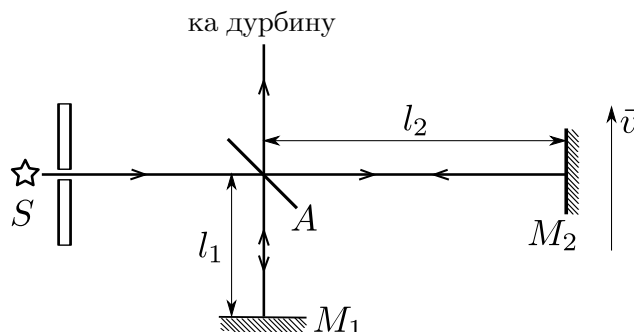




IV разред

- Енрико треба да стигне од једног до дијагонално супротног темена квадрата странице $L = 100 \text{ m}$. Дуж страница квадрата је бетонска стаза по којој он може да се креће брзином интензитета $v_1 = 2,00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, док је остала површина од траве по којој може да се креће брзином интензитета $v_2 = 1,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Колико је најкраће време за које Енрико може да стигне од једног до дијагонално супротног темена квадрата? (20 поена)
- Мајкелсон и Морли (Michelson, Morley) су током 1880-их извели експерименте којима су намеравали да детектују кретање Земље кроз етар, хипотетичку средину која испуњава сав простор и кроз коју се светлост простире брзином интензитета $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Принципијелна схема коришћеног Мајкелсоновог интерферометра приказана је на слици 1. Полупосребрена плочица A дели упадни зрак светлости из монохроматског извора S на два зрака који заклапају прав угао. Након рефлексија од огледала M_1 и M_2 , која су на растојањима l_1 и l_2 од плочице, ови зраци интерферирају на плочици A . Интерференциона слика која се посматра дурбином је последица фазне разлике међу тим зрацима. Претпоставити да етар постоји и да се интерферометар креће брзином интензитета v кроз њега, при чему је правац брзине паралелан дужи $\overline{M_1A}$, као што је приказано на слици 1. Таласна дужина коришћене светлости је λ .
 - Користећи нерелативистички закон слагања брзина, одредити фазну разлику зрака који прелазе пут $A-M_1-A$ и $A-M_2-A$. (13 поена)
 - Интерферометар је потом заротиран тако да је правац брзине $\vec{v}$ паралелан дужи $\overline{M_2A}$. Користећи нерелативистички закон слагања брзина, одредити фазну разлику зрака који интерферирају. (3 поена)
 - За колико интерференционих пруга се помери интерференциона слика при горе описаној промени оријентације интерферометра? Одредити тај број сматрајући да је брзина кретања интерферометра кроз етар једнака линијској брзини кретања Земље око Сунца чији интензитет износи $v = 3,0 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, као и да је $l_1 = l_2 = 10 \text{ m}$ и $\lambda = 600 \text{ nm}$. Да ли се очекује да се овај помак детектује, ако се зна да уређај може да региструје померање од неколико стотих делова ширине пруге? Ширина једне интерференционе пруге је дефинисана као растојање између два суседна минимума на интерференционој слици. У Мајкелсоновим огледима приметно померање интерференционих пруга није регистровано. Негативан резултат огледа објашњава специјална теорија релативности, према којој етар не постоји. (4 поена)



Слика 1: Принципијелна схема Мајкелсоновог интерферометра.

- Честица масе m усмери се релативистичком брзином интензитета v ка другој, идентичној честици, која мирује. Након апсолутно еластичног судара, честице се (у лабораторијском систему) разлете симетрично у односу на правац брзине упадне честице.
 - Одредити угао између правца брзина честица након судара. (17 поена)
 - Колики је тај угао у нерелативистичком случају ($v \ll c$)? (3 поена)
- У процесу интеракције светлости са полупроводничким материјалом долази до формирања носилаца наелектрисања и протока струје. Тај ефекат се може искористити за мерење интензитета светлости (детектори светлости) или за претварање светлосне у електричну енергију (соларне ћелије). Размотримо најпре процес апсорпције једног фотона у полупроводничком материјалу који доводи до стварања једног електрона и једне ефективне честице која се назива шупљина.
 - Колико је наелектрисање шупљине? (5 поена)



IV разред

Танак филм галијум-арсенида је изложен дејству снопа монохроматске светлости интензитета $I_0 = 1050 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Сноп светлости пада нормално на филм, кружна фреквенција светлости задовољава услов $\hbar\omega = 1,42 \text{ eV}$, а коефицијент апсорпције на тој фреквенцији је $\alpha = 8000 \text{ cm}^{-1}$ и задовољава услов $\alpha d \ll 1$, где је d дебљина танког филма.

