



Задатак 1: Скијашко путовање (10 поена)

У овом задатку ћемо разматрати физичке проблеме који се могу приметити током скијашког одмора на планини. Скијаш је кренуо на путовање аутомобилом из Нишке Бање ка Брусу и Копаонику.

- (а) У возњи, точак аутомобила захвата каменчић са површине пута. Захваћени каменчић се затим одлепљује од точка и лети уназад. Проценити одстојање које треба држати од аутомобила испред током возње правим путем брзином константног интензитета $v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, како бисмо били сигурни да нас каменчић неће погодити. Занемарити висину са које се каменчић одлепљује од точка и претпоставити да се точак котрља по подлози без проклизавања. За гравитационо убрзање Земље узети $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (0,5 поена)

- (б) Колико износи растојање из претходног дела задатка, (а), уколико се аутомобили крећу узбрдицом нагибног угла $\delta = 5^\circ$? (1,5 поен)

Да би се снашао на путу, возач укључује навигацију. Поред система за одређивање положаја у простору, навигациони уређај садржи и уређај колоквијално назван акцелерометар. Акцелерометар масе m_a мери своју тежину, $\vec{q}$, и на излазу даје номинално убрзање $\vec{a}_{out} = \frac{\vec{q}}{m_a}$. На пример, акцелерометар који мирује даје убрзање Земљине теже, $\vec{a}_{out,1} = -g\vec{e}_z$, где јединични вектор $\vec{e}_z$ показује вертикално навише, а акцелерометар у слободном паду даје $\vec{a}_{out,2} = 0$. Због удобности коришћења, приказ на екрану навигационог уређаја се мења између портретског (Portrait) и пејзажног (Landscape), тако да вектор убрзања мерен акцелерометром $\vec{a}_{out}$ увек показује према доњој ивици приказане слике. Тело навигационог уређаја је облика квадрата и лежи у равни под углом $\alpha = 45^\circ$ у односу на раван пута. Нормала на екран, као и правац кретања аутомобила, леже у вертикалној равни.

- (в) Аутомобил се креће брзином константног интензитета $v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ у кривини. Током овог кретања, приказ на екрану се променио. Одредити полупречник кривине. (0,5 поена)

У паузама скијања, херој наше приче планира луду журку на планини. Зато аутомобилом вуче приколицу облика квадра са потрепштинама за прославу. Дно приколице прекривено је сандуцима, а изнад њих је балон напуњен хелијумом. Растојање између предње и задње вертикалне стране приколице је $L = 3,00 \text{ m}$, а балон је на растојању $\Delta L = \frac{1}{3}L$ од задње вертикалне стране. Маса празног балона је $m = 5,00 \text{ g}$, а запремина $V = 5,00 \text{ l}$. Густина хелијума је $\rho_{He} = 0,1785 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, а густина ваздуха на стандардном атмосферском притиску, $p_0 = 101325 \text{ Pa}$, је $\rho_V = 1,190 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. На почетку путовања, у Нишкој Бањи која је на надморској висини $h_1 = 250 \text{ m}$ и у којој је ваздушни притисак p_0 , аутомобил кочи са успорењем интензитета $a = 2,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- (г) Проценити време које је потребно балону да удари у вертикалну страну приколице. (1 поен)

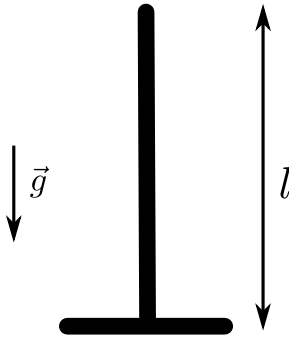
- (д) Проценити ово време, уколико се аутомобил налази на Копаонику на надморској висини $h_2 = 2000 \text{ m}$. Сматрати да је запремина балона константна, да је температура у целој атмосфери константна и да је ваздух идеални гас. (1 поен)

Након доласка на Копаоник, скијаш се уз стазу пење такозваним „сидром“, односно „т-шипком“. Код оваквих ски-лифтова, челична сајла на висини од око 3 m изнад тла се покреће помоћу ротирајућих котура. Са ове сајле су спуштене шипке у облику обрнутог слова Т, или облика сидра (Слика 1).

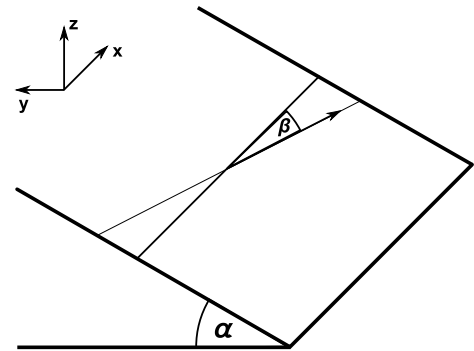
- (ђ) Уколико је дужина тела сидра (основе слова Т) $l = 2,0 \text{ m}$, а дужина главе сидра (пречке слова Т) $L = l/2$, проценити његов период слободних осцилација. Сматрати да је глава сидра права шипка повезана са телом у средишњој тачки и да је цело сидро израђено од хомогене шипке. Сидро осцилује око осе која пролази кроз тачку вешања и паралелна је глави сидра. (1 поен)

Са врха стазе, скијаш се спушта такозваним карвинг скијама. У наставку ћемо размотрити механику класичног скијања и карвинга. Иако су скије прастар изум, карвинг је тек недавно увео прву велику промену облика скија.

Доминантне силе код скијања су тежина скијаша и релативно комплексна реакција подлоге. Додирна површина скија и снега се лако деформише, а сила реакције подлоге је увек нормална на њу. Зато скијаш може контролисати



Слика 1: Облик сидра.



Слика 2: Скијашка стаза.

правац силе реакције нагињањем. Дуж скија, реакција подлоге је занемарива и једине силе на скијаша у овом правцу су слабо трење о снег, мали отпор ваздуха и релативно велика компонента тежине у правцу скија. Компонента силе реакције подлоге у равни стазе и нормална на правац скија спречава бочно проклизавање.

Код скија за карвинг, додирна површина скија и снега је закривљена. Зато је радијус кривине путање којом се скијаш креће без бочног проклизавања функција нагиба скијаша у односу на стазу. Ова зависност омогућава управљање скијама нагињањем тела.

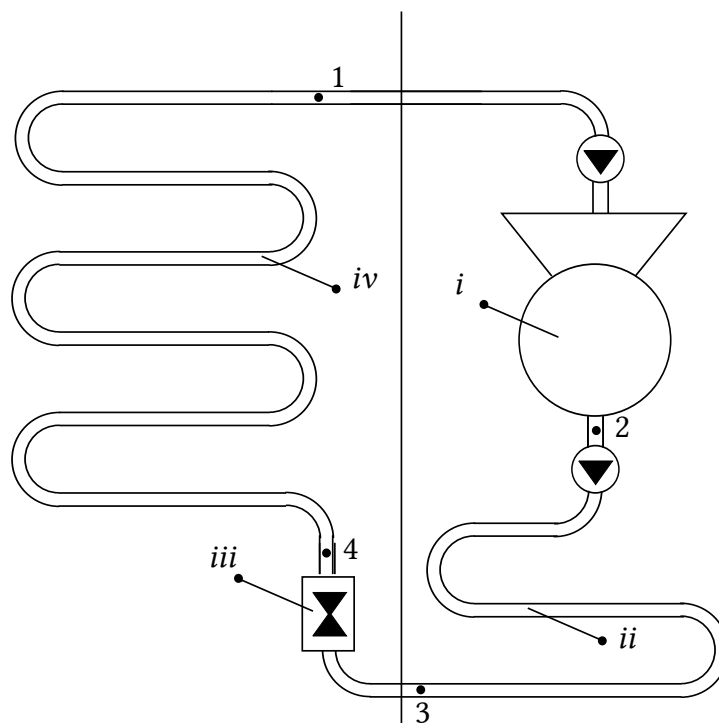
За почетак, размотримо кретање скијаша по стази нагибног угла α . Скијаш масе M се креће праволинијски у правцу који са хоризонталом у равни стазе гради угао β (Слика 2).

