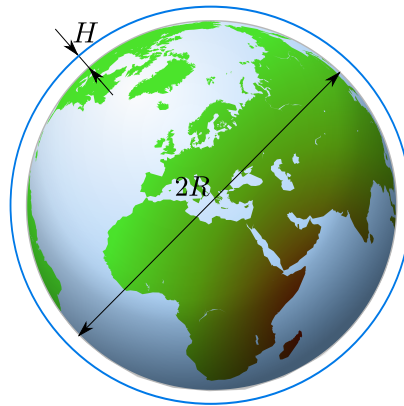




Задатак 1: Муње из ведре главе (10 поена)

У овом задатку ћемо разматрати кружење наелектрисања у атмосфери укључујући муње праћене грмљавином. Јоносфера је горњи слој атмосфере који је услед космичког зрачења наелектрисан позитивно. Земљина површина наелектрисана је негативно и заједно са јоносфером чини огроман природни кондензатор познатији као "атмосферски кондензатор". Непосредно изнад Земљине површине детектовано је и измерено (по лепом времену) електрично поље јачине $E_0 = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, усмерено ка центру Земље.

У свим деловима задатка можете сматрати да је Земља проводник облика кугле полупречника $R = 6400 \text{ km}$ и да се јоносфера налази на висини од $H = 80 \text{ km}$ изнад површине Земље (слика 1). Диелектрична пропустљивост ваздуха је $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$.



Слика 1: Атмосферски кондензатор

- (а) Израчунати количину наелектрисања на Земљи. Претпостављајући да је ваздух идеалан изолатор израчунати разлику потенцијала између Земље и јоносфере, као и капацитет атмосферског кондензатора. Користећи чињеницу да је висина јоносфере много мања од полупречника Земље показати да се атмосферски кондензатор може сматрати плочастим кондензатором. (1 поен)

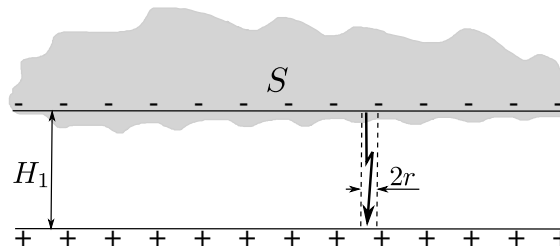
Ваздух садржи ниску концентрацију јона, што изазива значајна одступања електричног поља и проводности у атмосфери од модела који сте до сада разматрали. У реалности ваздух није идеалан изолатор већ је слаб проводник. Проводност атмосфере на висини h дата је изразом

$$\sigma(h) = \sigma_0 e^{h/\Delta},$$

где је $\sigma_0 = 2,0 \cdot 10^{-13} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ проводност ваздуха на површини Земље, а $\Delta = 5,0 \text{ km}$. Позитивно наелектрисане честице одлазе ка Земљиној површини, а негативно наелектрисане одлазе ка јоносфери. Такво усмерено кретање честица представља електричну струју која празни атмосферски кондензатор.

- (б) Израчунати електрични отпор атмосфере и капацитет атмосферског кондензатора. Проценити време пражњења атмосферског кондензатора, дефинисано као време за које вредност наелектрисања кондензатора опадне на 0,1% почетне вредности. (4 поена)

Иако се очекује да се атмосферски кондензатор испразни за неколико минута, то се ипак не дешава и то захваљујући грмљавинским непогодама. Грмљавински облаци, кумулонибуси, имају просечну површину $S = 100 \text{ km}^2$ и формирају се на просечној висини $H_1 = 3,0 \text{ km}$. Доњи делови кумулонибуса наелектрисани су негативно што индукује позитивно наелектрисање на високим објектима на Земљи (дрво, торањ, зграда), тако да се између облака и Земље ствара хомогено електрично поље супротног смера у односу на електрично поље у атмосферском кондензатору. Због нагомилавања наелектрисања у областима развоја грмљавинских облака јачина овог електричног поља расте и достиже критичну вредност $E_1 = 30 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$. Тада долази до електричног пражњења у атмосфери у облику циновске варнице - настаје муња (слика 2), а проводност атмосфере између облака и површине Земље постаје константа и износи $\sigma_1 = 3,0 \cdot 10^{-8} \frac{\text{S}}{\text{m}}$. Ово доприноси пуњењу атмосферског кондензатора, који се због тога никада не испразни.



Слика 2: Муња

- (в) Проценити време трајања електричног пражњења муње као и број муња који се дешава сваког дана. (2 поена)

У наставку задатка разматраћемо шта се дешава са ваздухом приликом проласка муње. Претпоставићемо да муња пролази кроз цилиндар полупречника $r = 11 \text{ cm}$. Претпоставимо да се сва електрична енергија током проласка муње претвара у топлотну енергију, због чега се ваздух јако загрева. Услед наглог загревања ваздух се експлозивно шири и чује се прасак - гром. Гром се дешава у различитим, али блиским временским тренуцима на путу муње, па се зато чује континуирани звучни талас, односно грмљавина. Топлотни капацитет ваздуха је $C = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$, а густина ваздуха $\rho = 1,0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Брзина звука у ваздуху v зависи од температуре ваздуха T као $v = \sqrt{\alpha T}$, где је $\alpha = 400 \frac{\text{m}^2}{\text{Ks}^2}$.

- (г) До које температуре T_1 се загреје ваздух у цилиндру услед проласка муње, ако је пре настанка муње температура ваздуха била $T_0 = 27^\circ \text{C}$? (1 поен)
- (д) Израчунати временски интервал између тренутка када посматрач на Земљи види муњу и тренутка када чује гром. Звучни талас грома који стигне до посматрача прелази пут $l = 4,0 \text{ km}$, при чему је температура ваздуха на месту где се посматрач налази T_0 . Температура ваздуха експоненцијално опада удаљавајући се од муње по закону

$$T(x) = A e^{-Bx},$$

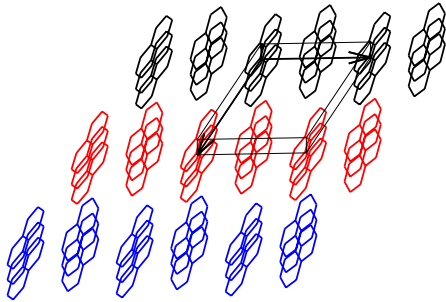
где је x растојање од муње, а A и B позитивне константе.

(2 поена)

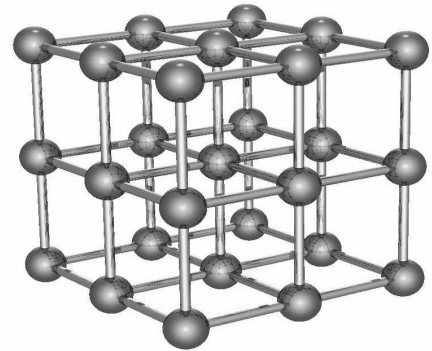


Задатак 2: Извађен из нафталина (10 поена)

Нафталин је супстанца која се у домаћинствима користи за заштиту одеће одложене у ормар (најчешће џемпера) од мољаца. На собној температури нафталин је у чврстом стању и може да пређе директно у гасно стање (сублимација). Паре нафталина су токсичне за мољце и њихове ларве, тако да се они клоне одеће заштићене нафталином.



Слика 3: Права кристална решетка нафталина



Слика 4: Кубична кристална решетка

Нафталин у чврстом стању спада у молекуларне кристале. У тој врсти материјала, мали молекули су распоређени у чворовима кристалне решетке. Један молекул нафталина се састоји од два спојена бензенова прстена. У овом задатку ћемо, једноставности ради, сматрати да је један молекул нафталина тачкаста класична честица масе $m = 48 m_p$, где је m_p маса мировања једног протона. Такође ћемо претпоставити да су молекули распоређени у теменима кубичне решетке приказане на слици 4, иако је права кристална решетка нафталина сложенија (приказана је на слици 3). Молекули нафталина у кристалу интерагују Ван дер Валсовом интеракцијом, која држи кристал на окупу. Потенцијална енергија Ван дер Валсове интеракције између два молекула дата је изразом

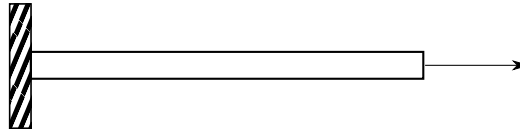
$$U(r) = -U_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 - \frac{1}{4} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} \right].$$

Притом је r растојање између молекула, а r_0 и U_0 су константе чије су вредности једнаке $r_0 = 0,41 \text{ nm}$ и $U_0 = 0,20 \text{ eV}$. У свим деловима овог задатка сматрати да само молекули у најближим суседним чворовима кристалне решетке међусобно интерагују.

