табели су дата мерења тзв. ренормализованог коефицијента термичког ширења α у зависности од температуре T (R. J. Donelli and C. F. Barenghi 1998, J. Phys. Chem. Ref. Data 27, 6, 1217).

T [K]	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
α [10^{-3}K^{-1}]	171.73	165.04	157.52	150.26	142.12	133.18	124.26	114.03	102.76	90.38	74.89	56.03

T [K]	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9	4.1	4.3	4.5	4.7	4.9
α [10^{-3}K^{-1}]	23.64	43.85	67.49	85.19	100.02	113.06	125.10	135.90	145.87	155.00	164.42	172.96	180.88

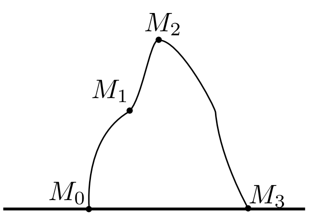
Коефицијент термичког ширења у функцији температуре

(а) Познато је да у тачки суперфлуидног фазног прелаза ренормализовани коефицијент термичког ширења достиже минимум, а удаљавањем од критичне тачке (у било ком смеру температурне осе) расте. На основу тога проценити из података у табели критичну температуру T_c, као и вредност коефицијента α_c у критичној тачки.

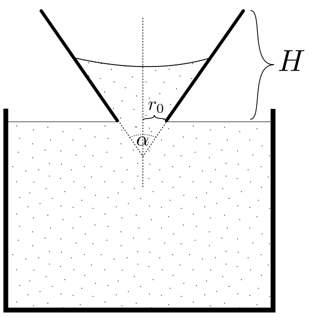
(б) Приметимо да је та зависност облика $\alpha - \alpha_c = A_- \cdot |T - T_c|^{\gamma_-}$ за температуре ниже од критичне и $\alpha - \alpha_c = A_+ \cdot |T - T_c|^{\gamma_+}$ за температуре изнад критичне. Овакво понашање је карактеристично за критичне појаве, тј. фазне прелазе другог реда. Одредити приближно експоненте γ_+ и γ_-.

(20 поена)

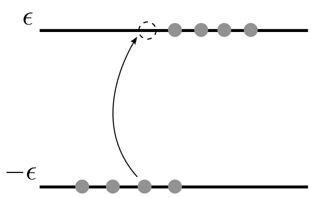
Математички подсетник Природни логаритам $\ln x$ је дефинисан на следећи начин: $\ln x = a$ ако и само ако је $e^a = x$, где је $e = 2.7172\ldots$ тзв. Ојлерова константа, основа природног логаритма. За логаритам производа важи $\ln xy = \ln x + \ln y$, а за логаритам количника $\ln x/y = \ln x - \ln y$, где су x и y позитивни реални бројеви. За логаритам степена важи $\ln x^a = a \cdot \ln x$.



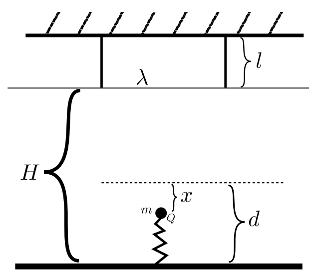
Слика уз 1. задатак



Слика уз 2. задатак



Слика уз 3. задатак



Слика уз 4. задатак

Задатке припремили: ***Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

1. (а) За адијабатски процес имамо $T_1 = T_0(p_1/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma} = 278.4\text{K}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$.

   (б) Густина се по задатку понаша као $\rho_1 = \rho_0 - Kh_1$ где је K константа пропорционалности коју не знамо. Али знамо једначине стања за обе висине: $p_0 = \rho_0 RT_0/M$, $p_1 = (\rho_0 - Kh_1)RT_1/M$ $\boxed{\textbf{2 п}}$ и једначину за аеростатички притисак $p_0 - p_1 = \bar{\rho}gh_1$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, где је $\bar{\rho} = (\rho_0 + \rho_1)/2 = \rho_0 - Kh_1/2$ средња густина између те две висине (због линеарности то је просто аритметичка средина). Сада можемо елиминисати K и M које не знамо и добити $h_1 = 2(p_0 - p_1)/\rho_0 g(1 + T_0 p_1/T_1 p_0) = 1505\text{m}$ $\boxed{\textbf{4 п}}$.