- (е) Разложити силу Земљине теже $\vec{Q} = M\vec{g}$ на силу која делује нормално на раван ски стазе, $\vec{F}_N$, силу која делује у правцу кретања скијаша, $\vec{F}_P$, и силу у правцу нормалном на правац кретања скијаша и паралелном са равни стазе, $\vec{F}_{lat}$. Ове силе написати у векторском облику у координатном систему приказаном на слици и израчунати њихове интензитете. У координатном систему приказаном на слици, z -оса показује вертикално навише, x -оса је локална хоризонтала у равни стазе, а y -оса лежи у хоризонталној равни и нормална је на x -осу. **(1,5 поен)**
- (ж) Компонента силе $\vec{Q}$ која делује у правцу кретања убрзава скијаша, док остатак укупне силе чини ефективну тежину скијаша $\vec{F}_q$. Одредити силу $\vec{F}_q$ и њен интензитет. Ова сила је компензована силом реакције подлоге. **(0,5 поена)**
- (з) Израчунати нагибни угао скијаша у односу на нормалу на ски стазу, ϕ . При овом нагибу, компонента силе реакције подлоге компензује силу $\vec{F}_{lat}$, тако да нема бочног проклизавања. **(0,5 поена)**
- (и) Израчунати промењени нагибни угао у односу на нормалу на стазу, Φ , када се скијаш не креће праволинијски. Интензитет брзине скијаша је v , а радијус кривине путање је R . Претпоставити да је брзина скијаша довољно велика, тако да је центрифугална сила већа од релевантне компоненте ефективне тежине скијаша. **(0,5 поена)**
- (ј) Радијус кривине из претходног дела задатка повезан је са нагибним углом Φ и параметром R_{SC} који описује облик скије за карвинг једначином $R(\Phi) = R_{SC} \cos \Phi$. Одредити брзину скијаша у функцији радијуса R и угла β . **(0,5 поена)**
- (к) Наћи радијус кривине R_{max} који описује путању на којој је брзина при карвингу у хоризонталном делу путање, када је $\beta = 0$, максимална. Колико износи овај радијус кривине, а колико максимална брзина скијаша при $\beta = 0$, уколико је $R_{SC} = 14,0$ m, а нагибни угао ски стазе $\alpha = 30^\circ$? **(1 поен)**



Задатак 2: Клима уређај (10 поена)

Клима уређаји служе за расхлађивање просторија у топлим летњим данима. У овом задатку ћемо детаљно размотрити принцип њиховог рада. Клима уређај се састоји од јединице која је постављена унутар просторије и јединице која је постављена ван просторије. Радни флуид клима уређаја који ћемо разматрати је 1,1,1,2-тетрафлуороетан. Његова температура испаравања на притиску $p_1 = 133 \text{ kPa}$ је $t_1 = -20,0^\circ\text{C}$, а на притиску $p_3 = 1,00 \text{ MPa}$ је $t_3 = 40,0^\circ\text{C}$. У јединици унутар просторије радни флуид се налази на температури t_1 и зато прима топлоту од просторије (све док је њена температура већа од t_1), док је у јединици која се налази ван просторије радни флуид на температури t_3 због чега предаје топлоту околина (све док је спољашња температура мања од t_3). Тако ефективно радни флуид избацује топлоту из просторије у околину.



Слика 3: Шематски приказ главних компоненти клима уређаја: *i*) компресор; *ii*) кондензатор; *iii*) сужење; *iv*) евапоратор. Компоненте са леве стране чине унутрашњу јединицу, а оне са десне стране чине спољашњу јединицу клима уређаја.

Шематски приказ главних компоненти клима уређаја је дат на слици 3. Главна компонента јединице која се налази унутар просторије је евапоратор. Кад клима уређај ради у стационарном стању, у евапоратору се флуид налази на температури t_1 и притиску p_1 у стању које је смеша течног и гасовитог стања. На излазу из евапоратора флуид је у гасовитом стању на температури t_1 и притиску p_1 (стање 1). Флуид се из евапоратора даље одводи у компресор који се налази ван просторије. У компресору се флуид сабија тако да се на његовом излазу налази у гасовитом стању притиска $p_2 = p_3$ и температуре $t_2 = 70,0^\circ\text{C}$ (стање 2). Из компресора флуид се одводи у кондензатор где губи топлоту (предаје је околина) при константном притиску p_2 . На излазу из кондензатора флуид се налази у течном стању температуре t_3 и притиска p_3 (стање 3). Флуид се затим кроз сужење враћа назад у евапоратор чиме се у адијабатском процесу његов притисак и температура снижавају на $p_4 = p_1$ и $t_4 = t_1$ (стање 4) и доводи се у стање које је смеша течног и гасовитог. У евапоратору флуид поново испарава, тако да се на излазу из евапоратора налази у стању 1, и цео циклус се онда понавља.

Специфична топлота испаравања радног флуида је $h_1 = 220 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ на притиску p_1 и $h_3 = 160 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ на притиску p_3 . Сматрати да се радни флуид у гасовитом стању понаша као идеални гас коефицијента адијабате $\gamma = 1,10$. Моларна



маса радног флуида је $M = 102 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Универзална гасна константа је једнака $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$, а $0^\circ\text{C} = 273,15\text{K}$. Сматрати да је густина флуида у гасовитом стању много мања него у течном стању.

- (а) Одредити рад a_{12} који се изврши над јединицом масе флуида у компресору при сабијању флуида, као и рад a_{23} који се изврши над флуидом при његовој кондензацији у кондензатору. Сматрати да при сабијању гаса у компресору притисак линеарно зависи од запремине гаса. (1 поен)
- (б) Одредити разлику ентропије по јединици масе флуида $s_1 - s_4$ у стањима 1 и 4, као и рад a_{41} који се изврши над јединицом масе флуида при преласку из стања 4 у стање 1 у евапоратору. (4 поена)
- (в) Одредити разлику унутрашње енергије по јединици масе $u_3 - u_4$ у стањима 3 и 4 и наћи рад a_{34} који се изврши над јединицом масе флуида при преласку из стања 3 у 4. (2 поена)
- (г) Колика је ефикасност η оваквог клима уређаја? Ефикасност се дефинише као однос количине топлоте која се одведе из просторије у једном циклусу и рада који се изврши над флуидом током тог циклуса. Упоредити добијени резултат са ефикасношћу клима уређаја који ради по инверзном Карноовом циклусу са температурама једнаким највећој и најмањој температури коју достиже радни флуид разматраног клима уређаја. (1 поен)

Према закону провођења топлоте, количина топлоте која прође кроз спољашње зидове просторије у јединици времена је једнака

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \alpha S \Delta T,$$

где је α коефицијент провођења топлоте који је карактеристика материјала од кога су направљени зидови, S површина спољашњих зидова просторије, а ΔT разлика температура околине и просторије.

Клима уређај који је разматран у овом задатку хлади просторију чији спољашњи зидови имају површину $S = 50,0 \text{ m}^2$. Коефицијент провођења топлоте кроз зидове је $\alpha = 2,20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$. Снага клима уређаја је $P = 1,00 \text{ kW}$. Уколико нисте урадили део под (г), остатак задатка можете да радите користећи вредност $\eta = 2,09$.

- (д) До које минималне температуре овај клима уређај може да охлади просторију, ако је спољашња температура $t_s = 30,0^\circ\text{C}$? (1 поен)
- (ђ) Који проценат времена овај клима уређај треба да буде укључен да би просторију охладио до температуре $t_u = 25,0^\circ\text{C}$? (1 поен)

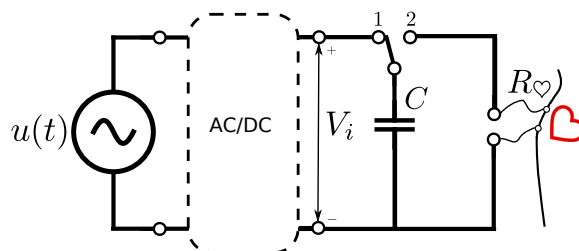


Задатак 3: Дефибрилатор (10 поена)

Непосредни узрок многих смрти је вентрикуларна фибрилација, која представља најтежи облик поремећаја срчаног ритма, односно несинхронизованог грчења (контракције) мишића срчаних комора. У том стању срце упумпава врло малу количину крви у крвоток због чега мозак остаје без крви и након само пар секунди од почетка вентрикуларне фибрилације настаје несвестица, а кроз неколико минута следи и мождана смрт. То се може спречити помоћу електрошока срца. Да би човек осетио електрошок, јачина електричне струје која пролази кроз његово тело мора бити већа од $I_{\min} = 1,00 \text{ mA}$.

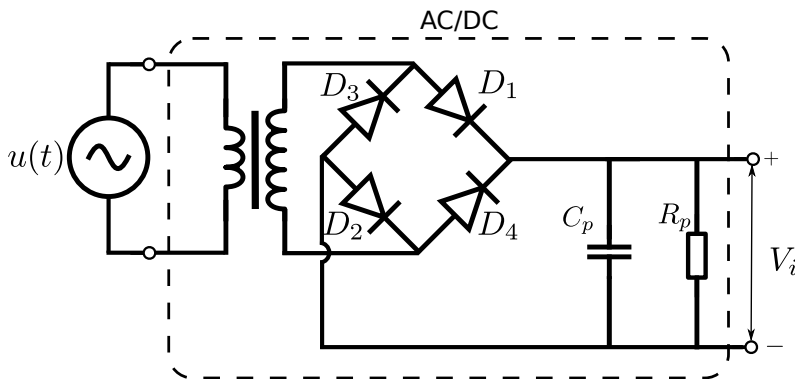
- (а) Колики треба да буде електрични отпор система "метални нож-тело човека", како човек не би осетио електричну струју у случају да металним ножем додирне електрични грејач тостера вадећи парче загрејаног хлеба? Тостер се напаја из градске напонске мреже ефективне вредности напона $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$. (0,5 поена)

Код пацијента са вентрикуларном фибрилацијом електрошок се изазива помоћу медицинског уређаја дефибрилатора, чија је електрична схема приказана на слици 4. Дефибрилатор се састоји од AC/DC претварача, односно претварача наизменичног у једносмерни напон, затим кондензатора који се најпре пуни до високог напона (прекидач у положају 1), а потом празни кроз тело пацијента (прекидач у положају 2). Тако се срчани мишић електрошоком тренутно парализује, а након тога срце поново почиње да ради нормално.