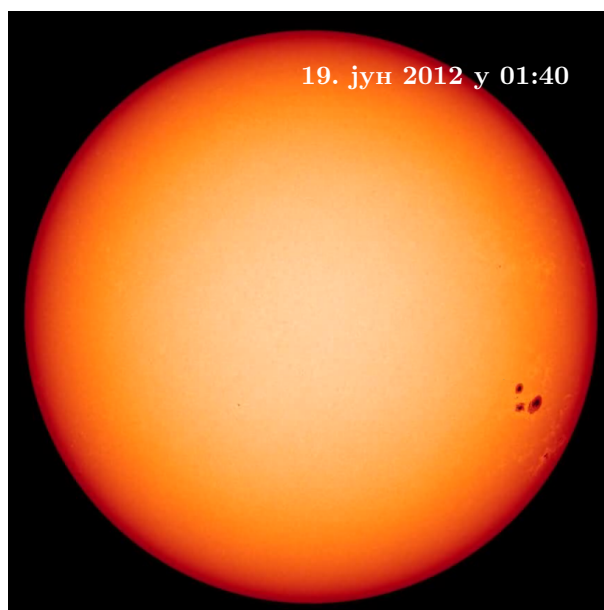
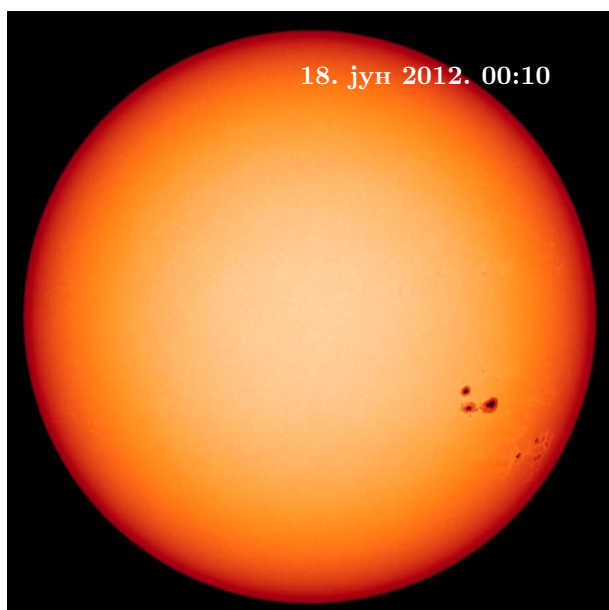
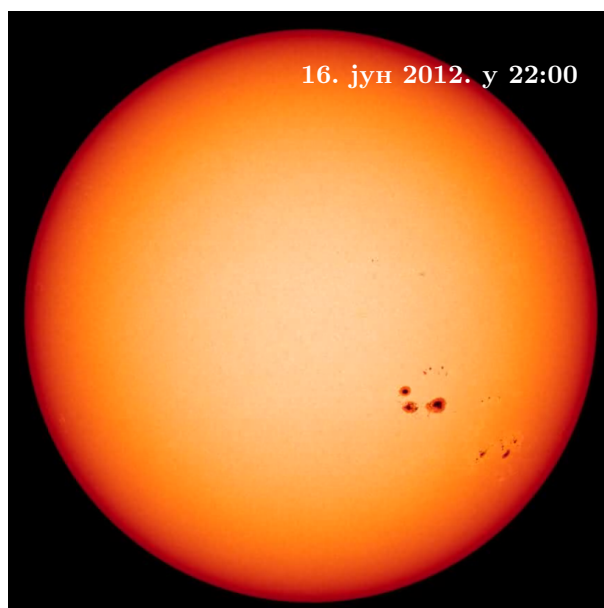
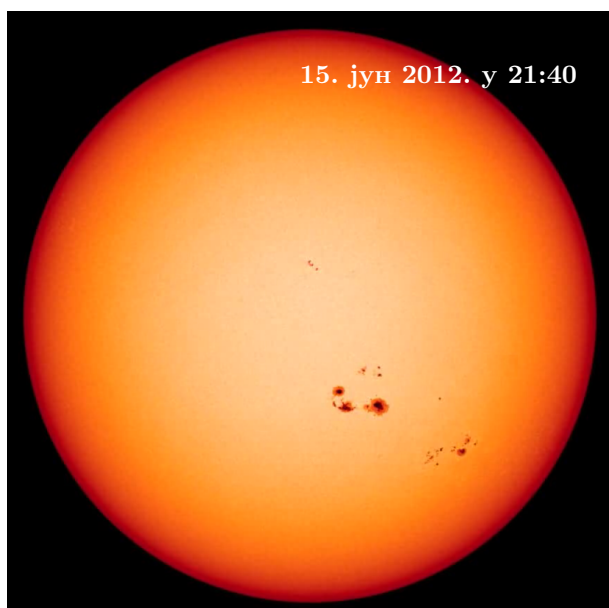
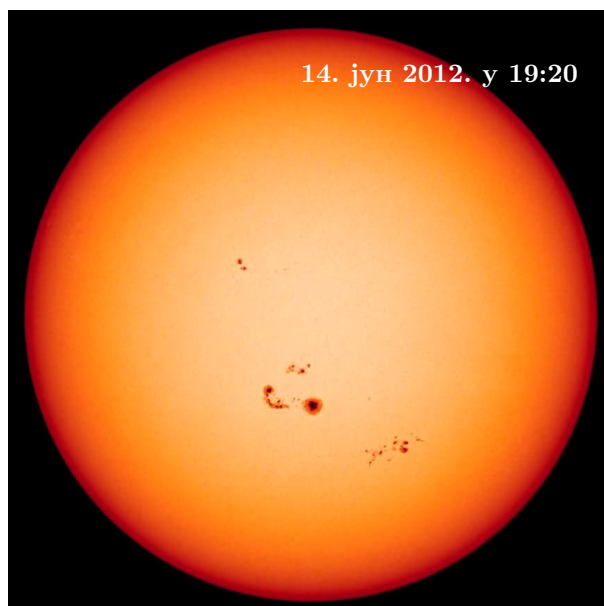
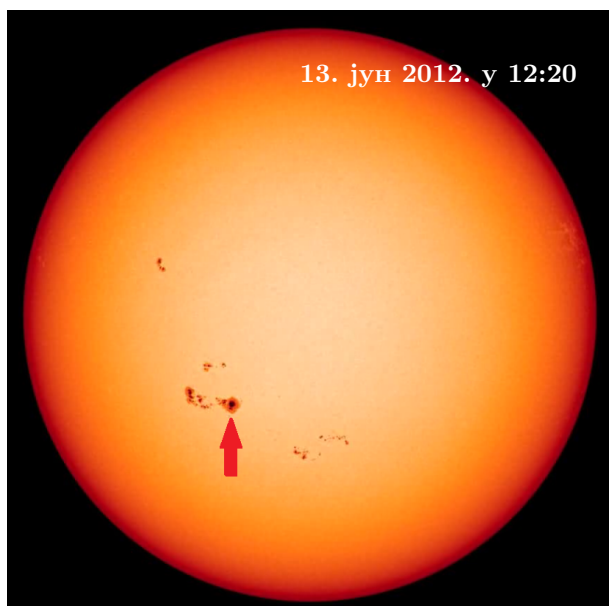
- (б) Одредити број парова електрон-шупљина по јединици времена и јединици запремине који настаје у материјалу под дејством поменутог снопа светлости. Помоћ: Када је то оправдано, можете користити апроксимацију $e^x \approx 1$ за $|x| \ll 1$. (15 поена)

5. Соларна и хелиосферична опсерваторија (СОХО) је европска летелица лансирана у свемир 1995. године да проучава Сунце. СОХО се налази на дужи која спаја Сунце и Земљу на растојању 0,990 а.ј. од Сунца и 0,010 а.ј. од Земље. У прилогу је приказано 6 слика које је СОХО снимила камером која је постављена тако да вертикални правац на сликама одговара оси ротације Сунца. Сматрати да је оса ротације Сунца нормална на раван у којој се креће Земља. Сунце око своје осе ротира у истом смеру као и Земља око Сунца. За сваку слику је назначено кад је снимљена, при чему може да се сматра да је грешка наведеног времена занемарљива. На сликама су јасно уочљиве тамније области које се називају Сунчеве пеге. То су области у којима је температура нижа од типичне температуре на површини Сунца. Пратећи кретање Сунчеве пеге означене стрелицом, одредити период ротације Сунца око своје осе (на географској ширини на којој се налази та пеге) и проценити одговарајућу грешку. Пошто Сунце није чврсто тело, период ротације није исти на свим географским ширинама. Зато обавезно треба разматрати назначену Сунчеву пегу да би се добило очекивано решење. Уз решење задатка обавезно треба предати и лист који вам је дат у прилогу ако сте на њему нешто радили. (20 поена)

Помоћ: Ако је физичка величина y одређена из физичке величине x помоћу релације $y = \arcsin x$ или $y = \arccos x$, тада је апсолутна грешка мерења $\Delta y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Delta x$.

Приликом решавања свих задатака можете користити следеће бројне вредности физичких константи: брзина светлости у вакууму $c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Болцманова константа $k_B = 8,617 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$, елементарно наелектрисање $|e_0| = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, једна астрономска јединица $1 \text{ a.j.} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, период ротације Земље око Сунца $T_z = 365,24$ дана.

*У фермионској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима средњих стручних школа, уметничких школа и свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.



