



IV разред

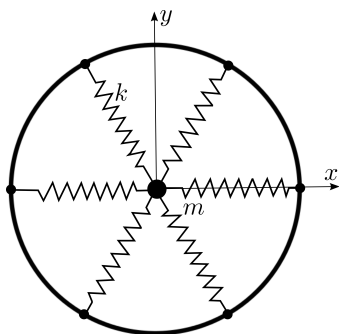
1. Таласна функција електрона у атому водоника је одређена вредностима три квантна броја (у овом задатку не узимати у обзир спински квантни број), $\Psi_{n,l,m}$ (n - главни квантни број, l - орбитални квантни број, m - магнетни квантни број). С друге стране, вредности енергије дискретних стања, E_n , су одређене само главним квантним бројем n ($E_n \propto \frac{1}{n^2}$). Тако енергетском нивоу E_1 одговара само једно стање $\Psi_{1,0,0}$. Међутим, решења Шредингерове једначине за атом водоника показују да за нивое виших енергија постоје различита стања којима одговарају исте вредности енергије. Ова појава се назива дегенерација енергетских нивоа, а број стања која одговарају истом енергетском нивоу се назива степеном дегенерације.

- (а) Написати којим таласним функцијама $\Psi_{n,l,m}$ (написати све одговарајуће индексе) су одређена стања електрона у атому водоника која одговарају првом побуђеном енергетском нивоу. (5 поена)
- (б) Колики је степен дегенерације енергетског нивоа који је одређен главним квантним бројем n ? (5 поена)
- (в) Таласна функција која одговара основном стању атома водоника је облика $\Psi_{1,0,0} = C \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$, где је a_0 Боров радијус. Одредити вредност позитивне и реалне константе C . (10 поена)

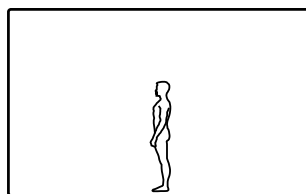
Помоћ: Можете користити идентитет: $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$.

2. На хоризонтални сто фиксиран је метални рам облика круга полупречника b . У темена правилног n -тоугла уписаног у овај круг причврсти се n лаких еластичних опруга за чије се друге крајеве веже мало тело масе m , као што је приказано на слици 1 за случај $n = 6$. У равнотежном положају тело се налази у центру круга. Тело се по столу креће без трења. Константе еластичности свих опруга су једнаке и износе k , док је дужина сваке од опруга у неистегнутом стању a , при чему важи $a < 2b$. Правац x -осе се поклапа са правцем једне од опруга у равнотежном стању.

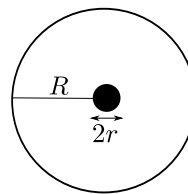
- (а) Одредити еластичну потенцијалну енергију U система када се тело помери за мало растојање $r \ll b$ из равнотежног положаја. У изразу за U задржати само чланове закључно са другим редом по малој величини r/b . Можете користити приближну једнакост $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$ која важи за $|x| \ll 1$, као и једнакост $\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{n} j \cdot p + \delta\right) = 0$, где је p цео број који није дељив са n , а δ реалан број. (10 поена)
- (б) Одредити кружну фреквенцију ω малих осцилација тела око равнотежног положаја. (6 поена)
- (в) У почетном тренутку, тело се помери из равнотежног положаја дуж x -осе за растојање $r_0 \ll b$ и саопшти му се почетна брзина $2r_0\omega$ дуж y -осе, а потом се пусти. Одредити најмање и највеће растојање тела од центра круга при његовом осциловању. (4 поена)



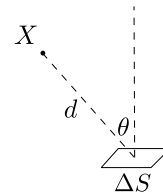
Слика 1: уз задатак 2.



(а)



(б)



(в)

Слика 2 : уз задатак 3.

3. Сигурно сте приметили да у просторији у којој се налази већи број људи може да буде изузетно топло. Разлог томе је што човек емитује топлоту и тиме загрева просторију. У овом задатку ћемо размотрити упрошћени модел сферно-симетричног човека облика лопте полупречника r , док је просторија облика сфере полупречника R који је много већи од r , при чему се центри двеју сфера поклапају, као што је приказано на слици 2(б). Сматрати да човек и унутрашњи зидови просторије зраче као апсолутно црна тела, чије су температуре редом T_c и T_z .

- (а) Одредити израз за снагу зрачења које човек емитује. (3 поена)



- (б) Одредити израз за снагу зрачења које човек апсорбује. (11 поена)
(в) Одредити колико је људи потребно да би загрејали просторију до исте температуре као грејалица корисне снаге $P_g = 1,32 \text{ kW}$. Сматрати да се формуле изведене у претходним деловима задатка могу применити на сваког човека који се налази у просторији и да људи размењују топлоту са околином искључиво путем зрачења. У овом делу задатка користити бројне вредности $t_c = 36,0^\circ\text{C}$, $t_z = 20,0^\circ\text{C}$ ($0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$) и сматрати да је површина једног човека једнака $S = 1,90 \text{ m}^2$. (6 поена)

Помоћ: У овом задатку можете користити следећу чињеницу. Интензитет у тачки X електромагнетног зрачења које емитује апсолутно црно тело у облику мале равне плочице произвољног облика је дат формулом $I = \frac{\sigma T^4 \Delta S \cos \theta}{d^2 \pi}$, где је T апсолутна температура тела, ΔS површина једне стране плочице, d растојање од плочице до тачке X , а θ је угао између правца који спаја тачку X са плочицом и правца нормалног на раван плочице, као што је приказано на слици 2(в).