Слика 4: Електрична схема дефибрилатора.

У овом делу задатка размотрићемо претварач наизменичног у једносмерни напон, чија је електрична схема приказана на слици 5. Претварач се састоји од трансформатора прикљученог на градску напонску мрежу примаром од $N_0 = 200$ навојака, а чији секундар има $N_1 = 2000$ навојака, затим 4 идеалне диоде D_i ($i = 1, 2, 3, 4$), кондензатора капацитета $C_p = 100 \mu\text{F}$ и отпорника отпорности $R_p = 3,00 \text{ k}\Omega$. Напон из градске напонске мреже има ефективну вредност U_{eff} и фреквенцију $\nu = 50,0 \text{ Hz}$. Идеална диода је електронска компонента која дозвољава проток електричне струје у једном смеру (када је директно поларисана) без отпора, док у супротном смеру (када је инверзно поларисана) представља бесконачан отпор.



Слика 5: Електрична схема претварача наизменичног у једносмерни напон.

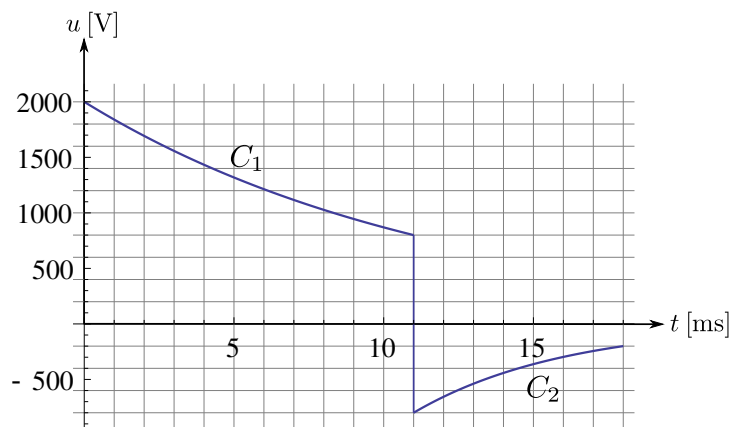


- (б) Скицирати график временске зависности излазног напона претварача у случају када кондензатор C_p није прикључен у електрично коло. Напон градске мреже се мења по синусном закону $u(t) = U_0 \sin(2\pi\nu t)$. (1,5 поен)
- (в) Скицирати график временске зависности излазног напона претварача у случају када је кондензатор C_p прикључен у електрично коло. У тренутку $t = 0$ кондензатор C_p је ненаелектрисан, а напон градске мреже се мења по синусном закону $u(t) = U_0 \sin(2\pi\nu t)$. Која је улога овог кондензатора у претварачу? (2 поена)
- (г) Колики је минимални напон $V_{\min}$, а колики максимални напон $V_{\max}$ на излазу претварача? Признавање се сва образложена нумеричка решења која од тачних одступају за мање од 1%. Колику максималну релативну грешку правимо ако претпоставимо да напон на излазу има константну вредност $V_i = \frac{1}{2}(V_{\max} + V_{\min})$? (1,5 поен)

У наставку задатка ћемо размотрити како дефибрилатор изазива електрошок срца. Сматрати да излазни напон претварача има константну вредност V_i . Уколико нисте урадили делове (в) и (г), можете користити $V_i = 3,00 \text{ kV}$. Након што се дефибрилатор прикључи на тело пацијента, прекидач са слике 4 се пребацује из положаја 1 у положај 2. Тада кроз тело пацијента почиње да тече електрична струја, при чему време протицања струје веће од $I_{\min}$ треба да буде мање од $\Delta t_{\max} = 30,0 \text{ ms}$ како не би дошло до опекотина на кожи пацијента. Укупна електрична отпорност при електрошоку срца је константна и креће се у интервалу од $R_{\heartsuit}^{\min} = 50,0 \Omega$, па до $R_{\heartsuit}^{\max} = 150 \Omega$, што зависи од стања пацијента, произвођача дефибрилатора, итд.

- (д) Колики је максимални капацитет кондензатора $C = C_{\max}$ који се може уградити у дефибрилатор? Колика је енергија тог кондензатора када је напуњен? (2 поена)

У последње време популарни су бифазни дефибрилатори код којих се у току електрошока смер струје мења, што се постиже коришћењем два кондензатора, а на тај начин се смањује вероватноћа да дође до опекотина на кожи пацијента. Наиме, у првој фази електрошока кондензатор капацитета C_1 се празни у кратком временском интервалу, након чега се у другој фази, готово тренутно мења поларитет напона, и кондензатор капацитета C_2 почиње са пражњењем. Укупна енергија која се преда пацијенту електрошоком је $E = 180 \text{ J}$. Временска зависност напона на кондензаторима при употреби таквог дефибрилатора приказана је на слици 6.



Слика 6: Временска зависност напона на кондензаторима бифазног дефибрилатора. Назначен је капацитет кондензатора који се празни у свакој од фаза електрошока.

- (ђ) Колики су капацитети кондензатора C_1 и C_2 , а колика отпорност $R_{\heartsuit}$? (1,5 поен)
- (е) Колика је средња електрична струја која протиче кроз тело пацијента у свакој од фаза електрошока? Колики удео укупне енергије се ослобађа у свакој од ових фаза? (1 поен)