- (а) У овом делу задатка ћемо разматрати силу којом интерагују два молекула нафталина.
- (а1) Наћи како интензитет силе којом интерагују два молекула нафталина зависи од њиховог међусобног растојања r .
 - (а2) За које вредности r је ова сила привлачна, а за које вредности r је одбојна?
 - (а3) Наћи максималан интензитет привлачне силе између два молекула нафталина и за које r се он достиже.
 - (а4) Наћи растојање r_m за које је потенцијална енергија интеракције два молекула нафталина минимална, као и минималну потенцијалну енергију $U(r_m)$.
 - (а5) За растојања r која су блиска r_m , потенцијална енергија се може апроксимирати са $U(r) = U(r_m) + \frac{1}{2} \kappa (r - r_m)^2$. Наћи вредност константе κ . (1,5 поен)
- (б) Наћи густину кристалног нафталина на температури апсолутне нуле. (1 поен)
- (в) На ненулој температури молекули нафталина поседују и кинетичку енергију тако да осцилују око равнотежног положаја. Притом се средње растојање између два молекула нафталина повећава што се манифестује као топлотно ширење материјала. Циљ овог дела задатка је одређивање коефицијента топлотног ширења нафталина.



- (в1) Разматрати два изолована молекула нафталина и сматрати да се они могу кретати само дуж правца који их спаја. Ако је њихова укупна максимална кинетичка енергија (у референтном систему центра масе) једнака $\frac{1}{2}k_B T$, где је T температура, наћи минимално r_1 и максимално r_2 растојање између њих током оваквог кретања.
- (в2) Сматрајући да је средње растојање између молекула током оваквог кретања једнако $r_s = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, одредити како ово растојање зависи од температуре.
- (в3) Добијени израз упростити сматрајући да је $\frac{k_B T}{U_0} \ll 1$. Помоћ: Можете искористити апроксимацију $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$, која важи за $|x| \ll 1$.
- (в4) Одредити линеарни коефицијент топлотног ширења нафталина сматрајући да је средње растојање између молекула у кристалу нафталина једнако средњем растојању израчунатом у делу (в3). **(2 поена)**
- (г) У овом делу задатка ћемо размотрити механичке особине материјала на температури апсолутне нуле.
- (г1) Одредити Јунгов моду еластичности кристалног нафталина. Помоћ: Посматрати штап од овог материјала чији је један крај причвршћен за зид, а на други крај делује сила чије је дејство равномерно распоређено по површини кристала (слика 5). Сматрати да се правац дејства силе поклапа са једном од оса кристала.
- (г2) Колика сила по јединици површине је потребна да би се штап од нафталина са слике 5 покидао (механички напон кидања материјала)? **(3 поена)**



Слика 5: Штап од кристалног нафталина

- (д) Кроз кристал нафталина се простире лонгитудинални механички талас у правцу x -осе која се поклапа са једном од оса кристала. Амплитуда таласа је мала и систем се налази на температури апсолутне нуле.
- (д1) Нека је u_n померај молекула n у односу на равнотежни положај. Написати други Њутнов закон за кретање тог молекула нафталина. У изразу за силу која делује на молекул задржати само чланове линеарне по померајима u_n , u_{n-1} и u_{n+1} (молекули $n-1$ и $n+1$ су најближи суседи молекула n у правцу x -осе).
- (д2) Наћи везу између кружне фреквенце ω таласа и таласног вектора k . Помоћ: Решење тражити у облику $u_n(t) = A \cos(\omega t - knr_0 + \varphi)$, где је t време, а φ је константа.
- (д3) Колика је лонгитудинална брзина звука кад $k \rightarrow 0$? Помоћ: Можете искористити апроксимацију $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, која важи кад је $|x| \ll 1$. **(2,5 поена)**

Приликом решавања задатка можете користити следеће бројне вредности универзалних физичких константи:

- маса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg,
- елементарно наелектрисање $|e| = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C,
- Болцманова константа $k_B = 8,62 \cdot 10^{-5}$ eV/K,

као и следећи тригонометријски идентитет:

- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$.



Задатак 3: Покисли до голе коже (10 поена)

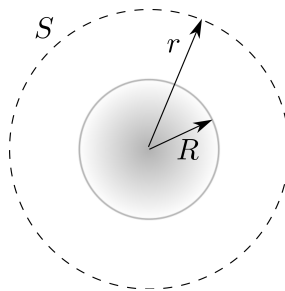
Капи кише настају кондензацијом водене паре у атмосфери. У овом задатку разматраћемо како се формирају капи кише, колико времена је потребно за то, како се оне крећу кроз атмосферу, као и колико велика треба да буде кап да би стигла до површине Земље пре него што испари. У свим деловима задатка сматрати да кап има облик лопте и занемарити утицај капиларних појава и силе потиска ваздуха.

За типичне капи полупречника $70 \mu\text{m} = R_1 \leq R \leq R_2 = 1,0 \text{ mm}$ сила отпора ваздуха која делује на кап је дата изразом $F_{\text{от}} = c_1 R^2 v$, где је $c_1 = 4,9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$. Сматрати да је убрзање силе Земљине теже константног интензитета $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Густина воде је $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$.

- (а) Показати да је за капи полупречника $R_1 \leq R \leq R_2$ успостављена брзина падања капи дата изразом $v = c_2 R$, где је c_2 константа чију нумеричку вредност треба да одредите. **(0,5 поена)**

Полупречник капи кише се може повећавати из два разлога: услед кондензације водене паре на површини саме капи и услед судара капи са другом капи при чему настаје нова већа кап. Сматраћемо најпре у делу задатка (б) да кондензације нема и да се полупречник капи повећава искључиво услед судара са другим капима. Разматраћемо кап чији је полупречник из опсега $R_1 \leq R \leq R_2$. Претпоставити да су све капи са којима се она судара знатно мање од ње, да она у потпуности захвати сваку кап са којом се судари, да су мале капи равномерно распоређене у простору и да је њихова густина $\rho_b = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$.

- (б) Колико времена је потребно да разматрана кап нарасте од $R_1 = 70 \mu\text{m}$ до $R_2 = 1,0 \text{ mm}$? **(1,5 поен)**



Слика 6: Кап кише полупречника R и концентрична сфера полупречника r

Надаље ћемо у деловима задатка (в), (г), (д) и (ђ) разматрати кап која се не судара са другим капима и чији се полупречник мења искључиво услед испаравања воде са површине капи или кондензације околне водене паре на капи. У деловима задатка (в), (г) и (д) можете сматрати да центар масе капи мирује. Код кондензације, водена пара у површинском слоју изван капи прелази у течност и постаје део капи. Процес кондензације је праћен и процесом дифузије паре изван капи која доводи до прерасподеле густине паре у околини капи. На основу закона дифузије, маса водене паре која у јединици времена пролази кроз сферу полупречника r концентричну са капи (та сфера је приказана на слици 6) је

$$q_m(r) = -DS \frac{d\rho_v(r)}{dr},$$

где је $D = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ коефицијент дифузије водене паре, ρ_v њена густина, а $S = 4r^2\pi$ површина сфере полупречника r . Претпостављени смер протока честица у претходној једначини је ка спољашњости сфере. Претпоставити да се полупречник капи мења споро тако да је проток честица водене паре стационаран.

- (в) Известити израз који повезује величине $q_m(r)$, $\rho_v(r)$ и $\rho_v(\infty)$. **(1 поен)**

На основу закона провођења топлоте, количина топлоте која у јединици времена пролази кроз сферу полупречника r концентричну са капи (та сфера је приказана на слици 6) је

$$q_q = -KS \frac{dT(r)}{dr},$$



10. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2015/16. ГОДИНА



Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ

Београд
6-7. мај 2016.

где је $K = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ топлотна проводност водене паре, а $T(r)$ је температура на растојању r од центра капи. Претпостављени смер протока топлоте у претходној једначини је ка спољашњости сфере. Претпоставити да се полупречник капи мења споро тако да је проток топлоте стационаран.