Уколико предајете овај лист, своју шифру упишите овде: _____



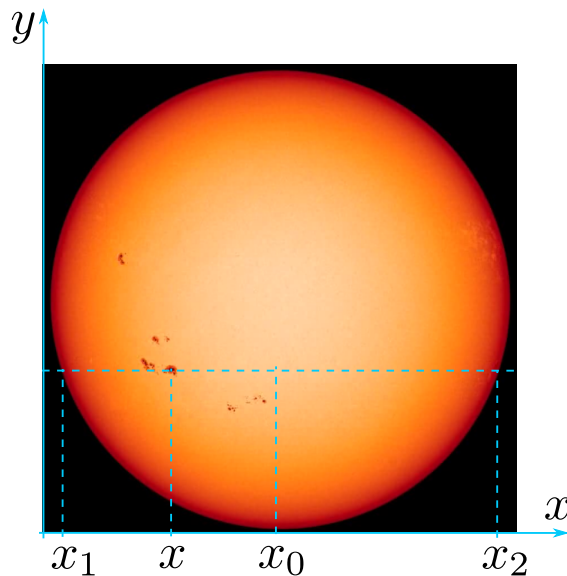
IV разред

- Нека је координатни систем постављен тако да је x оса усмерена од почетног ка дијагонално супротном темену квадрата. Када се Енрико креће по бетону x компонента његове брзине је $v_x^{(b)} = v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$, а када се креће по трави она износи $v_x^{(t)} = v_2 \cos \varphi$, где је φ угао који вектор брзине заклапа са x осом. Пошто је $\cos \varphi \leq 1$ и $v_2 < v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$, следи да је увек $v_x^{(t)} < v_x^{(b)}$. Зато се најкраће време постиже када Енрико иде бетонском стазом **[14п]**. Тражено време је једнако $t = \frac{L\sqrt{2}}{v_x^{(b)}} = \frac{2L}{v_1}$ **[5п]**, односно $t = 100$ s **[1п]**.
- Према нерелативистичком закону слагања брзина, брзина зрака у односу на интерферометар који се креће брзином $\vec{v}$ у односу на етар је $\vec{c}_i = \vec{c} - \vec{v}$. На делу пута $\overline{AM_1}$ интензитет брзине зрака у односу на интерферометар је $c_i^{\overline{AM_1}} = c + v$, док је у супротном смеру $c_i^{\overline{M_1A}} = c - v$. Стога је време за које зрак пређе пут $A - M_1 - A$ једнако $t_1 = \frac{l_1}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-\beta^2}$ **[5п]**, где је уведена ознака $\beta = v/c$. За зрак који прелази пут $A - M_2 - A$, интензитети брзина у односу на интерферометар су у оба смера једнаки и износе $c_i^{\overline{AM_2}} = c_i^{\overline{M_2A}} = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1-\beta^2}$, одакле је $t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ **[5п]**. Пошто оба зрака доживе једнак број рефлексија од огледала, тражена фазна разлика зрака износи $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c \cdot (t_1 - t_2) = \frac{4\pi}{\lambda} \left(\frac{l_1}{1-\beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$ **[3п]**.
 - Аналогно као у (а), време за које зрак пређе пут $A - M_1 - A$ је $t'_1 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, док време за које зрак пређе пут $A - M_2 - A$ износи $t'_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1-\beta^2}$. Сада је фазна разлика $\delta' = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c \cdot (t'_1 - t'_2) = \frac{4\pi}{\lambda} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_2}{1-\beta^2} \right)$ **[3п]**.
 - Промена фазне разлике при промени оријентације интерферометра износи $\Delta\delta = \delta - \delta' = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{l_1+l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$. Промена фазне разлике за 2π значи померање интерференционе слике за ширину једне пруге, па је број пруга за које се слика помери $\Delta N = \frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{2}{\lambda} \frac{l_1+l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ **[2п]**. На основу бројних односа датих у задатку, $\beta = v/c = 10^{-4} \ll 1$, па се добија $\Delta N \approx \frac{l_1+l_2}{\lambda} \cdot \beta^2$. Након замене бројних вредности, $\Delta N \approx 1/3$, што је, према условима задатка, могло бити регистровано помоћу описаног интерферометра **[2п]**.
- Пошто је судар апсолутно еластичан, масе честица након судара једнаке су масама пре судара. Означимо са $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ и $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ редом интензитет импулса честице која се креће и њену укупну енергију пре судара. Због симетричног разлетања честица у односу на правац брзине упадне честице, пројекција закона одржања импулса дуж нормале на тај правац даје да обе честице након судара имају импулс истог интензитета p' и исту енергију E' **[4п]**. Закон одржања енергије је $E + mc^2 = 2E'$ **[4п]**, док из закона одржања импулса следи $p^2 = 2p'^2(1 + \cos \theta)$ **[4п]**, при чему је θ тражени угао разлетања. Комбиновањем последње две једначине са релацијом $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ (и аналогно за E' и p'), добија се $\cos \theta = \frac{E - mc^2}{E + 3mc^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + 3\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ **[5п]**.
 - У нерелативистичком случају, када је $v/c \ll 1$, добија се $\cos \theta \approx 0$, односно $\theta \approx \pi/2$. Дакле, правци брзина честица након судара образују прав угао **[3п]**.
- При апсорпцији једног фотона настају један електрон и једна шупљина. Пошто фотон није наелектрисан, а наелектрисање електрона је $-|e_0|$, из закона одржања наелектрисања следи да је наелектрисање шупљине $q_s = |e_0| = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C **[5п]**.
 - Нека се сноп светлости простира у правцу x осе и нека танки филм заузима област простора $x \in [0, d]$. Размотрићемо ваљак који заузима област простора $[x, x + \Delta x]$ чија је основа површине S нормална на x осу. Енергија која се апсорбује унутар тог ваљка за време Δt је једнака $\Delta E = [I(x) - I(x + \Delta x)] S \Delta t$ **[6п]**, при чему је $I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$. Број фотона који се апсорбује по јединици времена и јединици запремине је онда $G = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{\Delta E}{S \Delta x \Delta t}$, што је истовремено и број парова електрон-шупљина који се ствара по јединици времена и јединици запремине. Користећи $I(x) - I(x + \Delta x) = -\frac{dI}{dx} \Delta x$, $-\frac{dI}{dx} = \alpha I_0 e^{-\alpha x}$ и $e^{-\alpha x} \approx 1$, следи $G = \frac{I_0 \alpha}{\hbar\omega}$ **[7п]**, односно $G = 3,69 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$ **[2п]**.



5. Нека је Ω_z интензитет угаоне брзине ротације Земље око Сунца, а Ω_s интензитет угаоне брзине ротације Сунца око своје осе. Појаву ћемо посматрати у референтном систему који ротира угаоном брзином Ω_z око осе ротације Сунца. У том референтном систему камера мирује, а угаона брзина ротације Сунца је $\Omega_p = \Omega_s - \Omega_z$ [2п]. Пошто се Сунчева пега креће по кругу у равни нормалној на осу ротације Сунца, њена x координата зависи од времена као $x(t) = x_0 + A_0 \sin(\Omega_p t + \varphi)$, где су x_0 , A_0 и φ реалне константе [4п].

Величине x_0 и A_0 се одређују из координата левог и десног амплитудног положаја x_1 и x_2 (слика 1), као $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $A_0 = \frac{x_2 - x_1}{2}$. Непосредним мерењем лењиром на слици добијамо $x_1 = 4,0\text{mm}$, $x_2 = 76,0\text{mm}$, одакле је $A_0 = 36,0\text{mm}$, $x_0 = 40,0\text{mm}$. Процењена грешка мерења је $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,5\text{mm}$, одакле је $\Delta A_0 = \Delta x_0 = \frac{1}{2}(\Delta x_1 + \Delta x_2) = 0,5\text{mm}$ [2п].



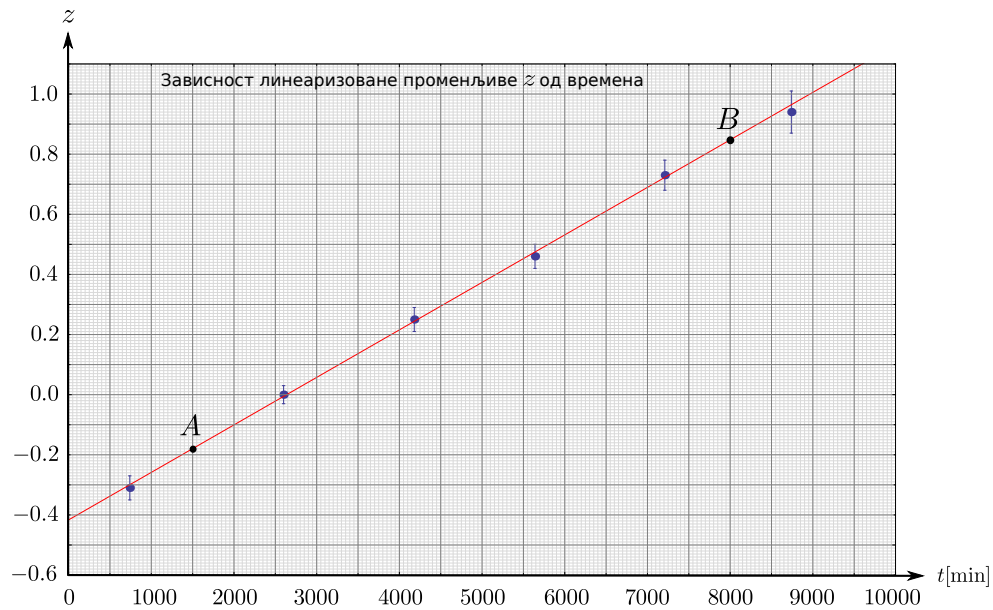
Слика 1: уз решење 5. задатка.