Решење задатка 1

- (а) У систему референце везаном за аутомобил, каменчић излеће под неким углом α , и наставља кретање као пројектил косог хица. Једначине кретања каменчића по x и y оси су $x = v \cos(\alpha)t$ и $y = v \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$. Замена услова $y(T) = 0$ у другу једначину даје време лета. Заменом у прву једначину добија се израз за пређени пут $D = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g}$. Овај израз има максимум када је $\alpha = 45^\circ$. Замена нумеричких вредности даје $D = 28 \text{ m}$.
- (б) У овом делу задатка погодније је узети систем референце везан за аутомобил, чије је x координата паралелна са путем, а y координата нормална на пут. У овом систему, једначине кретања каменчића по x и y оси имају облик $x = v \cos(\alpha)t + \frac{g \sin(\delta)t^2}{2}$ и $y = v \sin(\alpha)t - \frac{g \cos(\delta)t^2}{2}$. Друга једначина и услов $y(T) = 0$, дају време лета $T = \frac{2v \sin \alpha}{g \cos \delta}$. Заменом овог израза у прву једначину се добија $D = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g \cos \delta} + \frac{2v^2 \sin^2 \alpha}{g \cos^2 \delta} \sin \delta$. Из овог израза није очигледно при којој вредности угла се достиже максимални домет, па се он одређује налажењем нуле првог извода $\frac{dD}{d\alpha} = 0$. Добијамо да угао α може имати вредности $\tan 2\alpha = -\cot \delta$, односно $\alpha = -42,5^\circ + n \cdot 90^\circ$ (где је n природан број), при чему само вредност $\alpha = 47,5^\circ$ може имати физичког смисла и одговара максимуму. Заменом вредности угла у једначину за домет, добија се $D = 31 \text{ m}$.
- (в) Убрзање ка доњој страници навигације износи $a_z = g \sin \alpha$, док је убрзање ка бочној страници $a_x = \frac{v^2}{R}$. Приказ ће се променити када је испуњен услов $\frac{v^2}{R} \geq g \sin \alpha$, односно када је полупречник кривине $R \leq 40 \text{ m}$.
- (г) Хоризонтално убрзање балона се добија из једначине $(m + m_{He})a_b = \rho_V V a - (m + m_{He})a$, односно $a_b = (\frac{\rho_V V}{m + \rho_{He} V} - 1)a$ и износи $a_b = 0,0195 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Време које је потребно балону да удари у страну приколице је онда $t = \sqrt{\frac{2\Delta L}{a_b}}$, односно $t = 10,1 \text{ s}$.
- (д) Са порастом висине, густина ваздуха ће опадати у складу са барометарском формулом $\rho_{Vh} = \rho_{V0} e^{-\frac{\rho_V g(h_2 - h_1)}{p_0}}$. Заменом бројних вредности добијамо густину ваздуха на Копаонику, $\rho_{Vh} = 0,973 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Убрзање балона је $a_b = -0,349 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, а време судара $t = \sqrt{\frac{2(L - \Delta L)}{|a_b|}}$, односно $t = 3,4 \text{ s}$.
- (ђ) Сидро се може посматрати као физичко клатно, чији се период осциловања рачуна по формули $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$. Момент инерције тела сидра у односу на тачку вешања је $I_1 = \frac{1}{12}m_1 l^2 + m_1 \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3}m_1 l^2$, а главе сидра у односу на тачку вешања $I_2 = m_2 l^2$. Користећи однос $\frac{m_1}{l} = \frac{m_2}{L}$, укупан момент инерције сидра је $I = I_1 + I_2 = \frac{5m_1 l^2}{6}$. Укупна маса сидра је $m = m_1 + m_2 = m_1(1 + \frac{L}{l}) = \frac{3}{2}m_1$, а тежиште сидра се налази на растојању $d = \frac{\frac{m_1 l}{2} + m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3}l$ од тачке вешања. Заменом ових израза у формулу за период добијамо $T = 2\pi \sqrt{\frac{5l}{6g}}$, односно $T = 2,6 \text{ s}$.
- (е) Интензитет нормалне компоненте силе износи $F_N = Q \cos \alpha$. Разлагањем на компоненте у координатном систему приказаном на слици ова сила се може записати у векторском облику $\vec{F}_N = F_N \sin \alpha \vec{e}_y - F_N \cos \alpha \vec{e}_z = Q \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_y - Q \cos^2 \alpha \vec{e}_z$. Преостале две компоненте се могу добити разлагањем силе која је паралелна скијашкој стази и чији је интензитет $F_S = Q \sin \alpha$. Интензитети добијених сила су $F_P = F_S \sin \beta$ и $F_{lat} = F_S \cos \beta$, а њихови векторски облици су: $\vec{F}_P = F_P \cos \beta \vec{e}_x - F_P \sin \beta \cos \alpha \vec{e}_y - F_P \sin \beta \sin \alpha \vec{e}_z = Q \sin \alpha \sin \beta \cos \beta \vec{e}_x - Q \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta \vec{e}_y - Q \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \vec{e}_z$ и $\vec{F}_{lat} = \vec{Q} - \vec{F}_P - \vec{F}_N = -Q \sin \alpha \sin \beta \cos \beta \vec{e}_x - Q \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta \vec{e}_y - Q \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \vec{e}_z$.
- (ж) Из услова задатка следи да је $\vec{Q} = \vec{F}_q + \vec{F}_P$. Сила $\vec{F}_q$ има векторски облик
- $$\vec{F}_q = -Q \sin \alpha \sin \beta \cos \beta \vec{e}_x + Q \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta \vec{e}_y + Q(\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 1)\vec{e}_z,$$
- а њен интензитет износи $F_q = Q \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$.
- (з) Скијаш је постављен у правцу силе $\vec{F}_q$ која има ортогоналне компоненте F_N и F_{lat} . Нагиб скијаша у односу на нормалу на стази, ϕ , једнак нагибу резултанте сила у односу на нормалу, па је $\tan \phi = \frac{F_{lat}}{F_N}$. Из познатих интензитета сила F_{lat} и F_N , угао је решење једначине $\tan \phi = \tan \alpha \cos \beta$.



- (и) У до сада разматраном случају праволинијске путање, збир свих сила које делују на скијаша је усмерен у правцу кретања. На криволинијској путањи, укупна сила има и компоненту нормалну на правац кретања - центрипеталну силу $\vec{F}_C$. На скијаша делују само две силе, тежина $\vec{Q}$ и реакција подлоге $\vec{N}$. Закривљење путање изазвано је компонентом $\vec{F}_C$ укупне силе, усмереном дуж $\vec{e}_{lat}$. Овај правац је нормалан на путању скијаша и лежи у равни стазе, то јест показује у правцу $\vec{F}_{lat}$. Користећи израз за интензитет центрипеталне силе, добијамо њен векторски облик $\vec{F}_C = \pm \frac{Mv^2}{R} \frac{\vec{F}_{lat}}{F_{lat}}$. Укупна сила дуж $\vec{e}_{lat}$ је $\vec{F}_{LAT} = \vec{e}_{lat} \cdot (\vec{Q} + \vec{N})\vec{e}_{lat} = \vec{F}_{lat} + \vec{F}_C$, где $\vec{F}_{lat}$ компензује компоненту тежине, а $\vec{F}_C$ изазива закривљење путање. Интензитет укупне латералне силе износи $F_{LAT} = |\frac{Mv^2}{R} \pm Mg \sin \alpha| \cos \beta|$. Слично као у претходном делу задатка, нагибни угао скијаша се сада израчунава као $\tan \Phi = \frac{F_{LAT}}{F_N}$, односно $\tan \Phi = |\frac{v^2}{gR \cos \alpha} \pm \tan \alpha| \cos \beta|$. Уз претпоставку да је брзина скијаша довољно велика да је први члан већи, и узимајући у обзир услове за угао β , добија се $\tan \Phi = \frac{v^2}{gR \cos \alpha} - \tan \alpha \cos \beta$.
- (ј) Како би нашли брзину у функцији датих параметара, потребно је заменити угао Φ из израза датог у задатку у израз добијен у делу под (ј). Из тригонометријских трансформација $\tan \Phi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \Phi}}{\cos \Phi}$ следи да је $\tan \Phi = \sqrt{\frac{R_{SC}^2}{R^2} - 1}$, па је тражена зависност $\sqrt{\frac{R_{SC}^2}{R^2} - 1} = \frac{v^2}{gR \cos \alpha} - \tan \alpha \cos \beta$, односно $v = \sqrt{gR \cos \alpha} \sqrt{\frac{R_{SC}^2}{R^2} - 1 + \tan \alpha \cos \beta}$.
- (к) Радијус кривине при углу $\beta = 0$ који одговара максималној брзини карвинга се налази тражењем првог извода израза добијеног у претходном делу задатка и изједначавањем са нулом $\frac{dv}{dR} = 0$. Добијени услов је $\tan \alpha - \frac{R}{\sqrt{R_{SC}^2 - R^2}} = 0$, одакле следи да је $R = R_{SC} \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$, односно $R = R_{SC} \sin \alpha$. Заменом овог израза за радијус кривине у израз за брзину, добија се да је максимална брзина $v_{max} = \sqrt{gR_{SC}}$. Убацавањем нумеричких вредности, за радијус кривине и максималну брзину скијаша се добија $R = 7,0 \text{ m}$ и $v_{max} = 11,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Решење задатка 2

- (а) С обзиром да је зависност притиска од запремине у процесу 1-2 линеарна и да је рад извршен над флуидом једнак површини испод графика поменуте зависности, следи да је тражени рад a_{12} једнак површини трапеза висине $v_1 - v_2$ и дужине основица p_1 и p_2 , из чега следи $a_{12} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(v_1 - v_2)$, где су v_1 и v_2 запремине коју заузима јединица масе флуида у стањима 1 и 2. Из једначине стања идеалног гаса следи $p_2 v_2 = RT_2/M$ и $p_1 v_1 = RT_1/M$. Користећи претходне једначине добијамо

$$a_{12} = \frac{R}{2M} \left[T_1 \left(1 + \frac{p_2}{p_1} \right) - T_2 \left(1 + \frac{p_1}{p_2} \right) \right] = 72,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

Како је по услову задатка процес 2-3 изобарски, у том процесу се гас најпре хлади при константном притиску p_3 до температуре t_3 (стање 2'), а затим се на константној температури и притиску кондензује док не пређе у течно стање (стање 3). Рад извршен над јединицом масе гаса у процесу 2-2' је $a_{22'} = p_3(v_2 - v_{2'})$, па се користећи једначине стања $p_3 v_2 = RT_2/M$ и $p_3 v_{2'} = RT_3/M$ добија $a_{22'} = \frac{R}{M}(T_2 - T_3) = 2,44 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Даље је $a_{2'3} = p_3(v_{2'} - v_3)$, при чему је $v_3 \ll v_{2'}$ јер је у стању 3 флуид у течном стању, па, користећи једначину стања $p_3 v_{2'} = RT_3/M$, следи $a_{2'3} = RT_3/M = 25,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Коначно се добија $a_{23} = a_{22'} + a_{2'3} = \frac{RT_2}{M} = 28,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