Специфична топлота испаравања воде је $L = 2,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$, моларна маса воде је $M_v = 18 \text{ g/mol}$, а универзална гасна константа је једнака $R_g = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$. На довољно великом растојању од центра капи температура је једнака $T_\infty = 280 \text{ K}$, а релативна влажност на довољно великом растојању од центра капи је $r_H = 101\%$ (Релативна влажност се дефинише као однос притиска водене паре и притиска засићене водене паре на истој температури). Сматрати да је водена пара идеалан гас и да је притисак засићене водене паре у релевантном опсегу температура једнак

$$p_s = [a_1 + a_2 (T - T_\infty)] \cdot T,$$

где је $a_1 = 3,571 \text{ Pa/K}$ и $a_2 = 0,333 \text{ Pa/K}^2$.

(г) Одредити промену масе капи у јединици времена у тренутку кад је полупречник капи једнак R . Напомена: Такмичари који не ураде овај део задатка могу у деловима (д) и (ђ) да сматрају да је решење овог дела задатка $\frac{dm_k}{dt} = \gamma (r_H - 1) R$, где је $\gamma = 1,0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$. (4,5 поена)

(д) Колико времена је потребно да разматрана кап нарасте од $R_1 = 70 \mu\text{m}$ до $R_2 = 1,0 \text{ mm}$? (1 поен)

Кап формирана у облаку на висини $H = 1,0 \text{ km}$ изнад Земље пада кроз атмосферу у којој је релативна влажност $r'_H = 70\%$. Сматрати да је током падања брзина капи једнака $v = c_2 R$, а да је промена масе капи у јединици времена дата истим законом [изведеним у делу (г)] као за кап која мирује.

(ђ) Колики треба да буде полупречник капи формиране у облаку да би стигла до површине Земље пре него што испари? (1,5 поен)

Задатке припремили: *др Ненад Вукмировић* и *Владимир Вељић*, Институт за физику, Београд

Рецензенти: *др Димитрије Степаненко* и *Вељко Јанковић*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд



Решење задатка 1

(а) Земља је идеалан проводник па је сво негативно наелектрисање $-Q$ распоређено по њеној површини. Примењујући Гаусову теорему $\vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{-Q}{\epsilon_0}$ на сферну област $S = 4r^2\pi$ полупречника r ($R \leq r \leq R+H$), добијамо да је интензитет електричног поља у тој области $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$. По услову задатка електрично поље на површини Земље је $E(r=R) = E_0$, па се за количину наелектрисања на Земљи добија $Q = 4\pi\epsilon_0 R^2 E_0 = 4,55 \cdot 10^5$ C. Разлика потенцијала између површине Земље и јоносфере је $V_1 = \int_R^{R+H} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right) = E_0 \frac{RH}{R+H} = 7,90 \cdot 10^6$ V, а капацитет атмосферског кондензатора $C_1 = \frac{Q}{V_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R(R+H)}{H} = 58$ mF. Користећи услов $H \ll R$, једначине за напон између електрода и капацитет кондензатора своде се на $V_1 = E_0 H$ и $C_1 = \epsilon_0 \frac{4\pi R^2}{H}$, које су еквивалентне једначинама за кондензатор са равним плочама површине $4\pi R^2$ на међусобном растојању H .

(б) Електрична отпорност атмосфере је $\mathcal{R} = \int_0^H \frac{1}{\sigma(h)} \frac{dh}{4R^2\pi} = -\frac{\Delta}{4\pi R^2 \sigma_0} (e^{-H/\Delta} - 1) \approx \frac{\Delta}{4\pi R^2 \sigma_0} = 48,6 \Omega$. Због проводности атмосфере, кроз њу тече струја која празни атмосферски кондензатор. Густина ове струје је константна на свим висинама, што следи из једначине континуитета $j_1 4\pi R_1^2 = j_2 4\pi R_2^2$, одакле следи $j_1 \approx j_2$ јер је $R_1 \approx R_2$. На основу Омовог закона $j = \sigma E = \text{const}$ следи да електрично поље експоненцијално опада са висином $E(h) = \frac{j}{\sigma} = E_0 e^{-h/\Delta}$, при чему је искоришћено да је интензитет електричног поља на површини Земље $E_0 = j/\sigma_0$. Разлика потенцијала између површине Земље и јоносфере је $V_2 = \int_0^H E(h) dh = -E_0 \Delta (e^{-H/\Delta} - 1) \approx E_0 \Delta$, а капацитет атмосферског кондензатора $C_2 = \frac{Q}{V_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{\Delta} = 0,91$ F.

Дакле, кондензатор C_2 се празни преко отпорника $\mathcal{R}$ при чему важи $U_{C_2} + U_{\mathcal{R}} = 0$, одакле следи $\frac{q}{C_2} + \frac{dq}{dt} \mathcal{R} = 0$. Последња једначина је диференцијална једначина која раздваја променљиве $\int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dt}{C_2 \mathcal{R}}$, одакле након интеграције следи $\ln q = -\frac{t}{C_2 \mathcal{R}} + K_1$, при чему је K_1 константа интеграције. K_1 се одређује из почетног услова $q(t=0) = Q$, одакле следи $K_1 = \ln Q$, на основу чега је $q(t) = Q e^{-\frac{t}{\tau_1}}$, где је $\tau_1 = C_2 \mathcal{R} = \epsilon_0/\sigma_0$ тзв. временска константа. Време потребно да се испразни кондензатор можемо проценити тако што ћемо израчунати време за које се количина наелектрисања на кондензатору смањи 1000 пута, па је $t_p = \tau_1 \ln(1000) = 305$ s.

(в) Одговарајућа површина Земље испод облака и доња површина облака чине кондензатор капацитета $C_3 = \epsilon_0 S/H_1$, а отпорност ваздуха којим је испуњен овај кондензатор је $\mathcal{R}_1 = H_1/(\sigma_1 S)$. Дакле, кондензатор C_3 се празни преко отпорника $\mathcal{R}_1$ при чему важи $U_C + U_{\mathcal{R}_1} = 0$. Слично као у делу под б) следи $\ln q = -\frac{t}{C_3 \mathcal{R}_1} + K_2$, при чему је K_2 константа интеграције која се одређује из почетног услова $q(t=0) = q_0$, где је $q_0 = U_C/C_3 = \epsilon_0 E_1 S$ количина наелектрисања непосредно пре пражњења. Дакле, $K_2 = \ln q_0$, односно $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$, а $\tau_2 = C_3 \mathcal{R}_1 = \epsilon_0/\sigma_1$. Време трајања муње представља време које је потребно да се испразни кондензатор, односно време за које се количина наелектрисања на кондензатору смањи 1000 пута, па је $t_m = \tau_2 \ln(1000) = 2,0$ ms. Како се атмосферски кондензатор не празни услед муња, то значи да се за време t_p деси $n = Q/q_0$ муња, односно у току $t_{dan} = 24$ h се деси $N_2 = t_{dan} n/t_p \approx 4,85 \cdot 10^6$ муња.

(г) Електрична енергија муње, може се проценити као енергија кондензатора који чине Земљина површина и доња површина облака, на основу чега је $\mathcal{E} = \frac{1}{2} q_0 U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 H_1 S$. Сва енергија $\mathcal{E}$ троши се на загревање ваздушног стуба висине H_1 и површине попречног пресека $r^2\pi$, па следи $\mathcal{E} = \rho r^2 \pi H_1 C (T_1 - T_0)$, одакле се добија $T_1 = T_0 + \frac{\epsilon_0 E_1^2 S}{2\rho r^2 \pi C} = 1,08 \cdot 10^4$ K.

(д) Брзина звука је много мања од брзине светлости, због чега је време за које звук стигне до посматрача много веће од времена за које светлост стигне до посматрача. Зато се прво види муња, а затим чује гром. Константе A и B могу се наћи из услова $T(x=0) = T_1$ и $T(x=l) = T_0$, одакле се добија $A = T_1$ и $B = -\frac{1}{l} \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right)$, на основу чега једначина $T(x) = A e^{-Bx}$ постаје $T(x) = T_1 \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{x/l}$. У задатку је дата зависност брзине звука у ваздуху од температуре $v = \sqrt{\alpha T}$, одакле следи $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\alpha T_1} \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{x}{2l}}$, што представља диференцијалну једначину која раздваја променљиве $dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha T_1}} \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{x}{2l}} dx$. Интеграцијом се добија време t_g након ког посматрач чује гром $t_g = \frac{2l \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_0}} - 1 \right)}{\sqrt{\alpha T_1} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)} = 5,37$ s, које уједно представља и временски интервал између тренутка када посматрач на Земљи види муњу и тренутка када чује гром.