4. Стање ваздуха у овој просторији може се веома добро описати законима стања класичног идеалног гаса које сте упознали у другом разреду. С друге стране, при опису стања проводних електрона у металу (који се у основној апроксимацији могу посматрати као гас неинтерагујућих честица) на собној температури неопходно је урачунати квантне ефекте, који проистичу из немогућности истовременог тачног одређивања положаја и брзине електрона. Квантитативна мера неопходности урачунавања квантних ефеката при опису стања многочестичних система је однос $\frac{\lambda_T}{a}$, где је a растојање међу суседним конституентима система (у овом задатку то су молекули ваздуха или електрони), док је *термална таласна дужина* λ_T мера неодређености положаја честица система на температури T .
- (а) Проценити растојање међу суседним конституентима система a . У циљу што једноставније процене, у овом делу задатка можете сматрати да су честице система распоређене у чворовима кубне решетке чија је елементарна ћелија (елемент кристалне решетке чијим се трансляторним померањима покрива цела решетка) коцка. Концентрацију конституената n сматрати познатом. (6 поена)
(б) Неодређености положаја и импулса конституената повезане су Хајзенберговом релацијом $\Delta r \cdot \Delta p \geq \hbar$, где је неодређеност импулса $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$. Процењујући Δp користећи резултате за класични идеални гас на температури T , одредити термалну таласну дужину λ_T која је дефинисана као минимална неодређеност положаја конституената система. Концентрацију n , масу појединачне честице m , као и температуру T , сматрати познатим. (8 поена)
(в) Одредити бројну вредност односа $\frac{\lambda_T}{a}$ за гас проводних електрона у бакуру на температури $T = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$ ($n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) и за ваздух на температури $T = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$ ($n = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$, $m = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$). (2 поена)
(г) Температура T_d на којој је $\frac{\lambda_T}{a} = 1$ представља граничну температуру између области у којима квантни ефекти долазе/не долазе до изражаја. Одредити T_d за гас проводних електрона у бакуру. Може ли се у некој области температура у којој бакар постоји као метал стање гаса његових проводних електрона описати без урачунавања квантних ефеката? Температура топљења бакра је $T_m = 1,4 \cdot 10^3 \text{ K}$. (4 поена)

Помоћ: Средња аритметичка брзина молекула класичног идеалног гаса масе на температури T је $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$, где је m маса појединачног молекула.

5. На слици у прилогу су приказана три снимка америчког астронаута Нила Армстронга, начињена непокретном камером 20. јула 1969. током његовог хода на Месецу. Снимци су начињени редом у тренуцима $t_0 = 0$, $t_1 = 0,67 \text{ s}$ и $t_2 = 1,34 \text{ s}$ при чему је у тренутку t_0 одскочио од подлоге, у тренутку t_1 је био у највишој тачки путање, а у тренутку t_2 је доскочио. Нил Армстронг је био висок $H = (180 \pm 1) \text{ cm}$. На основу ових снимака одредити убрзање силе теже на Месецу и проценити одговарајућу грешку. Занемарити грешке мерења наведених времена. Лист који вам је дат у прилогу можете предати уз рад ако сте на њему нешто радили. (20 поена)

Приликом решавања задатака можете користити следеће бројне вредности универзалних физичких константи: Болцманова константа $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, Планкова константа $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, Штефан-Болцманова константа $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$.

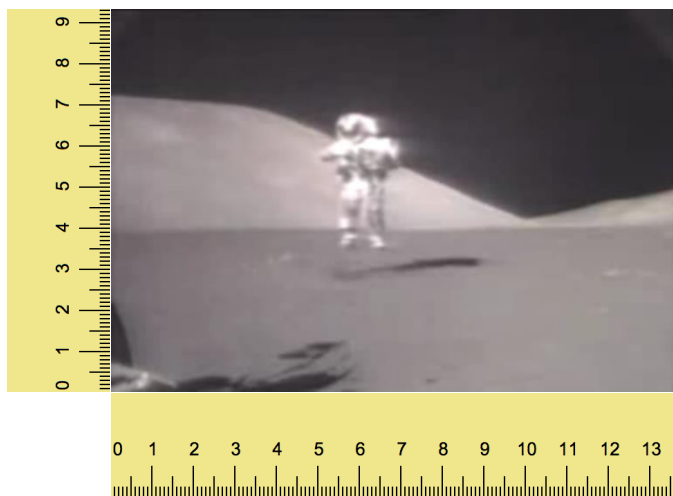
*У бозонској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Прилог: Сlike уз 5. задатак

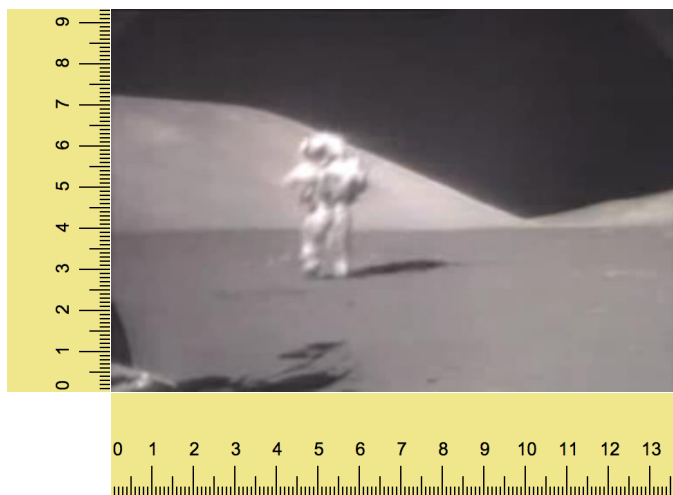
$t = 0$



$t = 0.67 \text{ s}$



$t = 1.34 \text{ s}$



Уколико предајете овај лист, овде упишите шифру:



