

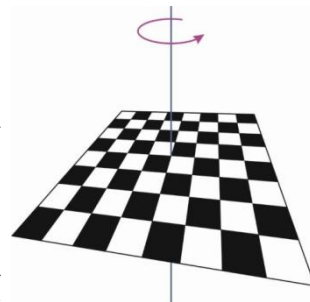


I РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ- фермионска категорија

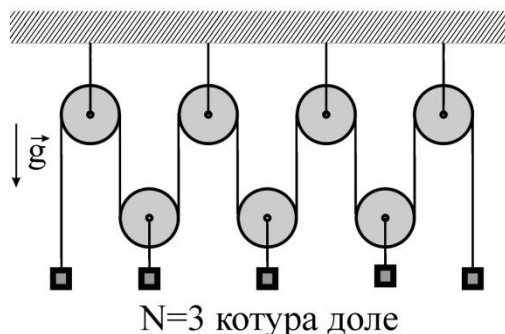
АЛЕКСИНАЦ
22.04.2016.

1. Шаховска табла ротира око непокретне осе која пролази кроз њен центар и нормална је на њу (слика 1.), по закону $\varphi(t) = At - Bt^3$, где су A, B константе, а t је време. Александра стоји тачно изнад шаховске табле, за све време њеног кретања, у произвољно одабраном положају, и удари рецку на папиру сваки пут када јој шаховска табла изгледа потпуно исто као у почетном тренутку (у почетном тренутку није ударила рецку). Средња угаона брзина у првој секунди кретања је $\omega_{sr1} = 5,98 \text{ rad/s}$, а средња угаона брзина за све време кретања је $\omega_{sr} = 4 \text{ rad/s}$. Одредити константе A и B . После колико времена се шаховска табла заустави? Колико Александра удари рецки за то време? (20п)



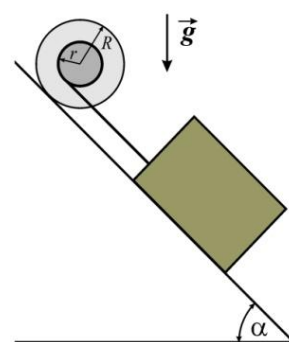
Слика 1.

2. У пољу Земљине теже је систем који се састоји од лаких котурова, преко којих је пребачена лака и неистегљива нит, и тегова истих маса распоређених као на слици 2., где је представљен специјалан случај $N = 3$. На крајевима нити постављен је по један тег и N тегова који висе на N доњих котурова постављени су између крајева нити. Нит по свим котуровима клизи без трења и све нити су све време кретања затегнуте и вертикалне. Колика су убрзања свих тегова у зависности од N ? Да ли ће се први и последњи тег кретати вертикално наниже или навише након пуштања система из мировања? (20п)



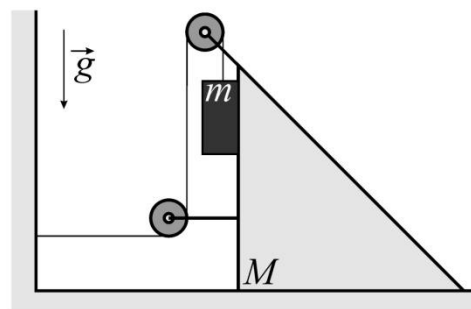
Слика 2.

3. Низ непокретну стрму раван нагибног угла $\alpha = 45^\circ$ крећу се блок масе M и калем, који се све време котрља без проклизавања. Момент инерције калема око уздужне осе симетрије која пролази кроз његов центар масе је I . Маса калема је $m=M$, спољашњи радијус калема је R , а на унутрашњи радијус r намотана је безмасена, неистегљива нит, чији је други крај везан за блок као на слици 3. Током кретања тела, нит је све време је затегнута и паралелна стрмој равни. Блок је направљен од таквог материјала да је трење између њега и равни занемарљиво. Колика су убрзања калема и блока? (фермиони) (20п)



Слика 3.

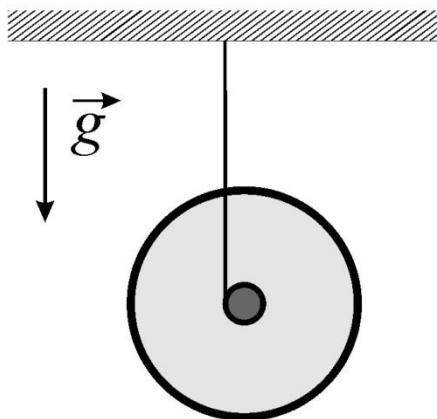
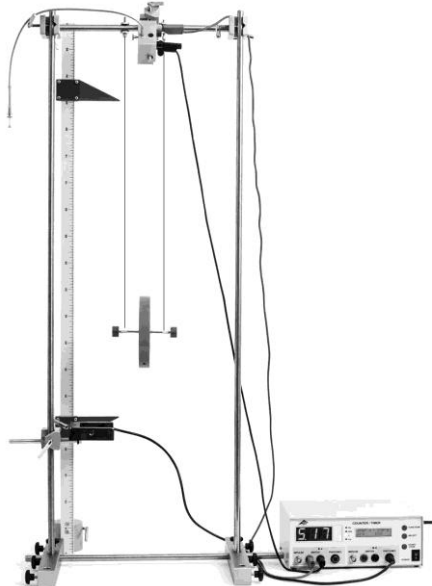
4. У систему са слике 4. (призма+тело) наћи укупно убрзање тела масе m уколико је цео систем препуштен сам себи. Конац је лаган и неистегљив, једним крајем везан за непокретни зид, а другим за тело. Од тела до првог котура као и између котурова конац је вертикалан, а од другог котура до зида је хоризонталан. Котурови су идеални. Трења између призме и хоризонталне, непокретне подлоге нема, а између призме и тела је коефицијент трења μ . Маса призме је M . Односи величина су такви да се тела крећу једно у односу на друго (трење је динамичко). (20п)



Слика 4.