Да би се одредило Ω_p , извршена је линеаризација добијене зависности $x(t)$. Линеаризована зависност има облик $z = \Omega_p t + \varphi$, где је $z = \arcsin \frac{x - x_0}{A_0}$. У табели 1 дате су измерене вредности зависности $x(t)$, где t представља протекло време од поноћи између 12. и 13. јуна 2012. године, као и израчунате вредности величине z . Грешка величине z је једнака $\Delta z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{A_0}\right)^2}} \Delta \left(\frac{x - x_0}{A_0}\right)$, одакле је $\Delta z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{A_0}\right)^2}} \left(\frac{\Delta x + \Delta x_0}{A_0} + \frac{|x - x_0|}{A_0^2} \Delta A_0 \right)$. Израчунате вредности Δz су такође дате у табели 1 [5п].

$t[\text{min}]$	740	2600	4180	5640	7210	8740
$x[\text{mm}]$	29	40	49	56	64	69
z	-0,31052	0,00000	0,25268	0,46055	0,72973	0,93661
Δz	0,0336	0,0278	0,0323	0,0379	0,0497	0,0658
Δz (заокружено)	0,04	0,03	0,04	0,04	0,05	0,07
z (заокружено)	-0,31	0,00	0,25	0,46	0,73	0,94

Табела 1: Измерени подаци и израчунате грешке.

График зависности z од t приказан је на слици 2. На графику је провучена права тако да одступање експерименталних тачака од праве буде што је могуће мање. Очитавањем две тачке са праве $A(1500\text{ min}, -0,18)$ и $B(8000\text{ min}, 0,85)$ (при чему се A налази између прве и друге експерименталне тачке, а B између претпоследње и последње), за коефицијент правца се добија $\Omega_p = \frac{z_B - z_A}{t_B - t_A} = 1,5846 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{min}}$. Грешка коефицијента правца се одређује из $\frac{\Delta \Omega_p}{\Omega_p} = \frac{\Delta z_B + \Delta z_A}{z_B - z_A} = \frac{0,04 + 0,07}{0,85 + 0,18} = 0,1068$, одакле је $\Delta \Omega_p = 1,692 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{min}}$ [4п].



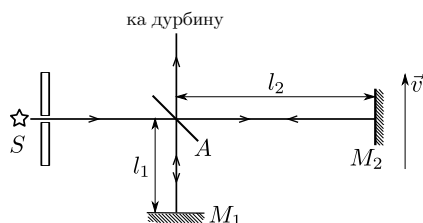
Слика 2: График зависности z од t .

Даље је $\Omega_s = \Omega_p + \Omega_z$, где је $\Omega_z = \frac{2\pi}{T_z} = 1,194 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{min}}$. Одатле је $T_s = \frac{2\pi}{\Omega_s} = 25,6$ дана и $\Delta T_s = T_s \frac{\Delta \Omega_p}{\Omega_s} = 2,54$ дана, односно $T_s = (26 \pm 3)$ дана **3п**.

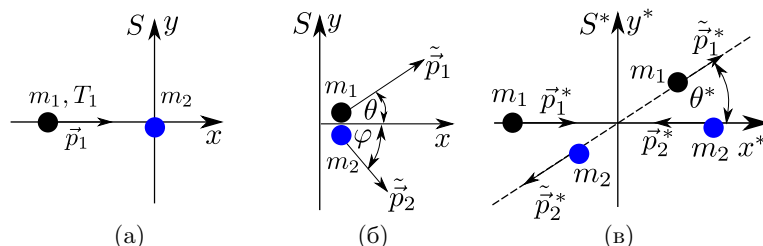


IV разред

- Сатјендра треба да стигне од једног до дијагонално супротног темена квадрата странице $L = 100\text{ m}$. Дуж страница квадрата је бетонска стаза по којој он може да се креће брзином интензитета $v_1 = 2,00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, док је остала површина од траве по којој може да се креће брзином интензитета $v_2 = 1,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Колико је најкраће време за које Сатјендра може да стигне од једног до дијагонално супротног темена квадрата? (20 поена)
- Мајкелсон и Морли (Michelson, Morley) су током 1880-их извели експерименте којима су намеравали да детектују кретање Земље кроз етар, хипотетичку средину која испуњава сав простор и кроз коју се светлост простире брзином интензитета $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Принципијелна схема коришћеног Мајкелсоновог интерферометра приказана је на слици 1. Полупосребрена плочица A дели упадни зрак светлости из монохроматског извора S на два зрака који заклапају прав угао. Након рефлексија од огледала M_1 и M_2 , која су на растојањима l_1 и l_2 од плочице, ови зраци интерферирају на плочици A . Интерференциона слика која се посматра дурбином је последица фазне разлике међу тим зрацима. Претпоставити да етар постоји и да се интерферометар креће брзином интензитета v кроз њега, при чему је правац брзине паралелан дужи $\overline{M_1A}$, као што је приказано на слици 1. Таласна дужина коришћене светлости је λ .
 - Користећи нерелативистички закон слагања брзина, одредити фазну разлику зрака који прелазе пут $A-M_1-A$ и $A-M_2-A$. (13 поена)
 - Интерферометар је потом заротиран тако да је правац брзине $\vec{v}$ паралелан дужи $\overline{M_2A}$. Користећи нерелативистички закон слагања брзина, одредити фазну разлику зрака који интерферирају. (3 поена)
 - За колико интерференционих пруга се помери интерференциона слика при горе описаној промени оријентације интерферометра? Одредити тај број сматрајући да је брзина кретања интерферометра кроз етар једнака линијској брзини кретања Земље око Сунца чији интензитет износи $v = 3,0 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, као и да је $l_1 = l_2 = 10\text{ m}$ и $\lambda = 600\text{ nm}$. Да ли се очекује да се овај помак детектује, ако се зна да уређај може да региструје померање од неколико стотих делова ширине пруге? Ширина једне интерференционе пруге је дефинисана као растојање између два суседна минимума на интерференционој слици. У Мајкелсоновим огледима приметно померање интерференционих пруга није регистровано. Негативан резултат огледа објашњава специјална теорија релативности, према којој етар не постоји. (4 поена)



Слика 1: Принципијелна схема Мајкелсоновог интерферометра.



Слика 2: (а) Честице пре судара у лабораторијском систему S ; (б) честице након судара (импулси $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$) у лабораторијском систему S ; (в) честице пре (импулси $\vec{p}_1^*$ и $\vec{p}_2^*$) и након судара (импулси $\vec{p}_1^*$ и $\vec{p}_2^*$) у систему центра импулса S^* .

- Честица масе m_1 и релативистичке кинетичке енергије T_1 усмери се дуж x осе лабораторијског система S ка честици масе m_2 која мирује, видети слику 2(а). Апсолутно еластичан (али не нужно и чеони) судар ових честица погодан је разматрати у систему центра импулса S^* дефинисаном условом да је укупан импулс честица једнак нули, видети слику 2(в). Главна карактеристика судара у систему S^* је угао θ^* којег заклапају правци импулса $\vec{p}_1^*$ и $\vec{p}_2^*$ честице масе m_1 пре и након судара у систему S^* , респективно. Угао θ^* може да има произвољну вредност из интервала $[0, \pi]$.
 - Одредити брзину $\vec{u}$ система центра импулса S^* у односу на лабораторијски систем S . (3 поена)
 - Одредити интензитете импулса честица у систему S^* пре (p_1^* и p_2^*) и након ($\tilde{p}_1^*$ и $\tilde{p}_2^*$) након судара. (2 поена)
 - Одредити максималну могућу кинетичку енергију (у лабораторијском систему) честице масе m_2 након судара. У том случају, такође одредити правце и смерове кретања честица након судара у лабораторијском систему у зависности од односа маса честица m_2/m_1 . (10 поена)
 - У случају $m_2/m_1 < 1$, одредити максимални могући угао расејања θ честице масе m_1 у лабораторијском систему, видети слику 2(б). (5 поена)

У свим деловима задатка тражене величине изразити у функцији од m_1 , m_2 и T_1 .