- (б) Пошто је $s_1 - s_4 = (s_1 - s_{2'}) + (s_{2'} - s_3) + (s_3 - s_4)$, тражена разлика се може одредити налажењем сваког од чланова у загради у претходном изразу. Како је процес 3-4 адијабатски, следи $s_3 - s_4 = 0$. Даље је $s_{2'} - s_3 = h_3/T_3$ јер је процес 2'-3 изотермски. Да бисмо нашли члан $s_1 - s_{2'}$, искористићемо чињеницу да је ентропија искључиво функција стања, те се овај члан може наћи рачунајући га за било који процес који почиње у стању 1 и завршава се у стању 2'. Пошто је промену ентропије најлакше рачунати за изотермске и адијабатске процесе, конструисаћемо процес у коме је гас на почетку у стању 1, затим изотермским процесом долази до стања x , а потом адијабатским процесом долази до стања 2'. Једначина адијабате је $p_3 v_{2'}^\gamma = p_x v_x^\gamma$, једначине стања 1, 2' и x су $p_1 v_1 = RT_1/M$, $p_3 v_{2'} = RT_3/M$ и $p_x v_x = RT_1/M$, промена ентропије по јединици масе у изотермском процесу је за идеалан гас $s_x - s_1 = \frac{R}{M} \ln(v_x/v_1)$, а у адијабатском $s_{2'} - s_x = 0$. Из ових једначина следи $s_{2'} - s_1 = \frac{R}{M} \ln \left[\frac{p_1}{p_3} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]$, одакле је коначно

$$s_1 - s_4 = h_3/T_3 - \frac{R}{M} \ln \left[\frac{p_1}{p_3} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] = 485 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Даље је $a_{41} = p_1(v_4 - v_1)$. Приметимо и да је разлика ентропија по јединици масе за течно (s_L) и гасовито стање (s_1) на температури t_1 и притиску p_1 једнака $s_1 - s_L = h_1/T_1 = 869 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$. Пошто је $s_1 - s_4 < s_1 - s_L$, закључујемо да је у стању 4 флуид у стању које је смеша течног и гасовитог, при чему је масени удео гасовитог стања једнак $r = 1 - \frac{s_1 - s_4}{s_1 - s_L} = 44,2\%$. Зато, занемарујући запремину течности, следи $v_4 = r v_1$, одакле је $a_{41} = p_1 v_1 (r - 1)$. Користећи једначину стања $p_1 v_1 = RT_1/M$, следи $a_{41} = \frac{RT_1}{M} (r - 1) = -\frac{RT_1}{M} \frac{s_1 - s_4}{h_1/T_1} = -11,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

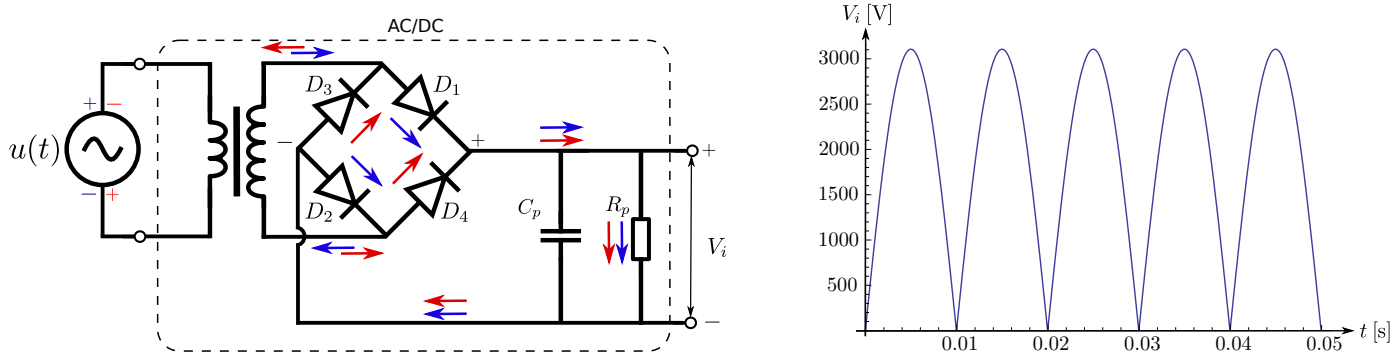
- (в) Разлика $u_3 - u_4$ се може наћи из $u_3 - u_4 = (u_3 - u_{2'}) + (u_{2'} - u_1) + (u_1 - u_4)$. Из првог закона термодинамике за процес 2'-3 је $u_3 - u_{2'} = a_{2'3} - h_3 = -134,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Користећи чињеницу да је унутрашња енергија по јединици масе идеалног гаса дата са $u = C_v T/M$, где је C_v моларни топлотни капацитет при константној запремини који је једнак $C_v = R/(\gamma - 1)$, следи $u_{2'} - u_1 = \frac{R}{M(\gamma-1)}(T_3 - T_1) = 48,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Из првог закона термодинамике за процес 4-1 следи $u_4 - u_1 = -T_1(s_1 - s_4) - a_{41} = -111,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Узимајући у обзир све ове доприносе, следи $u_3 - u_4 = 25,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Користећи први закон термодинамике за адијабатски процес 3-4 следи и $a_{34} = -(u_3 - u_4) = -25,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

- (г) Ефикасност уређаја је $\eta = \frac{T_1(s_1 - s_4)}{a_{41} + a_{12} + a_{23} + a_{34}} = 1,95$, а за инверзни Карноов циклус износи $\eta_c = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = 2,81 > \eta$.
- (д) Најмања температура просторије се постиже када клима уређај непрестано ради пуном снагом. Количина топлоте коју у јединици времена клима уређај избацује у околину је у стационарном стању једнака количини топлоте која у просторију улази кроз зидове. Из овог услова следи $\eta P = \alpha S(t_s - t_{\min})$, одакле је $t_{\min} = t_s - \frac{\eta P}{\alpha S} = 12,3^\circ\text{C}$ (ученици који су користили $\eta = 2,09$ треба да добију $t_{\min} = 11,0^\circ\text{C}$).
- (ђ) Када уређај ради само део времена β ($0\% \leq \beta \leq 100\%$), израз из дела (д) се мења у $\beta \eta P = \alpha S(t_s - t_u)$. Одатле је $\beta = \frac{\alpha S(t_s - t_u)}{\eta P} = 28,2\%$ (ученици који су користили $\eta = 2,09$ треба да добију $\beta = 26,3\%$).



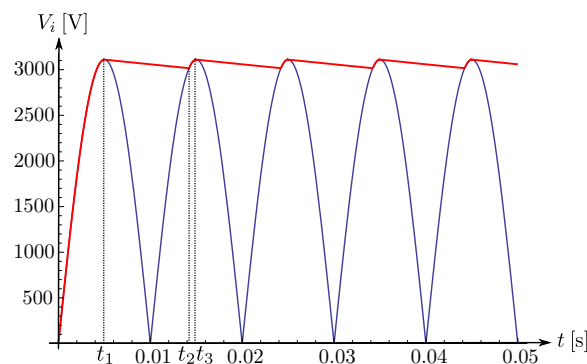
Решење задатка 3

- (а) Минимални електрични отпор система "метални нож - тело човека" треба да буде $R_{\min} = \frac{U_0}{I_{\min}}$, где је $U_0 = U_{\text{eff}}\sqrt{2} = 311 \text{ V}$ амплитуда наизменичног напона градске мреже, па је $R_{\min} = 0,311 \text{ M}\Omega$.
- (б) Диоде проводе у паровима, у једној полупериоди проводе диоде D_1 и D_2 , док у другој проводе диоде D_3 и D_4 . У зависности од поларитета наизменичног напона, смер струје кроз поједине гране кола означен је плавим и црвеним стрелицама, видети слику 1(а). У случају када кондензатор није прикључен у коло, напон на секундару једнак је паду напона на отпорнику, односно излазном напону. Амплитуда наизменичног напона градске мреже је U_0 , па је амплитуда напона на секундару трансформатора $U_1 = \frac{N_1}{N_0}U_0 = 3,11 \text{ kV}$. Смер струје у градској мрежи мења се сваких $T_{1/2} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2\nu} = 10,0 \text{ ms}$, што уједно представља и период осциловања излазног напона V_i . График временске зависности излазног напона приказан је на слици 1(б).



Слика 1: (а) Електрично коло AC/DC претварача. (б) Излазни напон у функцији од времена.

- (в) У току првог полупериода, диоде D_1 и D_2 проводе, па се кондензатор пуни до максималног напона $V_{\max} = U_1$, који се постиже у тренутку $t_1 = \frac{T_{1/2}}{2} = \frac{1}{4\nu}$. Након тога, напон на секундару почиње да се смањује, па диода D_1 престаје да проводи, а кондензатор почиње да се празни преко отпорника R_p . Кондензатор се празни до тренутка t_2 када се напони на кондензатору и секундару поново не изједначе. Тада почињу да проводе диоде D_3 и D_4 и кондензатор се поново пуни до максималног напона, који се постиже у тренутку $t_3 = t_1 + T_{1/2} = \frac{3}{4\nu}$, након чега се читав процес периодично понавља са периодом $T_{1/2}$. Приликом пражњења кондензатора (за $t_1 \leq t \leq t_2$) тренутне вредности



Слика 2: Излазни напон у функцији од времена са прикљученим кондензатором (црвена линија) и без кондензатора (плава линија).