5. Максвелов точак је хомогени диск кроз чији центар је фиксирана танка осовина нормално на раван диска. На обе стране осовине намотане су неистегљиве нити на растојањима подједнако удаљеним од центра диска. Нити су занемарљиве масе и дебљине и другим крајем су везане за непокретну осовину (слика 5.). Ако су нити намотане и точак се пусти, почеће да се креће наниже под дејством Земљине теже. Током кретања осовина ће остати хоризонтална, а диск ће ротирати око ње. Нити ће се одмотавати, неће проклизавати, а одмотани делови нити остају вертикални.



Слика 5.

Циљ експеримента је да се одреди момент инерције система диск+осовина око осе осовине. У ту сврху се нит намота на осовину, точак пусти, па се мери време t потребно да се точак спусти за дужину s из тачке из које је пуштен. При свакој дужини спуштања мерење времена је понављано три пута. За мерења времена коришћена је оптичка баријера тачности $0,01\text{s}$. Резултати мерења су дати у табели. Апсолутна грешка мерења дужине је $\Delta s = 0,1\text{ cm}$. Маса точка је $m = (436 \pm 1)\text{ g}$, а полупречник осовине је $r = (2,50 \pm 0,05)\text{ mm}$. Узети да је убрзање Земљине теже $g = 9,804\text{ m/s}^2$ (без грешке).

$s\text{ [cm]}$	10,0	17,0	24,0	31,0	38,0	45,0
$t_1\text{ [s]}$	2,72	3,54	4,21	4,78	5,30	5,76
$t_2\text{ [s]}$	2,73	3,55	4,23	4,78	5,31	5,76
$t_3\text{ [s]}$	2,73	3,53	4,21	4,79	5,31	5,74

(20п)

Задатке припремили: др Петар Мали, ПМФ, Нови Сад

Светислав Мијатовић, Физички факултет, Београд

Зоран П. Поповић, Физички факултет, Београд

Рецензент: Доц. др Божидар Николић, Физички факултет, Београд

Председник Комисије за такмичење за средње школе: Доц. др Божидар Николић, Физички факултет, Београд



І РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА-фермионска категорија

АЛЕКСИНАЦ
22.04.2016.

P1. Угаони померај на кратком временском интервалу од t до $t + \Delta t$ износи $\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = A(t + \Delta t) - B(t + \Delta t)^3 - At + Bt^3 = A\Delta t - 3Bt^2\Delta t$ [2п]. Пошто је Δt мали интервал виши степени Δt се занемарују [1п]. Одатле се добија израз за тренутну угаону брзину $\omega(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = A - 3Bt^2$ [2п]. Након времена t_2 шаховска табла се зауставља и тада важи $\omega(t_2) = A - 3Bt_2^2 = 0$ [1п]. Одатле се добија време до заустављања као $t_2 = \sqrt{\frac{A}{3B}}$ [1п]. Средња угаона брзина дефинише се као $\omega_{sr}(t) = \frac{\varphi(t)}{t} = A - Bt^2$ [2п]. Одатле је средња угаона брзина у првој секунди кретања $\omega_{sr1} = A - Bt_1^2$, где је $t_1 = 1s$ [1п]. Средња угаона брзина до заустављања шаховске табле је $\omega_{sr} = A - Bt_2^2 = A - B\frac{A}{3B} = \frac{2A}{3}$ [1п]. На основу израза за средњу угаону брзину налазимо $A = \frac{3\omega_{sr}}{2} = 6\text{rad/s}$ [2п], $B = \frac{A - \omega_{sr1}}{t_1^2} = 0,02\text{rad/s}^3$ [2п]. Шаховска табла се заустави након $t_2 = \sqrt{\frac{A}{3B}} = 10s$ [1п]. Одатле је $\varphi(t_2) = 40\text{rad}$ [1п]. Како је $\frac{\varphi(t_2)}{2\pi} = 6,37 < 6,5$ следи да се шаховска табла обрне више од 6 пута, али мање од 6,5 пута [2п]. При сваком обртају Александра лупи две рецке једну након ротације за π , а другу након ротације за 2π тако да укупно лупи 12 рецки [1п].

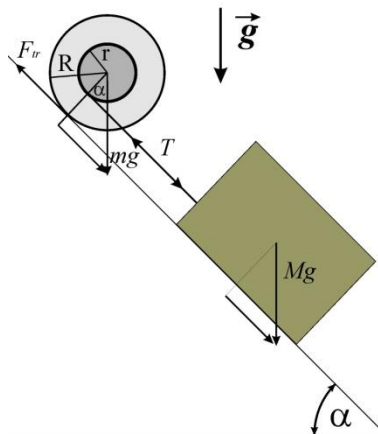
P2. Нека је T сила затезања нити, а a убрзање тега која се налази скроз лево и тега који се налази скроз десно [1п]. Нека је a' убрзање преосталих тегова [1п]. Одатле добијамо систем једначина $T - mg = ma$ (1) [2п] и $2T - mg = ma'$ (2) [2п]. При чему се једначина (1) односи на први и последњи тег, а једначина (2) на преостале тегове. Како нит има фиксну дужину важи да је $N(2a') + a + a = 0$ [6п], односно $a = -Na'$ [2п]. Елиминацијом силе затезања из једначина (1) и (2) добија се $a' = \frac{g}{2N+1}$ [2п] и $a = -\frac{Ng}{2N+1}$ [2п]. Из решења система добија се да се први и последњи тег крећу вертикално наниже [2п]. То се дешава из разлога што на N тегова који су закачени за котурове доле делује $2N$ сила затезања. Због тога ће тегови који се налазе скроз лево и скроз десно уравнотежити произвољан број тегова N који су закачени за N котурова доле.

P3. Једначине транслаторног кретања блока и калема су $a_1M = Mg \sin \alpha - T$ (1) [2п], $ma_2 = mg \sin \alpha + T - F_{tr}$ (2) [2п].