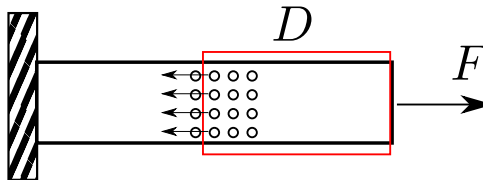
Решење задатка 2

- (а1) Размотримо молекуле 1 и 2 који интерагују (слика 1). Пројекција силе којом молекула 1 делује на молекулу 2 на правац који их спаја једнака је $F(r) = -\frac{dU}{dr}$, одакле је $F(r) = \frac{3U_0}{r} \left[-\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} \right]$, па је интензитет тражене силе једнак $|F(r)|$.
- (а2) Из претходног дела задатка се види да је сила привлачна за $r > r_0$ (јер је тад $F(r) < 0$), а одбојна за $r < r_0$.
- (а3) Кад је сила привлачна, њен интензитет је једнак $|F(r)| = \frac{3U_0}{r} \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} \right]$. Налажењем извода $\frac{d|F(r)|}{dr} = \frac{3U_0 r_0^6}{r^8} \left[13 \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - 7 \right]$, закључујемо да је функција $|F(r)|$ растућа за $r < \sqrt[6]{\frac{13}{7}} r_0$, а опадајућа за $r > \sqrt[6]{\frac{13}{7}} r_0$. Зато је интензитет привлачне силе максималан за $r = \sqrt[6]{\frac{13}{7}} r_0 = 0,45 \text{ nm}$ и једнак је $|F(r)|_{\max} = \frac{3U_0}{r_0} \left[\left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{7}{6}} - \left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{13}{6}} \right]$. Одатле је $|F(r)|_{\max} = 0,33 \frac{\text{eV}}{\text{nm}} = 5,2 \cdot 10^{-11} \text{ N}$.
- (а4) Потенцијална енергија је минимална за $r_m = r_0 = 0,41 \text{ nm}$ и тада је једнака $U(r_m) = -\frac{1}{4}U_0 = -0,050 \text{ eV}$.
- (а5) Константа κ се налази из $\kappa = \frac{d^2U}{dr^2}|_{r=r_m}$, одакле се добија $\kappa = \frac{18U_0}{r_0^2} = 21 \frac{\text{eV}}{\text{nm}^2} = 3,4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.



Слика 1: уз решење дела задатка (а)

- (б) На температури апсолутне нуле систем је у минимуму потенцијалне енергије, па је растојање између суседних молекула тада једнако r_0 . У једној ћелији кубичне решетке запремине r_0^3 се у средњем налази један молекул масе $m = 48 \cdot m_p$, па је густина нафталина једнака $\rho = \frac{48m_p}{r_0^3} = 1,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
- (в1) У положајима $r_{1,2}$ у којима растојање између молекула највише одступа од равнотежног брзина молекула (у систему центра масе) је једнака нули. Из закона одржања енергије примењеног на равнотежни положај и положаје $r_{1,2}$ следи $U(r_m) + \frac{1}{2}k_B T = U(r_{1,2})$. Решавањем претходне једначине као квадратне једначине по променљивој $\left(\frac{r_0}{r}\right)^6$ добијамо $r_{1,2} = r_0 \left(1 \pm \sqrt{\frac{2k_B T}{U_0}}\right)^{-\frac{1}{6}}$.
- (в2) $r_s = \frac{1}{2} \left[r_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2k_B T}{U_0}}\right)^{-\frac{1}{6}} + r_0 \left(1 + \sqrt{\frac{2k_B T}{U_0}}\right)^{-\frac{1}{6}} \right]$.
- (в3) Коришћењем дате апроксимације се добија $r_s = r_0 \left(1 + \frac{7}{36} \frac{k_B T}{U_0}\right)$.
- (в4) Из резултата дела (в3) следи да је линеарни коефицијент топлотног ширења једнак $\alpha = \frac{7}{36} \frac{k_B}{U_0} = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.
- (г1) На издвојени део штапа D са слике 2 делује с једне стране спољашња сила F , а с друге стране резултујућа сила интеракције између молекула у последњој равни која је обухваћена делом D и молекула из суседне равни која није обухваћена делом D . Та сила је по интензитету једнака $N\kappa u$, где је N број молекула унутар површине попречног пресека штапа S , а u промена растојања између суседних молекула под дејством силе. Из једнакости интензитета ових сила следи $F = N\kappa u$, па имајући у виду да је $S = Nr_0^2$, следи $\frac{F}{S} = \frac{u}{r_0} \frac{\kappa}{r_0}$. Пошто је $\frac{u}{r_0}$ релативно истезање штапа, из последње једнакости директно читавамо да је Јунгов моду еластичности једнак $E_y = \frac{\kappa}{r_0} = \frac{18U_0}{r_0^3}$, одакле је $E_y = 8,4 \text{ GPa}$.
- (г2) До кидања штапа ће доћи када је механички напон већи од оног који одговара сили одређеној у делу (а3). Тако је $\sigma_k = \frac{|F(r)|_{\max}}{r_0^2} = \frac{3U_0}{r_0^3} \left[\left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{7}{6}} - \left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{13}{6}} \right] = 0,31 \text{ GPa}$.



Слика 2: уз решење дела задатка (г1)

(д1) У делу (а5) је показано да је за мале помераје молекула из равнотежног положаја потенцијална енергија њихове интеракције једнака потенцијалној енергији линеарног хармонијског осцилатора. Зато је тада систем еквивалентан систему у коме су свака два молекула који су најближи суседи повезана опругом константе еластичности κ и дужине у неистегнутом стању r_0 . Једначина кретања молекула n је тада $m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \kappa (u_{n+1} - u_n) - \kappa (u_n - u_{n-1})$.

(д2) Претпостављајући решење у облику $u_n = A \cos(\omega t - knr_0 + \varphi)$, заменом у претходну једначину следи

$$-mA\omega^2 \cos(\omega t - knr_0 + \varphi) = \kappa A [\cos(\omega t - k(n+1)r_0 + \varphi) + \cos(\omega t - k(n-1)r_0 + \varphi) - 2\cos(\omega t - knr_0 + \varphi)].$$

Коришћењем идентитета

$$\cos(\omega t - k(n+1)r_0 + \varphi) + \cos(\omega t - k(n-1)r_0 + \varphi) = 2\cos(\omega t - knr_0 + \varphi) \cos(kr_0)$$

$$\text{добивамо } \omega^2 = \frac{2\kappa}{m} (1 - \cos(kr_0)).$$

(д3) Користећи апроксимацију $\cos(kr_0) = 1 - \frac{1}{2}k^2 r_0^2$ следи $\omega = kr_0 \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$, одакле је лонгитудинална брзина звука $v_L = r_0 \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{18U_0}{m}}$, односно $v_L = 2,7 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Решење задатка 3