IV разред

1. (а) За дату вредност главног квантног броја n , орбитални квантни број l може имати вредности $l = 0, 1, \dots, n-1$, а за дату вредности l орбиталног квантног броја магнетни квантни број m може имати вредности $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$. Први побуђени енергетски ниво атома водоника одговара вредности главног квантног броја $n = 2$. На основу тога закључујемо да су стања која одговарају овом енергетском нивоу одређена таласним функцијама: $\Psi_{2,0,0}, \Psi_{2,1,0}, \Psi_{2,1,1}, \Psi_{2,1,-1}$ **5п**.

- (б) На основу вредности које могу имати квантни бројеви, добијамо да је степен дегенерације g_n енергетског нивоа одређеног главним квантним бројем n : $g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1)$ **3п**. Даље добијамо: $g_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2l + \sum_{l=0}^{n-1} 1 =$

$$2 \sum_{l=0}^{n-1} l + n = 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + n, g_n = n^2 \quad \text{2п.}$$

- (в) Константу C ћемо наћи из услова да је укупна вероватноћа налажења електрона у простору једнака 1 **3п**. Вероватноћа налажења електрона у сферној љусци унутрашњег полупречника r и спољашњег полупречника $r + dr$ једнака је $dP = |\Psi_{1,0,0}|^2 \cdot dV$, где је $dV = 4r^2 \pi dr$ запремина те сферне љуске. Одатле је $\int_0^\infty |\Psi_{1,0,0}|^2 \cdot 4r^2 \pi dr = 1$, односно $4\pi C^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr = 1$ **4п**. Последњи интеграл се решава увођењем смене $u = 2r/a_0$, чиме се своди на интеграл дат у тексту задатка. Решавањем тог интеграла коначно добијамо $C = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$ **3п**.

2. (а) Нека је тело изведено из равнотежног положаја тако да је угао који вектор положаја тела затвара са позитивним смером x -осе једнак φ . Нека су опруге нумерисане бројевима $0, \dots, n-1$ идући од опруге чији је врх на позитивном делу x -осе у смеру супротном од смера казаљке на сату. Дужина j -те опруге је тада

$$l_j = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{n} j \right)}, \text{ па је укупна еластична потенцијална енергија система}$$

$$U = \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (l_j - a)^2 = \frac{k}{2} na^2 + \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{n-1} l_j^2 - k \sum_{j=0}^{n-1} l_j a \quad \text{4п.}$$

Прва сума се непосредно израчунава користећи сумациону формулу из поставке задатка $\frac{k}{2} \sum_{j=0}^{n-1} l_j^2 = \frac{k}{2} n(r^2 + b^2)$

1п. За израчунавање друге суме закључно са члановима другог реда по малој величини r/b треба на тај начин најпре изразити l_j користећи приближну формулу дату у задатку:

$$l_j \approx b \left(1 - \frac{r}{b} \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{n} j \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{b} \right)^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\varphi - \frac{2\pi}{n} j \right) \right] \right) \right).$$

Следи $k \sum_{j=0}^{n-1} l_j a = knab + \frac{k}{4} na \frac{r^2}{b}$ **4п**, па је $U = \frac{k}{2} n(a+b)^2 + \frac{k}{2} n \left(1 - \frac{a}{2b} \right) r^2$ **1п**.

- (б) Укупна механичка енергија система E је збир израчунате еластичне потенцијалне енергије U и кинетичке енергије тела $T = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2$. Како је $r^2 = x^2 + y^2$, укупна механичка енергија је

$$E = T + U = \frac{k}{2} n(a+b)^2 + \left[\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{k}{2} n \left(1 - \frac{a}{2b} \right) x^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{k}{2} n \left(1 - \frac{a}{2b} \right) y^2 \right].$$

Дакле, укупна механичка енергија је (до на константу) једнака збиру укупних механичких енергија два идентична једнодимензионална хармонијска осцилатора чији су правци осциловања нормални. Зато је

$$\frac{1}{2} m \omega^2 = \frac{k}{2} n \left(1 - \frac{a}{2b} \right), \text{ па је фреквенција малих осцилација } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} n \left(1 - \frac{a}{2b} \right)} \quad \text{6п.}$$

- (в) На основу почетних услова датих у поставци задатка, закони кретања тела дуж x - и y -осе су редом $x = r_0 \cos(\omega t)$ $y = 2r_0 \sin(\omega t)$. Тело се креће по елипси $\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{(2r_0)^2} = 1$, па је најмање растојање тела од центра круга r_0 , а највеће $2r_0$ **4п**.