Једначина динамике ротације калема је $I\alpha_2 = F_{tr}R - Tr$ (3) [3п], а из услова задатка да се калем котрља без проклизавања важи да је $a_2 = \alpha_2R$ (4) [2п]. Из услова неистегљивости нити, веза између путева које пређу блок и калем на стрмој равни је $s_2 = s_1 + \varphi r$ [3п], где је φ угао за који се заротирао калем, а одатле следи веза између убрзања $a_2 = a_1 + \alpha_2r$ (5) [2п]. Из (1), (4) и (5) може се изразити сила затезања нити $T = Mg \sin \alpha - \frac{Ma_2(R-r)}{R}$ [1п], а потом заменом T у једначини (2) добије се израз за силу трења између равни и калема $F_{tr} = (M + m)g \sin \alpha - a_2 \left(\frac{M(R-r)}{R} + m \right)$ [1п]. Комбиновањем једначина (3) и (4) и израза за силу трења и силу затезања нити,

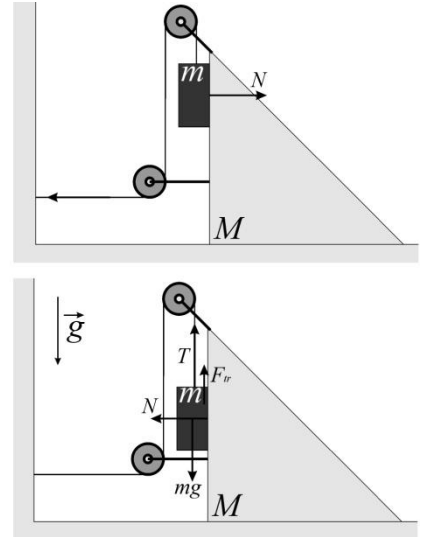
добију се убрзање калема $a_2 = \frac{M(R-r)+mR}{I+M(R-r)^2+mR^2} Rg \sin \alpha$ [1п], а потом коришћењем веза између убрзања и убрзање блока $a_1 = \frac{M(R-r)+mR}{I+M(R-r)^2+mR^2} (R-r)g \sin \alpha$ [1п]. Након замене вредности угла и односа између маса блока и калема добије се:

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M(2R-r)Rg}{I+M((R-r)^2+R^2)} \text{ [1п]}, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M(2R-r)(R-r)g}{I+M((R-r)^2+R^2)} \text{ [1п]}.$$





P4. Када мало тело почне да се креће на доле призма иде на лево. По x -оси на призму делују сила затезања и сила реакције од малог тела, па је једначина кретања призме $Ma_M = T - N$ [2п], где је a_M убрзање призме. По x -оси на мало тело делује само реакција подлоге од призме, па је једначина кретања по тој оси $ma_{mx} = N$ [2п]. По y -оси на мало тело делују гравитациона сила, сила затезања и сила трења, па је једначина кретања $ma_{my} = mg - T - F_{tr}$ [2п]. Пошто се по x -оси призма и мало тело крећу заједно следи да су им убрзања иста, тј $a_M = a_{mx}$ [3п]. Даље, сила трења је $F_{tr} = \mu N = \mu ta_{mx}$, па комбиновањем наведеног добијамо $T = (m + M)a_{mx}$ [1п] и $mg - T - \mu ta_{mx} = ma_{my}$ [1п]. Сабирање ових једначина даје $mg = (m + \mu m + M)a_{mx} + ma_{my}$ [1п]. Остаје да се нађе веза између убрзања малог тела по две осе. Међутим, пошто је конопцац неистегљив следи да за онолико за колико се мало тело спусти за толико ће се померити на лево, а самим тим и мало тело. Дакле, убрзања малог тела по две осе су иста, тј $a_{mx} = a_{my}$ [4п]. Сада следи $a_{mx} = g \frac{m}{(2+\mu)m+M}$ [1п]. Укупно убрзање малог тела је векторски збир убрзања по осама, односно $a_m = \sqrt{a_{mx}^2 + a_{my}^2} = a_{mx} \sqrt{2} = g\sqrt{2} \frac{m}{(2+\mu)m+M}$ [3п].



P5. Из једначина за транслаторно кретање добијамо

$$ma = mg - 2T \quad [0, 5\text{п}],$$

а из једначине за ротационо

$$I\alpha = 2Tr \quad [0, 5\text{п}].$$

Из везе угаоног и транслаторног убрзања, уз услов да нема проклизавања, добијамо $a = \alpha r$. Даље следи да је

$$ma = mg - Ia/r^2 \quad [0, 5\text{п}].$$

Из ове једначине добије се убрзање

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}.$$

Ако добијени израз за убрзање унесемо у формулу за пређени пут, равномерно убрзаног кретања без почетне брзине $s = \frac{at^2}{2}$, добије се

$$s = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} t^2,$$

односно

$$t^2 = 2 \frac{1 + \frac{I}{mr^2}}{g} s \quad [0, 5\text{п}].$$

Овде видимо да је зависност $t^2 = f(s)$ линеарна, са коефицијентом правца праве

$$k = 2 \frac{1 + \frac{I}{mr^2}}{g} \quad [0, 5\text{п}].$$

Одатле се може наћи момент инерције преко формуле

$$I = mr^2 \left(\frac{1}{2} kg - 1 \right) \quad [0, 5\text{п}].$$

Мерени и обрађени подаци су дати у табели (грешка за мерење дужине је свуда иста $\Delta s = 0,1$ cm, тако да није писана у табели, а грешка за време се рачуна као веће од тачности инструмента и максималног одступања средње вредности од појединачних мерења) [4п свака колона по поен]:



N ⁰	s[cm]	t _i [s]	t=t _{sr} [s]	Δt[s]	t ² [s ²]	Δt ² =2tΔt[s ²]
1	10	2,72 2,73 2,73	2,7267	0,01	^{7,434711} 7,43	^{0,054534} 0,06
2	17	3,54 3,55 3,53	3,54	0,01	^{12,5316} 12,53	^{0,0708} 0,08
3	24	4,21 4,23 4,21	4,2167	^{0,0133} 0,02	^{17,78056} 17,78	^{0,112164} 0,12
4	31	4,78 4,78 4,79	4,7833	0,01	^{22,87996} 22,9	^{0,095667} 0,1
5	38	5,30 5,31 5,31	5,3067	0,01	^{28,16106} 28,16	^{0,106134} 0,11
6	45	5,76 5,76 5,74	5,7533	^{0,0133} 0,02	^{33,10046} 33,10	^{0,15304} 0,16