напона на кондензатору u_{C_p} и отпорнику u_{R_p} задовољавају $u_{C_p} + u_{R_p} = 0$, односно $\frac{d}{dt}u_{C_p} + \frac{1}{R_p C_p}u_{C_p} = 0$. Добијена диференцијална једначина раздваја променљиве и након интеграције следи $u_{C_p}(t) = u_{C_p}(t_1)e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} = V_{\max}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$, где је $\tau = R_p C_p$ временска константа кола. Како је време пражњења кондензатора мање од $T_{1/2}$, а $\tau \gg T_{1/2}$ важи



$u_{C_p}(t) \approx V_{\max} (1 - \frac{t-t_1}{\tau})$. График временске зависности излазног напона приказан је на слици 2. Уколико је временска константа кола велика у односу на период улазног наизменичног напона, напон на отпорнику се веома мало промени током пражњења кондензатора, а тиме се и таласност излазног напона прилично смањује. Како временска константа кола зависи од капацитета кондензатора, погодним избором кондензатора може се смањити таласност излазног напона.

(г) Максимални напон на излазу претварача је $V_{\max} = 3,11 \text{ kV}$, а минимални напон се добија решавањем трансцендентне једначине $V_{\min} = |U_1 \sin(2\pi\nu t_2)| = U_1 (1 - \frac{t_2 - \frac{1}{2}T_{1/2}}{\tau})$ по t_2 , при чему је $10,0 \text{ ms} < t_2 < 15,0 \text{ ms}$. Добија се $t_2 = 14,2 \text{ ms}$ и $V_{\min} = 3,01 \text{ kV}$. Релативна грешка коју правимо узимајући да је у тренутку t излазни напон једнак $V_i = \frac{1}{2}(V_{\max} + V_{\min})$ је $\delta V_i(t) = \frac{|\frac{1}{2}(V_{\max} + V_{\min}) - V_i(t)|}{V_i(t)}$. Ова релативна грешка постиже максималну вредност за $V_i(t) = V_{\min}$ и она износи $(\delta V_i)_{\max} = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2 V_{\min}} \cdot 100\% = 1,59\%$.

(д) Електрошок срца представља пражњење кондензатора у $R_{\heartsuit}C$ колу, па аналогно као у делу (в) за напон на кондензатору важи $u_C(t) = V_i e^{-t/\tau_{\heartsuit}}$, где је $\tau_{\heartsuit} = R_{\heartsuit}C$. Електрична струја која пролази кроз срце пацијента, опада по експоненцијалном закону $i(t) = V_i e^{-t/\tau_{\heartsuit}}/R_{\heartsuit}$, а електрошок се завршава када она достигне вредност $I_{\min}$. Дакле, време трајања електрошока је $\Delta t = R_{\heartsuit}C \ln\left(\frac{V_i}{R_{\heartsuit}I_{\min}}\right)$. Да бисмо израчунали максимални капацитет кондензатора потребно је испитати ток функције $\Delta t(R_{\heartsuit})$ на задатом интервалу $[R_{\heartsuit}^{\min}, R_{\heartsuit}^{\max}]$. Први извод ове функције је $(\Delta t)'(R_{\heartsuit}) = C \left[\ln\left(\frac{V_i}{R_{\heartsuit}I_{\min}}\right) - 1 \right]$ па се његовим изједначавањем са нулом добија $R_{\heartsuit}^{\text{ext}} = \frac{V_i}{e I_{\min}}$. Из израза за $(\Delta t)'(R_{\heartsuit})$ се види да за $R < R_{\heartsuit}^{\text{ext}}$ важи $(\Delta t)'(R_{\heartsuit}) > 0$, а за $R > R_{\heartsuit}^{\text{ext}}$ важи $(\Delta t)'(R_{\heartsuit}) < 0$, одакле следи да функција $\Delta t(R_{\heartsuit})$ достиже максимум за $R = R_{\heartsuit}^{\text{ext}}$. Како је $R_{\heartsuit}^{\text{ext}} = 1,13 \text{ M}\Omega > R_{\heartsuit}^{\max}$ функција $\Delta t(R_{\heartsuit})$ је монотонно растућа на интервалу $[R_{\heartsuit}^{\min}, R_{\heartsuit}^{\max}]$, па је максимална вредност капацитета кондензатора $C_{\max} = \Delta t_{\max} / \left[R_{\heartsuit}^{\max} \ln\left(\frac{V_i}{R_{\heartsuit}^{\max} I_{\min}}\right) \right] = 20,1 \text{ }\mu\text{F}$. Енергија напуњеног кондензатора је $E = \frac{1}{2} C_{\max} V_i^2 = 94,5 \text{ J}$.

(ђ) Са графика приказаног у тексту задатка види се да се у првој фази кондензатор C_1 празни од напона $V_1 = 2000 \text{ V}$ до напона $V_2 = 800 \text{ V}$ током временског интервала од $\Delta t_1 = 11 \text{ ms}$, при чему важи

$$V_2 = V_1 e^{-\frac{\Delta t_1}{R_{\heartsuit} C_1}}. \quad (1)$$

Слично, у другој фази кондензатор C_2 се празни од напона V_2 до напона $V_3 = 200 \text{ V}$ током временског интервала од $\Delta t_2 = 7 \text{ ms}$, па важи

$$V_3 = V_2 e^{-\frac{\Delta t_2}{R_{\heartsuit} C_2}}. \quad (2)$$

Такође, укупна ослобођена енергија је E , при чему важи

$$E = \frac{1}{2} C_1 (V_1^2 - V_2^2) + \frac{1}{2} C_2 (V_2^2 - V_3^2). \quad (3)$$

Решавањем система једначина (1)-(3) добијамо

$$C_1 = \frac{2E\Delta t_1 \ln \frac{V_2}{V_3}}{(V_1^2 - V_2^2)\Delta t_1 \ln \frac{V_2}{V_3} + (V_2^2 - V_3^2)\Delta t_2 \ln \frac{V_1}{V_2}} = 99,7 \text{ }\mu\text{F},$$

$$C_2 = \frac{2E\Delta t_2 \ln \frac{V_1}{V_2}}{(V_1^2 - V_2^2)\Delta t_1 \ln \frac{V_2}{V_3} + (V_2^2 - V_3^2)\Delta t_2 \ln \frac{V_1}{V_2}} = 41,9 \text{ }\mu\text{F},$$

$$R_{\heartsuit} = \frac{(V_1^2 - V_2^2)\Delta t_1 \ln \frac{V_2}{V_3} + (V_2^2 - V_3^2)\Delta t_2 \ln \frac{V_1}{V_2}}{2E \ln \frac{V_1}{V_2} \ln \frac{V_2}{V_3}} = 120 \text{ }\Omega.$$

(е) Средња електрична струја која протиче кроз тело пацијента у првој фази једнака је $I_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{\Delta t_1} = \frac{C_1(V_1 - V_2)}{\Delta t_1} = 10,9 \text{ A}$, док је у другој фази једнака $I_2 = \frac{Q_2 - Q_3}{\Delta t_2} = \frac{C_2(V_2 - V_3)}{\Delta t_2} = 3,59 \text{ A}$. У првој фази ослобађа се $\eta_1 = \frac{E_1}{E} = \frac{C_1(V_1^2 - V_2^2)}{2E} = 93\%$ укупне енергије, док се остатак енергије ослобађа у другој фази, односно $\eta_2 = \frac{E_2}{E} = \frac{C_2(V_2^2 - V_3^2)}{2E} = 7\%$ укупне енергије.



Експериментални задаци (20 поена):
Мерење вискозности

Вискозност је отпор (тј. унутрашње трење) при релативном кретању блиских делића флуида. При спором кретању флуида мале вискозности, блиски делићи флуида остају блиски. Овај режим кретања зове се ламинарно струјање. Код ламинарног струјања, може се сматрати да постоји низ слојева флуида који клизе један по другом. Сила трења између два суседна слоја флуида може се описати Њутновим законом вискозности

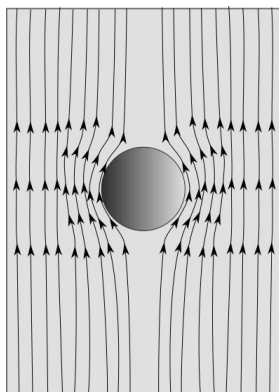
$$F = \eta S \frac{dv}{dy} \quad (1)$$

где је S додирна површина слојева, η је коефицијент вискозности (SI јединица Pa·s) а $\frac{dv}{dy}$ је градијент брзине у правцу нормалном на ток (промена брзине флуида по јединици дебљине слоја). Флуиди који подлежу Њутновом закону вискозности називају се *њутновски флуиди*. У том случају, коефицијент вискозности је константа која зависи од врсте флуида и од температуре.