- (а) Кад дође до успостављања коначне брзине, сила отпора је у равнотежи са силом теже, одакле је $F_{\text{от}} = m_k g$, где је $m_k = \frac{4}{3} \rho_l R^3 \pi$ маса капљице, а $F_{\text{от}} = c_1 R^2 v$. Из ових једначина следи $v = c_2 R$, где је $c_2 = \frac{4\pi \rho_l g}{3c_1} = 8,4 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$.
- (б) За време dt капљица захвати све капљице које се налазе унутар запремине $dV = R^2 \pi v dt$, па је промена масе капљице за то време $dm_k = \rho_b R^2 \pi v dt$. Даље је и $dm_k = \rho_l 4R^2 \pi dR$ и $v = c_2 R$. Из претходне три једначине се добија $\frac{dR}{R} = \frac{c_2 \rho_b}{4\rho_l} dt$. Након интеграције последње једначине следи $t = \frac{4\rho_l}{c_2 \rho_b} \ln \frac{R_2}{R_1} = 10,6 \text{ min}$.
- (в) С обзиром да је систем у стационарном стању, на основу закона одржања масе следи $q_m(r) = \text{const}$. На основу закона дифузије је $q_m = -D \cdot 4r^2 \pi \frac{d\rho_v(r)}{dr}$, одакле је $d\rho_v(r) = -\frac{dr}{r^2} \frac{q_m}{4\pi D}$. Интеграцијом последње једначине од неког r до $r = \infty$ следи $\rho_v(\infty) - \rho_v(r) = -\frac{q_m}{4\pi D r}$, што је тражена релација.
- (г) Применом решења претходног дела задатка за $r = R$ следи

$$q_m(R) = -4\pi D R [\rho_v(\infty) - \rho_v(R)]. \quad (1)$$

У стационарном стању важи и $q_q(r) = \text{const} = q_q(R)$, одакле се из закона провођења топлоте $q_q = -K \cdot 4r^2 \pi \frac{dT(r)}{dr}$, односно $dT(r) = -\frac{dr}{r^2} \frac{q_q}{4\pi K}$ интеграцијом од $r = R$ до $r = \infty$ добија

$$q_q(R) = -4\pi K R [T_\infty - T(R)]. \quad (2)$$

Ако је dm маса паре која се кондензује за време dt , количина топлоте која се притом ослободи је $L dm$, одакле следи $q_q(R) = L \frac{dm}{dt}$, па је

$$q_q(R) = -L q_m(R). \quad (3)$$

Релативна влажност је

$$r_H = \frac{p_v}{p_s(T_\infty)}, \quad (4)$$

где је p_v притисак водене паре на великом растојању од капљице. Из једначине стања идеалног гаса примењене у тачки простора на довољно великом растојању од капљице је

$$p_v = \frac{\rho_v(\infty) R_g T_\infty}{M_v}. \quad (5)$$

На површини капљице вода и пара су у равнотежи, па је притисак водене паре једнак притиску засићене паре и задовољава једначину идеалног гаса

$$p_s [T(R)] = \frac{\rho_v(R) R_g T(R)}{M_v}. \quad (6)$$

Из зависности притиска засићене паре од температуре дате у тексту задатка, следи

$$p_s(T_\infty) = a_1 T_\infty \quad (7)$$

и

$$\frac{p_s [T(R)]}{T(R)} = a_1 + a_2 [T(R) - T_\infty]. \quad (8)$$

Из једначина (1)-(8) се добија

$$q_m = -aR, \quad (9)$$

где је

$$a = \frac{4\pi K M_v a_1}{L R_g} \frac{D (r_H - 1)}{\frac{K}{L} + D a_2 \frac{M_v}{R_g}} = 8,3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}. \quad (10)$$

Промена масе капљице у јединици времена је коначно $\frac{dm_k}{dt} = -q_m = aR$.



10. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2015/16. ГОДИНА



Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије
РЕШЕЊА

Београд
6-7. мај 2016.

(д) Пошто је $\frac{dm_k}{dt} = -q_m$ и $dm_k = \rho_l 4R^2 \pi dR$, следи

$$d(R^2) = \frac{a}{2\pi\rho_l} dt. \quad (11)$$

Интеграцијом од 0 до t се добија $t = \frac{2\pi\rho_l}{a} (R_2^2 - R_1^2) = 8,75$ дана (Такмичари који нису урадили део (г) ће добити бројну вредност од 7,23 дана).

(ђ) Из једначина $v = c_2 R$, $\frac{dh}{dt} = -v$ и једначине (11) следи $R^2 dR = \frac{a'}{4\pi\rho_l c_2} dh$, где је $a' = \frac{4\pi K M_v a_1}{L R_g} \frac{D(1-r'_H)}{\frac{K}{L} + D a_2 \frac{M_v}{R_g}}$.

Интеграцијом последње једначине се добија $R(h)^3 = R(H)^3 - \frac{3a'}{4\pi\rho_l c_2} (H - h)$. Да би капљица стигла на Земљу потребно је да буде $R(h=0) > 0$, одакле је $R(H) > \sqrt[3]{\frac{3a'H}{4\pi\rho_l c_2}} = 0,19 \text{ mm}$ (Такмичари који нису урадили део (г) ће добити бројну вредност од 0,20 mm).

Задатке припремили: *др Ненад Вукмировић* и *Владимир Вељић*, Институт за физику, Београд

Рецензенти: *др Димитрије Степаненко* и *Вељко Јанковић*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд



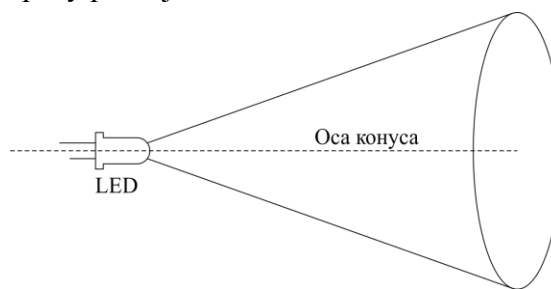
Експериментални задаци (20 поена):
Одређивање коефицијената рефлексије и апсорпције

Када светлосни зрак под правим углом падне на граничну површину две прозачне средине, које имају различите индексе преламања, она се делимично рефлектује а делимично трансмитује. Рефлексија се квантитативно изражава коефицијентом рефлексије $R = \frac{E_r}{E_u}$, где је E_r интензитет рефлектоване, а E_u интензитет упадне светлости (интензитет светлости представља енергију светлости која у јединици времена пада на јединичну површину, а јединица је W/m^2). Коефицијент рефлексије R је бездимензионална величина, која узима вредности између 0 и 1.

Са друге стране, приликом проласка светлости кроз неку супстанцијалну средину долази до прогресивног смањења њеног интензитета. Ова појава назива се апсорпција. Способност материјала да апсорбује светлост квантитативно се изражава линеарним коефицијентом апсорпције μ (јединица је $1/\text{m}$), који фигурише у закону апсорпције.

Као извор светлости користићемо диоду која емитује светлост (LED–*Light Emitting Diode*). Поред тога што се већ деценијама користе као светлосни индикатори, LED се последњих година све више користе и као замена за класичне сијалице, обзиром да имају већу ефикасност. LED су полупроводнички извори светлости. Њихов рад се заснива на особинама р-п споја. При протицању електричне струје кроз LED, део електрона се рекомбинује са шупљинама, при чему се ослобођена енергија емитује у облику фотона. У овом експерименту LED сматрати тачкастим извором који емитује светлост у виду радијално симетричног конуса (види слику), при чему је интензитет светлости обрнуто пропорционалан квадрату растојања од LED.

Као детектор светлости користићемо фотодиоду (*photodiode*–PD). Када се фотодиода у електричном колу осветли, део упадних фотона ослобађа електроне у полупроводнику, што се манифестује у виду електричне струје у колу фотодиоде. Јачина ове струје је директно сразмерна интензитету светлости која на њу пада.

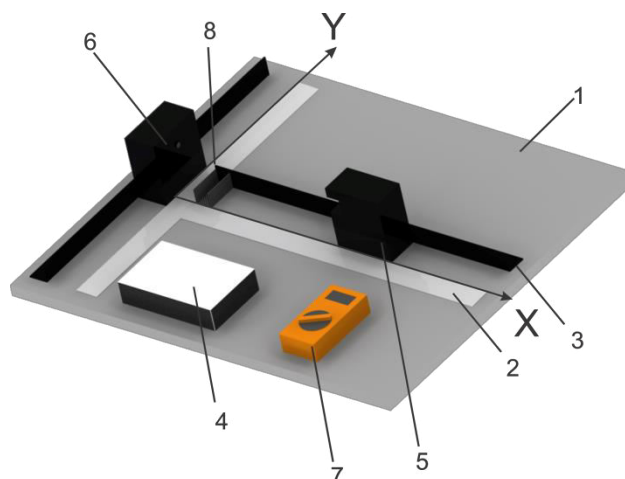


Циљ овог експеримента је одређивање коефицијената рефлексије и апсорпције провидних пластичних плочица уз помоћ црвене LED и фотодиоде.

Експеримент се састоји из три дела: 1) Провера линеарности фотодиоде, 2) Одређивање коефицијента рефлексије пластичних плочица, 3) Одређивање коефицијента апсорпције обојених пластичних плочица.