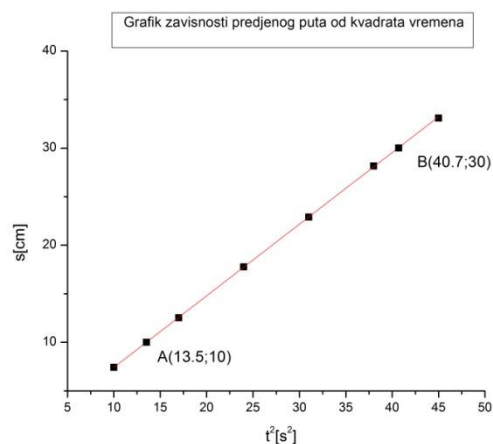
Помоћу података из табеле се црта график $t^2 = f(s)$, уцрта права која најбоље одговара подацима, и са ње се (у циљу одређивања коефицијента правца) бирају две тачке, на пример: тачка $A(13.5cm; 10s^2)$ између прве и друге експерименталне тачке, и тачка $B(40.7cm; 30s^2)$ између претпоследње и последње експерименталне тачке [1п]; ове две тачке се бирају унутар опсега података тако да се њихове координате што тачније читавају и да растојање између тачака буде што веће (да би грешка коефицијента правца била што мања).

Са предложеним избором налазимо да је коефицијент правца праве

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0,73529 \frac{s^2}{cm} = 73,529 \frac{s^2}{m} \text{ [1п]},$$

одакле је момент инерције

$$I = 9,795 \times 10^{-4} kgm^2 \text{ [1п]}.$$



[4п – график]

Грешку за коефицијент правца израчунавамо по формули

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{|x_B - x_A|} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|} \text{ [1п]},$$

где се грешке за тачке које су очитане са графика процењују тако што бирамо већу од грешака експерименталних тачака између којих се налазе. Тако налазимо да је $\Delta x_A = \Delta x_B = 0,1cm$,

$\Delta y_A = 0,08s^2$, $\Delta y_B = 0,16s^2$, на основу чега је $\Delta k = 1,4 \frac{s^2}{m}$ [1п], односно

$$k = (73,5 \pm 1,4) \frac{s^2}{m} \text{ [1п]}.$$

Даље је потребно срачунати грешку за момент инерције, помоћу правила за релативну грешку



производа и количника, односно апсолутну грешку збира и разлике, као

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{g\Delta k + k\Delta g}{|kg-2|} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r} \quad [1\text{п}].$$

Из података задатка се закључује да је $\Delta g = 0$, $\Delta m = 1g$, $\Delta r = 0,05mm$, односно после замене бројних вредности је $\frac{\Delta I}{I} = 0,0613942$, односно $\Delta I = 0,6 \cdot 10^{-4} kgm^2$ [1п]. Укупно:

$$I = (9,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-4} kgm^2 \quad [1\text{п}].$$

II начин (бодовање аналогно као у првом начину):

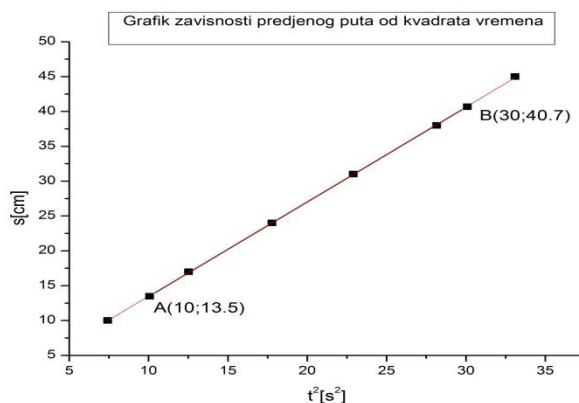
Могуће је било и цртати зависност $s = f(t^2)$ (мада је правилније гледати зависност зависне променљиве, што је у овом случају време, од независне, што је овде пређени пут). Тада се добија $s = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} t^2$, односно $k = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}$. Одатле се може наћи момент инерције преко формуле $I =$

$$\frac{(g-2k)mr^2}{2k}.$$

Помоћу података из табеле се црта график $s = f(t^2)$ и са њега, у циљу одређивања коефицијента правца праве, између прве и друге експерименталне тачке се бира тачка $A(10s^2; 13.5cm)$, а између пете и шесте експерименталне тачке се бира тачка $B(30s^2; 40.7cm)$. Тада је коефицијент правца $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1,36 \frac{cm}{s^2} = 0,0136 \frac{m}{s^2}$. Одатле је $I = 9,795 \cdot 10^{-4} kgm^2$. Даље, грешке за тачке које су очитане са графика се одређују тако што бирамо већу од грешака експерименталних тачака између којих се налазе. Одатле је $\Delta y_A = \Delta y_B = 0,1cm$, $\Delta x_A = 0,08s^2$, $\Delta x = 0,16s^2$. Даље грешка за коефицијент правца се одређује као $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{|x_B - x_A|} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|} = 0,0188$, односно $\Delta k = 0,0003 \frac{m}{s^2}$.

Укупно

$$k = (1,36 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2}.$$



Даље можемо да рачунамо грешку за момент инерције, помоћу правила за релативну грешку производа и количника, односно апсолутну грешку збира и разлике, као $\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta g + 2\Delta k}{|g-2k|} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{2\Delta r}{r}$. Из података задатка закључује се да је $\Delta g = 0$, $\Delta m = 1g$, $\Delta r = 0.05mm$, односно после замене бројних вредности је $\frac{\Delta I}{I} = 0,0611459$, односно $\Delta I = 0,6 \cdot 10^{-4} kgm^2$. Укупно:

$$I = (9,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-4} kgm^2.$$

НАПОМЕНА: најисправније би било посматрати зависност времена од корена пређеног пута $t = f(\sqrt{s})$, али због неприкладне тежине обраде података за узраст првог разреда средње школе то решење није наведено.

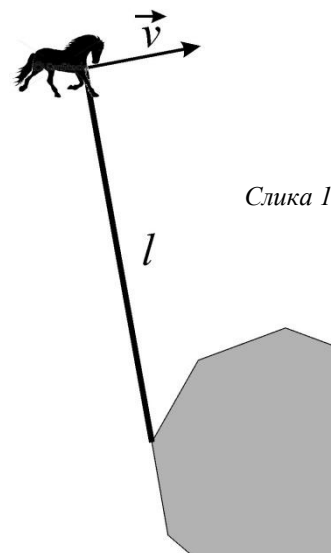


I РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ- бозонска категорија

АЛЕКСИНАЦ
22.04.2016.