Последице вискозности су посебно једноставне код ламинарног струјања течности кроз цилиндричну цев. Овакво кретање се може описати као низ концентричних слојева вискозне течности у цеви који се дуж цеви крећу различитим брзинама, тако да највећу брзину имају слојеви течности дуж осе цеви, док слојеви уз зидове цеви мирују. Велики број вискозиметара заснива се на мерењу протока течности кроз неку цев. Да би се код ових уређаја осигурало ламинарно струјање, користе се уске цеви чија је дужина много већа од пречника. Применом Њутновог закона (1) и одговарајућих граничних услова на стационарно протицање течности кроз хоризонталну цевчицу константног пречника, добија се Поазејев (Poiseuille) закон који приближно описује проток течности:

$$Q_v = \frac{\pi(P_1 - P_2)r^4}{8\eta L}, \quad (2)$$

где је Q_v запремински проток течности, P_1 и P_2 су притисак на почетку и на крају цевчице, респективно, r је полупречник цевчице, L њена дужина и η коефицијент вискозности флуида. Овај закон се може користити за одређивање коефицијента вискозности мерењем протока и разлике притисака на крајевима цеви.



Слика 1. Падање куглице кроз течност

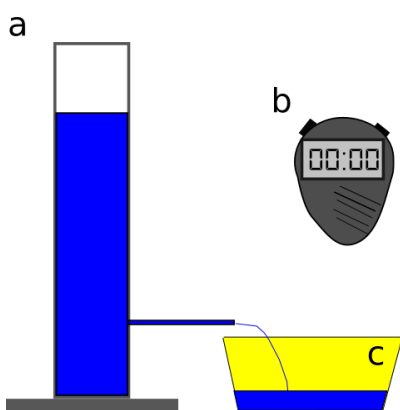


Други метод одређивања коефицијента вискозности заснива се на мерењу брзине падања куглице познатих димензија у течности. Куглице се пуштају да падају кроз испитивану течност под дејством силе Земљине теже (слика 1) и анализом њиховог кретања одређује се коефицијент вискозности.

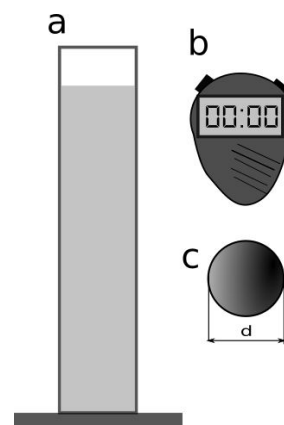
Циљ експеримента је одређивање коефицијента вискозности две течности: воде и глицерина, на два принципијелно различита начина, од којих је један погодан за течности са малом, а други за оне са великом вискозношћу. Стога је експеримент подељен у два дела.

Апаратура

Апаратура за први задатак приказана је на слици 2. Састоји се од цилиндричног суда (у даљем тексту суд) и хоризонтално постављене цевчице. У суд (а) се сипа вода која истиче кроз цевчицу у помоћну посуду (с) постављену испод ње. За мерење времена користи се сат са штоперицом (b), док се ниво течности мери читавањем са мерне скале постављене на суду.



Слика 2. Апаратура уз задатак 1



Слика 3. Апаратура уз задатак 2

Апаратура за други задатак приказана је на слици 3. Уместо цевчице на суд (а) постављен чеп са навојем који спречава истацање течности. Куглица (с) се спушта на површину глицерина и посматра се њено кретање. Брзина падања куглице мери се помоћу мерне скале и сата са штоперицом (b) .

Експеримент

НАПОМЕНЕ:

- (1) Пре сваког сипања воде у суд проверити да ли је цевчица добро запушена са спољне стране конусним црним чепом. Када су испуњени сви услови за прецизно мерење, уклоните овај чеп и укључите штоперицу.
- (2) Посуду у коју се улива вода поставити тако да се вода не просипа изван ње. По потреби посуду благо померати са променом интензитета млаза кроз цевчицу.



(3) Након завршеног мерења у задатку 1, пажљиво скинути (одвити) цевчицу и на њено место ставити чеп са навојем како глицерин не би исцурио из суда. Након тога, чеп више не померати.

(4) Пред почетак мерења у задатку 2 позвати дежурног да сипа глицерин у суд.

(5) Водити рачуна да куглице током падања не додирују зид суда.

Подаци које можете користити у раду (и чије се грешке могу занемарити):

- густина воде: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
- убрзање Земљине теже: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- густина глицерина: $\rho_t = 1260 \text{ kg/m}^3$
- дужина цевчице: $L = 10,0 \text{ cm}$
- пречник цевчице: $2r = 2,200 \text{ mm}$
- пречник суда: $2r_c = 44,0 \text{ mm}$
- пречници куглица: $D = 2,381 \text{ mm}, 3,175 \text{ mm}, 4,000 \text{ mm}, 5,000 \text{ mm}, 5,556 \text{ mm}$ и $7,000 \text{ mm}$
- маса куглице пречника $7,000 \text{ mm}$: $m = 1,400 \text{ g}$

Задатак 1.

а) Полазећи од Поазејевог закона протицања њутновске течности кроз цевчицу (2), извести закон промене висине воденог стуба у суду са временом. У изразу треба да фигуришу величине L, η, r_c, ρ, g, r . При извођењу сматрати да се проток течности у суду може описати законима који важе за ламинаран ток идеалног флуида и да се унутар суда може занемарити промена притиска узрокована повећањем кинетичке енергије флуида. Занемарити капиларне појаве. **(4 поена)**

б) Помоћу штоперице и мерне скале мерити висину стуба течности у зависности од времена. Почетну количину воде у суду изабрати тако да површина воде буде 35 cm изнад осе цевчице. Мерења извршити у бар пет погодних одабраних тачака и комплетан поступак поновити бар три пута. Резултате приказати табеларно. У овом задатку није потребно одређивати грешке тражених величина. **(3 поена)**

в) Линеаризовати израз добијен под **а)** и на основу измерених резултата нацртати одговарајући график. Коришћењем добијеног графика одредити коефицијент вискозности воде. У овом задатку није потребно одређивати грешке тражених величина. **(3 поена)**

Задатак 2.

а) Користећи штоперицу и мерну скалу, мерити брзину падања куглица различитих димензија кроз глицерин за различите димензије куглица. Мерити време проласка куглица између два нивоа у суду. Изабрати ове нивое тако да мерења буду што поузданија и јасно назначити (записати) изабране нивое. Током целог експеримента користити иста два нивоа за мерење времена пада куглице. За сваку димензију куглица мерење поновити бар три пута. Проценити грешку брзине. Резултате приказати табеларно. **(4 поена)**



б) Разматрајући динамику кретања куглице кроз њутновски флуид, извести израз за брзину падања куглице v у зависности од њеног пречника D (у добијеном изразу треба да фигуришу густина куглице ρ_k , ρ_t , η и g). Претпоставити да је струјање флуида око куглице ламинарно. **(2 поена)**

в) Линеаризовати добијени израз и на основу измерених вредности нацртати одговарајући график, па његовим коришћењем одредити коефицијент вискозности глицерина. Проценити грешку тако одређеног коефицијента вискозности. **(4 поена)**

Задатке припремили:

Марко Опачић, др Данко Бошњаковић и Милан Јоцић, Институт за физику у Београду

Рецензенти:

др Ненад Вукмировић, др Димитрије Степаненко и Милан Корњача, Институт за физику у Београду

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа:

др Божидар Николић, Физички факултет, Београд

Свим такмичарима желимо успешан рад!



Решење

Задатак 1.

а) Означимо са 1 тачку на споју цевчице и суда, а са 2 тачку на врху воденог стуба. За струјну линију која повезује тачке 1 и 2 важи Бернулијева једначина:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

По услову задатка треба занемарити динамичке притиске. Оправданост овога може се и експериментално проверити. Из Бернулијево једначине следи:

$$p_1 - p_2 = \rho gh,$$

где је h висина воденог стуба од површине флуида до нивоа цевчице. Приметимо да је притисак $p_2 = p_a$ (где је p_a атмосферски притисак) истовремено и притисак на излазу из цевчице, па је $p_1 - p_2$ истовремено и разлика притисака на крајевима цевчице. Заменом ове разлике у Поазејев закон добија се

$$Q_v = \frac{\pi \rho g h r^4}{8 \eta L}.$$

Са друге стране је

$$-S \frac{dh}{dt} = Q_v,$$

где је $S = r_c^2 \pi$ површина попречног пресека суда. Из претходних једначина следи

$$S \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi \rho g h r^4}{8 \eta L}.$$

Ово је диференцијална једначина коју је могуће решити методом раздвајања променљивих:

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{h} = -\frac{\pi \rho g r^4}{8 \eta L S} \int_0^t dt,$$

Интеграцијом добијамо

$$h(t) = h_0 e^{-t/\tau},$$

где је $\tau = \frac{8 \eta L r_c^2}{\rho g r^4}$ тзв. временска константа процеса а h_0 је почетни ниво воде у суду. Видимо да је закон промене висине воденог стуба са временом експоненцијално опадајућа функција.

