ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2014/2015. ГОДИНЕ.

II РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

РЕПУБЛИЧКИ НИВО
25-26.04.2015.

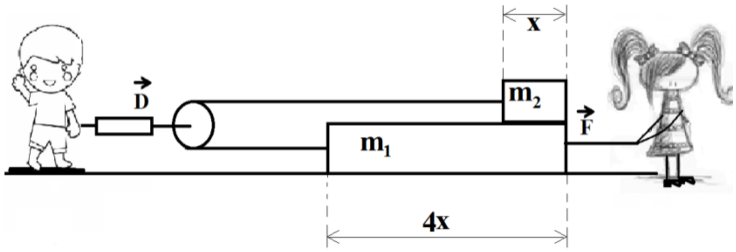
ЗАДАЦИ

1. Два тела, маса $m_1 = 3m$ и $m_2 = m$, где је $m = 1kg$, повезана су преко лаког котура помоћу лаке неистегљиве нити као на слици 1.а. Петар стоји на подлози и држи динамометар занемарљиве масе на коме очитава силу $D = 8\mathrm{N}$. Коефицијент трења међу телима, као и између доњег тела и подлоге је $\mu = 0{,}2$. Дужина x, означена на слици, износи $x = 1\mathrm{m}$.

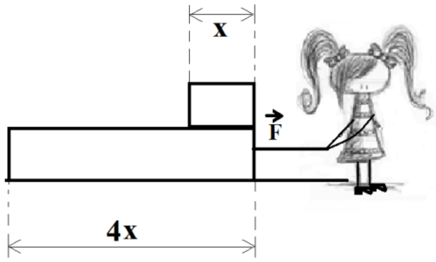
а) Коликом силом Нора вуче тело 1? Након колико времена ће центар масе горњег тела бити тачно изнад центра масе доњег тела?

б) Нора вуче тело 1 истом силом као и у првом делу задатка, али тела више нису спојена преко лаког котура (Слика 1.б). Након колико времена ће центар масе горњег тела бити тачно изнад центра масе доњег тела у овом случају?

Сматрати да је у почетном тренутку систем у стању мировања. **[20п]**



Слика 1.а



Слика 1.б

2. Идеални гас изотермски се шири, потом адијабатски хлади, и то се понавља n пута. При сваком изотермском ширењу однос почетне и крајње запремине је константан, док је при сваком адијабатском хлађењу промена температуре иста и једнака најнижој температури у циклусу. Након наизменичних n изотерми и n адијабата систем се изотермски враћа у стање почетне ентропије, а затим адијабатски у стање почетне температуре. Представити циклус у TS дијаграму и наћи степен корисног дејства. Сума првих n природних бројева је $S_n = (n+1)n/2$. **[20п]**

3. На кружницу полупречника r, чији се центар налази у координатном почетку, поставља се N наелектрисања. Прво наелектрисање, q, $q > 0$, поставља се у тачку где кружница сече позитивни део $y-$осе. Свако следеће наелектрисање поставља се у тачку која је у односу на претходно наелектрисање померена за угао $2\pi/N$ у смеру казаљке на сату, при чему се после наелектрисања q поставља наелектрисање $-q$ и обрнуто, све док се не постави свих N наелектрисања. Наелектрисања су у тачкама фиксирана. Одредити електрично поље у центру кружнице за све вредности $N = 1,2,3,4...$ ако се систем налази у вакууму. **[15п]**

Помоћ: Задатак је могуће решавати на више начина.

Први начин, по дефиницији, математички је захтевнији. Корисне формуле за овакав приступ су:

$$\sin(nx)\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n-1)x}{2} + \sin\frac{(2n+1)x}{2}\right) \text{ и } \cos(nx)\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)x}{2} + \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right).$$

При другом начину решавања, за непаран број наелектрисања, корисно је посматрати поље датог распореда наелектрисања и истог распореда наелектрисања заротираног за одређени угао око центра кружнице.

Прихватљиво је и било које друго, тачно решење!

4. У цилиндричном суду налази се смеша етил-алкохола и воде. Најједноставније предвиђање како коефицијент површинског напона смеше зависи од његовог састава дато је Рауловим правилом за идеалне смеше: $\gamma = \gamma_A x_A + \gamma_B x_B$, где су величине x_A и x_B моларни удели течности A (етил-алкохол), односно течности B (вода) у смеши, а γ_A и γ_B појединачни коефицијенти површинског напона течности A и течности B. Основни разлог одступања од ове формуле је тај што је површински слој смеше знатно богатији компонентом која има нижи површински напон него остатак смеше јер се на тај начин остварује нижа укупна енергија система. Модификована Раулова формула дата је као: $\gamma = \gamma_A y_A + \gamma_B y_B$, где су величине y_A и y_B моларни удели течности A, односно течности B у површинском слоју смеше. У случају смеше релативно сличних течности количник ова два односа, $S = \dfrac{y_A / y_B}{x_A / x_B}$, не зависи од састава смеше.

Познате су вредности величина: x_A, γ_A, γ_B и S.

а) Одредити коефицијент површинског напона смеше. **[7п]**

б) Мала количина испитиване смеше етил-алкохола и воде унесе се у капиларну цев полупречника r. Колика треба да буде висина стуба смеше у капиларној цеви да би смеша почела истицати при постављању цеви у вертикалан положај?
Густина смеше је . **[7п]**

в) Смеша етил-алкохола и воде у цилиндричном суду затвори се клипом површине пресека S и масе M, која је много већа од масе суда и воде у њему. При дну суда направи се мали бочни отвор површине пресека s. Ако је сила трења између суда и подлоге на којој се налази суд пропорционална релативној брзини суда и подлоге, а коефицијент пропорционалности је k, одредити коначну вредност ове брзине. Густину смеше, ρ, сматрати познатом. **[11п]**

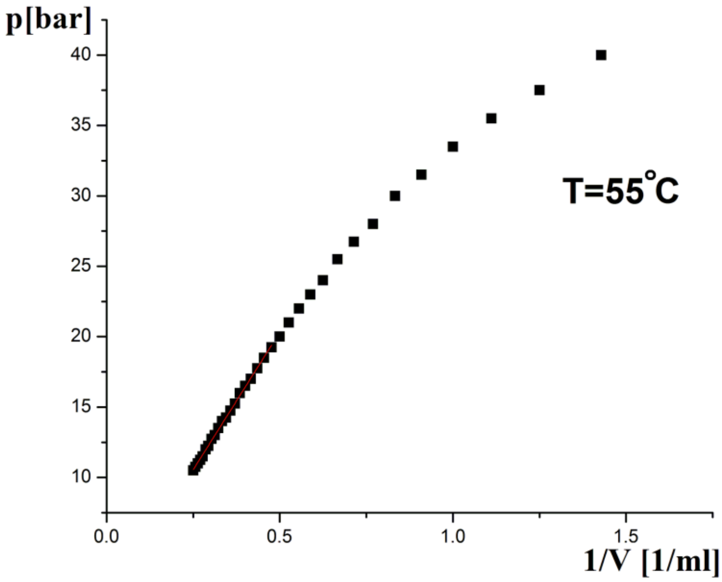
5. Реални гасови понашају се сложеније од идеалних услед постојања интеракција међу честицама. За сваки гас постоји критична температура T_C, таква да је за $T > T_C$ систем у гасном стању без обзира на притисак. На температурама $T < T_C$ јавља се пара, а изнад неког притиска јавља се течна фаза. Уколико се реални гасови разматрају у условима довољно високих температура и ниских притисака, њихово понашање може се описати једначином стања идеалног гаса. Испитивани реални гас је SF_6 са критичном температуром $T_C = 45{,}6^\circ C = T_2$. Помоћу апаратуре приказане на слици 3. мерена је промена притиска у функцији од запремине на температурама: $T_1 = 30^\circ C$ и $T_3 = 55^\circ C$. На температурама испод критичне, на неком притиску p_{TG} долази до фазног прелаза и на притисцима $p > p_{TG}$, постоји и течна фаза која се групише у доњем делу система. При довољно високим притисцима сва количина гаса је претворена у течност. Подаци неопходни за обраду и добијање резултата у овом задатку су:

На $T_1 = 30^\circ C$ и притиску $p > p_{TG}$ измерене су запремине течне и гасне фазе заједно (V) и само гасне фазе (V_G), а резултати мерења су дати у табели:

V [ml]	0,90	0,78	0,70	0,60	0,54	0,48	0,40
V_G [ml]	0,84	0,70	0,58	0,46	0,38	0,30	0,20

Грешка појединачног мерења запремине је $\Delta V = 0{,}02\,\mathrm{ml}$, док је грешка мерења температуре занемарљива.

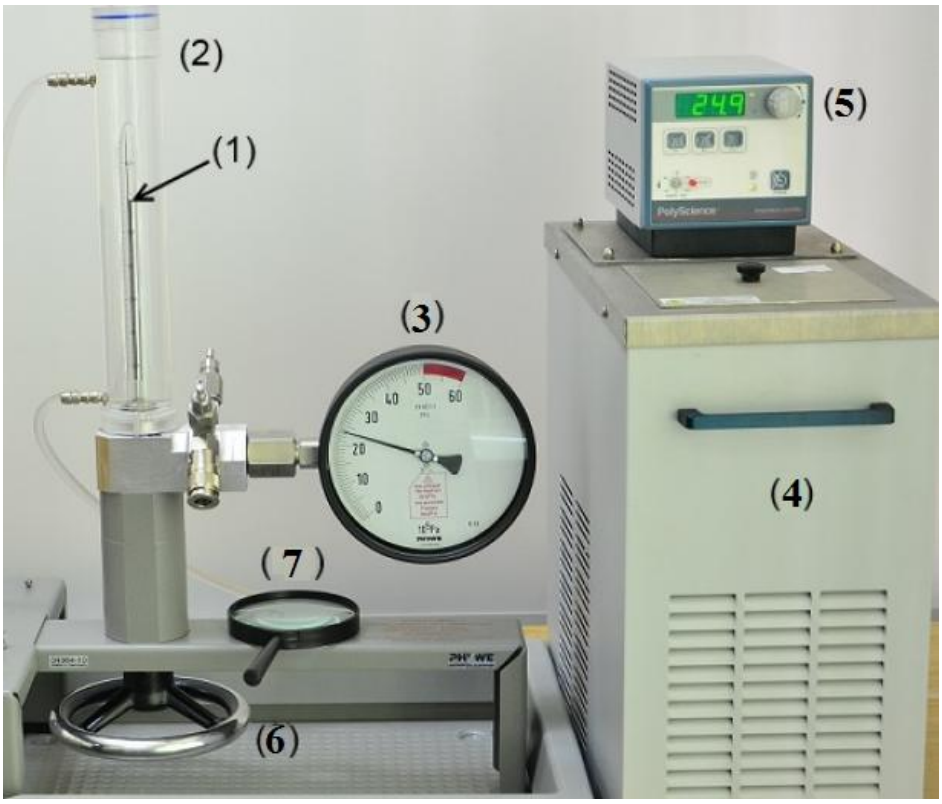
График $p = f(\frac{1}{V})$ за изнадкритичну изотерму ($T_3 = 55^\circ\mathrm{C}$) дат је на слици 2. Бројна вредност коефицијента правца (са грешком) најбоље праве која може да се провуче кроз експерименталне тачке у области у којој је притисак p линеарна функција *1/V* износи: $k_1 = (39{,}9 \pm 0{,}5)\mathrm{bar}\cdot\mathrm{ml}$.



Сл.2

а) Одредити количину гаса, $n(SF_6)$, у експерименту.

б)У области фазног прелаза, на поткритичној температури ($T_1 = 30^\circ\mathrm{C}$), нацртати график зависности запремине система V (гас + течност) од запремине гаса V_G. Експерименталне тачке би требало да леже на правој $V = nV_{\mathrm{mT}} + (1 - \frac{V_{\mathrm{mT}}}{V_{\mathrm{mG}}})V_{\mathrm{G}}$. Одредити моларну запремину течне фазе (V_{mT}) и моларну запремину гасне фазе ($V_{m\mathrm{G}}$). **[20п]**



Сл.3

Експериментална поставка за проучавање реалних гасова (слика 3):

1) стаклена капилара са гасом, 2) стаклена цев за термостатирање гаса, 3) мерач притиска, 4) циркулациони термостат, 5) потенциометар за задавање температуре, 6) точак за регулацију притиска у цевчици са гасом, 7) лупа за прецизно очитавање скале.

Константе: $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $R = 8{,}31\,\mathrm{J/mol\,K}$, $\mathrm{T_0} = -273{,}15\,^\circ\mathrm{C}$ и $1\mathrm{bar} = 100000\mathrm{Pa}$.

Задатке (1,2,4,5) припремили: Нора Тркља, Физички факултет, Београд и Петар Бокан, Институт за физику, Београд и задатак (3): Дејан Симић, Институт за физику, Београд

Рецензент: (1,2,5) Владимир Чубровић, Физички факултет, Београд; (3) Петар Бокан, Институт за физику, Београд и Нора Тркља, Физички факултет, Београд; (4) Владимир Марковић, ПМФ Крагујевац

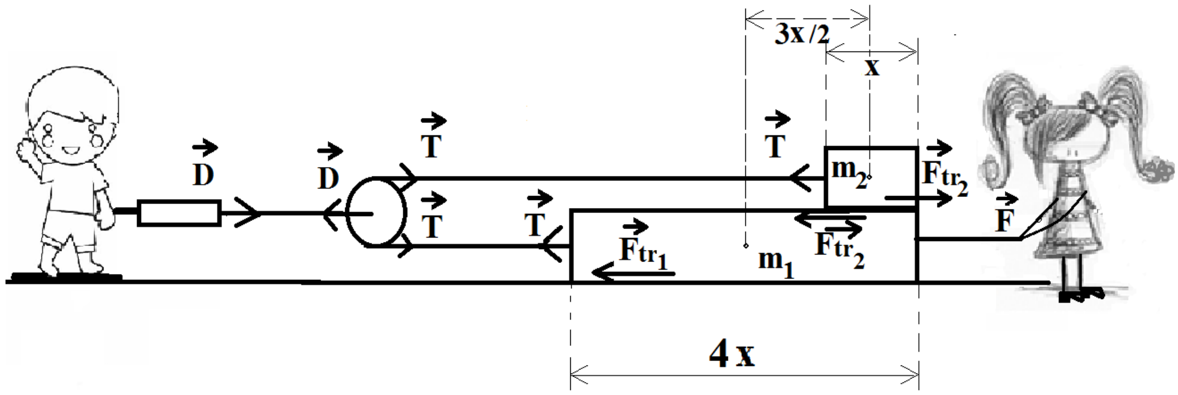
Председник комисије: Проф. др Мићо Митровић, Физички факултет, Београд

Свим такмичарима желимо успешан рад!

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2014/2015. ГОДИНЕ.

II **РАЗРЕД**	**Друштво физичара Србије** **Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије** **РЕШЕЊА**	**РЕПУБЛИЧКИ НИВО** 25-26.4.2015.

1. На слици Р.1. приказане су силе које утичу на кретање тела у систему.

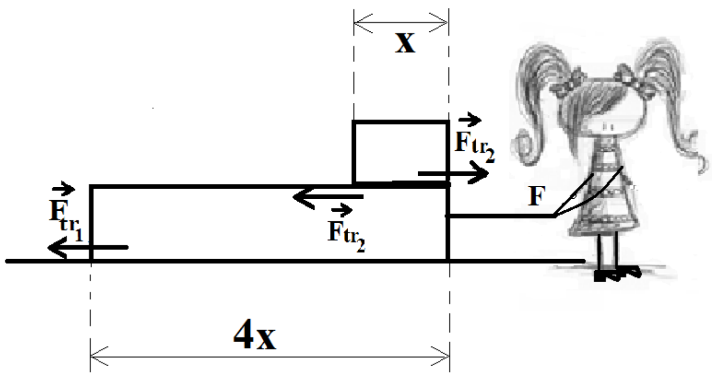


Сл. Р.1.

Како је маса котура занемарљива, следи да је $D = 2T$ **[1п]**. За кретање доњег тела важи: $3ma = F\text{-}T\text{-}F_{tr1} - F_{tr2} = F - \dfrac{D}{2} - 4\mu mg - \mu mg$ **[2п]**, док за кретање горњег тела важи $ma = T - F_{tr2} = \dfrac{D}{2} - \mu mg$ **[2п]**. Дељењем ове две једначине добија се: $F = 2D + 2\mu mg = 19{,}9\mathrm{N}$ **[2п+1п]**.

Горње тело креће се убрзањем $2a$ у односу на доње тело **[1п]**. Тражено време је $t = \sqrt{\dfrac{3x}{2a}} = \sqrt{\dfrac{3mx}{D - 2\mu mg}} \approx 0{,}86\,\mathrm{s}$ **[1п+1п]**

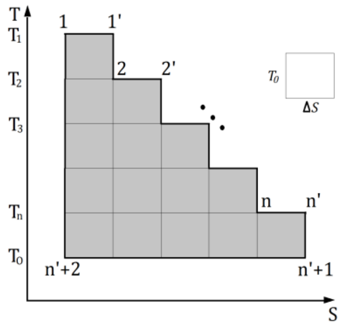
б) Услов да се оба тела крећу истим убрзањем је $F \le 8\mu mg \approx 15{,}7\mathrm{N}$, што је мање од силе $F = 19{,}9\mathrm{N}$ из чега се закључује да горње тело клизи по доњем. (Сл. Р.2)



Сл. Р.2.

Важе једначине: $ma_2 = F_{tr2} = \mu mg$ **[1п]** и $3ma_1 = F\text{-}F_{tr1} - F_{tr2} = F - 4\mu mg - \mu mg$ **[2п]**. Убрзања тела у односу на подлогу су $a_2 = \mu g$ **[1п]** и $a_1 = \dfrac{F - 5\mu mg}{3m}$ **[1п]**. Убрзање горњег тела у односу на доње је $a_R = a_1 - a_2 = \dfrac{F - 8\mu mg}{3m}$ **[2п]** , па је тражено време $t = \sqrt{\dfrac{3x}{a_R}} = \sqrt{\dfrac{9mx}{F - 8\mu mg}} \approx 1{,}5s$ **[1п+1п]**

2. При изотермском процесу промена унутрашње енергије једнака је нули, па важи $A = \Delta Q = nRT\ln\left(V_f / V_i\right)$ **[2п]**. Промена ентропије може се изразити као $\Delta S = \Delta Q / T$ **[1п]**, а како је при сваком изотермском ширењу однос почетне и крајње запремине константан, следи да је промена ентропије иста при сваком изотермском ширењу, $\Delta S = const$ **[2п]**. На основу овога, на слици Р.3. је приказан TS дијаграм циклуса **[3п]**, где је најнижа температура коју гас достиже у току циклуса заправо температура на којој се систем налази при изотермском сабијању, а означена је са T_0 **[1п]**. Коефицијент корисног дејства је $\eta = \dfrac{A}{Q_{\text{primljeno}}}$ **[1п]**. Рад који систем изврши, A, једнак је површини која је осенчена на TS дијаграму: $A = (n + n - 1 + ... + 2 + 1)T_0\Delta S = \dfrac{(n+1)n}{2}T_0\Delta S$ **[5п+1п]**. Количина топлоте коју систем прими у току циклуса, $Q_{\text{primljeno}}$, једнака је површини коју горња ивица осенчене фигуре у TS дијаграму $(1 - 1' - ... - n - n')$ заклапа са S-осом: $Q_{\text{primljeno}} = \dfrac{(n+1)n}{2}T_0\Delta S + nT_0\Delta S$ **[3п]**. Степен корисног дејства је $\eta = \dfrac{n+1}{n+3}$ **[1п]**.



Сл. Р.3.

<u>Решење на други начин</u>

Циклус је обележен на следећи начин: $1 \to 1' \to 2 \to 2' \to ... \to n \to n' \to n'' \to n''' \to 1$. Промена унутрашње енергије при изотермском процесу једнака је нули, $\Delta U = 0$, па је $\Delta Q = A = \dfrac{m}{M}RT\ln\dfrac{V_f}{V_i}$ **[1п]**. Промена ентропије може се изразити као $\Delta S = \Delta Q / T$ **[1п]**, а како је при сваком изотермском ширењу однос почетне и крајње запремине константан $\left(\dfrac{V_i'}{V_i} = x = const; i = 1,...,n\right)$, следи да је промена ентропије иста при сваком изотермском ширењу, $\Delta S = const$ **[2п]**. На основу овога, на слици је приказан TS дијаграм циклуса **[3п]**, где је најнижа температура коју гас достиже у току циклуса заправо температура на којој се систем налази при изотермском сабијању, а означена је са T_0 **[1п]**. Коефицијент корисног дејства је $\eta = \dfrac{A}{Q_{\text{primljeno}}}$ **[1п]**. При адијабатском процесу важи да је $\Delta Q = 0$, односно $A = -\Delta U = -\dfrac{m}{M}C_V\Delta T$ **[1п]**. Укупан рад извршен током цилуса је:

$$A = A_{11'} + A_{1'2} + A_{22'} + ... + A_{nn'} + A_{n'n''} + A_{n''n'''} + A_{n'''1} =$$

$$= \frac{m}{M}R\ln x(T_1 + T_2 + ... + T_n) + \frac{m}{M}R\ln\frac{V_{n'''}}{V_{n''}}T_0 + \frac{m}{M}C_V((T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + ... + (T_n - T_0)) - \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_0)$$

[3п].