Помоћ: За системе S^* и S дефинисане у тексту задатка и на слици 2, енергија честице E^* и пројекције њеног импулса p_x^* , p_y^* и p_z^* у систему S^* повезане су са одговарајућим величинама у систему S следећим везама $\frac{E^*}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_x \right)$, $p_x^* = \gamma (p_x - \beta \frac{E}{c})$, $p_y^* = p_y$, $p_z^* = p_z$, где је $\beta = \frac{u}{c}$ и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

4. У процесу интеракције светлости са полупроводничким материјалом долази до формирања носилаца наелектрисања и протока струје. Тај ефекат се може искористити за мерење интензитета светлости (детектори светлости) или за претварање светлосне у електричну енергију (соларне ћелије). У овом задатку разматраћемо упрошћен модел полупроводника по коме сва стања у валентној зони имају енергију E_V , док је њихова концентрација n_V , а сва стања у проводној зони енергију $E_C > E_V$ и њихова концентрација је n_C . На температури апсолутне нуле сва стања валентне зоне су попуњена електронима, а сва стања проводне зоне су празна. На већим температурама неки од електрона из валентне зоне могу да пређу у проводну при чему за собом остављају шупљину у валентној зони. Вероватноћа попуњености електроном стања енергије E на температури T дата је Ферми-Дираковом расподелом $f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$, где се величина E_F назива Фермијева енергија.

- (а) Израчунати концентрацију електрона у проводној зони, концентрацију шупљина у валентној зони, као и специфичну електричну проводност галијум-арсенида на температури $T = 300\text{K}$. Шупљине се ефективно могу посматрати као носиоци позитивног наелектрисања чије је наелектрисање једнако наелектрисању електрона по апсолутној вредности. За галијум-арсенид је $n_C = 4,70 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $n_V = 9,00 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $E_C - E_V = 1,42 \text{ eV}$, покретљивост електрона из проводне зоне у галијум-арсениду је $\mu_n = 8500 \frac{\text{cm}^2}{\text{V}\cdot\text{s}}$, а покретљивост шупљина је $\mu_p = 400 \frac{\text{cm}^2}{\text{V}\cdot\text{s}}$. (11 поена)

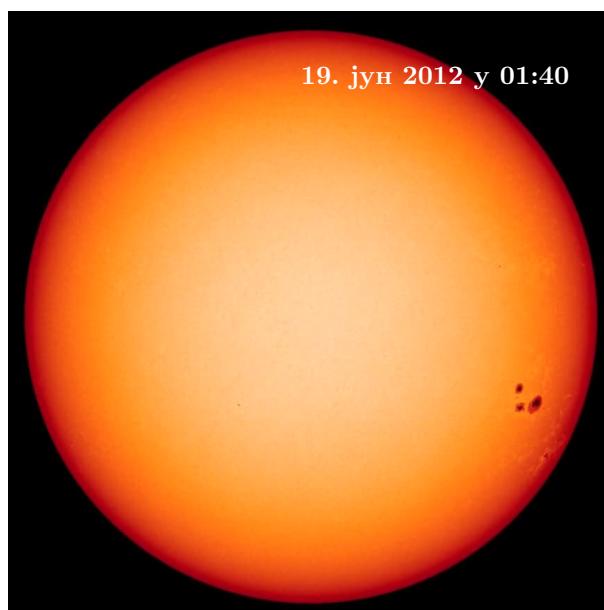
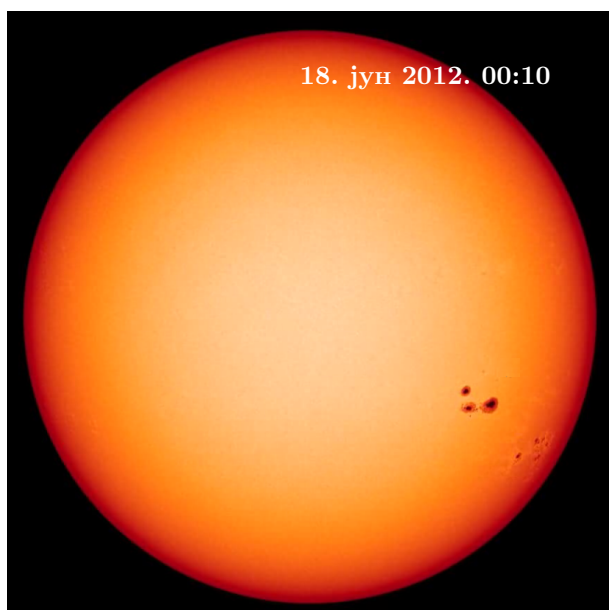
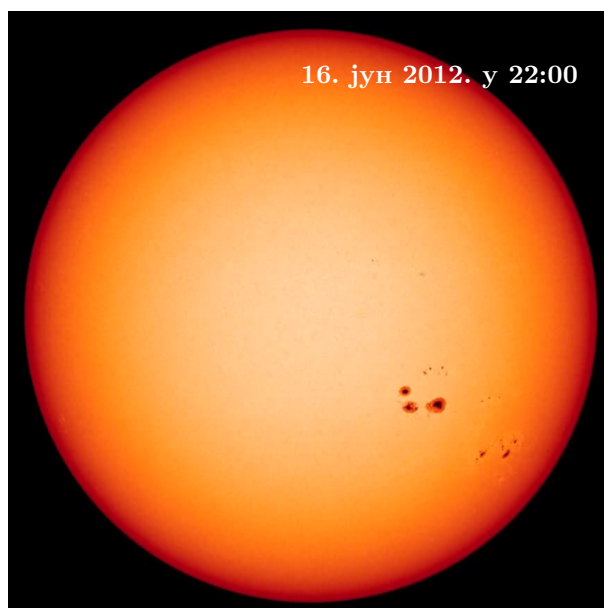
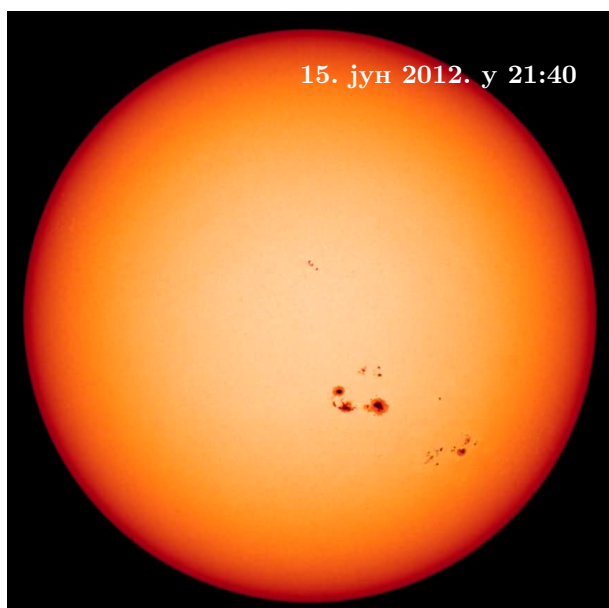
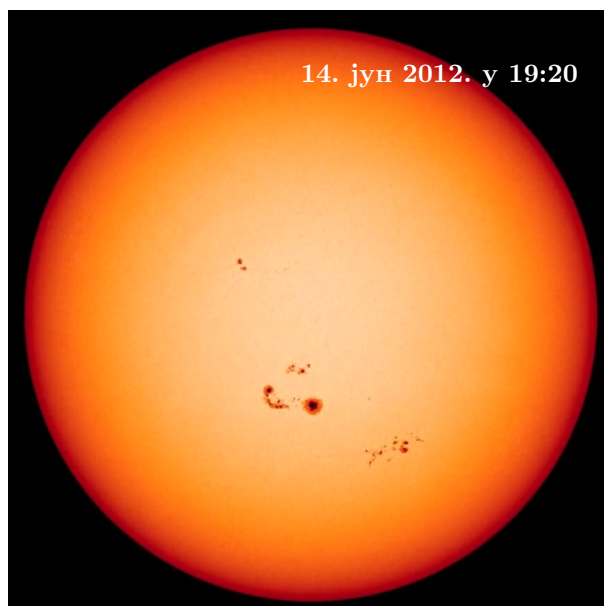
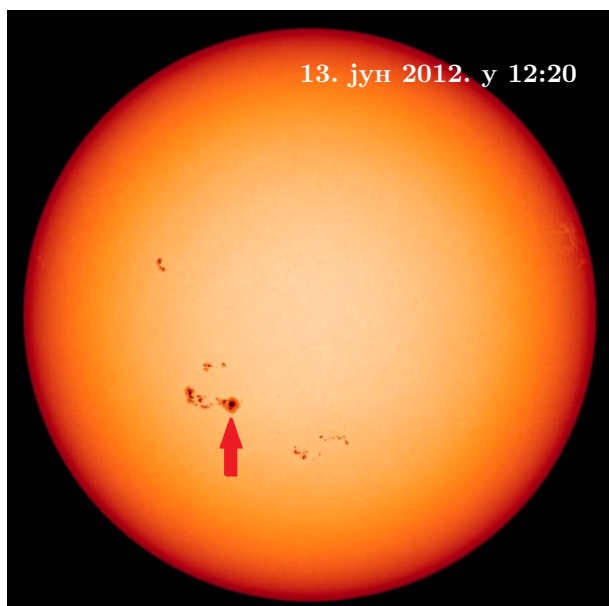
- (б) Колико пута се повећа специфична електрична проводност танког филма од галијум-арсенида кад се он изложи дејству снопа монохроматске светлости интензитета $I_0 = 1050 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$? Сноп светлости пада нормално на филм, кружна фреквенција светлости задовољава услов $\hbar\omega = E_C - E_V$, коефицијент апсорпције на тој фреквенцији је $\alpha = 8000 \text{ cm}^{-1}$ и задовољава услов $\alpha d \ll 1$, где је d дебљина танког филма. Поред процеса апсорпције, у материјалу долази и до процеса рекомбинације у коме електрон пређе из проводне у валентну зону уз емитовање светлости. Број рекомбинација који се дешава по јединици времена и јединици запремине материјала је $R = \gamma np$, где је $\gamma = 7,20 \cdot 10^{-10} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$, n је концентрација електрона у проводној зони, а p концентрација шупљина у валентној зони. (9 поена)