б) Обзиром на карактер тражене зависности, исправан начин одабира тачака подразумева да се измери укупно време истицања воде из суда и да се то време подели на једнаке интервале у којима ће се по једном читавати ниво течности. Нивои су мерени у односу на осу цевчице. Почетни ниво је $h_0 = 35$ cm.

Табела:

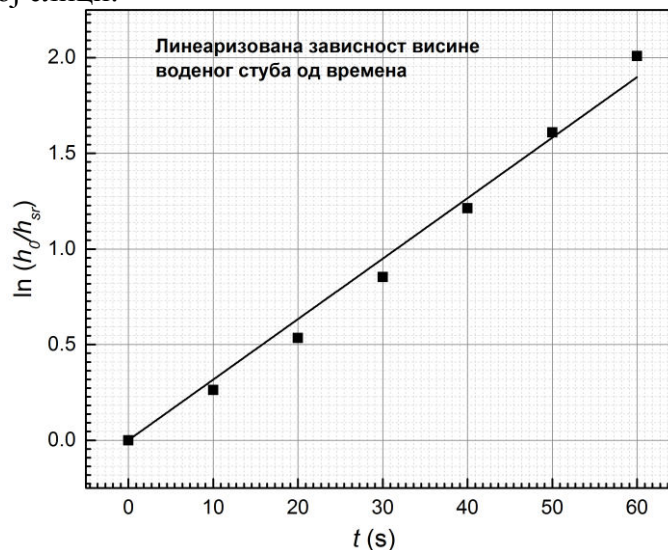
t [s]	$h^{(1)}$ [cm]	$h^{(2)}$ [cm]	$h^{(3)}$ [cm]	h_{sr} [cm]	$\ln(h_0/h_{sr})$
0	35,0	35,0	35,0	35,0	0
10	27,0	26,8	26,9	26,9	0,26
20	20,7	20,4	20,6	20,6	0,53
30	15,0	14,8	14,9	14,9	0,85
40	10,6	10,3	10,4	10,4	1,21
50	7,2	7,0	6,9	7,0	1,61
60	4,6	4,7	4,7	4,7	2,01



в) Линеаризација израза практично је већ добијена приликом извођења. Израз погодан за цртање графика има облик

$$\ln\left(\frac{h_0}{h}\right) = \frac{\rho g r^4}{8\eta L r_C^2} t.$$

График је дат на следећој слици:



Коефицијент правца износи

$$k \approx 0.032 \frac{1}{s}.$$

Са друге стране је $k = \frac{\rho g r^4}{8\eta L r_C^2}$, одакле је $\eta = \frac{\rho g r^4}{8 L r_C^2 k} \approx 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}.$

Задатак 2.

а) На почетку је потребно одредити нивое између којих ће се мерити времена пада. Треба имати у виду да се брзина куглице мења током падања док се практично не устали након одређеног пређеног пута у глицерину. Зато горњи ниво за читавање мора бити довољно удаљен (бар 5 cm) од површине глицерина. Такође, због поузданости мерења доњи ниво треба бити довољно удаљен од горњег (бар 10 cm). Устаљеност брзине падања треба проверити са неколико пробних мерења на различитим нивоима.

Мерења су вршена тако што је за горњи ниво усвојено 10 cm од површине глицерина, а доњи је 30 cm испод њега, и добијени су следећи резултати:

D [mm]	$t^{(1)}$ [s]	$t^{(2)}$ [s]	$t^{(3)}$ [s]	t_{sr} [s]	Δt_{sr} [s]	v [cm/s]	Δv [cm/s]	D^2 [mm ²]
2,381	19,20	18,86	19,55	19,20	0,35	1,56	0,028 (0,03)	5,67
3,175	11,17	11,18	11,30	11,22	0,2	2,67	0,047 (0,05)	10,08
4,000	7,44	7,43	7,53	7,46	0,2	4,02	0,107 (0,11)	16,00
5,000	4,88	4,94	4,75	4,86	0,2	6,17	0,253 (0,3)	25,00
5,556	4,03	3,84	4,09	3,98	0,2	7,54	0,378 (0,4)	30,87
7,000	2,28	2,44	2,25	2,32	0,2	12,93	1,114 (1,2)	49,00

Грешка времена одређена је као

$$\Delta t = \max(\max_i |t^{(i)} - t_{sr}|, 0,2 \text{ s}),$$

где је 0,2 s узето као неодређеност времена реакције човека. Брзина је рачуната као

$$v = \frac{L}{t_{sr}},$$



где је према претходном тексту $L = 30 \text{ cm}$. Даље је

$$\Delta v = \frac{1}{t_{sr}} \Delta L + \frac{L}{t_{sr}^2} \Delta t = v \frac{\Delta t}{t_{sr}},$$

јер је узето $\Delta L = 0$ (евентуална несигурност при читавању висине је урачуната кроз грешку времена).

б) Када се куглица спусти у течност, након одређеног прелазног периода успоставља се стационарно стање у коме је брзина падања куглице константна. Тада су силе које делују на куглицу (гравитациона, сила потиска и сила вискозног трења) у равнотежи:

$$mg = \rho_t Vg + 6\pi\eta rv,$$

где први члан са десне стране представља силу потиска а други члан силу вискозног трења која је дата Стоксовим законом. Када се маса куглице изрази као $m = \rho_k V$ и горњи израз преуреди, коначно се добија

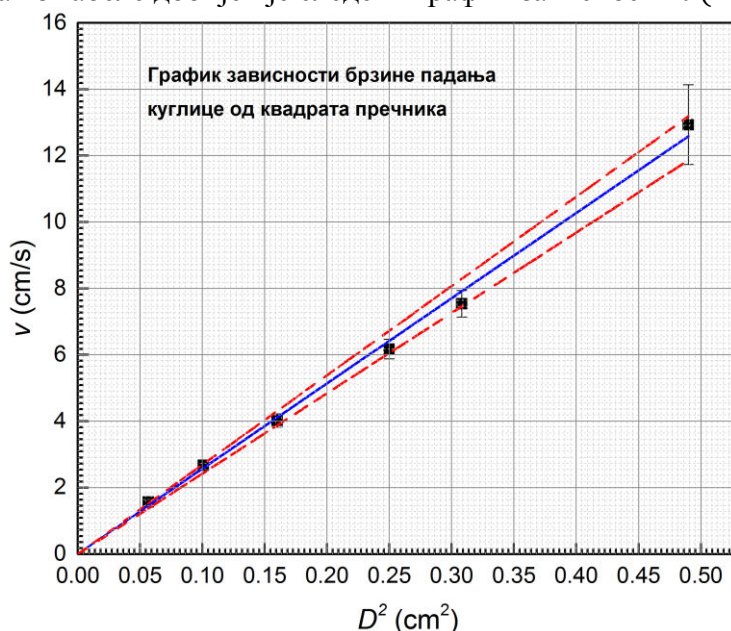
$$v = \frac{g(\rho_k - \rho_t)D^2}{18\eta}.$$

Густину куглице можемо одредити на основу познате масе највеће куглице:

$$\rho_k = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 7795 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

в) Добијени израз за брзину линеаризује се формалном сменом $D^2 = z$.

Коришћењем података из табеле добијен је следећи график зависности $v(D^2)$:



Пуном линијом приказана је оптимална права, а испрекиданим линијама гранично допустиве праве које се могу провући кроз експерименталне тачке. За коефицијент правца се добија $k \approx 2567 \frac{1}{\text{ms}}$, одакле даље следи

$$\eta = \frac{g(\rho_k - \rho_t)}{18k} \approx 1,387 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

Грешку коефицијента правца одређујемо повлачењем граничних правих које и даље солидно описују експерименталне тачке и рачунањем њихових коефицијената правца. За две граничне праве приказане на слици је $k_1 \approx 2690 \frac{1}{\text{ms}}$ и $k_2 \approx 2420 \frac{1}{\text{ms}}$, па је $\Delta k \approx 147 \frac{1}{\text{ms}}$. С обзиром на израз за η , следи

$$\Delta \eta = \frac{g(\rho_k - \rho_t)}{18} \frac{1}{k^2} \Delta k = \eta \frac{\Delta k}{k} \approx 0,079 \text{ Pa} \cdot \text{s},$$

односно $\eta = (1,39 \pm 0,08) \text{ Pa} \cdot \text{s}$.