1. Коњ је везан конопцем за зграду основе правилног n -тоугла. Крај конопца везан за зграду је постављен на њену ивицу где се спајају две стране (у теме n -тоугла). У почетном тренутку је конопац паралелан са једном од страна зграде којој припада ивица за коју је закачен, али не дотиче страну зграде (слика 1.). Тада коњ почне да се креће брзином интензитета v , чији је вектор нормалан на конопац, у смеру казаљке на сату (као на слици 1.). Конопац је све време кретања затегнут и хоризонталан, интензитет брзине којом се коњ креће једнака је v , а њен вектор је нормалан на конопац. Дужина конопца је једнака обиму зграде и износи l . Када коњ обиђе целу зграду заустави се у тачки у којој је конопац везан за њу. Наћи:



Слика 1.

а) пут s који пређе коњ од почетка кретања док се не заустави; (7п)

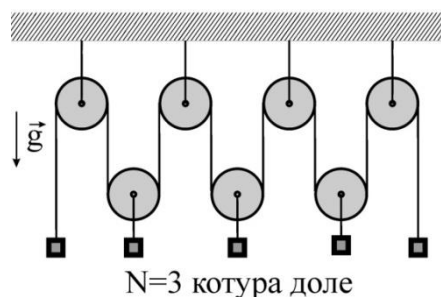
б) средњу угаону брзину $\langle \omega \rangle$ коња током кретања; (7п)

в) угаону брзину ω_k коња од тренутка када конопац дотакне k -ту ивицу до тренутка када дотакне $k + 1$ -ву ивицу (нпр. ω_1 је угаона брзина за време од када коњ крене док конопац не дотакне другу ивицу зграде).

(6п)

Помоћ: формула за збир првих n природних бројева гласи $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

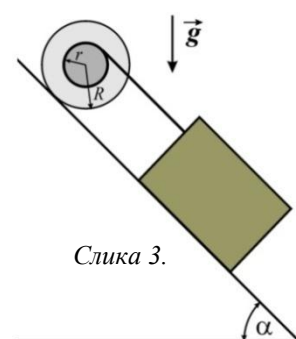
2. У пољу Земљине теже је систем који се састоји од лаких котурова, преко којих је пребачена лака и неисегљива нит, и тегова истих маса распоређених као на слици 2., где је представљен специјалан случај $N = 3$. На крајевима нити постављен је по један тег и N тегова који висе на N доњих котурова постављени су између крајева нити. Нит по свим котуровима клизи без трења и све нити су све време кретања затегнуте и вертикалне. Колика су убрзања свих тегова у зависности од N ? Да ли ће се први и последњи тег кретати вертикално наниже или



Слика 2.

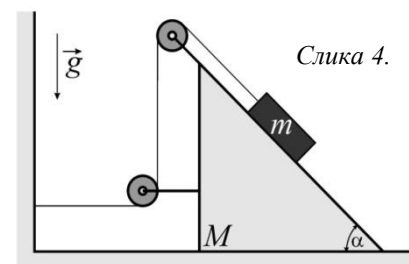
навише након пуштања система из мировања? (20п)

3. Низ непокретну стрму раван нагибног угла $\alpha = 45^\circ$ крећу се блок масе M и калем, који се све време котрља без проклизавања. Момент инерције калема око уздужне осе симетрије која пролази кроз његов центар масе је I . Маса калема је $m=M$, спољашњи радијус је R , а на унутрашњи радијус калема r намотана је безмасена, неисегљива нит, чији је други крај везан за блок као на слици 3. Нит је све време затегнута и паралелна стрмој равни. Блок је направљен од таквог материјала да је трење између њега и равни занемарљиво. Колика су убрзања калема и блока? (20п)



Слика 3.

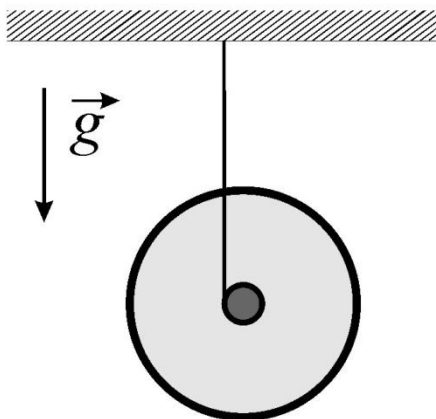
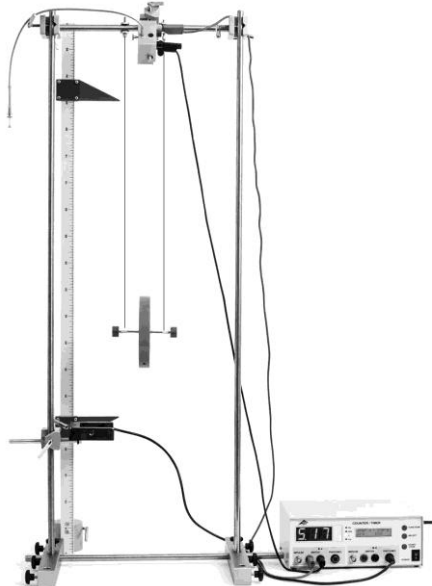
4. У систему са слике 4. (призма+тело) наћи убрзање тела масе m у референтном систему везаном за призму, која се налази на непокретној, хоризонталној подлози, уколико је цео систем препуштен сам себи. Конац је лаган и неисегљив, једним крајем везан за непокретни зид, а другим за тело. Од тела до првог котура конац је све време кретања паралелан стрмој равни, између котурова конац је вертикалан, а од другог котура до зида је хоризонталан. Котурови су идеални. Трења између призме и подлоге нема, а између призме и тела је коефицијент трења μ . Маса призме је M , а нагибни угао је $\alpha = 45^\circ$. Односи величина су такви да се тела све време крећу једно у односу на друго (трење је динамичко). (20п)



Слика 4.