Помоћ: Када је то оправдано можете користити апроксимације $e^x + 1 \approx e^x$ за $x \gg 1$ и $e^x \approx 1$ за $|x| \ll 1$.

5. Соларна и хелиосферична опсерваторија (СОХО) је европска летелица лансирана у свемир 1995. године да проучава Сунце. СОХО се налази на дужи која спаја Сунце и Земљу на растојању 0,990 а.ј. од Сунца и 0,010 а.ј. од Земље. У прилогу је приказано 6 слика које је СОХО снимала камером која је постављена тако да вертикални правац на сликама одговара оси ротације Сунца. Сматрати да је оса ротације Сунца нормална на раван у којој се креће Земља. Сунце око своје осе ротира у истом смеру као и Земља око Сунца. За сваку слику је назначено кад је снимљена, при чему може да се сматра да је грешка наведеног времена занемарљива. На сликама су јасно уочљиве тамније области које се називају Сунчеве пеге. То су области у којима је температура нижа од типичне температуре на површини Сунца. Пратећи кретање Сунчеве пеге означене стрелицом, одредити период ротације Сунца око своје осе (на географској ширини на којој се налази та пеге) и проценити одговарајућу грешку. Пошто Сунце није чврсто тело, период ротације није исти на свим географским ширинама. Зато обавезно треба разматрати назначену Сунчеву пегу да би се добило очекивано решење. Уз решење задатка обавезно треба предати и лист који вам је дат у прилогу ако сте на њему нешто радили. (20 поена)

Приликом решавања свих задатака можете користити следеће бројне вредности физичких константи: брзина светлости у вакууму $c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Болцманова константа $k_B = 8,617 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$, елементарно наелектрисање $|e_0| = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, једна астрономска јединица 1 а.ј. = $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, период ротације Земље око Сунца $T_z = 365,24$ дана.

*У бозонској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.



Уколико предајете овај лист, своју шифру упишите овде: _____



IV разред

- Нека је координатни систем постављен тако да је x оса усмерена од почетног ка дијагонално супротном темену квадрата. Када се Сатјендра креће по бетону x компонента његове брзине је $v_x^{(b)} = v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$, а када се креће по трави она износи $v_x^{(t)} = v_2 \cos \varphi$, где је φ угао који вектор брзине заклапа са x осом. Пошто је $\cos \varphi \leq 1$ и $v_2 < v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$, следи да је увек $v_x^{(t)} < v_x^{(b)}$. Зато се најкраће време постиже када Сатјендра иде бетонском стазом **14п**. Тражено време је једнако $t = \frac{L\sqrt{2}}{v_x^{(b)}} = \frac{2L}{v_1}$ **5п**, односно $t = 100$ s **1п**.
- (а) Према нерелативистичком закону слагања брзина, брзина зрака у односу на интерферометар који се креће брзином $\vec{v}$ у односу на етар је $\vec{c}_i = \vec{c} - \vec{v}$. На делу пута AM_1 интензитет брзине зрака у односу на интерферометар је $c_i^{AM_1} = c + v$, док је у супротном смеру $c_i^{M_1A} = c - v$. Стога је време за које зрак пређе пут $A - M_1 - A$ једнако $t_1 = \frac{l_1}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-\beta^2}$ **5п**, где је уведена ознака $\beta = v/c$. За зрак који прелази пут $A - M_2 - A$, интензитети брзина у односу на интерферометар су у оба смера једнаки и износе $c_i^{AM_2} = c_i^{M_2A} = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1-\beta^2}$, одакле је $t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ **5п**. Пошто оба зрака доживе једнак број рефлексија од огледала, тражена фазна разлика зрака износи $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c \cdot (t_1 - t_2) = \frac{4\pi}{\lambda} \left(\frac{l_1}{1-\beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$ **3п**.
- (б) Аналогно као у (а), време за које зрак пређе пут $A - M_1 - A$ је $t'_1 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, док време за које зрак пређе пут $A - M_2 - A$ износи $t'_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1-\beta^2}$. Сада је фазна разлика $\delta' = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c \cdot (t'_1 - t'_2) = \frac{4\pi}{\lambda} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_2}{1-\beta^2} \right)$ **3п**.
- (в) Промена фазне разлике при промени оријентације интерферометра износи $\Delta\delta = \delta - \delta' = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{l_1+l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$. Промена фазне разлике за 2π значи померање интерференционе слике за ширину једне пруге, па је број пруга за које се слика помери $\Delta N = \frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{2}{\lambda} \frac{l_1+l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ **2п**. На основу бројних односа датих у задатку, $\beta = v/c = 10^{-4} \ll 1$, па се добија $\Delta N \approx \frac{l_1+l_2}{\lambda} \cdot \beta^2$. Након замене бројних вредности, $\Delta N \approx 1/3$, што је, према условима задатка, могло бити регистровано помоћу описаног интерферометра **2п**.
- (а) Пројекције импулса честице масе m_1 пре судара на осе лабораторијског система су $p_{1x} = \frac{1}{c} \sqrt{T_1(T_1 + 2m_1c^2)}$, $p_{1y} = p_{1z} = 0$. Из поставке проблема, систем центра импулса се креће брзином интензитета u дуж x осе лабораторијског система. Користећи дате трансформационе законе, пројекције импулса честице масе m_1 пре судара на осе система S^* су $p_{1x}^* = \gamma \left(p_{1x} - \beta \frac{T_1 + m_1c^2}{c} \right)$, $p_{1y}^* = p_{1z}^* = 0$, док су за честицу масе m_2 одговарајуће пројекције једнаке $p_{2x}^* = -\gamma\beta m_2c$, $p_{2y}^* = p_{2z}^* = 0$. Брзина u је одређена условом $p_{1x}^* + p_{2x}^* = 0$, одакле следи да је њен интензитет $u = c \frac{\sqrt{T_1(T_1 + 2m_1c^2)}}{T_1 + m_1c^2 + m_2c^2}$ и да је усмерена дуж x осе **3п**.
- (б) Интензитети импулса честица у систему S^* пре судара су једнаки и износе