   (в) Температура се мења због адијабатског струјања и због кондензације кише. Адијабатско струјање даје $T_2' = T_1(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$ а за кондензацију кише и загревање ваздуха важи $\Lambda mr = c_p m\Delta T$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Свеукупно $T_2 = T_2' + \Delta T = T_1(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} + \Lambda r/c_p = 263.86\text{K} + 1.12\text{K} = 264.98\text{K}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Између М2 и М3 опет имамо само адијабатско струјање, па је $T_3 = T_2(p_0/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = 299.8\text{K}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Приметимо да је корекција $\Lambda r/c_p$ мала (десетак пута мања од адијабатске промене), па се зато може додати на адијабатску вредност T_2'. У супротном процес уопште не би могли сматрати ни приближно адијабатским.

   (г) Из укупне масе ваздуха по једном метру квадратном излучи се rm_0 кише, односно rm_0/t по јединици времена, па за $T = 3\text{h}$ падне rm_0T/t килограма кише по метру квадратном, што даје висину воденог стуба $y = rm_0T/t/\rho_v = 0.97\text{mm}$ где је ρ_v густина воде $\boxed{\textbf{3 п}}$.

2. Притисак течности у подножју капиларе мора бити исти као и ван капиларе, а он је умањен за Лапласов притисак и увећан због хидростатичког притиска течности која се попела уз капилару, што даје $2\gamma\cos\frac{\alpha}{2}/r = \rho gh$, где је h тражена висина, а r полупречник капиларе на висини h, док је $\alpha/2$ угао квашења (угао између површине течности и нормале на површ суда) $\boxed{\textbf{2 п}}$. За капилару која се сужава/проширује ка врху, имамо $r = r_0 \mp h\tan\frac{\alpha}{2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Заменом добијамо квадратну једначину $\mp\rho g\tan\frac{\alpha}{2}h^2 + \rho gr_0h - 2\gamma\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Тражимо само позитивна решења, па ако се капилара шири ка врху у обзир долази само $h_1 = (-r_0 + \sqrt{r_0^2 + 8\gamma\sin\frac{\alpha}{2}/\rho g})/2\tan\frac{\alpha}{2}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$ или, ако је $h_1 > H$, течност се пење до краја капиларе, тј. до висине H $\boxed{\textbf{1 п}}$. За капилару која се сужава ка врху треба прво испитати знак дискриминанте $\rho gr_0^2 - 8\gamma\sin\frac{\alpha}{2}$. Ако је она негативна, решења нема, хидростатички притисак је недовољан да уравнотежи површински напон и течност се подиже до максималне могуће висине H $\boxed{\textbf{1 п}}$. Иначе су оба решења позитивна, $h_{2,3} = (r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - 8\gamma\sin\frac{\alpha}{2}/\rho g})/2\tan\frac{\alpha}{2}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Ако је $h_2 > H$ ili $h_3 > H$, онда опет максимална висина јесте H $\boxed{\textbf{1 п}}$.

3. (а) Узмимо да је број честица у стању са енергијом $-\epsilon$ једнак $N_\downarrow$ док је број честица са енергијом ϵ једнак $N_\uparrow$. Означимо разлику ова два броја са $\xi = N_\uparrow - N_\downarrow$. Сада број честица у горњем и доњем стању можемо да изразимо преко ξ и укупног броја честица N: $N_\downarrow = \frac{N-j}{2}$ и $N_\uparrow = \frac{N+j}{2}$. Број комбинација којима можемо да реализујемо стање са укупном енергијом $E = \epsilon\xi$ је $\Omega_E = \frac{N!}{(\frac{N-\xi}{2})!(\frac{N+\xi}{2})!}$ $\boxed{\textbf{5 п}}$. Одавде следи да је Болцманова ентропија за задату вредност енергије $S_E = k_B\ln\left(\frac{N!}{(\frac{N-\xi}{2})!(\frac{N+\xi}{2})!}\right)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