IV разред

3. (а) С обзиром да човек зрачи као апсолутно црно тело, снага зрачења које емитује је $P_{\text{ем}} = \sigma T_c^4 S_c$, где је $S_c = 4r^2\pi$ површина човека, одакле је $P_{\text{ем}} = \sigma T_c^4 4r^2\pi$ **[3п]**.
- (б) Размотримо најпре колику снагу зрачења које емитује делић зида мале површине ΔS_z апсорбује човек. Означимо ту снагу са $\Delta P_{\text{гр}}$. Интензитет зрачења тог делића зида на растојању R је према формули датај у задатку $\Delta I = \frac{\sigma T_z^4 \Delta S_z}{R^2\pi}$ **[3п]**. На човека ће пасти сво зрачење које би пало на плочицу површине $r^2\pi$ постављену нормално на правац који спаја делић зида са човеком. Зато је $\Delta P_z = \Delta I \cdot r^2\pi$, одакле је $\Delta P_z = \frac{\sigma T_z^4 \Delta S_z r^2}{R^2}$ **[5п]**. Укупна снага зрачења коју апсорбује човек добија се сабирањем свих ΔP_z , одакле се, имајући у виду да је $S_z = 4R^2\pi$, добија $P_{\text{гр}} = \sigma T_z^4 4\pi r^2$ **[3п]**.
- (в) Снага коју човек размени са околином једнака је $P_r = P_{\text{ем}} - P_{\text{гр}} = \sigma (T_c^4 - T_z^4) 4\pi r^2$ **[2п]**. Да би људи загрејали просторију до исте температуре као грејалица, потребно је да снага коју они размене са околином буде једнака снази грејалице, одакле је $P_g = NP_r$, где је N тражени број људи **[2п]**. Одатле се, узимајући у обзир да је $S = 4\pi r^2$, добија $N = \frac{P_g}{\sigma(T_c^4 - T_z^4)S} \approx 7$ **[2п]**.
4. (а) Свака честица у кубном кристалу се налази у укупно 8 елементарних ћелија облика коцке, па је број честица по елементарној ћелији једнак $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$. Дакле, укупан број елементарних ћелија једнак је укупном броју честица N , па је запремина једне ћелије једнака V/N , где је V запремина система. Растојање између суседних конституената система је онда једнако дужини ивице елементарне ћелије и износи $a = (V/N)^{1/3} = n^{-1/3}$ **[6п]**.
- (б) Неодређеност импулса је једнака $\Delta p = \sqrt{m^2(\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2)}$, при чему су средње вредности $\langle v^2 \rangle$ и $\langle v \rangle$ процењене редом резултатима за средњу квадратну $\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$ и средњу аритметичку брзину $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$ молекула класичног идеалног гаса на температури T . Применом Хајзенбергове релације неодређености, за неодређеност положаја важи неједнакост $\Delta r \geq \frac{h}{2\sqrt{\pi(3\pi - 8)mk_B T}}$, па је термална таласна дужина $\lambda_T = \frac{h}{2\sqrt{\pi(3\pi - 8)mk_B T}}$ **[8п]**.
- (в) Однос $\frac{\lambda_T}{a} = \frac{hn^{1/3}}{2\sqrt{\pi(3\pi - 8)mk_B T}}$ за гас проводних електрона у бакуру на температури $T = 3,0 \cdot 10^2$ К износи $\frac{\lambda_T}{a} = 11$, док за ваздух на истој температури износи $\frac{\lambda_T}{a} = 3,3 \cdot 10^{-3}$ **[2п]**.
- (г) Температура $T_d = \frac{1}{4\pi(3\pi - 8)} \frac{h^2 n^{2/3}}{mk_B}$ за гас проводних електрона у бакуру износи $T_d = 3,8 \cdot 10^4$ К. Квантни ефекти долазе до изражаја за $\frac{\lambda_T}{a} > 1$, односно у области температура $T < T_d$. Температура T_d за гас проводних електрона у бакуру знатно је већа од температуре T_m топљења бакра, па се гас проводних електрона у бакуру, на свим температурама на којима бакар постоји као метал, мора описивати уз урачунавање квантних ефеката **[4п]**.
5. Време кретања астронаута од одскока до доскока је једнако $t_2 - t_0 = \frac{2v_{y0}}{g}$, где је v_{y0} y -компонента брзине астронаута у тренутку одскока. Притом је ова брзина повезана са максималном висином h коју астронаут достигне једначином $v_{y0}^2 = 2gh$. Из претходних једначина следи $g = \frac{8h}{(t_2 - t_0)^2}$ **[5п]**. На слици у прилогу су тачке одскока и доскока означене са A и B . Права која спаја ове две тачке одређује пројекцију равни у којој се креће астронаут на подлогу. Да би се одредило h , повучена је вертикална права CD која се приближно поклапа са осом астронаута и хоризонтална права у равни у којој се налази дно стопала астронаута. Висина h тада одговара дужини дужи CD . Са слике читавамо да је та дужина $h_s = 6$ подељака на скали. На слици је висина астронаута $H_s = 30$ подељака на скали. Из пропорције тада налазимо $h = h_s \frac{H}{H_s}$ **[6п]**, одакле је $g = 8 \frac{h_s}{(t_2 - t_0)^2} \frac{H}{H_s} = 1,60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **[2п]**. Процењујемо да су грешке читавања величина h_s и H_s једнаке једном подељку на скали, односно $\Delta h_s = 1$ и $\Delta H_s = 1$ **[2п]**. Грешка одређивања g се тада добија из формуле $\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \left| \frac{\Delta h_s}{h_s} \right| + \left| \frac{\Delta H_s}{H_s} \right| + \left| \frac{\Delta H}{H} \right|$, где је $\Delta H = 1$ cm **[3п]**. Након прорачуна се добија $\Delta g = 0,329 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, па је коначни резултат $g = (1,6 \pm 0,4) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **[2п]**.

Задатке припремили: др Ненад Вукмировић и Вељко Јанковић, Институт за физику, Београд

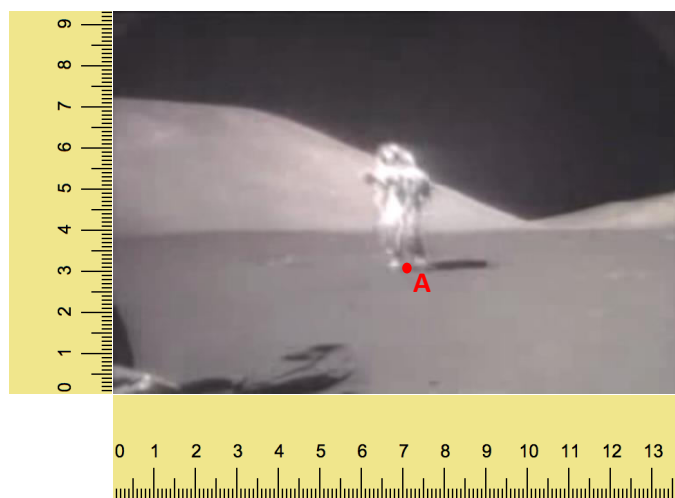
др Никола Јованчевић, Природно-математички факултет, Нови Сад

Рецензент: др Антун Балаж, Институт за физику, Београд

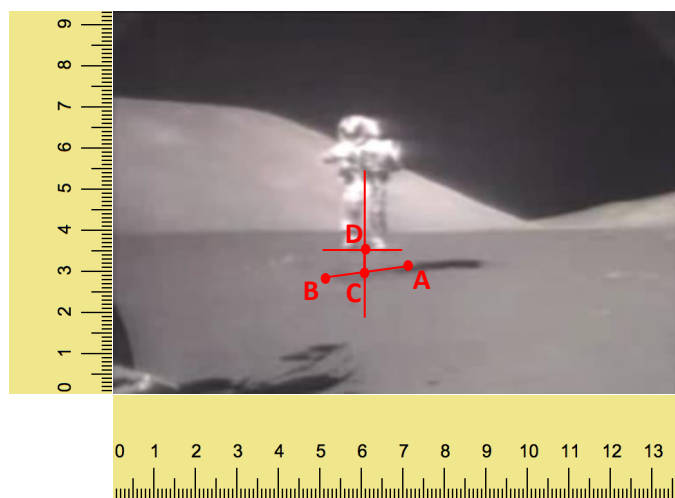
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: др Божидар Николић, Физички факултет, Београд

Прилог: Слике уз решење 5. задатka

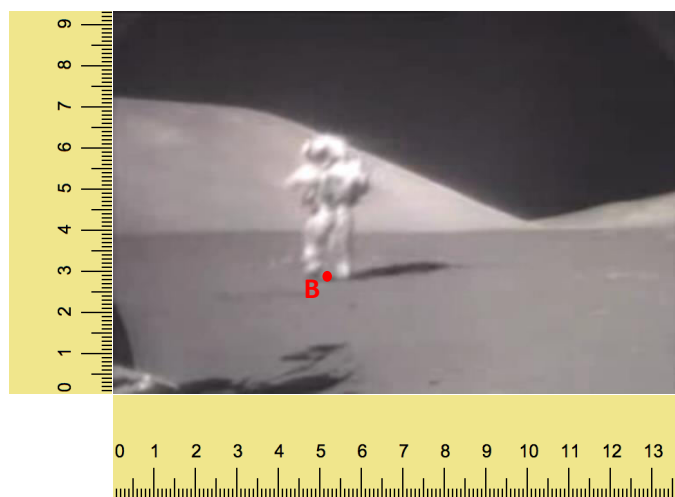
$t = 0$



$t = 0.67 \text{ s}$



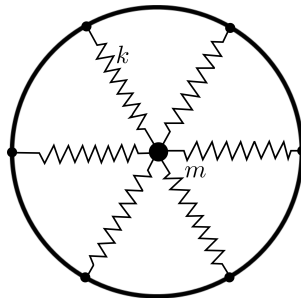
$t = 1.34 \text{ s}$





IV разред

- Рендгенова цев се користи за добијање X-зрачења. У Рендгеновој цеви електрони се убрзавају електричним пољем а затим ударају у антикатоде. X-зрачење настаје кочењем брзих електрона на антикатоде Рендгенове цеви при чему своју кинетичку енергију електрони губе путем електромагнетног зрачења. Одредити Де Бројеву таласну дужину електрона чијим заустављањем се добија спектар X-зрачења са минималном таласном дужином од $\lambda_X = 0,050 \text{ nm}$. (20 поена)
- На метални рам облика круга полупречника b причврсти се n лакких еластичних опруга у тачкама које представљају темена правилног n -тоугла уписаног у круг. За друге крајеве опруга веже се мало тело масе m , као што је приказано на слици 1 за случај $n = 6$. Константе еластичности свих опруга су једнаке и износе k , док је дужина сваке од опруга у неистегнутом стању a , при чему важи $a < b$. У равнотежном положају тело се налази у центру круга. Занемарујући деловање силе Земљине теже, као и силе отпора средине, одредити кружну фреквенцију малих осцилација тела дуж правца нормалног на рам који пролази кроз центар рама. (20 поена)



Слика 1: уз задатак 2.

- Таласна функција електрона у атому водоника је одређена вредностима три квантна броја (у овом задатку не узимати у обзир спински квантни број), $\Psi_{n,l,m}$ (n - главни квантни број, l - орбитални квантни број, m - магнетни квантни број). С друге стране, вредности енергије дискретних стања, E_n , су одређене само главним квантним бројем n ($E_n \propto \frac{1}{n^2}$). Тако енергетском нивоу E_1 одговара само једно стање $\Psi_{1,0,0}$. Међутим, решења Шредингерове једначине за атом водоника показују да за нивое виших енергија постоје различита стања којима одговарају исте вредности енергије. Ова појава се назива дегенерација енергетских нивоа, а број стања која одговарају истом енергетском нивоу се назива степеном дегенерације.
 - Написати којим таласним функцијама $\Psi_{n,l,m}$ (написати све одговарајуће индексе) су одређена стања електрона у атому водоника која одговарају првом побуђеном енергетском нивоу. (5 поена)
 - Колики је степен дегенерације енергетског нивоа који је одређен главним квантним бројем n ? (5 поена)
 - Таласна функција која одговара основном стању атома водоника је облика $\Psi_{1,0,0} = C \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$, где је a_0 Боров радијус. Одредити вредност позитивне и реалне константе C . (10 поена)

Помоћ: Можете користити идентитет: $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$.

- Стање ваздуха у овој просторији може се веома добро описати законима стања класичног идеалног гаса које сте упознали у другом разреду. С друге стране, при опису стања проводних електрона у металу (који се у основној апроксимацији могу посматрати као гас неинтерагујућих честица) на собној температури неопходно је урачунати квантне ефекте, који проистичу из немогућности истовременог тачног одређивања положаја и брзине електрона. Квантитативна мера неопходности урачунавања квантних ефеката при опису стања многочестичних система је однос $\frac{\lambda_T}{a}$, где је a растојање међу суседним конституентима система (у овом задатку то су молекули ваздуха или електрони), док је *термална таласна дужина* λ_T мера неодређености положаја честица система на температури T .
 - Проценити растојање међу суседним конституентима система a . У циљу што једноставније процене, у овом делу задатка можете сматрати да су честице система распоређене у чворовима кубне решетке чија је елементарна ћелија (елемент кристалне решетке чијим се трансляторним померањима покрива цела решетка) коцка. Концентрацију конституената n сматрати познатом. (6 поена)



IV разред

- (б) Неодређености положаја и импулса конституената повезане су Хајзенберговом релацијом $\Delta r \cdot \Delta p \geq \hbar$, где је неодређеност импулса $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$. Процењујући Δp користећи резултате за класични идеални гас на температури T , одредити термалну таласну дужину λ_T која је дефинисана као минимална неодређеност положаја конституената система. Концентрацију n , масу појединачне честице m , као и температуру T , сматрати познатим. (8 поена)
- (в) Одредити бројну вредност односа $\frac{\lambda_T}{a}$ за гас провонних електрона у бакру на температури $T = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$ ($n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) и за ваздух на температури $T = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$ ($n = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$, $m = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$). (2 поена)
- (г) Температура T_d на којој је $\frac{\lambda_T}{a} = 1$ представља граничну температуру између области у којима квантни ефекти долазе/не долазе до изражаја. Одредити T_d за гас провонних електрона у бакру. Може ли се у некој области температура у којој бакар постоји као метал стање гаса његових провонних електрона описати без урачунавања квантних ефеката? Температура топљења бакра је $T_m = 1,4 \cdot 10^3 \text{ K}$. (4 поена)

Помоћ: Средња аритметичка брзина молекула класичног идеалног гаса масе на температури T је $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$, где је m маса појединачног молекула.

5. На слици у прилогу су приказана три снимка америчког астронаута Нила Армстронга, начињена непокретном камером 20. јула 1969. током његовог хода на Месецу. Снимци су начињени редом у тренуцима $t_0 = 0$, $t_1 = 0,67 \text{ s}$ и $t_2 = 1,34 \text{ s}$ при чему је у тренутку t_0 одскочио од подлоге, у тренутку t_1 је био у највишој тачки путање, а у тренутку t_2 је доскочио. Нил Армстронг је био висок $H = (180 \pm 1) \text{ cm}$. На основу ових снимака одредити убрзање силе теже на Месецу и проценити одговарајућу грешку. Занемарити грешке мерења наведених времена. Лист који вам је дат у прилогу можете предати уз рад ако сте на њему нешто радили. (20 поена)

Приликом решавања задатака можете користити следеће бројне вредности универзалних физичких константи:

- Болцманова константа $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$,
- елементарно наелектрисање $|e| = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$,
- енергија мировања електрона $m_0 c^2 = 511 \text{ keV}$,
- брзина светлости $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$,
- Планкова константа $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

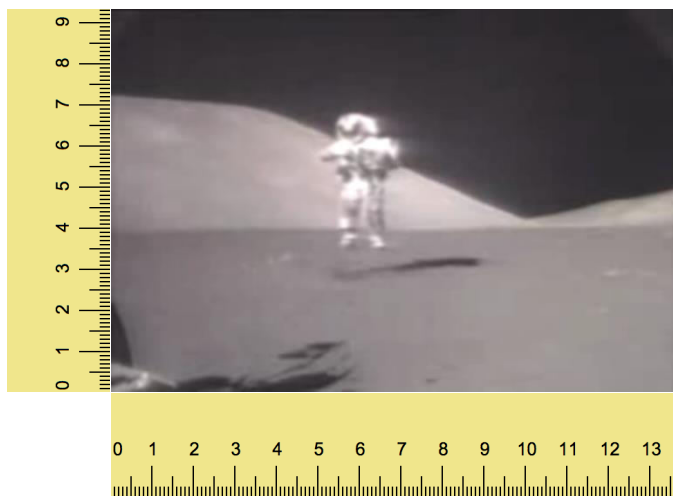
*У фермионској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима средњих стручних школа, уметничких школа и свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.

Прилог: Сlike уз 5. задатак

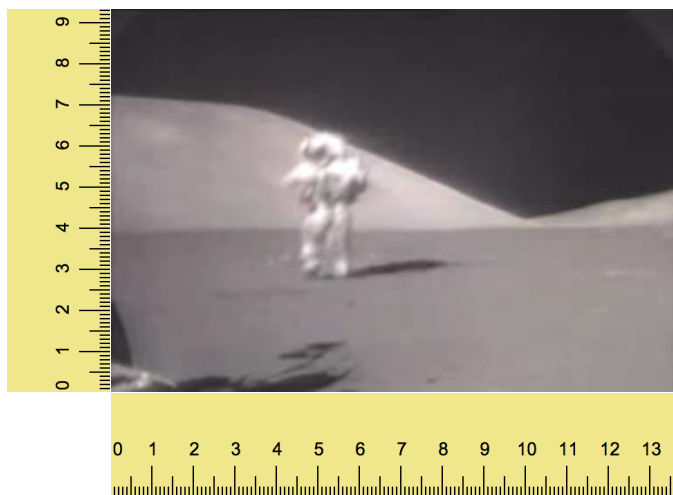
$t = 0$



$t = 0.67 \text{ s}$



$t = 1.34 \text{ s}$



Уколико предајете овај лист, овде упишите шифру:



IV разред

- Када електрон своју кинетичку енергију изгуби емитовањем једног фотона важи $T = \frac{hc}{\lambda_X}$ [5п]. Интензитет импулса електрона можемо одредити из формуле која узима у обзир релативистичке ефекте: $p = \frac{1}{c} \sqrt{T^2 + 2E_0T}$ [7п], где је E_0 енергија мировања електрона. Де Бројева таласна дужина је дата изразом $\lambda = \frac{h}{p}$ [3п]. Из претходних једначина следи $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(\frac{hc}{\lambda_X})^2 + 2E_0\lambda_X}}$ [3п], односно $\lambda = 0,0077 \text{ nm}$ [2п].
- Када се куглица помери из центра рама дуж правца нормалног на рам за растојање x , дужине свих опруга су једнаке и износе $l = \sqrt{x^2 + b^2}$ [5п]. Компоненте сила еластичности опруга у равни рама се међусобно потиру [5п], док се пројекције дуж правца нормалног на рам сабирају, тако да је интензитет укупне повратне силе $F = n \cdot k(l - a) \frac{x}{l} = n \cdot kx - \frac{n \cdot kax}{b\sqrt{1 + (x/b)^2}} \approx n \cdot k \left(1 - \frac{a}{b}\right) x$, при чему смо у последњем кораку задржали само линеарне чланове по x . Зато је кружна фреквенција малих осцилација једнака $\omega = \sqrt{n \frac{k}{m} \left(1 - \frac{a}{b}\right)}$ [10п].
- За дату вредност главног квантног броја n , орбитални квантни број l може имати вредности $l = 0, 1, \dots, n-1$, а за дату вредности l орбиталног квантног броја магнетни квантни број m може имати вредности $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$. Први побуђени енергетски ниво атома водоника одговара вредности главног квантног броја $n = 2$. На основу тога закључујемо да су стања која одговарају овом енергетском нивоу одређена таласним функцијама: $\Psi_{2,0,0}, \Psi_{2,1,0}, \Psi_{2,1,1}, \Psi_{2,1,-1}$ [5п].
 - На основу вредности које могу имати квантни бројеви, добијамо да је степен дегенерације g_n енергетског нивоа одређеног главним квантним бројем n : $g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1)$ [3п]. Даље добијамо: $g_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2l + \sum_{l=0}^{n-1} 1 = 2 \sum_{l=0}^{n-1} l + n = 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + n, g_n = n^2$ [2п].
 - Константу C ћемо наћи из услова да је укупна вероватноћа налажења електрона у простору једнака 1 [3п]. Вероватноћа налажења електрона у сферној љусци унутрашњег полупречника r и спољашњег полупречника $r + dr$ једнака је $dP = |\Psi_{1,0,0}|^2 \cdot dV$, где је $dV = 4\pi r^2 dr$ запремина те сферне љуске. Одатле је $\int_0^\infty |\Psi_{1,0,0}|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 1$, односно $4\pi C^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr = 1$ [4п]. Последњи интеграл се решава увођењем смене $u = 2r/a_0$, чиме се своди на интеграл дат у тексту задатка. Решавањем тог интеграла коначно добијамо $C = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$ [3п].
- Свака честица у кубном кристалу се налази у укупно 8 елементарних ћелија облика коцке, па је број честица по елементарној ћелији једнак $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$. Дакле, укупан број елементарних ћелија једнак је укупном броју честица N , па је запремина једне ћелије једнака V/N , где је V запремина система. Растојање између суседних конституената система је онда једнако дужини ивице елементарне ћелије и износи $a = (V/N)^{1/3} = n^{-1/3}$ [6п].
 - Неодређеност импулса је једнака $\Delta p = \sqrt{m^2(\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2)}$, при чему су средње вредности $\langle v^2 \rangle$ и $\langle v \rangle$ процењене редом резултатима за средњу квадратну $\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$ и средњу аритметичку брзину $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$ молекула класичног идеалног гаса на температури T . Применом Хајзенбергове релације неодређености, за неодређеност положаја важи неједнакост $\Delta r \geq \frac{h}{2\sqrt{\pi(3\pi-8)mk_B T}}$, па је термална таласна дужина $\lambda_T = \frac{h}{2\sqrt{\pi(3\pi-8)mk_B T}}$ [8п].
 - Однос $\frac{\lambda_T}{a} = \frac{hn^{1/3}}{2\sqrt{\pi(3\pi-8)mk_B T}}$ за гас проводних електрона у бакуру на температури $T = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$ износи $\frac{\lambda_T}{a} = 11$, док за ваздух на истој температури износи $\frac{\lambda_T}{a} = 3,3 \cdot 10^{-3}$ [2п].
 - Температура $T_d = \frac{1}{4\pi(3\pi-8)} \frac{h^2 n^{2/3}}{mk_B}$ за гас проводних електрона у бакуру износи $T_d = 3,8 \cdot 10^4 \text{ K}$. Квантни ефекти долазе до изражаја за $\frac{\lambda_T}{a} > 1$, односно у области температура $T < T_d$. Температура T_d за гас проводних електрона у бакуру знатно је већа од температуре T_m топљења бакра, па се гас проводних електрона у бакуру, на свим температурама на којима бакар постоји као метал, мора описивати уз урачунавање квантних ефеката [4п].



5. Време кретања астронаута од одскока до доскока је једнако $t_2 - t_0 = \frac{2v_{y0}}{g}$, где је v_{y0} y -компонента брзине астронаута у тренутку одскока. Притом је ова брзина повезана са максималном висином h коју астронаут достигне једначином $v_{y0}^2 = 2gh$. Из претходних једначина следи $g = \frac{8h}{(t_2 - t_0)^2}$ [5п]. На слици у прилогу су тачке одскока и доскока означене са A и B . Права која спаја ове две тачке одређује пројекцију равни у којој се креће астронаут на подлогу. Да би се одредило h , повучена је вертикална права CD која се приближно поклапа са осом астронаута и хоризонтална права у равни у којој се налази дно стопала астронаута. Висина h тада одговара дужини дужи CD . Са слике читавамо да је та дужина $h_s = 6$ подељака на скали. На слици је висина астронаута $H_s = 30$ подељака на скали. Из пропорције тада налазимо $h = h_s \frac{H}{H_s}$ [6п], одакле је $g = 8 \frac{h_s}{(t_2 - t_0)^2} \frac{H}{H_s} = 1,60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ [2п]. Процењујемо да су грешке читавања величина h_s и H_s једнаке једном подељку на скали, односно $\Delta h_s = 1$ и $\Delta H_s = 1$ [2п]. Грешка одређивања g се тада добија из формуле $\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \left| \frac{\Delta h_s}{h_s} \right| + \left| \frac{\Delta H_s}{H_s} \right| + \left| \frac{\Delta H}{H} \right|$, где је $\Delta H = 1 \text{ cm}$ [3п]. Након прорачуна се добија $\Delta g = 0,329 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, па је коначни резултат $g = (1,6 \pm 0,4) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ [2п].

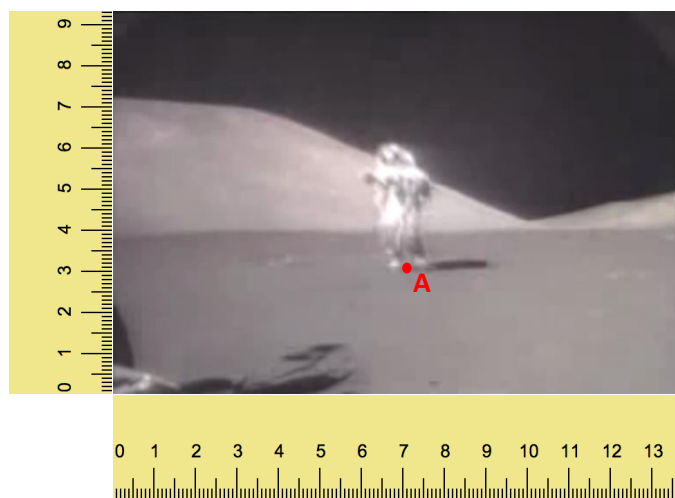
Задатке припремили: *др Ненад Вукмировић* и *Вељко Јанковић*, Институт за физику, Београд
др Никола Јованчевић, Природно-математички факултет, Нови Сад

Рецензент: *др Антун Балаж*, Институт за физику, Београд

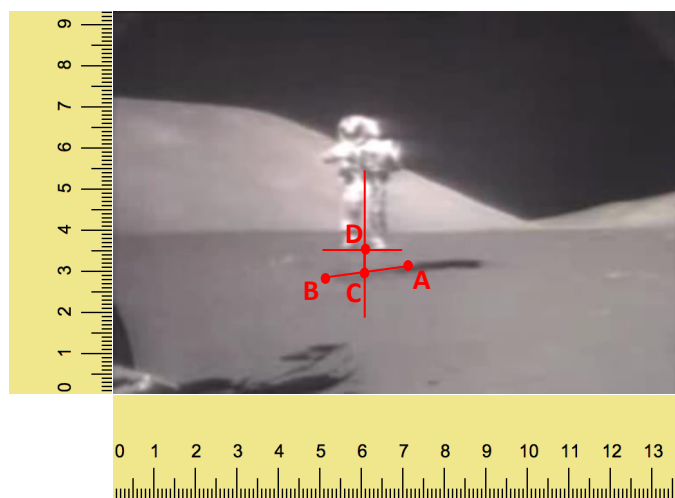
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

Прилог: Слике уз решење 5. задатka

$t = 0$



$t = 0.67 \text{ s}$



$t = 1.34 \text{ s}$