$$p_1^* = p_2^* = p^* = \gamma\beta m_2c = m_2c \sqrt{\frac{T_1(T_1 + 2m_1c^2)}{(m_1c^2 + m_2c^2)^2 + 2T_1m_2c^2}}.$$

Из закона одржања импулса у систему S^* следи да су интензитети импулса честица у систему S^* након судара такође међусобно једнаки, $\tilde{p}_1^* = \tilde{p}_2^* = \tilde{p}^*$. Пошто је судар апсолутно еластичан, маса сваке од честица након судара једнака је маси пре судара. Стога закон одржања енергије у систему S^* даје $\tilde{p}^* = p^*$ **2п**.

- (в) Енергија честице масе m_2 у лабораторијском систему након судара је $\tilde{E}_2 = \gamma \left(\tilde{E}_2^* + \beta c \tilde{p}_{2x}^* \right)$, при чему је $\tilde{p}_{2x}^* = -p^* \cos \theta^*$, док је $\tilde{E}_2^* = \sqrt{(cp^*)^2 + (m_2c^2)^2}$. Израз за $\tilde{E}_2$ се након преуређивања своди на $\tilde{E}_2 = m_2c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2 \cos \theta^*) = m_2c^2 [1 + \beta^2 \gamma^2 (1 - \cos \theta^*)]$, одакле је кинетичка енергија честице масе m_2 у лабораторијском систему након судара $\tilde{T}_2 = m_2c^2 \beta^2 \gamma^2 (1 - \cos \theta^*)$ **4п**. Величина $\tilde{T}_2$ достиже максималну вредност за $\theta^* = \pi$ и тада износи

$$\tilde{T}_{2,\max} = 2m_2c^2 \beta^2 \gamma^2 = T_1 \frac{2m_2c^2(T_1 + 2m_1c^2)}{(m_1c^2 + m_2c^2)^2 + 2T_1m_2c^2} \text{ **2п** }.$$



Пројекције импулса честице масе m_1 у систему S^* након судара су $\tilde{p}_{1x}^* = p^* \cos \theta^*$ и $\tilde{p}_{1y}^* = p^* \sin \theta^*$, док су одговарајуће пројекције у систему S једнаке

$$\tilde{p}_{1x} = \gamma \left(\tilde{p}_{1x}^* + \beta \frac{\tilde{E}_1^*}{c} \right) = p^* \left(\gamma \cos \theta^* + \sqrt{(\beta\gamma)^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2} \right), \quad \tilde{p}_{1y} = \tilde{p}_{1y}^* = p^* \sin \theta^*.$$

Слично томе,

$$\tilde{p}_{2x} = \gamma \left(\tilde{p}_{2x}^* + \beta \frac{\tilde{E}_2^*}{c} \right) = p^* \left(-\gamma \cos \theta^* + \sqrt{(\beta\gamma)^2 + 1} \right), \quad \tilde{p}_{2y} = \tilde{p}_{2y}^* = -p^* \sin \theta^*.$$

У случају $\theta^* = \pi$, честица масе m_2 се у систему S након судара креће у правцу и смеру x осе ($\tilde{p}_{2x} > 0$) за произвољну вредност односа m_2/m_1 , док се честица масе m_1 креће у правцу и смеру x осе ($\tilde{p}_{1x} > 0$) за $m_2/m_1 < 1$, у смеру супротном од смера x осе ($\tilde{p}_{1x} < 0$) за $m_2/m_1 > 1$, а зауставља се након судара за $m_2/m_1 = 1$, предајући целокупну кинетичку енергију честици масе m_2 **4п**.

(г) Угао расејања је одређен са $\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\gamma \cos \theta^* + \sqrt{(\beta\gamma)^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2}}$. У случају $m_2 < m_1$, лако се проверава да је

$\tan \theta \geq 0$ за $\theta^* \in [0, \pi]$, док се максимална вредност за $\tan \theta$ добија из услова $\frac{d(\tan \theta)}{d\theta^*} = 0$. Угао $\theta_{\max}^*$ за који $\tan \theta$ достиже максималну вредност је одређен условом

$$\cos \theta_{\max}^* = -\frac{\gamma}{\sqrt{(\beta\gamma)^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2}} \quad \text{3п},$$

$$\text{тако да је } \tan \theta_{\max} = \frac{\frac{m_2}{m_1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2}}, \text{ односно } \theta_{\max} = \arctg \left(\frac{\frac{m_2}{m_1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2}} \right) = \arcsin \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \quad \text{2п}.$$

4. (а) Концентрација електрона у проводној зони је $n = n_C f_{\text{FD}}(E_C) = \frac{n_C}{e^{\frac{E_C - E_F}{k_B T} + 1}}$, а концентрација шупљина у валентној зони је $p = n_V [1 - f_{\text{FD}}(E_V)] = \frac{n_V}{e^{\frac{E_F - E_V}{k_B T} + 1}}$. Пошто шупљине настају преласком електрона из валентне

у проводну зону, важи $n = p$. Користећи апроксимације $e^{\frac{E_C - E_F}{k_B T} + 1} \approx e^{\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$ и $e^{\frac{E_F - E_V}{k_B T} + 1} \approx e^{\frac{E_F - E_V}{k_B T}}$, из претходних једначина следи $n = p = \sqrt{n_C n_V} \cdot e^{-\frac{E_C - E_V}{2k_B T}}$ **7п** и $E_F = \frac{E_C + E_V}{2} - \frac{1}{2} k_B T \ln \frac{n_C}{n_V}$. Из последњих

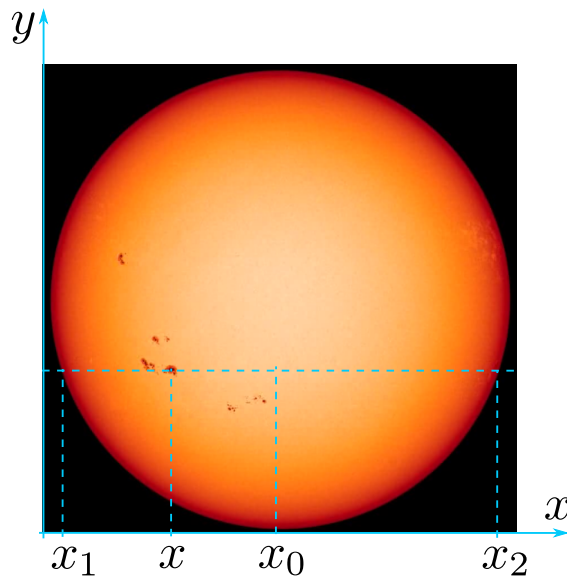
израза следи $n = p = 2,43 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$ **1п**, а из израза за E_F можемо закључити да су уведене апроксимације биле оправдане. Специфична проводност је једнака $\sigma = \mu_n n |e_0| + \mu_p p |e_0| = (\mu_n + \mu_p) |e_0| \sqrt{n_C n_V} \cdot e^{-\frac{E_C - E_V}{2k_B T}}$ **2п**, одакле је $\sigma = 3,46 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}$ **1п**.