5. Максвелов точак је хомогени диск кроз чији центар је фиксирана танка осовина нормално на раван диска. На обе стране осовине намотане су неистегљиве нити на растојањима подједнако удаљеним од центра диска. Нити су занемарљиве масе и дебљине и другим крајем су везане за непокретну осовину (слике 5.). Ако су нити намотане и точак се пусти, почеће да се креће наниже под дејством Земљине теже. Током кретања осовина ће остати хоризонтална, а диск ће ротирати око ње. Нити ће се одмотавати, неће проклизавати, а одмотани делови нити остају вертикални.



Слика 5.

Циљ експеримента је да се одреди момент инерције система диск+осовина око осе осовине. У ту сврху се нит намота на осовину, точак пусти, па се мери време t потребно да се точак спусти за дужину s из тачке из које је пуштен. При свакој дужини спуштања мерење времена је понављано три пута. За мерења времена коришћена је оптичка баријера тачности $0,01\text{s}$. Резултати мерења су дати у табели. Апсолутна грешка мерења дужине је $\Delta s = 0,1\text{ cm}$. Маса точка је $m = (436 \pm 1)\text{ g}$, а полупречник осовине је $r = (2,50 \pm 0,05)\text{ mm}$. Узети да је убрзање Земљине теже $g = 9,804\text{ m/s}^2$ (без грешке).

$s\text{ [cm]}$	10,0	17,0	24,0	31,0	38,0	45,0
$t_1\text{ [s]}$	2,72	3,54	4,21	4,78	5,30	5,76
$t_2\text{ [s]}$	2,73	3,55	4,23	4,78	5,31	5,76
$t_3\text{ [s]}$	2,73	3,53	4,21	4,79	5,31	5,74

(20п)

Задатке припремили: др Петар Мали, ПМФ, Нови Сад

Светислав Мијатовић, Физички факултет, Београд

Зоран П. Поповић, Физички факултет, Београд

Рецензент: Доц. др Божидар Николић, Физички факултет, Београд

Председник Комисије за такмичење за средње школе: Доц. др Божидар Николић, Физички факултет, Београд



І РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА-бозонска категорија

АЛЕКСИНАЦ
22.04.2016.

P1. а) Коњ ће се све време кретати по деловима кружница, при чему ће њихови центри бити темена n -тоугла. При свакој промени центра круга, полупречник кружнице по којој се коњ креће биће краћи за дужину стране $\frac{l}{n}$ [1п].

Први део пута који коњ пређе од када крене док конопца не дотакне другу ивицу је једнак $s_1 = l \frac{2\pi}{n}$ [1п]. Други део пута је $s_2 = \left(l - \frac{l}{n}\right) \frac{2\pi}{n} = l(n-1) \frac{2\pi}{n^2}$, јер се сада дужина конопца од нове ивице до коња смањила за дужину стране $\frac{l}{n}$ [1п]. Даљом аналогијом видимо да је k -ти део пута једнак $s_k = \left(l - \frac{(k-1)l}{n}\right) \frac{2\pi}{n} = l(n-k+1) \frac{2\pi}{n^2}$ [2п]. Укупан пут добијамо тако што саберемо све појединачне путеве $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=1}^n l(n-k+1) \frac{2\pi}{n^2} = l \frac{2\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n (n-k+1) = l \frac{2\pi}{n^2} (n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1) = l \frac{2\pi}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = l\pi \frac{n+1}{n}$ [2п], где смо у претпоследњој једнакости искористили формулу из текста задатка за збир првих n природних бројева.

б) Средња угаона брзина се рачуна као укупан описани угао кроз укупно време кретања [1п]. Коњ опише угао $\frac{2\pi}{n}$ између сваке две ивице, а пошто има n ивица следи да је укупни описани угао 2π [1п]. Укупно време кретања можемо да нађемо из пређеног пута, јер знамо да је брзина коња све време иста по интензитету и једнака v . Тако да је $t = \frac{s}{v} = l\pi \frac{n+1}{nv}$ [3п], па је $\langle \omega \rangle = \frac{2\pi}{t} \frac{n}{n+1}$ [2п].

в) Угаону брзину ω_k налазимо из односа линијске брзине и полупречника кружнице по којој се коњ тада креће. Полупречник кружнице је једнак дужини конопца у том тренутку, односно $\left(l - \frac{(k-1)l}{n}\right)$, а брзина је све време v [4п]. Следи $\omega_k = \frac{v}{l} \frac{n}{n-k+1}$ [2п].

P2. Нека је T сила затезања нити, а a убрзање тега која се налази скроз лево и тега који се налази скроз десно [1п]. Нека је a' убрзање преосталих тегова [1п]. Одатле добијамо систем једначина $T - mg = ma$ (1) [2п] и $2T - mg = ma'$ (2) [2п]. При чему се једначина (1) односи на први и последњи тег, а једначина (2) на преостале тегове. Како нит има константну дужину важи да је $N(2a') + a + a = 0$ [6п], односно $a = -Na'$ [2п]. Елиминацијом силе затезања из једначина (1) и (2) добија се $a' = \frac{g}{2N+1}$ [2п] и $a = -\frac{Ng}{2N+1}$ [2п]. Из решења система добија се да се први и последњи тег крећу вертикално наниже [2п]. То се дешава из разлога што на N тегова који су закачени за котурове доле делује $2N$ сила затезања. Због тога ће тегови који се налазе скроз лево и скроз десно уравнотежити произвољан број тегова N који су закачени за N котурова доле.

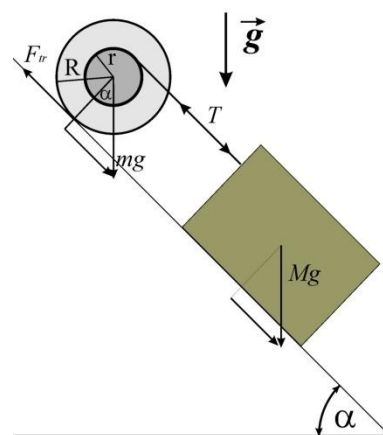
P3. Једначине транслаторног кретања блока и калема су $a_1 M = Mg \sin \alpha - T$ (1) [2п], $ma_2 = T + mg \sin \alpha - F_{tr}$ (2) [2п].