   (б) Користећи добијену зависност за ентропију система и задату релацију за температуру имамо $\frac{1}{T} = \frac{k_B}{2\epsilon}\ln\left(\frac{N-\xi+1}{N+\xi+1}\right)$ $\boxed{\textbf{4 п}}$, одавде можемо да изразимо ξ као $\xi = \frac{E}{\epsilon}$ и да вратимо у претходни израз да бисмо добили $T(E) = \frac{2\epsilon}{k_B}\ln^{-1}\left(\frac{(N+1)\epsilon - E}{(N+1)\epsilon + E}\right)$ $\boxed{\textbf{5 п}}$.

   (в) Убацимо задатке нумеричке вредности из задатка у добијени израз за температуру на енергији E_1 добијамо $T(E_1) = 57.3 \cdot 10^3$ K $\boxed{\textbf{2 п}}$ док за енергију E_2 имамо $T(E_2) = -57.3 \cdot 10^3$ K $\boxed{\textbf{2 п}}$. *Коментар.* Видимо да је температура за другу енергију негативна. Ова појава на први поглед изгледа парадоксално да је температура система негативна, међутим ова ситуација је могућа ако постоји тзв. инверзна насељеност, тј. ако много честица седи у нивоима са високим енергијама. Ако се при додавању енергије систему ентропија смањује тада, по дефиницији, имамо негативну температуру. Негативна температура је чак топлија од позитивне, ако бисмо довели два тела, једно са позитивном а друго са негативном температуром у контакт, енергија би прелазила са тела са негативном температуром на тело са позитивном.

4. У равнотежном случају важи: $mg - kx - \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0(H-d+x)} = 0$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Електрично поље жице је добијено применом теореме Гаус-Остроградског $E2r\pi h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$, тј. јачина поља је $E = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Решење полазне квадратне једначине је

$x_{1,2} = \frac{-mg+k(H-d)\pm\sqrt{(mg-k(H-d))^2+4k(mg(H-d)-\frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0})}}{-2k}$ **[4 п]**. Убацивањем бројних вредности датих у задатку добијамо за решења $x_1 = -946.4\,\mathrm{mm}, x_2 = -17.5\,\mathrm{mm}$ **[2 п]**. Како је речено да је деформација мала, бирамо друго решење и висина куглице ће бити $d - x_2 = 47.5\,\mathrm{mm}$ **[1 п]**. Ако се нити загревају, долази до њиховог истезања и на куглицу делује већа Кулонова сила. Једино што се мења у решењу за равнотежни положај јесте да је висина H умањена и постаје $H - \Delta l$, где је $\Delta l = \alpha l \Delta T$ **[4 п]**. Убацивањем бројних вредности добијамо да је нови равнотежни положај $x_2 = -17.8\,\mathrm{mm}$ **[1 п]**. Нова висина куглице је 47.8 mm **[1 п]**.

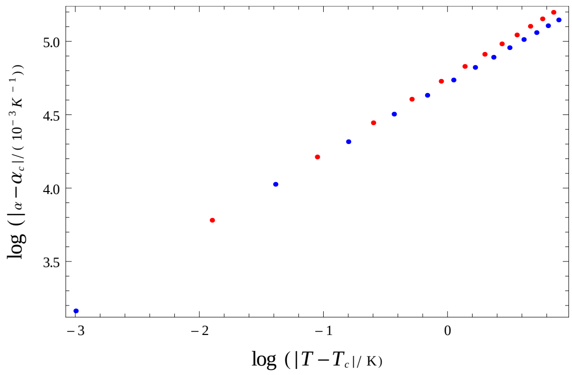
5. (а) Критична тачка одговара тачки у којој зависност из опадајуће постаје растућа. Из табеле видимо да се ово дешава између $T = 2.5\mathrm{K}$ и $T = 2.6\mathrm{K}$, па је $T_c \approx 2.55$ **[4 п]** (признати и било коју другу процену између $T = 2.5\mathrm{K}$ и $T = 2.6\mathrm{K}$). Ренормализовани коефицијент термичког ширења у тој тачки је по табели приближно једнак нули: $\alpha_c \approx 0$ **[3 п]** (такође признати и друге разумне процене).