Апаратура



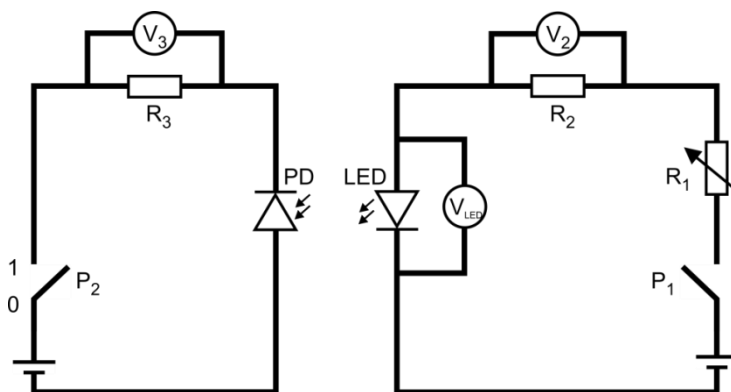
Слика 1. Шематски приказ апаратуре.

Апаратура за експеримент садржи:

1. дрвено постоље на коме су постављени остали елементи
2. лењире,
3. вођице,
4. кутију са електричним колом,
5. пластичну кутију са монтираном LED и каблом за прикључивање на електрично коло,
6. пластичну кутију са монтираном фотодиодом и каблом за прикључивање на електрично коло,
7. инструмент који омогућава мерење напона, са кабловима и одговарајућим конекторима. Да би се инструмент користио за мерење напона, потребно је преклопник поставити у положај који је означен са DCV или V_{DC} , у зависности од инструмента (уколико инструмент који сте добили нема ниједну од тих ознака позовите члана комисије).
8. Постоље за плочице

Поред овога, на располагању вам је комплет провидних пластичних плочица различитих боја и дебљина, и то:

- необојене плочице, 6 комада дебљине 3 mm, једна дебљине 5 mm и једна дебљине 8 mm
- тамноцрвене (бордо) плочице, 6 комада дебљине 3 mm
- љубичасте плочице, 3 комада дебљине 4 mm.



Слика 2. Шема електричног кола.

На дрвеном постољу постављене су вођице тако да пластичне кутије могу да клизе по постољу између вођица и лењира, дуж нормалних праваца X и Y. Кутију са монтираном LED поставити на вођицу дуж правца X, а кутију са фотодиодом на вођицу дуж правца Y (види слику 1). На кутији са фотодиодом се налази налепница са цртом која означава положај центра фотодиоде. Све елементе повезати као на шеми приказаној на слици 2. Конектори на кабловима за LED и фотодиоду су асиметрични и могу се прикључити само у исправној оријентацији. Кутије са LED и фотодиодом се по потреби могу причврстити у неком положају помоћу лептирасте навртке и подлошке које се налазе на полеђини кутија.



Експеримент

МЕРА ОПРЕЗА: НЕ ГЛЕДАТИ ДИРЕКТНО У LED КАДА ЈЕ УКЉУЧЕНА.

НАПОМЕНЕ:

- (1) Као реперну тачку за мерење положаја кутије са LED користити предњу ивицу кутије, тј. страницу са отвором.
- (2) Пре почетка мерења поставити кутије тако да се фотодиода нађе хоризонтално (дуж Y-осе) у центру светлосног снопа емитованог од стране LED. Поставити кутију са LED у положај $x=10$ cm на лењиру. Коришћењем променљивог отпорника R_1 , струју кроз LED поставити на вредност при којој је напон V_2 око 3.5 V. Након тога инструмент пребацити у коло фотодиоде и вршити мерења. Лагано померајте кутију са фотодиодом и посматрајте промену струје кроз фотодиоду. Положај фотодиоде у коме је струја кроз њу максимална је истовремено и положај у коме је фотодиода у центру снопа. Фотодиоду фиксирати у том положају и не мењати га током целог експеримента.
- (3) При сваком мерењу потребно је кориговати резултат услед доприноса амбијенталног осветљења. Ова корекција се обавља тако што се мерења понављају са укљученом и искљученом LED.
- (4) Када год мерење није у току, искључити и коло са LED и коло са фотодиодом померањем прекидача P_1 и P_2 у положај 0.
- (5) Струју кроз фотодиоду одређивати мерењем напона на отпорнику R_3 , знајући да је $R_3 = 100$ k Ω .
- (6) Пластице постављати у за то предвиђено лежиште које је причвршћено испред фотодиоде. Помоћу одговарајућег завртња подесити да стоје вертикално, једна уз другу.
- (7) Сматрати да до рефлексије долази са обе граничне површине плочице, и да су те две рефлексије једнаке. Занемарити вишеструке (тј. унутрашње) рефлексије. Када се на путу светлости налази више плочица, сматрати да се рефлексија дешава на свакој граничној површини (јер се између плочица налази танак слој ваздуха).
- (8) Ни у једном задатку не захтева се да процењујете грешке тражених величина.

Задатак 1. (4 поена)

Мерећи зависност струје кроз фотодиоду од положаја LED, без постављања плочица, показати да је струја кроз фотодиоду директно пропорционална интензитету светлости која на њу пада. Положај LED мењати померањем кутије са LED дуж X-осе, а као променљиву узети растојање од нултог подеока на лењиру до предње стране кутије. Уз помоћ променљивог отпорника R_1 , струју кроз LED поставити на вредност при којој је напон V_2 око 3.5 V. Инструмент потом пребацити у коло фотодиоде и мерити струју кроз њу. Мерења је потребно вршити у најмање 10 тачака. Резултате приказати табеларно и графички.

Задатак 2. (2+5 поена)

а) Мерењем струје кроз фотодиоду показати да се апсорпција светлости на необојеним плочицама може занемарити. LED фиксирати у положају $x=10$ cm на лењиру. Уз помоћ променљивог отпорника R_1 , струју кроз LED поставити на вредност при којој је напон V_2 око 3.5 V. Инструмент потом пребацити у коло фотодиоде и мерити струју кроз њу. Резултате приказати



табеларно.

б) Одредити коефицијент рефлексије материјала.

Измерити зависност струје кроз фотодиоду од броја необојених плочица дебљине 3 mm постављених на пут светлости. LED фиксирати у положају $x=10$ cm на лењиру. Уз помоћ променљивог отпорника R_1 , струју кроз LED поставити на вредност при којој је напон V_2 око 3.5 V. Инструмент потом пребацити у коло фотодиоде и мерити струју кроз њу. Мерења вршити у најмање пет тачака. Резултате приказати табеларно. Цртањем одговарајућег графика и његовом интерпретацијом одредити коефицијент рефлексије материјала.

Задатак 3. (7+2 поена)

а) Одредити коефицијенте апсорпције обојених плочица.

Измерити зависност струје кроз фотодиоду од броја обојених плочица постављених на пут светлости. LED фиксирати у положају $x=10$ cm на лењиру. Уз помоћ променљивог отпорника R_1 , струју кроз LED поставити на вредност при којој је напон V_2 око 3.5 V. Инструмент потом пребацити у коло фотодиоде и мерити струју кроз њу. Мерити одвојено за плочице обе боје (тамноцрвена и љубичаста), у онолико тачака колико има одговарајућих плочица. Резултате приказати табеларно. Цртањем одговарајућег графика и његовом интерпретацијом одредити коефицијент апсорпције материјала у оба случаја. Претпоставити да је коефицијент рефлексије обојених и необојених плочица исти.

б) Претпоставимо да се на пут светлости постављају наизменично плочице две различите боје, у конфигурацији АВАВАВ... $= (AB)_n$, при чему коефицијенти апсорпције плочица типа А и В износе μ_A и μ_B , респективно. Написати израз за интензитет трансмитоване светлости у зависности од броја (n) парова обојених плочица. Интензитет упадне светлости је E_0 . Оба типа плочица имају исти коефицијент рефлексије R . Дебљина плочица типа А је δ_A , а плочица типа В је δ_B . Добијени резултат експериментално проверити у случају $n = 1$ на две плочице различитих боја које су на располагању, и то у свим могућим комбинацијама (тамноцрвена-љубичаста, тамноцрвена-необојена, љубичаста-необојена).

Задатке припремили:

Марко Опачић, др Ненад Лазаревић и др Новица Пауновић, Институт за физику Београд

Рецензенти:

др Ненад Вукмировић и др Димитрије Степаненко, Институт за физику Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа:

др Божидар Николић, Физички факултет, Београд

Свим такмичарима желимо срећан рад!



Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког
развоја Републике Србије
ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ЗАДАЦИ

Београд
06.-07.5.2016.

Решење

Задатак 1.

Струја која протиче кроз фотодиоду делимично потиче од LED (I_{PD}), а делимично од амбијенталног осветљења. Мерењем напона на отпорнику R_3 при укљученој (V_3^{uk}) и искљученој LED (V_3^{isk}) одређује се тражена струја I_{PD} :

$$I_{PD} = \frac{V_3^{\text{uk}} - V_3^{\text{isk}}}{R_3} \quad (1)$$

x (cm)	V_3^{uk} (mV)	V_3^{isk} (mV)	I_{PD} (μA)	$I_{PD}^{-1/2}$ ($\mu\text{A}^{-1/2}$)
5	265	15	2.5	0.63
8	172	16	1.56	0.80
10	135	17	1.18	0.92
12	108	17	0.91	1.05
15	82	17	0.65	1.23
18	66	17	0.49	1.43
20	59	18	0.41	1.56
23	52	19	0.33	1.74
26	47	19	0.28	1.89
30	40	19	0.21	2.17

У тексту задатка наведено је да интензитет светлости коју излучује LED опада са квадратом растојања. Сходно томе, можемо писати

$$E \propto \frac{1}{(x+d)^2}, \quad (2)$$

где је x растојање које се читава на лењиру, а d је константа која потиче од положаја LED унутар кутије и релативног положаја нултог подеока на лењиру. У задатку се тражи да се покаже да између струје кроз фотодиоду и интензитета светлости која на њу пада постоји линеарна веза, тј.

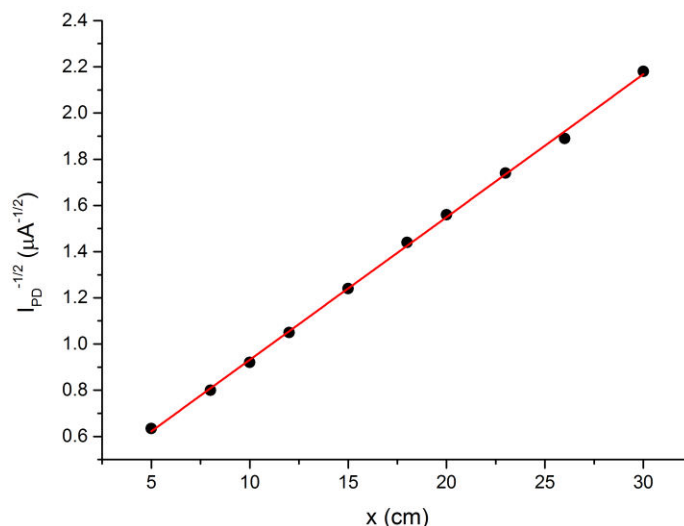
$$I_{PD} = aE = \frac{K}{(x+d)^2} \quad [0.5\text{п}] \quad (3)$$

Линеаризацијом једначине (3) добија се

$$\frac{1}{\sqrt{I_{PD}}} = \frac{x}{\sqrt{K}} + \frac{d}{\sqrt{K}} \quad [0.5\text{п}] \quad (4)$$

Цртањем $\frac{1}{\sqrt{I_{PD}}}$ у функцији x добија се права, што доказује исправност једначине (4), тј. постојање линеарне зависности између струје кроз фотодиоду и интензитета светлости која пада на њу.

Табела [2п] + график [1п].



Задатак 2.

а) Закон апсорпције гласи:

$$E = E_u e^{-\mu \delta} \quad (5)$$

где је E_u интензитет светлости на уласку у материјал, а E одговарајући интензитет након проласка кроз материјал чија је дебљина δ , при чему је μ линеарни коефицијент апсорпције. Обзиром да је у задатку 1 показано да постоји линеарна зависност између струје кроз фотодиоду и интензитета светлости која пада на њу, довољно је показати да се за неколико необојених плочица чије се дебљине значајно разликују добија занемарљиво мала разлика у интензитету струје I_{PD} . [1п]

δ (mm)	V_3^{uk} (mV)	V_3^{isk} (mV)	I_{PD} (μA)
3	128	18	1.10
5	128	18	1.10
8	127	18	1.09

Табела [1п].

б) Када светлост падне на граничну површину материјала, део њеног интензитета који уђе у материјал дат је са

$$E = E_u (1 - R) \quad (6)$$

где је E_u интензитет упадне светлости, а R коефицијент рефлексије материјала, дефинисан у уводном делу задатка. На излазној граничној површини долази до још једне рефлексије (која је, по услову задатка, идентична рефлексији на улазу), тако да је интензитет светлости који изађе из материјала, под претпоставком занемарљиве апсорпције (што је показано у задатку 2а), дат са

$$E = E_u (1 - R)^2 \quad (7)$$

Ако на пут светлости поставимо n плочица од истог материјала, директном генерализацијом једначине (7) долази се до израза

$$E = E_u (1 - R)^{2n} \quad (8)$$

Имајући у виду једначину (2), која изражава слабљење интензитета светлости са растојањем од извора, као и једначину (3), која успоставља везу између струје кроз фотодиоду и интензитета светлости, можемо писати

$$I_{PD} = aE = aE_u (1 - R)^{2n} \quad [1п] \quad (9)$$



Ако, ради лакшег писања, са I_0 означимо струју кроз фотодиоду када на путу светлости не стоје плочице (тј. за $n = 0$), добија се

$$\frac{I_{PD}}{I_0} = (1 - R)^{2n} \quad (10)$$

Дата једначина линеаризује се логаритмовањем (за произвољну основу):

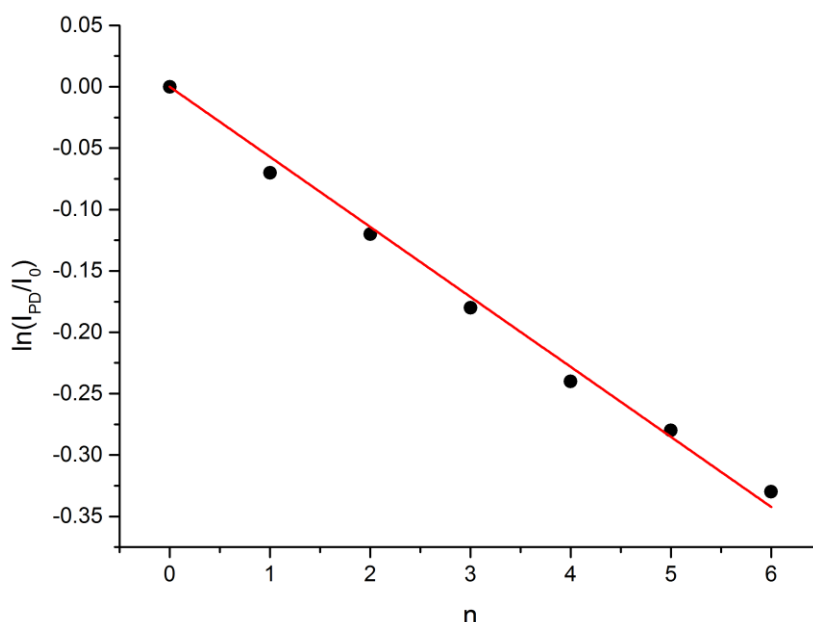
$$\ln\left(\frac{I_{PD}}{I_0}\right) = n \cdot 2 \ln(1 - R) \quad [0.5п] \quad (11)$$

Једначина (11) тврди да зависност струје кроз фотодиоду од броја необојених плочица треба да буде права линија која пролази кроз координатни почетак.

n	$V_3^{\text{uk}} \text{ (mV)}$	$V_3^{\text{isk}} \text{ (mV)}$	$I_{PD} \text{ (}\mu\text{A)}$	I_{PD}/I_0	$\ln(I_{PD}/I_0)$
0	133	15	1.18	1	0
1	126	16	1.1	0.93	-0.07
2	119	15	1.04	0.88	-0.13
3	112	14	0.98	0.83	-0.18
4	106	13	0.93	0.79	-0.24
5	101	12	0.89	0.75	-0.28
6	97	12	0.85	0.72	-0.33

Табела [1.5п].