Једначина динамике ротације калема је $I\alpha_2 = Tr + F_{tr}R$ (3) [3п], а из услова задатка да се калем котрља без проклизавања важи да је $a_2 = \alpha_2 R$ (4) [2п]. Из услова неистегљивости нити, веза између путева које пређу блок и калем на стрмој равни је $s_1 = s_2 + \varphi r$ [3п], где је φ угао за који се заротирао калем, а одатле следи веза између убрзања $a_1 = a_2 + a_2 r$ (5) [2п]. Из (1), (4) и (5) може се изразити сила затезања нити $T = Mg \sin \alpha - \frac{Ma_2(R+r)}{R}$ [1п], а потом заменом

T у једначини (2) добије се израз за силу трења између равни и калема $F_{tr} = (M+m)g \sin \alpha - a_2 \left(\frac{M(R+r)}{R} + m\right)$ [1п]. Елиминацијом

сила затезања и трења у једначини (3) и коришћењем везе (4), даље се може добити убрзање калема $a_2 = \frac{M(R+r)+mR}{I+M(R+r)^2+mR^2} Rg \sin \alpha$ [1п], а потом коришћењем веза за убрзања добије се и

убрзање блока $a_1 = \frac{M(R+r)+mR}{I+M(R+r)^2+mR^2} (R+r)g \sin \alpha$ [1п]. Након замене вредности угла и везе





између маса блока и калема добије се:

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M(2R+r)Rg}{I+M((R+r)^2+R^2)} \quad [1\text{п}], \quad a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M(2R+r)(R+r)g}{I+M((R+r)^2+R^2)} \quad [1\text{п}].$$

P4. Када мало тело почне да се креће низ призму, она иде на лево. Нека је убрзање призме једнако a_M , а убрзање малог тела у односу на њу a_m . Због неистегљивости конца следи да за онолико за колико се призма помери улево за толико се и тело спусти по призми, тј. та два убрзања су једнака $a_M = a_m$ [5п] и у даљем тексту ће бити означена са a . На призму делују силе

као на слици, па је њено кретање описано као $Ma = T - T \frac{\sqrt{2}}{2} +$

$N \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{tr} \frac{\sqrt{2}}{2} = T \frac{2-\sqrt{2}}{2} + N \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{tr} \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1) [4п]. На мало тело у

систему везаном за призму делују гравитациона сила, сила затезања нити, сила трења $F_{tr} = \mu N$, реакција подлоге и

инерцијална сила $F_{in} = ma$. Једначине кретања су $ma = F_{in} \frac{\sqrt{2}}{2} +$

$mg \frac{\sqrt{2}}{2} - T - F_{tr}$ (2) [3п] и $mg \frac{\sqrt{2}}{2} = N + F_{in} \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) [3п]. Из

једначине (3) се добија $mg \frac{\sqrt{2}}{2} - ma \frac{\sqrt{2}}{2} = N$ [1п], па заменом

тога у једначину (2) следи $T = ma \frac{\sqrt{2}(1+\mu)-2}{2} + mg \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mu)$ [1п]. Заменом ове две вредности у

једначину (1) се добија $Ma = ma \frac{2\sqrt{2}-4+\mu\sqrt{2}}{2} + mg \frac{\sqrt{2}(1-\mu)}{2}$ [1п]. И коначно $a = g \frac{m\sqrt{2}(1-\mu)}{2M+m(4-\sqrt{2}(2+\mu))}$

[2п].

P5. Из једначина за транслаторно кретање добијамо

$$ma = mg - 2T \quad [0, 5\text{п}],$$

а из једначине за ротационо

$$I\alpha = 2Tr \quad [0, 5\text{п}].$$

Из везе угаоног и транслаторног убрзања, уз услов да нема проклизавања, добијамо $a = \alpha r$. Даље следи да је

$$ma = mg - Ia/r^2 \quad [0, 5\text{п}].$$

Из ове једначине добије се убрзање

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}.$$

Ако добијени израз за убрзање унесемо у формулу за пређени пут, равномерно убрзаног кретања без почетне брзине $s = \frac{at^2}{2}$, добије се

$$s = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} t^2,$$

односно

$$t^2 = 2 \frac{1 + \frac{I}{mr^2}}{g} s \quad [0, 5\text{п}].$$

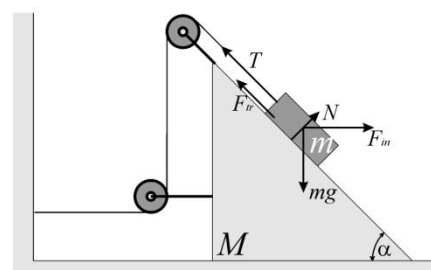
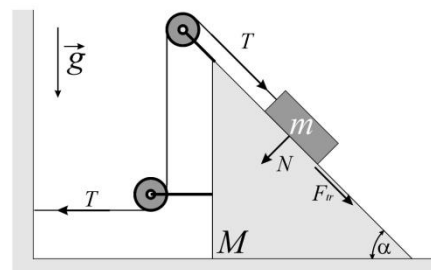
Овде видимо да је зависност $t^2 = f(s)$ линеарна, са коефицијентом правца праве

$$k = 2 \frac{1 + \frac{I}{mr^2}}{g} \quad [0, 5\text{п}].$$

Одатле се може наћи момент инерције преко формуле

$$I = mr^2 \left(\frac{1}{2} kg - 1 \right) \quad [0, 5\text{п}].$$

Мерени и обрађени подаци су дати у табели (грешка за мерење дужине је свуда иста $\Delta s = 0,1$ cm, тако да није писана у табели, а грешка за време се рачуна као већа од тачности инструмента и максималног одступања средње вредности од појединачних мерења) [4п свака колона по поен]:





РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ



N ⁰	s[cm]	t _i [s]	t=t _{sr} [s]	Δt[s]	t ² [s ²]	Δt ² =2tΔt[s ²]
1	10	2,72 2,73 2,73	2,7267	0,01	^{7,434711} 7,43	^{0,054534} 0,06
2	17	3,54 3,55 3,53	3,54	0,01	^{12,5316} 12,53	^{0,0708} 0,08
3	24	4,21 4,23 4,21	4,2167	^{0,0133} 0,02	^{17,78056} 17,78	^{0,112164} 0,12
4	31	4,78 4,78 4,79	4,7833	0,01	^{22,87996} 22,9	^{0,095667} 0,1
5	38	5,30 5,31 5,31	5,3067	0,01	^{28,16106} 28,16	^{0,106134} 0,11
6	45	5,76 5,76 5,74	5,7533	^{0,0133} 0,02	^{33,10046} 33,10	^{0,15304} 0,16