(б) Нека се сноп светлости простире у правцу x осе и нека танки филм заузима област простора $x \in [0, d]$. Размотримо ваљак који заузима област простора $[x, x + \Delta x]$ чија је основа површине S нормална на x осу. Енергија која се апсорбује унутар тог ваљка за време Δt је једнака $\Delta E = [I(x) - I(x + \Delta x)] S \Delta t$, при чему је $I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$. Број фотона који се апсорбује по јединици времена и јединици запремине је онда $G = \frac{1}{\hbar \omega} \frac{\Delta E}{S \Delta x \Delta t}$, што је истовремено и број парова електрон-шупљина који се ствара по јединици времена и јединици запремине. Користећи $I(x) - I(x + \Delta x) = -\frac{dI}{dx} \Delta x$, $-\frac{dI}{dx} = \alpha I_0 e^{-\alpha x}$ и $e^{-\alpha x} \approx 1$, следи $G = \frac{I_0 \alpha}{\hbar \omega}$ **4п**. У стационарном стању је број створених парова електрон-шупљина једнак броју рекомбинација, тј. $G = R = \gamma n p$ **3п**. Користећи $n = p$ из претходних једначина следи $n = p = \sqrt{\frac{I_0 \alpha}{\gamma(E_C - E_V)}}$ **1п**, односно $n = p = 2,26 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Пореди овај резултат са решењем дела (а) закључујемо да је концентрација носилаца $9,33 \cdot 10^8$ пута већа кад се материјал изложи светлости, а толико пута је већа и специфична проводност **1п**.



5. Нека је Ω_z интензитет угаоне брзине ротације Земље око Сунца, а Ω_s интензитет угаоне брзине ротације Сунца око своје осе. Појаву ћемо посматрати у референтном систему који ротира угаоном брзином Ω_z око осе ротације Сунца. У том референтном систему камера мирује, а угаона брзина ротације Сунца је $\Omega_p = \Omega_s - \Omega_z$ [2п]. Пошто се Сунчева пега креће по кругу у равни нормалној на осу ротације Сунца, њена x координата зависи од времена као $x(t) = x_0 + A_0 \sin(\Omega_p t + \varphi)$, где су x_0 , A_0 и φ реалне константе [4п].

Величине x_0 и A_0 се одређују из координата левог и десног амплитудног положаја x_1 и x_2 (слика 1), као $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $A_0 = \frac{x_2 - x_1}{2}$. Непосредним мерењем лењиром на слици добијамо $x_1 = 4,0\text{mm}$, $x_2 = 76,0\text{mm}$, одакле је $A_0 = 36,0\text{mm}$, $x_0 = 40,0\text{mm}$. Процењена грешка мерења је $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,5\text{mm}$, одакле је $\Delta A_0 = \Delta x_0 = \frac{1}{2}(\Delta x_1 + \Delta x_2) = 0,5\text{mm}$ [2п].



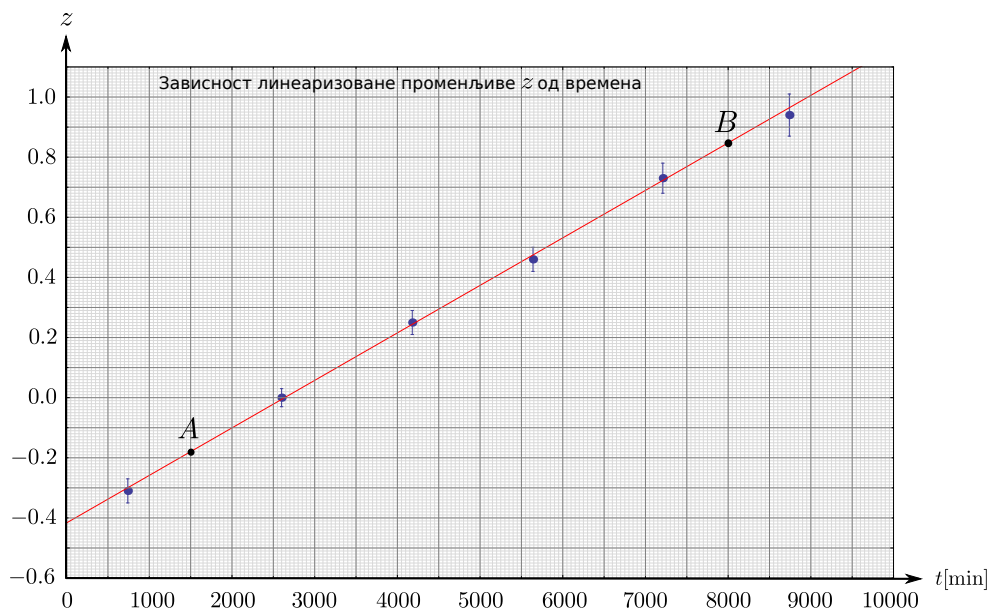
Слика 1: уз решење 5. задатка.

Да би се одредило Ω_p , извршена је линеаризација добијене зависности $x(t)$. Линеаризована зависност има облик $z = \Omega_p t + \varphi$, где је $z = \arcsin \frac{x - x_0}{A_0}$. У табели 1 дате су измерене вредности зависности $x(t)$, где t представља протекло време од поноћи између 12. и 13. јуна 2012. године, као и израчунате вредности величине z . Грешка величине z је једнака $\Delta z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{A_0}\right)^2}} \Delta \left(\frac{x - x_0}{A_0}\right)$, одакле је $\Delta z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{A_0}\right)^2}} \left(\frac{\Delta x + \Delta x_0}{A_0} + \frac{|x - x_0|}{A_0^2} \Delta A_0\right)$. Израчунате вредности Δz су такође дате у табели 1 [5п].

$t[\text{min}]$	740	2600	4180	5640	7210	8740
$x[\text{mm}]$	29	40	49	56	64	69
z	-0,31052	0,00000	0,25268	0,46055	0,72973	0,93661
Δz	0,0336	0,0278	0,0323	0,0379	0,0497	0,0658
Δz (заокружено)	0,04	0,03	0,04	0,04	0,05	0,07
z (заокружено)	-0,31	0,00	0,25	0,46	0,73	0,94

Табела 1: Измерени подаци и израчунате грешке.

График зависности z од t приказан је на слици 2. На графику је провучена права тако да одступање експерименталних тачака од праве буде што је могуће мање. Очитавањем две тачке са праве $A(1500\text{ min}, -0,18)$ и $B(8000\text{ min}, 0,85)$ (при чему се A налази између прве и друге експерименталне тачке, а B између претпоследње и последње), за коефицијент правца се добија $\Omega_p = \frac{z_B - z_A}{t_B - t_A} = 1,5846 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{min}}$. Грешка коефицијента правца се одређује из $\frac{\Delta \Omega_p}{\Omega_p} = \frac{\Delta z_B + \Delta z_A}{z_B - z_A} = \frac{0,04 + 0,07}{0,85 + 0,18} = 0,1068$, одакле је $\Delta \Omega_p = 1,692 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{min}}$ [4п].



Слика 2: График зависности z од t .

Даље је $\Omega_s = \Omega_p + \Omega_z$, где је $\Omega_z = \frac{2\pi}{T_z} = 1,194 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{min}}$. Одатле је $T_s = \frac{2\pi}{\Omega_s} = 25,6$ дана и $\Delta T_s = T_s \frac{\Delta \Omega_p}{\Omega_s} = 2,54$ дана, односно $T_s = (26 \pm 3)$ дана **3п**.