На основу ових вредности добија се следећи график: [1п]



Узимањем две тачке са графика, и то тачке А између прве две експерименталне тачке, а тачке В између последње две тачке, може се одредити коефицијент правца на следећи начин:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \approx -0.06 \quad (12)$$

Са друге стране, на основу једначине (11) следи да је $k = 2 \ln(1 - R)$, одакле се за коефицијент рефлексије материјала добија

$$R = 1 - e^{k/2} \approx 0.03 \quad [1п] \quad (13)$$



Задатак 3.

а) Када се на пут светлости, уместо необојених, стави n обојених плочица, интензитет светлости која пада на фотодиоду биће умањен услед комбинованих ефеката рефлексације и апсорпције. Комбиновањем једначина (5) и (9), добија се

$$I_{PD} = aE_u(1 - R)^{2n}e^{-n\mu\delta} \quad (14)$$

односно

$$\frac{I_{PD}}{I_0} = (1 - R)^{2n}e^{-n\mu\delta} \quad (15)$$

Линеаризација ове једначине врши се логаритмовањем природним логаритмом:

$$\ln\left(\frac{I_{PD}}{I_0}\right) = 2n \ln(1 - R) - n\mu\delta = n \cdot [2 \ln(1 - R) - \mu\delta] \quad [1п] \quad (16)$$

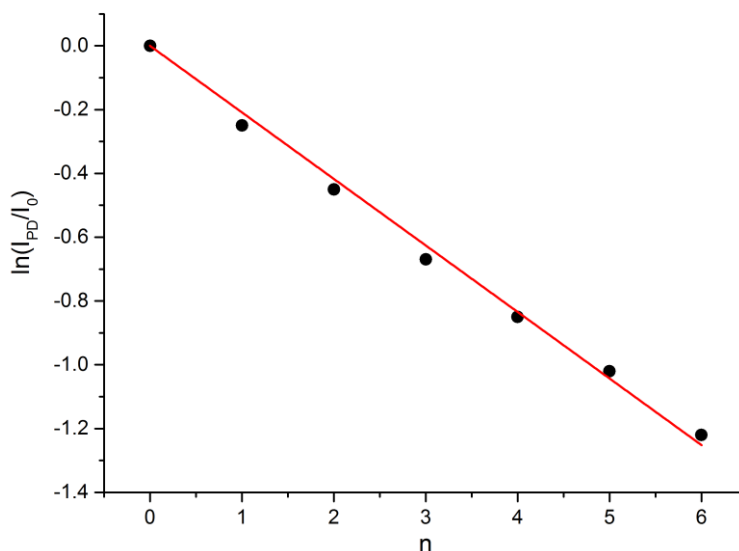
Поново је график $\ln\left(\frac{I_{PD}}{I_0}\right)$ у функцији n права која пролази кроз координатни почетак.

Тамноцрвене плочице:

n	V_3^{uk} (mV)	V_3^{isk} (mV)	I_{PD} (μA)	I_{PD}/I_0	$\ln(I_{PD}/I_0)$
0	133	14	1.19	1	0
1	106	13	0.93	0.78	-0.25
2	88	12	0.76	0.64	-0.45
3	73	12	0.61	0.51	-0.67
4	62	11	0.51	0.43	-0.85
5	54	11	0.43	0.36	-1.02
6	45	10	0.35	0.29	-1.22

Табела [1.5п]

На основу ових вредности добија се следећи график: [1п]



Са графика се, истим поступком као у задатку 2б), добија да је коефицијент правца $k \approx -0.21$. Из једначине (16) коефицијент правца дат је са $k = 2 \ln(1 - R) - \mu\delta$, а пошто се ради о истом материјалу као у задатку 2, можемо усвојити да је $R = 0.03$, те се за коефицијент апсорпције тамноцрвених плочица добија:



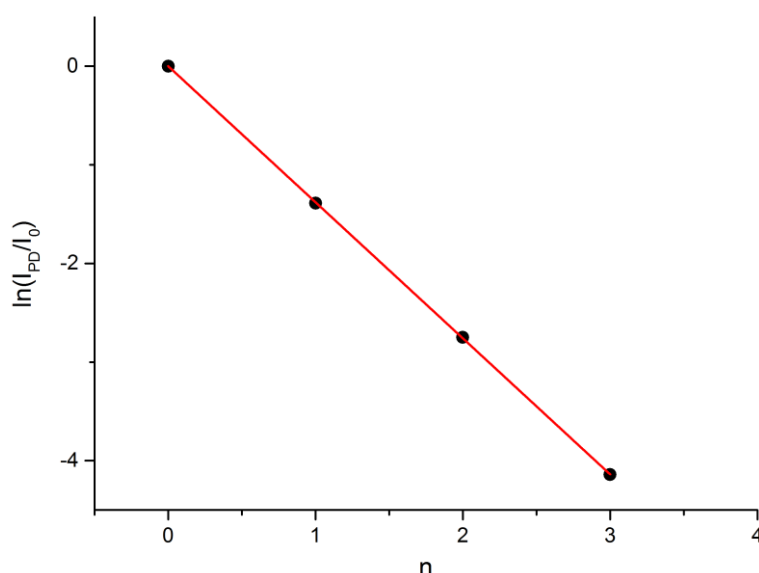
$$\mu = \frac{2 \ln(1-R)-k}{\delta} \approx 0.05 \frac{1}{\text{mm}} \quad [0.5\text{п}] \quad (17)$$

Љубичасте плочице:

n	V_3^{uk} (mV)	V_3^{isk} (mV)	I_{PD} (μA)	I_{PD}/I_0	$\ln(I_{PD}/I_0)$
0	137	12	1.25	1	0
1	41	10	0.31	0.25	-1.39
2	18	10	0.08	0.06	-2.75
3	12	10	0.02	0.02	-4.14

Табела [1.5п]

На основу ових вредности добија се следећи график: [1п]



Истим поступком као у задатку 2б), добија се да је коефицијент правца $k \approx -1.38$. Користећи једначину (17) за коефицијент апсорпције љубичастих плочица добијамо $\mu \approx 0.33 \frac{1}{\text{mm}}$. [0.5п]

б) Интензитет светлости који је трансмитован кроз прву плочицу типа А је

$$E_{tA} = E_0(1-R)^2 e^{-\mu_A \delta_A} \quad (18)$$

Слично томе, интензитет светлости који је трансмитован кроз прву плочицу В, која се налази иза А, је

$$E_{tB} = E_{tA}(1-R)^2 e^{-\mu_B \delta_B} \quad (19)$$

што значи да је интензитет светлости који је прошао кроз пар АВ дат једначином

$$E_{tAB} = E_0(1-R)^4 e^{-(\mu_A \delta_A + \mu_B \delta_B)} \quad (20)$$

Интензитет светлости који прође кроз n парова плочица АВ добија се генерализацијом једначине (20), и износи:

$$E_{tAB} = E_0(1-R)^{4n} e^{-n(\mu_A \delta_A + \mu_B \delta_B)} \quad [1\text{п}] \quad (21)$$



За комбинацију плочица тамноцрвена-љубичаста добијају се следећи резултати:

n	V_3^{uk} (mV)	V_3^{isk} (mV)	I_{PD} (μA)	I_{PD}/I_0	$\ln(I_{PD}/I_0)$
0	127	16	1.11	1	0
1	35	13	0.22	0.20	-1.62

Са друге стране, када се израчунате вредности коефицијената апсорпције и рефлексије замене у једначину (21), добија се да је $\ln\left(\frac{I_{PD}}{I_0}\right) = -1.59$.

За комбинацију плочица тамноцрвена-необојена добијају се следећи резултати:

n	V_3^{uk} (mV)	V_3^{isk} (mV)	I_{PD} (μA)	I_{PD}/I_0	$\ln(I_{PD}/I_0)$
0	127	16	1.11	1	0
1	96	14	0.82	0.74	-0.3

На основу једначине (21), добија се $\ln\left(\frac{I_{PD}}{I_0}\right) = -0.27$.

За комбинацију плочица необојена-љубичаста добијају се следећи резултати:

n	V_3^{uk} (mV)	V_3^{isk} (mV)	I_{PD} (μA)	I_{PD}/I_0	$\ln(I_{PD}/I_0)$
0	127	16	1.11	1	0
1	39	13	0.26	0.23	-1.45

На основу једначине (21), добија се $\ln\left(\frac{I_{PD}}{I_0}\right) = -1.44$.

У сва три случаја слагање једначине (21) са експериментом је веома добро. **[3x0.33=1п]**