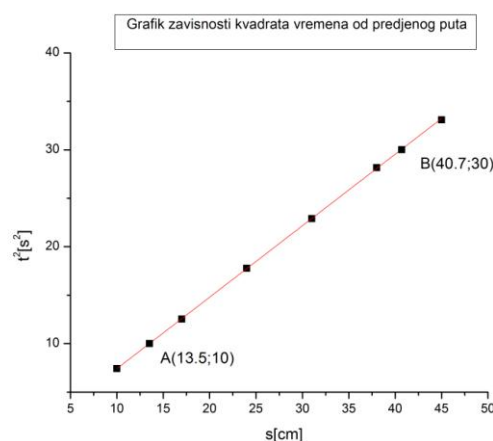
Помоћу података из табеле се црта график $t^2 = f(s)$, уцрта се права која најбоље одговара подацима, и са ње се (у циљу одређивања коефицијента правца) бирају две тачке, на пример: тачка $A(13.5cm; 10s^2)$ између прве и друге експерименталне тачке, и тачка $B(40.7cm; 30s^2)$ између претпоследње и последње експерименталне тачке [1п]; ове две тачке се бирају унутар опсега података тако да се њихове координате што тачније читавају и да растојање између тачака буде што веће (да би грешка коефицијента правца била што мања).

Са предложеним избором налазимо да је коефицијент правца праве

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0,73529 \frac{s^2}{cm} = 73,529 \frac{s^2}{m} \text{ [1п]},$$

одакле је момент инерције

$$I = 9,795 \times 10^{-4} kgm^2 \text{ [1п]}.$$



[4п – график]

Грешку за коефицијент правца израчунавамо по формули

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{|x_B - x_A|} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|} \text{ [1п]},$$

где се грешке за тачке које су очитане са графика процењују тако што бирамо већу од грешака експерименталних тачака између којих се налазе. Тако налазимо да је $\Delta x_A = \Delta x_B = 0,1cm$,

$\Delta y_A = 0,08s^2$, $\Delta y_B = 0,16s^2$, на основу чега је $\Delta k = 1,4 \frac{s^2}{m}$ [1п], односно

$$k = (73,5 \pm 1,4) \frac{s^2}{m} \text{ [1п]}.$$

Даље је потребно срачунати грешку за момент инерције, помоћу правила за релативну грешку производа и количника, односно апсолутну грешку збира и разлике, као



$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{g\Delta k + k\Delta g}{|kg-2|} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r} \quad [1\text{п}].$$

Из података задатка се закључује да је $\Delta g = 0$, $\Delta m = 1g$, $\Delta r = 0,05mm$, односно после замене бројних вредности је $\frac{\Delta I}{I} = 0,0613942$, односно $\Delta I = 0,6 \cdot 10^{-4} kgm^2$ [1п]. Укупно:

$$I = (9,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-4} kgm^2 \quad [1\text{п}].$$

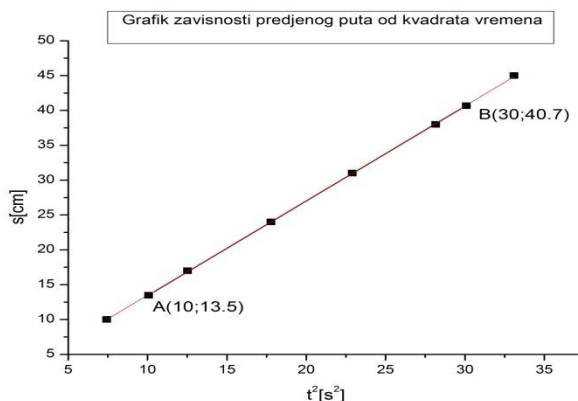
II начин (бодовање аналогно као у првом начину):

Могуће је било и цртати зависност $s = f(t^2)$ (мада је правилније гледати зависност зависне променљиве, што је у овом случају време, од независне, што је овде пређени пут). Тада се добија $s = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} t^2$, односно $k = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}$. Одатле се може наћи момент инерције преко формуле $I = \frac{(g-2k)mr^2}{2k}$.

Помоћу података из табеле црта се график $s = f(t^2)$ и са њега, у циљу одређивања коефицијента правца праве, између прве и друге експерименталне тачке се бира тачка $A(10s^2; 13.5cm)$, а између пете и шесте експерименталне тачке се бира тачка $B(30s^2; 40.7cm)$. Тада је коефицијент правца $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1,36 \frac{cm}{s^2} = 0,0136 \frac{m}{s^2}$. Одатле је $I = 9,795 \cdot 10^{-4} kgm^2$. Даље, грешке за тачке које су очитане са графика се одређују тако што бирамо већу од грешака експерименталних тачака између којих се налазе. Одатле је $\Delta y_A = \Delta y_B = 0,1cm$, $\Delta x_A = 0,08s^2$, $\Delta x_B = 0,16s^2$. Даље грешка за коефицијент правца се одређује као $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{|x_B - x_A|} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|} = 0,0188$, односно $\Delta k = 0,0003 \frac{m}{s^2}$.

Укупно

$$k = (1,36 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2}.$$



Даље можемо да рачунамо грешку за момент инерције, помоћу правила за релативну грешку производа и количника, односно апсолутну грешку збира и разлике, као $\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta g + 2\Delta k}{|g-2k|} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{2\Delta r}{r}$. Из података задатка закључује се да је $\Delta g = 0$, $\Delta m = 1g$, $\Delta r = 0.05mm$, односно после замене бројних вредности је $\frac{\Delta I}{I} = 0,0611459$, односно $\Delta I = 0,6 \cdot 10^{-4} kgm^2$. Укупно:

$$I = (9,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-4} kgm^2.$$

НАПОМЕНА: најисправније би било посматрати зависност времена од корена пређеног пута $t = f(\sqrt{s})$, али због неприкладне тежине обраде података за узраст првог разреда средње школе то решење није наведено.