(б) *1. начин* Зависност $|\alpha - \alpha_c| = f(|T - T_c|)$ можемо приказати на логаритамској скали, као $\ln|\alpha - \alpha_c| = g(\ln|T - T_c|)$. Дата је табела са вредностима логаритама, за податке лево и десно од критичне тачке **[2 п]**.

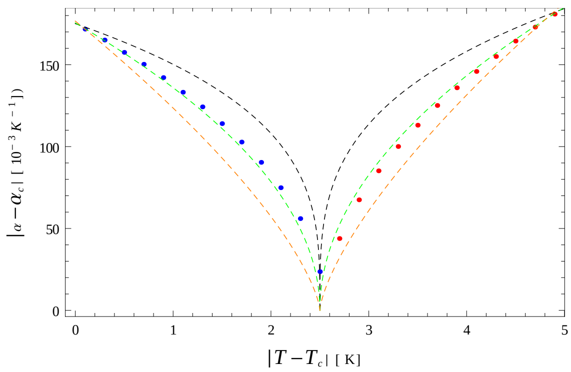
$\ln\frac{T_c-T}{1\mathrm{K}}$	0.896	0.811	0.718	0.615	0.501	0.372	0.223	0.049	-0.163	-0.431	-0.799	-1.386	-3.000
$\ln\frac{\lvert\alpha-\alpha_c\rvert}{10^{-3}\mathrm{K}^{-1}}$	5.146	5.106	5.060	5.012	4.957	4.891	4.822	4.736	4.632	4.504	4.316	4.026	3.163

$\ln\frac{T-T_c}{1\mathrm{K}}$	-1.897	-1.050	-0.598	-0.288	-0.051	0.140	0.223	0.300	0.438	0.560	0.668	0.765	0.854
$\ln\frac{\lvert\alpha-\alpha_c\rvert}{10^{-3}\mathrm{K}^{-1}}$	3.781	4.212	4.445	4.606	4.728	4.891	4.829	4.912	4.982	5.043	5.102	5.153	5.198

Приказујући садржај табеле на графику **[4 п]**, видимо да је зависност приближно линеарна, тј. облика $\ln|\alpha - \alpha_c| = k_\pm \cdot \ln|T - T_c| + n_\pm$. Из зависности $\alpha - \alpha_c = A_\pm \cdot |T - T_c|^{\gamma_\pm}$ датих у задатку логаритмовањем добијамо $\ln|\alpha - \alpha_c| = \gamma_\pm \cdot \ln|T - T_c| + \ln A_\pm$, тј. исту линеарну зависност логаритама као што график сугерише **[3 п]**. Дакле, можемо "од ока"повући праве кроз оба скупа података, и наћи приближно коефицијенте правца $\gamma_\pm$: $\gamma_+ \approx \gamma_- \approx 0.5$ **[4 п]** (тачан линеарни МНК фит даје $\gamma_+ = 0.50, \gamma_- = 0.52$).



(б) *2. начин* Можемо представити зависност $|\alpha - \alpha_c| = f(|T - T_c|)$ на графику **[4 п]**, и потом скицирати функцију $f_\pm(x) = a_\pm x^{\gamma_\pm}$ за неколико вредности $\gamma_\pm$ (за сваки скуп података посебно, слика: црне криве $\gamma = 0.3$, зелене криве $\gamma = 0.5$, наранџасте криве $\gamma = 0.7$) **[5 п]**, уз услов да крива пролази кроз нулу и последњу тачку. На тај начин видимо да функција са $\gamma_+ \approx \gamma_- \approx 0.5$ најбоље пролази кроз тачке, па је то приближна вредност тражених експонената. **[4 п]**



Задатке припремили: ***Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд