



ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА  
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ



II РАЗРЕД

Друштво физичара Србије  
Министарство просвете и науке Републике Србије  
ЗАДАЦИ – Фермионска категорија

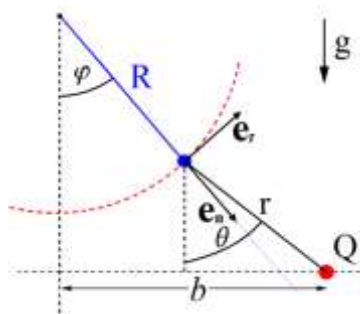
ДРЖАВНИ НИВО  
22.04.2016.

1. На слици је приказан електрично изолован систем који се налази у гравитационом пољу Земље. Један крај неистегљиве нити занемарљиве масе и дужине  $R$  фиксиран је на непознатој висини изнад земље (слика 1) и прикачен на динамометар. На други крај нити прикачена је наелектрисана куглица, а наелектрисање  $Q$  које привлачи куглицу фиксирано је у тачки на земљи чије је хоризонтално растојање  $b$  од места где је нит фиксирана. При равнотежном положају, угао који заклапа нит са вертикалним правцем (на доле) је  $\varphi$ , при чему је  $b > R \sin \varphi$ , угао који правац који спаја куглицу и наелектрисање заклапа са вертикалним правцем је  $\theta$ , а динамометар показује да је сила затезања у канапу  $T$ . Убрзање Земљине теже је  $g$ .

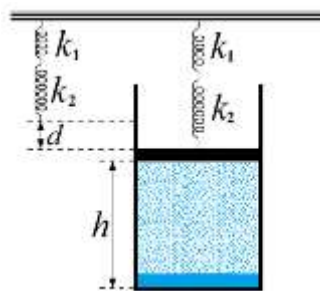
(а) Наћи масу куглице  $m$ .

(б) Наћи наелектрисање куглице  $q$  ако је диелектрична константа вакуума  $\epsilon_0$ .

(20 поена)



Слика 1.



Слика 2.

2. У вертикалном цилиндричном суду, испод клипа масе  $m$  и површине  $S$ , налази се нека количина ваздуха, воде, и водене паре на температури  $100^\circ\text{C}$ . Клип је обешен о систем еластичних опруга занемарљивих маса као на слици 2. Коефицијенти еластичности опруга,  $k_1$  и  $k_2$ , су познати. У равнотежном положају клип је на висини  $h$  од дна суда, а систем опруга је истегнут за  $d$  у односу на случај када су опруге неоптерећене. Маса воде на дну суда износи  $m_v$ . Одредити растојање  $\Delta h$  за које се клип помери од свог равнотежног положаја када се суд постави у хоризонталан положај (опруге су у том случају и даље у истегнутом стању). Моларна маса воде  $M$  је позната. Атмосферски притисак  $p_a$  је нормалан. Сматрати да је запремина воде мала и да је температура система константна. Трење је занемарљиво.

(20 поена)

3. Три шипке истог попречног пресека  $S = 20 \text{ cm}^2$ , дужина  $L_1 = 1.5 \text{ m}$ ,  $L_2 = 1.499 \text{ m}$  и  $L_3 = 1.502 \text{ m}$ , окаче се да виси, паралелно једна другој, као на слици 3. Првој шипци, сачињеној од челика, преда се, пре качења, количина топлоте  $Q = 3588 \text{ kJ}$ . Шипке 2 и 3 су сачињене од бронзе и њихови доњи крајеви су међусобно спојени са лаким крутим штапом. На лаки крути штап, између шипки 2 и 3, окачи се тег, тако да је испуњен услов да се доњи крајеви шипки 1, 2 и 3 налазе у истој хоризонталној равни, а шипке 2 и 3 заклапају исти угао са хоризонталом. Растојање између тачака где су шипке 2 и 3 окачене је  $x = 1 \text{ m}$ . Занемарити истезање шипки услед сопствене тежине и попречне пресеке шипки сматрати константним. Коефицијент топлотног ширења челика износи  $1.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , густина челика износи  $7800 \text{ kg/m}^3$ , специјални топлотни капацитет челика је  $460 \text{ J/(kgK)}$ , а Јангов модуло еластичности бронзе износи  $9.8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .

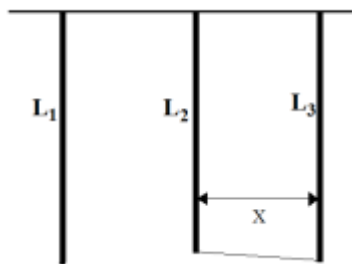
(а) Показати да је угао који шипке 2 и 3 склапају са хоризонталом приближно  $90^\circ$ , те да се може сматрати да су шипке 2 и 3 све време вертикалне.

(б) На ком растојању од шипке 2 ће се налазити окачени тег и колика је његова маса?

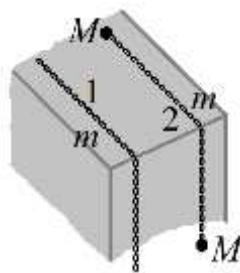
(20 поена)



ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА  
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ



Слика 3.



Слика 4.

4. Преко ивице глатког стола висе два ланца, оба масе  $m$ . На оба краја другог ланца додат је по један тег масе  $M$ , као на слици 4. Почетна брзина оба ланца једнака је нули, а почетно убрзање је  $a_0$ . Након одређеног времена, пре него што ланци у потпуности склизну са стола, брзина и убрзање и за један и за други ланац биће  $v$ , односно  $a$ .

(а) Одредити дужину првог ланца.

(б) Одредити дужину другог ланца. Који ланац је краћи?

(20 поена)

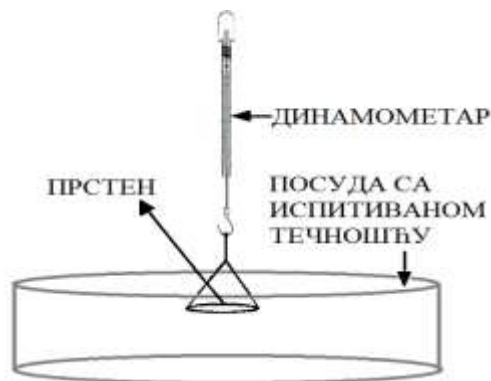
5. Коефицијент површинског напона је, по Етвешовој формули, линеарна функција температуре:

$$\gamma = k(T_c - T)V_m^{2/3}$$

где је  $T$  апсолутна температура,  $T_c$  критична температура, а  $V_m$  моларна запремина посматране течности, док је Етвешова константа  $k = 2.1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{Kmol}^{2/3}}$  иста за све течности.

При мерењу коефицијента површинског напона непознате течности коришћени су динамометар и алуминијумски прстен масе  $m = 2 \text{ g}$  и средњег пречника  $\bar{d} = 1 \text{ cm}$  (слика). Прстен се положи на површину течности, а затим се динамометром лагано вуче навише, док се не одвоји од течности. Праћена је промена коефицијента површинског напона у зависности од температуре. На свакој од одабраних температура мерења су вршена по три пута ради прецизнијег добијања резултата. Грешка мерења силе динамометром је  $\Delta F = 0.02 \text{ mN}$ , док је грешка термометра  $\Delta T = 0.1^\circ\text{C}$ .

| $T [^\circ\text{C}]$ | $F_1 [\text{mN}]$ | $F_2 [\text{mN}]$ | $F_3 [\text{mN}]$ |
|----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 10                   | 26.6              | 26.61             | 26.62             |
| 20                   | 26.4              | 26.46             | 26.43             |
| 30                   | 26.22             | 26.22             | 26.22             |
| 40                   | 26.01             | 26.01             | 26.07             |
| 50                   | 25.82             | 25.86             | 25.84             |
| 60                   | 25.63             | 25.63             | 25.63             |
| 70                   | 25.44             | 25.44             | 25.5              |



а) Одредити моларну запремину посматране течности, сматрајући да је она константна у посматраном опсегу температура.

б) Одредити критичну температуру,  $T_c$ , посматране течности.

Занемарити грешку мерења средњег пречника прстена, као и грешку мерења масе.

Помоћ: За израз облика  $A = \frac{B}{C^x}$ , где је  $B$  константа, апсолутна грешка величине  $A$  је:  $\Delta A = x \frac{\Delta C}{C^{x+1}} \cdot B$ , где је  $\Delta C$  апсолутна грешка величине  $C$ . Одсекак је могуће одредити помоћу познавања координата средишње тачке  $S(x_s, y_s)$ , где су:  $x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  и  $y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$ . Грешке за координате средње тачке одредити из правила за рачун грешака.

(20 поена)



**ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА  
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ**



---

**Задатке припремили:** *Нора Тркља*, Физички факултет, Београд и *Петар Бокан*, Институт за физику, Београд

**Рецензент:** *др Никола Петровић*, Институт за физику, Београд

**Председник Комисије за такмичење за средње школе:** *Доц. др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

**Свим такмичарима желимо срећан и успешан рад!**



# ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ



**P1.** (а) Нека је координатни систем постављен тако да  $x$ -оса показује с лева на десно, а  $y$ -оса на горе. На куглицу делују силе: гравитациона  $\mathbf{F}_1 = -mg\mathbf{e}_y$  [1п] и Кулонова  $\mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_2|\sin\theta\mathbf{e}_x - |\mathbf{F}_2|\cos\theta\mathbf{e}_y$  [1п], где су  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  јединични вектори (ортови) који дефинишу  $x$ - и  $y$ -осу. Укупна сила акције која делује на куглицу је  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , односно

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}_2|\sin\theta\mathbf{e}_x - [|\mathbf{F}_2|\cos\theta + mg]\mathbf{e}_y \quad [3\text{п}].$$

Сила има правац нормалан у односу на кружницу описану око тачке вешања, па важи  $\mathbf{F}\mathbf{e}_\tau = 0$  и  $\mathbf{F}\mathbf{e}_n = |\mathbf{F}| [\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y]$ , где су  $\mathbf{e}_\tau$  и  $\mathbf{e}_n$  орт тангенте и орт нормале на кружницу, респективно. Ови ортови могу се представити као  $\mathbf{e}_\tau = \cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{e}_n = \sin\varphi\mathbf{e}_x - \cos\varphi\mathbf{e}_y$ .

$$|\mathbf{F}_2|\sin\theta\cos\varphi - [|\mathbf{F}_2|\cos\theta + mg]\sin\varphi = 0 \quad [2\text{п}]$$

$$|\mathbf{F}_2|\sin\theta\sin\varphi + [|\mathbf{F}_2|\cos\theta + mg]\cos\varphi = |\mathbf{F}| \quad [2\text{п}].$$

Прва једначина може се помножити са  $\cos\varphi$ , друга са  $\sin\varphi$ , а потом се могу сабрати ( $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$  и  $|\mathbf{F}| = T$ ), па се добија  $|\mathbf{F}_2| = T \sin\varphi / \sin\theta$  [2п]. Слично, прва једначина може се помножити са  $\sin\varphi$ , а друга са  $\cos\varphi$ , онда се одузимањем прве од друге добија  $|\mathbf{F}_2|\cos\theta + mg = T\cos\varphi$ . Сређивањем се добија  $m = \frac{T \sin(\theta-\varphi)}{g \sin\theta}$  [3п].

(б) Растојање  $b$  може се изразити као  $b = R\sin\varphi + r\sin\theta$ , одакле је  $r = \frac{b-R\sin\varphi}{\sin\theta}$  [2п]. Интензитет Кулонове силе може се изразити као  $|\mathbf{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||Q|}{r^2}$  [2п]. Уколико се узме у обзир да тражено наелектрисање мора имати супротан знак у односу на наелектрисање  $Q$  и замене раније добијени изрази за  $|\mathbf{F}_2|$  и  $r$ , добија се  $q = -\frac{4\pi\epsilon_0 T \sin\varphi (b-R\sin\varphi)^2}{Q \sin^3\theta}$  [2п].

**P2.** Сила еластичности опруге има облик  $F_{el} = kx$ . У случају приказаном на слици, потребно је наћи еквивалентан коефицијент еластичности система опруга. За редну везу опруга 1 и 2 добијамо:  $x = \frac{F}{k} = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$ , па је  $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$  [3п].

На основу присутности и воде и водене паре у суду, закључује се да се ради о zasiћеној пари. Притисак zasiћене паре при температури 100°C једнак је атмосферском притиску  $p_a$ . Услов равнотеже клипа, при вертикалном положају суда, је:  $p_a S + mg - kd = p_a S + p_1 S$ , где је  $p_1$  притисак ваздуха испод клипа. Следи да је:  $p_1 = \frac{mg - kd}{S}$  [3п].

Када се суд постави у хоризонталан положај, укупан притисак ваздуха и водене паре једнак је атмосферском притиску умањеном за износ  $\frac{k(d-\Delta h)}{S}$ . Закључује се да је притисак паре мањи од атмосферског, па следи да то више није zasiћена пара, већ незасићена.

Дакле, сва вода је испарила и пара се, заједно са ваздухом, ширила, те се повећала запремина коју они заузимају. Нека је притисак ваздуха у том случају  $p_2$ , из једначина за почетно (када је суд у вертикалном положају) и крајње (када је суд у хоризонталном положају) стање ваздуха, добијамо:  $p_1 S h = p_2 S (h + \Delta h)$ , па је:  $p_2 = \frac{p_1 h}{h + \Delta h} = \frac{(mg - kd)h}{S(h + \Delta h)}$  [3п].

Једначина стања паре у почетном положају је:  $p_a S h = \frac{m_1}{M} RT$ , док је у крајњем:  $(p_a - p_2 - \frac{k(d-\Delta h)}{S}) S (h + \Delta h) = \frac{m_2}{M} RT$  [4п]. Одузимањем ових једначина добија се:  $p_a S \Delta h - p_2 S (h + \Delta h) - k(d - \Delta h)(h + \Delta h) = \frac{m_2 - m_1}{M} RT$ , тј.  $p_a S \Delta h - (mg - kd)h - k(d - \Delta h)(h + \Delta h) = \frac{m_2 - m_1}{M} RT$  [3п].

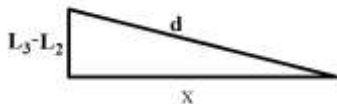
Растојање  $\Delta h$  за које се клип помери од свог равнотежног положаја, када се суд постави у хоризонталан положај, износи:  $\Delta h =$

$$\frac{-(p_a S + k(h-d)) \pm \sqrt{((p_a S + k(h-d))^2 + 4k(mgh + \frac{\Delta m}{M} RT))}}{2k} \quad [2\text{п}].$$

$$\Delta h = -p_a S \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} - \frac{h-d}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(p_a S \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} + (h-d))^2 + 4 \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} (mgh + \frac{\Delta m}{M} RT)} \quad [2\text{п}].$$

**P3.** (а) При предаји количине топлоте  $Q$  шипки дужине  $L_1$ , шипка се загреје за температуру  $\Delta t$ , што доводи до термалног ширења шипке.  $Q = m_1 c \Delta t = \rho_1 S L_1 c \Delta t$  [3п]. При термалном ширењу издужење шипке 1 износи  $\Delta L_1 = L_1 \alpha \Delta t = \frac{\alpha Q}{\rho_1 S c} = 5.5 \text{ mm}$  [3п], па је дужина шипке 1 након загревања:  $L_{1K} = L_1 + \Delta L_1 = 1505.5 \text{ mm}$  [1п].

Дужина лаког кругог штапа добија се, са слике:  $d = \sqrt{(L_3 - L_2)^2 + x^2} = 1000.0045 \text{ mm}$ . [1п]



По услови задатка, углови које издужене шипке 2 и 3 заклапају са хоризонталом су једнаки и износе:  $\tan \alpha = \frac{L_{1K}}{(d-x)/2}$ , па је  $\alpha = \arctan(\frac{L_{1K}}{(d-x)/2})$ , тј.  $\alpha^\circ = 89.999914^\circ \approx 90^\circ$ . Закључује се да су дужине шипки и штапа много веће од продужења услед ширења, па ће шипке са штапом заклапати угао од приближно  $90^\circ$  у случају када је штап у хоризонталном положају [1п].

(б) По услови задатка, крајње дужине шипки 2 и 3 износе:  $L_{2K} = L_{3K} = \frac{L_{1K}}{\sin \alpha} \approx L_{1K}$ .

Да би био испуњен тражени услов у задатку, шипка 2 се мора издужити за  $\Delta L_2 = L_{1K} - L_2 = 6.5 \text{ mm}$ , а шипка 3 за  $\Delta L_3 = L_{1K} - L_3 = 3.5 \text{ mm}$  [1п].

Из услова равнотеже сила:  $F_2 + F_3 = mg$  [1п], где су  $F_2 = \frac{ES}{L_2} \Delta L_2$  и  $F_3 = \frac{ES}{L_3} \Delta L_3$  [3п], за масу тега добија се:  $m = \frac{ES}{g} (\frac{\Delta L_2}{L_2} + \frac{\Delta L_3}{L_3}) \approx 133 \cdot 10^3 \text{ kg} = 133 \text{ t}$  [2п].

Из услова равнотеже момената сила у односу на тачку вешања добија се:  $F_2 d_1 = F_3 d_2 = F_3 (d - d_1)$  [3п]. Тег се налази на



# ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ



растојању  $d_1$  од шипке 2 и оно износи:  $d_1 = \frac{F_3 d}{(F_2 + F_3)} = \frac{\Delta L_3 d}{L_3 \left( \frac{\Delta L_2}{L_2} + \frac{\Delta L_3}{L_3} \right)} \cdot x = 349.53 \text{ mm} \approx 0.35 \text{ m}$  [1п].

**P4.** (а) Ако је  $x_0$  дужина дела ланца који виси преко стола у почетном тренутку, онда је сила која доводи до кретања ланца  $F = \frac{x_0}{l} mg$ . Убрзање ланца у почетном тренутку је  $a_0 = \frac{x_0}{l} g$  [2п]. Одавде је  $x_0 = \frac{la_0}{g}$  [1п]. Убрзање ланца у неком каснијем тренутку је  $a = \frac{x}{l} g$ , па је  $x = \frac{la}{g}$  [1п] дужина дела ланца који виси са стола. У почетном тренутку ланац има само потенцијалну енергију  $E = U_0 = m \frac{l-x_0}{l} gH + m \frac{x_0}{l} g \frac{H+x_0}{2} = mg \left( H - \frac{x_0^2}{2l} \right)$  [2п]. У тренутку када је брзина ланца  $v$ , а убрзање  $a$ , ланац ће имати кинетичку енергију  $T = \frac{1}{2} mv^2$  [1п] и потенцијалну енергију  $U = mg \left( H - \frac{x^2}{2l} \right)$  [1п]. На основу закона одржања енергије добија се  $v^2 - g \frac{x^2}{l} = -g \frac{x_0^2}{l}$ . Дужина ланца је тада  $l = \frac{gv^2}{a^2 - a_0^2}$  [2п].

(б) За други ланац (са теговима)  $F = Mg + m \frac{x'}{l'} g$  је сила која ланац вуче са стола у тренутку када је дужина дела ланца који виси преко стола једнака  $x'$ , док је убрзање ланца  $a = \frac{1}{2M+m} \left( Mg + m \frac{x'}{l'} g \right)$ . Важи:  $x'_0 = \frac{(2M+m)a_0 - Mg}{mg} l'$  [1п];  $x' = \frac{(2M+m)a - Mg}{mg} l'$  [1п];  $(T_0 + U_0)' = mg \left( H - \frac{x'^2_0}{2l'} \right) + MgH + Mg(H - x'_0)$  [2п];  $(T + U)' = \frac{1}{2} (2M + m)v^2 + mg \left( H - \frac{x'^2}{2l'} \right) + MgH + Mg(H - x')$  [2п]. На основу закона одржања енергије добија се  $\frac{1}{2} (2M + m)v^2 = \frac{mg}{2l'} (x'^2 - x'^2_0) + Mg(x' - x'_0)$ . Како је  $x' - x'_0 = \frac{(2M+m)(a-a_0)}{mg} l'$  и  $x' + x'_0 = \frac{(2M+m)(a+a_0) - 2Mg}{mg} l'$ , добија се  $l' = \frac{mgv^2}{(2M+m)(a^2 - a_0^2)}$  [2п], па је  $l' < l$ . Други ланац је краћи [2п].

**P5.** Прстен се одваја од течности када се еластична сила опруге динамометра изједначи са збиром сила површинског напона и Земљине теже, које вуку прстен наниже. Прстен има две додирне линије са површином течности, па је сила површинског напона:  $F = \gamma \pi (d_1 + d_2) = 2\gamma \pi \bar{d}$ , где је  $\bar{d}$  средњи пречник. Како је мерење вршено по три пута за сваку температуру,  $F_D = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{3}$ .

Следи да је:  $F_D = 2\gamma \pi \bar{d} + mg$ , па је  $\gamma = \frac{F_D - mg}{2\pi \bar{d}} = \frac{F_1 + F_2 + F_3 - 3mg}{2\pi \bar{d}}$ .

Из експериментално мерених вредности, датих у задатку, може се израчунати средња сила коју показује динамометар и коефицијент површинског напона за сваку испитивану температуру. За грешку средње силе, за дату температуру, узима се максимално одступање средње вредности од појединачног мерења, уколико је оно веће од грешке појединачног мерења, а у супротном узима се грешка појединачног мерења. Грешка за површински напон добија се као  $\Delta \gamma = \frac{1}{2\pi \bar{d}} (\Delta F + g \Delta m)$  (занемарујући грешку мерења средњег пречника прстена и грешку мерења масе, као што је речено у тексту задатка):

| T [K]  | $F_D$ [mN] | $\gamma$ [mN/m] | $\Delta F$ [mN] | $\Delta \gamma$ [mN/m]    | $\Delta T$ [K] |
|--------|------------|-----------------|-----------------|---------------------------|----------------|
| 283.15 | 26.61      | 111.249         | 0.02            | 0.31831 $\rightarrow$ 0.4 | 0.1            |
| 293.15 | 26.43      | 108.384         | 0.03            | 0.47746 $\rightarrow$ 0.5 | 0.1            |
| 303.15 | 26.22      | 105.042         | 0.02            | 0.31831 $\rightarrow$ 0.4 | 0.1            |
| 313.15 | 26.03      | 102.018         | 0.04            | 0.63662 $\rightarrow$ 0.7 | 0.1            |
| 323.15 | 25.84      | 98.994          | 0.02            | 0.31831 $\rightarrow$ 0.4 | 0.1            |
| 333.15 | 25.63      | 95.652          | 0.02            | 0.31831 $\rightarrow$ 0.4 | 0.1            |
| 343.15 | 25.46      | 92.946          | 0.04            | 0.63662 $\rightarrow$ 0.7 | 0.1            |

Коефицијент површинског напона ће се, према Етвешовој формули, мењати као функција температуре. Црта се график зависности коефицијента површинског напона од температуре. На основу распореда тачака види се да се график може фитовати на линеарну функцију облика:  $\gamma = a + bT$ . Из одсечка,  $a$ , може се одредити моларна запремина испитиване течности док се из коефицијента правца,  $b$ , може одредити критична температура.

Са графика: график са правилно унетим вредностима (табела горе) [5п]

Експерименталне тачке: A(288,9 K; 109,9  $\frac{\text{mN}}{\text{m}}$ ) и B(338,15 K; 94,2  $\frac{\text{mN}}{\text{m}}$ ) [1п]

За коефицијент правца се добија:  $b = \frac{\gamma_B - \gamma_A}{x_B - x_A} = \frac{(94,2 - 109,9) \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}}{(338,15 - 288,9) \text{ K}} = -0,314 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$  [1п].

Грешка:  $\Delta b = \left( \frac{\Delta \gamma_A + \Delta \gamma_B}{|\gamma_B - \gamma_A|} + \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{|x_B - x_A|} \right) |b| = \left( \frac{(0,1 + 0,1) \text{ K}}{|338,15 - 288,9| \text{ K}} + \frac{(0,5 + 0,7) \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}}{|94,2 - 109,9| \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \right) \cdot 0,314 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}} = 0,0252 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$

$\Delta b \rightarrow 0,03 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$  [1п]

У наведеном изразу за грешку коефицијента правца вредности  $\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta \gamma_A, \Delta \gamma_B$  су апсолутне грешке координата тачака А и В.



# ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ



Свака од ових грешака једнака је већој вредности од одговарајућих грешака њој суседних тачака.

Коначно коефицијент правца се може записати као:  $= (-0,31 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$ .

## НАПОМЕНА

Услед грешке у куцању, у изразу за Етвешову формулу која је дата у поставци задатка фали једна разломачка црта. Ова грешка утиче на један део решења (који је бодован са 4 поена). У наставку је дат део решења који се ослања на израз дат у задатку, а који нема физички смисао. Комисија ће узети у обзир овај пропуст. Извињавамо се свим такмичарима због овог случајног пропуста.

$\gamma = kT_C V_m^{2/3} - kTV_m^{2/3}$ , где је  $k = 2.1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{Kmol}^{2/3}}$ . Из коефицијента правца добија се моларна запремина испитиване течности:

$|b| = kV_m^{2/3}$ , тј.:

$$V_m = \left(\frac{|b|}{k}\right)^{3/2} = (6,774 \cdot 10^{-4})^{3/2} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} = 17,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} = 5,78 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \quad [2\text{п}]$$

Грешка за одређивање моларне запремине:

$$\Delta V_m = \frac{3}{2} \frac{|b|^{1/2}}{k^{3/2}} \Delta b = 6,96 \cdot 10^3 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \rightarrow 0,7 \cdot 10^4 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \quad [1\text{п}]$$

Коначно:  $V_m = (5,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \quad [1\text{п}]$

На основу Етвешове формуле (наставак решења на који грешка не утиче):

$\gamma = \frac{k}{V_m^{2/3}} T_C - \frac{k}{V_m^{2/3}} T$ , где је  $k = 2.1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{Kmol}^{2/3}}$ . Из коефицијента правца добија се моларна запремина испитиване течности:

$|b| = \frac{k}{V_m^{2/3}}$ , тј.:

$$V_m = \left(\frac{k}{|b|}\right)^{3/2} = (6,774 \cdot 10^{-4})^{3/2} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} = 17,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \quad [2\text{п}]$$

Грешка за одређивање моларне запремине:

$$\Delta V_m = \frac{3}{2} \frac{k^{3/2}}{|b|^{5/2}} \Delta b = 2,555 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \rightarrow 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \quad [1\text{п}]$$

Коначно:  $V_m = (18 \pm 3) \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \quad [1\text{п}]$

Критична температура се може одредити из одсечка  $a$ . Како у разматраном случају није повољно да се на графику креће из нуле по  $x$ -оси, одсечак може да се одреди на основу познавања коефицијента правца и средишње тачке  $S(x_s, y_s)$ :  $y_s = a + bx_s$ .

Координате средишње тачке се добијају као:  $x_s = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7} = 313.15 \text{ K}$  и  $y_s = \frac{\sum_{i=1}^7 y_i}{7} = 102.09 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Грешке за координате средишње тачке добијају се као:  $\Delta x_s = \frac{\sum_{i=1}^7 \Delta x_i}{7} = 0.1 \text{ K}$  и  $\Delta y_s = \frac{\sum_{i=1}^7 \Delta y_i}{7} = 0.50 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad [1\text{п}]$ .

За одсечак се добија:

$$a = 102.09 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} + 0.31 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}} \cdot 313.15 \text{ K} = 199,1665 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad [2\text{п}]$$

Грешка за одређивање одсечка добија се као:  $\Delta a = \Delta y_s + \left(\frac{\Delta b}{|b|} + \frac{\Delta x_s}{x_s}\right) \cdot |b| \cdot x_s$

$$\Delta a = 0,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} + 0,03 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}} \cdot 313.15 \text{ K} + 0,1 \text{ K} \cdot 0,31 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}} = 9,9255 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \rightarrow 10 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad [1\text{п}]$$

Коначно:  $a = (200 \pm 10) \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$

За критичну температуру се добије:  $T_C = \frac{a}{|b|} = 645,16129 \text{ K} \quad [2\text{п}]$

Грешка за критичну температуру:  $\Delta T_C = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{|b|}\right) \cdot T_C = \left(\frac{10}{200} + \frac{0,03}{0,31}\right) \cdot 645,16129 \text{ K} = 94,69 \text{ K} \rightarrow 100 \text{ K} \quad [1\text{п}]$

Коначно, добија се:  $T_C = (600 \pm 100) \text{ K} \quad [1\text{п}]$

## Напомене везано за начин бодовања:

Негативни поени за график, између осталог за:

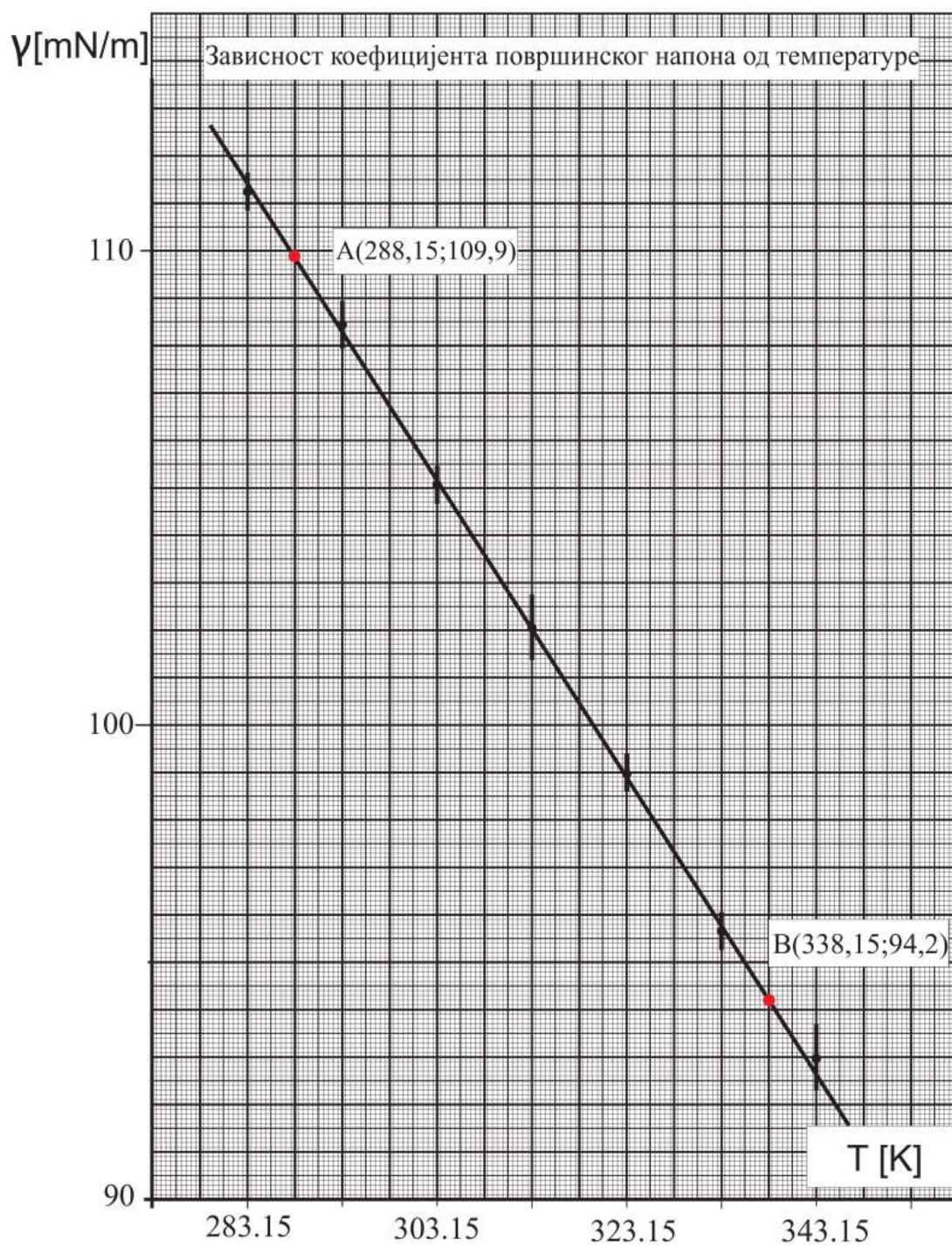
- Координатне осе треба цртати по ивицама милиметарског папира -0.2
- Без наслова -0.2 (наслов није  $y = f(x)$ )
- Лоша размера -0.2 (график заузима мање од 1/4 простора папира)
- Осе нису обележене и недостају јединице -0.2
- Унете су мерене бројне вредности на осе -0.2
- Ако 1. и 2. изабрана тачка није између 1. и 2. односно претпоследње и последње експерименталне -0.5
- Изабране тачке нису у мереном опсегу -0.5
- Негативни поени за рачун, између осталог за:
- Ако нису изабране добре тачке са графика – за тражене величине 50% предвиђених бодова



ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА  
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ



Коришћење експерименталних тачака уместо тачака са графика не доноси поене, осим поена за линеаризацију.





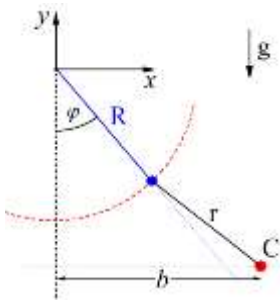
**ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА  
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ**



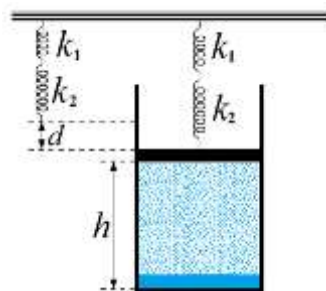
1. На слици је приказан електрично изолован систем који се налази у гравитационом пољу Земље. Један крај неистегљиве нити занемарљиве масе и дужине  $R$  фиксиран је у тачки која је дефинисана као координатни почетак. Координатни систем постављен је тако да  $x$ -оса показује удесно, а  $y$ -оса нагоре (слика 1). На други крај нити прикачена је наелектрисана куглица, а наелектрисује супротног знака фиксирано је у тачки  $C$ , при чему је  $x_C = b$  ( $b > R \sin \varphi$ ) и  $y_C < 0$ , где  $y_C$  није позната величина.

(а) Одредити растојање  $r$  између два наелектрисуја, ако је куглица у равнотежном положају и ако је  $\sin \varphi = 3/5$ , а однос интензитета силе затезања и Кулонове силе  $|T|/|F_2| = \eta$ .

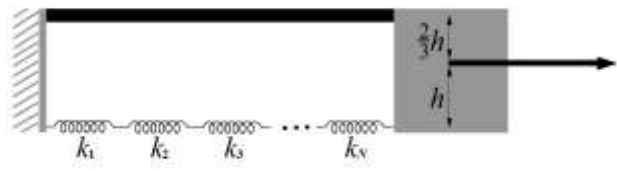
(б) Одредити наелектрисује куглице ако је она позитивно наелектрисана и ако је њено наелектрисује једнако фиксираном наелектрисују по интензитету. Маса куглице је  $m$ , убрзање Земљине теже је  $g$ , а диелектрична константа вакуума је  $\epsilon_0$ . (20 поена)



Слика 1.



Слика 2.



Слика 3.

2. У вертикалном цилиндричном суду, испод клипа масе  $m$  и површине  $S$ , налази се нека количина ваздуха, воде, и водене паре на температури  $100^\circ\text{C}$ . Клип је обешен о систем еластичних опруга занемарљивих маса као на слици 2. Коефицијенти еластичности опруга,  $k_1$  и  $k_2$ , су познати. У равнотежном положају клип је на висини  $h$  од дна суда, а систем опруга је истегнут за  $d$  у односу на случај када су опруге неоптерећене. Маса воде на дну суда износи  $m_v$ . Одредити растојање  $\Delta h$  за које се клип помери од свог равнотежног положаја када се суд постави у хоризонталан положај (опруге су у том случају и даље у истегнутом стању). Моларна маса воде  $M$  је позната. Атмосферски притисак  $p_a$  је нормалан. Сматрати да је запремина воде мала и да је температура система константна. Трење је занемарљиво. (20 поена)

3. Шипка и низ редно везаних опруга једнаких дужина причвршћени су крајевима за два зида између којих се налазе, као на слици 3. Леви зид је фиксиран. На центар масе десног зида делује нека сила која га вуче удесно. У односу на центар масе десног зида, шипка се налази на висини  $2h/3$ , а систем опруга на висини  $h$ . Коефицијент еластичности прве опруге је најмањи, а сваке следеће је  $\eta$  пута већи од претходне, при чему је  $\eta^N \gg 1$ , ако је  $N$  број опруга у низу. У равнотежном положају десни зид паралелан је левом, а однос издужења штапа и друге опруге је  $p$ . Штап се затим загрева тако да му се Јунгов модул еластичности смањи за 5 %. Однос издужења штапа, до којег долази због силе којом десни зид на њега делује, и издужења прве опруге тада је  $q$ . Да би десни зид и даље остао паралелан левом, неопходно је додати још једну опругу коефицијента еластичности  $\eta$  пута већег у односу на последњу опругу. Одредити промену температуре шипке уколико је коефицијент линеарног ширења материјала од којег је шипка направљена једнак  $\alpha$ .

Попречни пресек штапа сматрати константним, не узимати у обзир утицај гравитационог поља, занемарити савијање левог и десног зида и користити:  $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ . (20 поена)

4. Дугачак цилиндар испуњен је идеалним једноатомским гасом. С једне стране цилиндра налази се покретни клип. Претпоставити да се гас шири и да се клип креће константном брзином, као и да зидови суда, укључујући и клип, не пропуштају топлоту. Разматрати промену средње кинетичке енергије молекула гаса при сударима молекула гаса са клипом, за кратко време  $t$ .

(а) Извођењем израза  $\Delta E/E = \alpha \Delta V/V$ , где су  $\Delta E$  и  $\Delta V$  довољно мале промене укупне средње кинетичке енергије трансляционог кретања и запремине суда, респективно, а  $E$  и  $V$  почетне вредности ових величина,

одредити коефицијент  $\alpha$ . Сматрати да за средњу квадратну брзину важи  $v_{sk}^2/3 = v_{sk,z}^2$ , ако је z-оса централна оса цилиндра и занемарити онај део промене кинетичке енергије молекула који зависи од квадрата брзине клипа, тј. сматрати да је брзина којом се клип креће далеко мања од брзине молекула гаса  $v$ .

(б) Уколико важи израз из претходног дела задатка, онда је  $\ln E = \alpha \ln V + const$ . Користећи се овим изразом показати да је  $pV^{5/3} = const$ . (20 поена)

5. Коефицијент површинског напона је, по Етвешовој формули, линеарна функција температуре:

$$\gamma = k(T_c - T)V_m^{2/3}$$

где је  $T$  апсолутна температура,  $T_c$  критична температура, а  $V_m$  моларна запремина посматране течности, док је Етвешова константа  $k = 2.1 \cdot 10^{-7} \frac{J}{Kmol^{2/3}}$  иста за све течности.

При мерењу коефицијента површинског напона непознате течности коришћени су динамометар и алуминијумски прстен масе  $m = 2$  g и средњег пречника  $\bar{d} = 1$  cm (слика). Прстен се положи на површину течности, а затим се динамометром лагано вуче навише, док се не одвоји од течности. Праћена је промена коефицијента површинског напона у зависности од температуре. На свакој од одабраних температура мерења су вршена по три пута ради прецизнијег добијања резултата. Грешка мерења силе динамометром је  $\Delta F = 0.02$  mN, док је грешка термометра  $\Delta T = 0.1^\circ C$ .

| $T [^\circ C]$ | $F_1 [mN]$ | $F_2 [mN]$ | $F_3 [mN]$ |
|----------------|------------|------------|------------|
| 10             | 26.6       | 26.61      | 26.62      |
| 20             | 26.4       | 26.46      | 26.43      |
| 30             | 26.22      | 26.22      | 26.22      |
| 40             | 26.01      | 26.01      | 26.07      |
| 50             | 25.82      | 25.86      | 25.84      |
| 60             | 25.63      | 25.63      | 25.63      |
| 70             | 25.44      | 25.44      | 25.5       |



а) Одредити моларну запремину посматране течности, сматрајући да је она константна у посматраном опсегу температура.

б) Одредити критичну температуру,  $T_c$ , посматране течности.

Занемарити грешку мерења средњег пречника прстена, као и грешку мерења масе.

(20 поена)

**Задатке припремили:** Нора Тркља, Физички факултет, Београд и Петар Бокан, Институт за физику, Београд

**Рецензент:** др Никола Петровић, Институт за физику, Београд

**Председник Комисије за такмичење за средње школе:** Доц. др Божидар Николић, Физички факултет, Београд

**Свим такмичарима желимо срећан и успешан рад!**

**P1.** (a) На куглицу делују силе: гравитациона  $\mathbf{F}_1 = -mge_y$  [1н] и Кулонова  $\mathbf{F}_2 = \frac{|F_2|}{r} \mathbf{r}$  [1н], где је  $\mathbf{e}_y$  јединични вектор (орт) који дефинише у-осу, а  $\mathbf{r}$  вектор положаја фиксираниг наелектрисања у односу на куглицу када се куглица налази у равнотежном положају. Укупна сила акције која делује на куглицу је  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ . Вектор положаја фиксираниг наелектрисања у односу на координатни почетак је  $\mathbf{r}_f = b\mathbf{e}_x + h\mathbf{e}_y$  [1н], где је  $h$  у-координата тачке у којој се налази фиксирано наелектрисање, док је вектор положаја куглице у односу на координатни почетак  $\mathbf{r}_k = \mathbf{R} = R\sin\varphi\mathbf{e}_x - R\cos\varphi\mathbf{e}_y$  [1н]. Важи  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{R} = (b - R\sin\varphi)\mathbf{e}_x + (R\cos\varphi + h)\mathbf{e}_y$ . Сила  $\mathbf{F}$  је

$$\mathbf{F} = \frac{|F_2|}{r}(b - R\sin\varphi)\mathbf{e}_x + \left[\frac{|F_2|}{r}(h + R\cos\varphi) - mg\right]\mathbf{e}_y$$
 [2н].

Сила има правац нормалан у односу на кружницу око тачке вешања, па важи  $\mathbf{F}\mathbf{e}_\tau = 0$  и  $\mathbf{F}\mathbf{e}_n = |\mathbf{F}|$  [1н+1н], где су  $\mathbf{e}_\tau$  и  $\mathbf{e}_n$  орт тангенте и орт нормале на кружницу, респективно. Ови ортови могу се представити као  $\mathbf{e}_\tau = \cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y$  [1н] и  $\mathbf{e}_n = \sin\varphi\mathbf{e}_x - \cos\varphi\mathbf{e}_y$  [1н].

$$\frac{|F_2|}{r}(b - R\sin\varphi)\cos\varphi + \left[\frac{|F_2|}{r}(h + R\cos\varphi) - mg\right]\sin\varphi = 0$$
 (1) [1н]

$$\frac{|F_2|}{r}(b - R\sin\varphi)\sin\varphi - \left[\frac{|F_2|}{r}(h + R\cos\varphi) - mg\right]\cos\varphi = |\mathbf{F}|$$
 (2) [1н].

Прва једначина може се помножити са  $\cos\varphi$ , друга са  $\sin\varphi$ , а потом се могу сабрати ( $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$  и  $|\mathbf{F}| = |\mathbf{T}|$ ):  $\frac{|F_2|}{r}(b - R\sin\varphi) = |\mathbf{T}| \sin\varphi$ . Сређивањем се добија:  $r = \frac{5b-3R}{3\eta}$  [2н].

(б) Из  $-h = R\cos\varphi + r\cos\theta$  и  $b = R\sin\varphi + r\sin\theta$ , где је  $\theta$  угао између  $r$  и вертикале, добија се  $-h = R\cos\varphi + \sqrt{r^2 - (b - R\sin\varphi)^2} = \frac{4}{5}R + (b - \frac{3}{5}R)\sqrt{\frac{25}{9\eta^2} - 1}$  [1н]. Уколико се (1) помножи са  $\sin\varphi$  и (2) са  $\cos\varphi$ , а затим се друга одузме од прве, добија се:  $\frac{|F_2|}{r}(h + R\cos\varphi) - mg = -|\mathbf{T}|\cos\varphi$  [1н]. Делењем са  $-|\mathbf{T}|$  добија се

$$-\frac{1}{\eta r}(h + R\cos\varphi) + \frac{mg}{|\mathbf{T}|} = \cos\varphi \Rightarrow |\mathbf{T}| = \frac{mg}{\frac{(b-\frac{3}{5}R)\sqrt{\frac{25}{9\eta^2}-1}}{\frac{4}{5}} - \frac{5b-3R}{3}} = \frac{5mg}{4-3\sqrt{\frac{25}{9\eta^2}-1}}$$
 [2н].

Интензитет Кулонове силе је  $|\mathbf{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$ , па је

$$q = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{T}|}{\eta}} r = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0}{\eta} \cdot \frac{5mg}{4-3\sqrt{\frac{25}{9\eta^2}-1}} \cdot \frac{5b-3R}{3\eta}}$$
 [2н].

**P2.** Сила еластичности опруге има облик  $F_{el} = kx$ . У случају приказаном на слици, потребно је наћи еквивалентан коефицијент еластичности система опруга. За редну везу опруга 1 и 2 добијамо:  $x = \frac{F}{k} = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$ , па је  $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$  [3н].

На основу присутности и воде и водене паре у суду, закључује се да се ради о засићеној пари. Притисак засићене паре при температури 100°C једнак је атмосферском притиску  $p_a$ . Услов равнотеже клипа, при вертикалном положају суда, је:  $p_a S + mg - kd = p_a S + p_1 S$ , где је  $p_1$  притисак ваздуха испод клипа. Следи да је:  $p_1 = \frac{mg - kd}{S}$  [3н].

Када се суд постави у хоризонталан положај, укупан притисак ваздуха и водене паре једнак је атмосферском притиску умањеном за износ  $\frac{k(d-\Delta h)}{S}$ . Закључује се да је притисак паре мањи од атмосферског, па следи да то више није засићена пара, већ незасићена.

Дакле, сва вода је испарила и пара се, заједно са ваздухом, ширила, те се повећала запремина коју они заузимају. Нека је притисак ваздуха у том случају  $p_2$ , из једначина за почетно (када је суд у вертикалном положају) и крајње (када је суд у хоризонталном положају) стање ваздуха, добијамо:  $p_1 S h = p_2 S(h + \Delta h)$ , па је:  $p_2 = \frac{p_1 h}{h + \Delta h} = \frac{(mg - kd)h}{S(h + \Delta h)}$  [3н].

Једначина стања паре у почетном положају је:  $p_a S h = \frac{m_1}{M} RT$ , док је у крајњем:  $(p_a - p_2 - \frac{k(d-\Delta h)}{S})S(h + \Delta h) = \frac{m_2}{M} RT$  [4н].

Одузимањем ових једначина добија се:  $p_a S \Delta h - p_2 S(h + \Delta h) - k(d - \Delta h)(h + \Delta h) = \frac{m_2 - m_1}{M} RT$ , тј.  $p_a S \Delta h - (mg - kd)h - k(d - \Delta h)(h + \Delta h) = \frac{m_2}{M} RT$  [3н].

Растојање  $\Delta h$  за које се клип помери од свог равнотежног положаја, када се суд постави у хоризонталан положај, износи:  $\Delta h = \frac{-(p_a S + k(h-d)) \pm \sqrt{((p_a S + k(h-d))^2 + 4k(mgh + \frac{\Delta m}{M} RT))}}{2k}$  [2н]. Физички смисао има само позитивно решење, па је, након замене израза за  $k$ :

$$\Delta h = -p_a S \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} - \frac{h-d}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(p_a S \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} + (h-d))^2 + 4 \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} (mgh + \frac{\Delta m}{M} RT)}$$
 [2н].

**P3.** Еластична сила опруге може се представити као  $F = k\Delta x$ , где је  $k$  коефицијент еластичности опруге, а  $\Delta x$  апсолутно издужење опруге. Систем редно везаних опруга може се представити једном еквивалентном опругом. Услов равнотеже је да ако прва опруга делује на другу силом  $F$ , онда и друга делује на прву истом силом. Издужење еквивалентне опруге мора бити једнако издужењу система опруга  $\Delta x = \frac{F}{k} = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_N \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_N}$ . Из услова задатка  $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{1}{\eta} + \dots + \frac{1}{\eta^{N-1}}\right) = \frac{1}{k_1} \frac{1-\eta^N}{1-\eta} \approx \frac{1}{k_1} \frac{1}{1-\eta}$ , па је еквивалентни коефицијент еластичности  $k = k_1 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = k_1 \frac{\eta-1}{\eta}$  [3н].

Укупно издужење система опруга је  $\Delta x = \Delta x_1 \frac{\eta}{\eta-1}$  [2н]. У колико се овај израз помножи са  $1/\eta$ , добија се  $\Delta x_2 = \Delta x(\eta-1)/\eta^2$ ,

одакле следи да је  $\frac{\Delta l}{\Delta x} = p \frac{\eta^{-1}}{\eta^2} [2n]$ .

Према Хуковом закону, на штап делује сила  $F = \frac{ES}{l_0} \Delta l [1n]$ , где су  $E$  Јунгов модул еластичности,  $S$  попречни пресек шипке,  $l_0$  дужина шипке пре оптерећења и  $\Delta l$  апсолутно издужење шипке.

Како би десни зид остао паралелан левом неходно је да штап и систем опруга на њега делују једнаким моментима силе  $\frac{2hES}{3l_0} \Delta l = hk_1 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \Delta x [2n]$ , па се Јунгов модул еластичности може представити као  $E = \frac{3l_0 k_1 \eta}{2Sp} [1n]$ .

Након додавања још једне опруге еквивалентна опруга, за дату апроксимацију има коефицијент еластичности  $k' = k$ , а и укупно издужење остаје исто  $\Delta x' = \Delta x [1n+1n]$ .

Након загревања шипке, важи  $\frac{2hE'S}{3l'_0} \Delta l' = hk_1 \frac{\eta^{-1}}{\eta} \Delta x_1 \frac{\eta}{\eta-1} [2n]$  ( $\Delta l'$  је издужење шипке услед силе којом десни зид делује и  $\frac{\Delta l'}{\Delta x_1} = q$ ).

Јунгов модул еластичности је  $E' = \frac{3l'_0 k_1}{2Sq} [1n]$ .

Однос између Јунговог модула еластичности пре и после загревања је  $\frac{E}{E'} = \frac{l_0 q \eta}{l'_0 p}$ , па је  $\frac{l'_0}{l_0} = \frac{19\eta q}{20p} [1n]$ . При загревању шипке она се шири тако да важи  $\frac{l'_0}{l_0} = 1 + \alpha \Delta T [1n]$ , па је  $\Delta T = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{19\eta q}{20p} - 1 \right) [2n]$ .

**P4.** (а) Клип се креће брзином  $u$  која је далеко мања у односу на брзину молекула гаса  $v$ . Нека је централна оса цилиндра  $z$ -оса, усмерена тако да се клип креће у смеру који та оса дефинише. Брзина  $u$  тада има само  $z$ -компоненту.

Потребно је размотрити одбијање молекула о клип. Нека је  $z$ -компонента брзине молекула, када се молекул креће ка клипу, у односу на зидове цилиндра  $v_z$ . У односу на клип та брзина је  $v_z - u$ . Како је судар апсолутно еластичан, ова брзина у односу на клип, након судара, биће  $-(v_z - u)$ , а у односу на зидове цилиндра  $-(v_z - u) + u = -v_z + 2u$ . Кинетичка енергија молекула промениће се искључиво услед промене  $z$ -компоненте његове брзине:  $\Delta E_1 = \frac{m}{2} (-v_z + 2u)^2 - \frac{m}{2} v_z^2 = -2mu v_z$ , где је други члан који је квадратан по  $u$  занемарен [5n].

Брзине молекула су међусобно различите. Рецимо да ће се један молекул брзине  $v_{zi}$ , у кратком времену  $t$ , одбити о клип уколико се креће ка клипу и уколико је његова „удаљеност“ од клипа мања од  $|v_{zi}|t$ . Нека је  $N_i$  број молекула који имају тачно дефинисану брзину брзину  $v_{zi}$ . Нека је у сваком тренутку приближно пола молекула са  $v_z > 0$ , тј. да се крећу ка клипу. Број молекула са брзином  $v_{zi}$ , који се за неко кратко време  $t$  одбију о клип, је  $N_{ti} = \frac{N_i v_{zi} t S}{V} [2n]$ . Промена укупне кинетичке енергије молекула за време  $t$  може се изразити као  $\Delta E_t = \sum_i N_{ti} \Delta E_{1i} [2n]$ , где је  $\Delta E_{1i}$  промена кинетичке енергије транслаторног кретања једног молекула брзине  $v_{zi}$ . Даље је  $\Delta E_t = -2mu \sum_i \frac{tS}{V} \frac{1}{2} N_i v_{zi}^2$ . Сума која се појављује може се изразити преко средње квадратне брзине:

$\sum_i N_i v_{zi}^2 = N v_{sk,z}^2 = \frac{1}{3} N v_{sk}^2 [1n]$ , где је  $v_{sk} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} [1n]$  средња квадратна брзина молекула гаса. Онда је  $\Delta E_t = -u \frac{tS}{V} N k T$ .

Почетна укупна кинетичка енергија транслаторног кретања је  $E = \frac{3}{2} N k T$ , па је  $\Delta E_t = -\frac{Sut}{V} \frac{2}{3} E$ . Како је  $uS = \frac{\Delta V}{t} [2n]$ , добија се  $\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta V}{V}$ , па је  $\alpha = -2/3 [3n]$ .

(б) Из  $\ln E = \alpha \ln V + const.$  добија се  $\ln E - \ln V^\alpha = const.$ , односно  $\ln \frac{E}{V^\alpha} = const. \Rightarrow \frac{E}{V^\alpha} = const.$ , а како је  $E = \frac{3}{2} pV$ , следи да је  $pV^{1-\alpha} = const. \Rightarrow pV^{5/3} = const. [4n]$ .

**P5.** Прстен се одваја од течности када се еластична сила опруге динамометра изједначи са збиром сила површинског напона и Земљине теже, које вуку прстен наниже. Прстен има две додирне линије са површином течности, па је сила површинског напона:

$F = \gamma \pi (d_1 + d_2) = 2\gamma \pi \bar{d}$ , где је  $\bar{d}$  средњи пречник. Како је мерење вршено по три пута за сваку температуру,  $F_D = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{3}$ .

Следи да је:  $F_D = 2\gamma \pi \bar{d} + mg$ , па је  $\gamma = \frac{F_D - mg}{2\pi \bar{d}} = \frac{F_1 + F_2 + F_3 - 3mg}{2\pi \bar{d}}$ .

Из експериментално мерених вредности, датих у задатку, може се израчунати средња сила коју показује динамометар и коефицијент површинског напона за сваку испитивану температуру. За грешку средње силе, за дату температуру, узима се максимално одступање средње вредности од појединачног мерења, уколико је оно веће од грешке појединачног мерења, а у супротном узима се грешка појединачног мерења. Грешка за површински напон добија се као  $\Delta \gamma = \frac{1}{2\pi \bar{d}} (\Delta F + g \Delta m)$  (занемарујући грешку мерења средњег пречника прстена и грешку мерења масе, као што је речено у тексту задатка):

| T [K]  | F <sub>D</sub> [mN] | γ [mN/m] | ΔF [mN] | Δγ [mN/m]     | ΔT [K] |
|--------|---------------------|----------|---------|---------------|--------|
| 283.15 | 26.61               | 111.249  | 0.02    | 0.31831 → 0.4 | 0.1    |
| 293.15 | 26.43               | 108.384  | 0.03    | 0.47746 → 0.5 | 0.1    |
| 303.15 | 26.22               | 105.042  | 0.02    | 0.31831 → 0.4 | 0.1    |
| 313.15 | 26.03               | 102.018  | 0.04    | 0.63662 → 0.7 | 0.1    |
| 323.15 | 25.84               | 98.994   | 0.02    | 0.31831 → 0.4 | 0.1    |
| 333.15 | 25.63               | 95.652   | 0.02    | 0.31831 → 0.4 | 0.1    |
| 343.15 | 25.46               | 92.946   | 0.04    | 0.63662 → 0.7 | 0.1    |

Коефицијент површинског напона ће се, према Етвешовој формули, мењати као функција температуре. Црта се график зависности коефицијента површинског напона од температуре. На основу распореда тачака види се да се график може фитовати на линеарну функцију облика:  $y = a + bx$ . Из одсечка,  $a$ , може се одредити моларна запремина испитиване течности док се из коефицијента правца,  $b$ , може одредити критична температура.

Са графика: график са правилно унетим вредностима (табела горе) [5п]

Експерименталне тачке:  $A(288,9 \text{ K}; 109,9 \frac{\text{mN}}{\text{m}})$  и  $B(338,15 \text{ K}; 94,2 \frac{\text{mN}}{\text{m}})$  [1п]

За коефицијент правца се добија:  $b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(94,2 - 109,9) \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}}{(338,15 - 288,9) \text{ K}} = -0,314 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$  [1п].

Грешка:  $\Delta b = \left( \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{|x_B - x_A|} + \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{|y_B - y_A|} \right) |b| = \left( \frac{(0,1 + 0,1) \text{ K}}{|338,15 - 288,9| \text{ K}} + \frac{(0,5 + 0,7) \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}}{|94,2 - 109,9| \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}} \right) \cdot 0,314 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}} = 0,0252 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$

$\Delta b \rightarrow 0,03 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$  [1п]

У наведеном изразу за грешку коефицијента правца вредности  $\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A, \Delta y_B$  су апсолутне грешке координата тачака А и В. Свака од ових грешака једнака је већој вредности од одговарајућих грешака њој суседних тачака.

Коначно коефицијент правца се може записати као:  $= (-0,31 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$ .

## НАПОМЕНА

Услед грешке у куцању, у изразу за Етвешову формулу која је дата у поставци задатка фали једна разломачка црта. Ова грешка утиче на један део решења (који је бодован са 4 поена). У наставку је дат део решења који се ослања на израз дат у задатку, а који нема физички смисао. Комисија ће узети у обзир овај пропуст. Извињавамо се свим такмичарима због овог случајног пропуста.

$\gamma = kT_C V_m^{2/3} - kTV_m^{2/3}$ , где је  $k = 2,1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{Kmol}^{2/3}}$ . Из коефицијента правца добија се моларна запремина испитиване течности:

$|b| = kV_m^{2/3}$ , тј.:

$V_m = \left( \frac{|b|}{k} \right)^{3/2} = (6,774 \cdot 10^{-4})^{3/2} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} = 17,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} = 5,78 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$  [2п]

Грешка за одређивање моларне запремине:

$\Delta V_m = \frac{3}{2} \frac{|b|^{1/2}}{k^{3/2}} \Delta b = 6,96 \cdot 10^3 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \rightarrow 0,7 \cdot 10^4 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$  [1п]

Коначно:  $V_m = (5,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$  [1п]

На основу Етвешове формуле (наставак решења на који грешка не утиче):

$\gamma = \frac{k}{V_m^{2/3}} T_C - \frac{k}{V_m^{2/3}} T$ , где је  $k = 2,1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{Kmol}^{2/3}}$ . Из коефицијента правца добија се моларна запремина испитиване течности:

$|b| = \frac{k}{V_m^{2/3}}$ , тј.:

$V_m = \left( \frac{k}{|b|} \right)^{3/2} = (6,774 \cdot 10^{-4})^{3/2} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} = 17,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$  [2п]

Грешка за одређивање моларне запремине:

$\Delta V_m = \frac{3}{2} \frac{k^{3/2}}{|b|^{5/2}} \Delta b = 2,555 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \rightarrow 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$  [1п]

Коначно:  $V_m = (18 \pm 3) \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$  [1п]

Критична температура се може одредити из одсечка  $a$ . Како у разматраном случају није повољно да се на графику креће из нуле по  $x$ -оси, одсечак може да се одреди на основу познавања коефицијента правца и средишње тачке  $S(x_s, y_s)$ :  $y_s = a + bx_s$ .

Координате средишње тачке се добијају као:  $x_s = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7} = 313,15 \text{ K}$  и  $y_s = \frac{\sum_{i=1}^7 y_i}{7} = 102,09 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Грешке за координате средишње тачке добијају се као:  $\Delta x_s = \frac{\sum_{i=1}^7 \Delta x_i}{7} = 0,1 \text{ K}$  и  $\Delta y_s = \frac{\sum_{i=1}^7 \Delta y_i}{7} = 0,50 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$  [1п].

За одсечак се добија:

$a = 102,09 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} + 0,31 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}} \cdot 313,15 \text{ K} = 199,1665 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$  [2п]

Грешка за одређивање одсечка добија се као:  $\Delta a = \Delta y_s + \left( \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{\Delta x_s}{x_s} \right) \cdot |b| \cdot x_s$

$\Delta a = 0,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} + 0,03 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}} \cdot 313,15 \text{ K} + 0,1 \text{ K} \cdot 0,31 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mK}} = 9,9255 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \rightarrow 10 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$  [1п]

Коначно:  $a = (200 \pm 10) \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$

За критичну температуру се добије:  $T_c = \frac{a}{|b|} = 645,16129 \text{ K}$  [2п]

Грешка за критичну температуру:  $\Delta T_c = \left( \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{|b|} \right) \cdot T_c = \left( \frac{10}{200} + \frac{0,03}{0,31} \right) \cdot 645,16129 \text{ K} = 94,69 \text{ K} \rightarrow 100 \text{ K}$  [1п]

Коначно, добија се:  $T_c = (600 \pm 100) \text{ K}$  [1п]

#### Напомене везано за начин бодовања:

Негативни поени за график, између осталог за:

- Координатне осе треба цртати по ивицама милиметарског папира -0.2
- Без наслова -0.2 (наслов није  $y = f(x)$ )
- Лоша размера -0.2 (график заузима мање од 1/4 простора папира)
- Осе нису обележене и недостају јединице -0.2
- Унете су мерене бројне вредности на осе -0.2
- Ако 1. и 2. изабрана тачка није између 1. и 2. односно претпоследње и последње експерименталне -0.5
- Изабране тачке нису у мереном опсегу -0.5
- Негативни поени за рачун, између осталог за:
  - Ако нису изабране добре тачке са графика – за тражене величине 50% предвиђених бодова

Коришћење експерименталних тачака уместо тачака са графика не доноси поене, осим поена за линеаризацију.