Из услова да је однос крајње и почетне запремине једнак при сваком изотермском ширењу и услова да је при адијабатском процесу $TV^{\gamma-1} = const$, односно $V_{\mathrm{f}} = \left(\dfrac{T_{\mathrm{i}}}{\mathrm{T_f}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_{\mathrm{i}}$ добија се да је **[1+1п]**:

$$V_{n''} = x^{n}\left(\frac{2T_0}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\frac{3T_0}{2T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\frac{4T_0}{3T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{(n+1)T_0}{nT_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 = x^{n}(n+1)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 \text{ и } V_{n'''} = \left(\frac{(n+1)T_0}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 = (n+1)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 \cdot$$

Тада је рад: $A = \dfrac{m}{M} R \ln x(n+1+n+\ldots+2)T_0 - n\dfrac{m}{M} R \ln xT_0 = \dfrac{m}{M} R \ln xT_0 \dfrac{(n+1)n}{2}$ **[1п]**.

Количина топлоте коју систем прими једнака је:

$Q_{\mathrm{primljeno}} = \dfrac{m}{M} R \ln x(n+1+n+\ldots+2)T_0 = \dfrac{m}{M} R \ln xT_0 \dfrac{(n+3)n}{2}$ **[3п]**. Степен корисног дејства је $\eta = \dfrac{n+1}{n+3}$ **[1п]**.

3. За N=1 електрично поље је **E**= $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$**j** **[1п]**. У случају N=2 електрично поље је је **E**= $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2q}{r^2}$**j** **[1п]**. Посматрајмо посебно случај парног и непарног $\mathrm{N} \geq 3$. У случају парног $\mathrm{N} \geq 4$ може се уочити да је могуће заротирати систем наелектрисања за $\dfrac{4\pi}{N}$, а да систем остане непромењен, самим тим поље се не мења **[2п]**. Ако заротирамо систем за неки угао, за исти угао ће се заротирати и електрично поље **[2п]**. Пошто је за $\mathrm{N} \geq 4$ угао $\dfrac{4\pi}{N}$ мањи од 2π, није могуће да се електрично поље пре и после ротирања система поклапају, па мора бити **E=0** **[2п]**. Код непарног $\mathrm{N} \geq 3$ имамо једно позитивно наелектрисање више, које се поставља у N-том кораку. Ако се систем заротира за угао $\dfrac{2\pi}{N}$, позитивна наелектрисања ће доћи на положај негативних и обратно, осим за наелектрисање на y - оси на чије место је опет дошло позитивно. Ако саберемо неротиран и заротиран систем сва наелектрисања се пониште, осим оних на y - оси која се саберу **[1п]**. Резултујуће поље је збир поља пре и после ротације $\mathbf{E}_R = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p$ **[1п]** тј. $\mathbf{E} + \mathbf{E}_p = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2q}{r^2}\mathbf{j}$ **[1п]**. $2\mathrm{E}\cos\dfrac{\pi}{N} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2q}{r^2}$ **[1п]** одакле се добија интензитет електричног поља $\mathrm{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2\cos\frac{\pi}{\mathrm{N}}}$ **[1п]**. Одавде следи $\mathrm{E}_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q\sin\frac{\pi}{N}}{r^2\cos\frac{\pi}{\mathrm{N}}}$ **[1п]** $\mathrm{E}_y = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$ **[1п]**.

<u>Решење на други начин</u>

Електрично поље у центру кружнице је збир поља сваког наелектрисања **E**= $\sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}_n$ **[1п]**. Поље n-тог наелектрисања је $\mathbf{E}_n = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q(-1)^{n-1}}{r^2}\left(\sin\dfrac{2\pi(n-1)}{N}\mathbf{i} + \cos\dfrac{2\pi(n-1)}{N}\mathbf{j}\right)$ **[2п]**, па је укупно поље **E**= $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{q(-1)^{n-1}}{r^2}\left(\sin\dfrac{2\pi(n-1)}{N}\mathbf{i} + \cos\dfrac{2\pi(n-1)}{N}\mathbf{j}\right)$ **[2п]**. Уколико се дати израз помножи и подели са $\cos\dfrac{\pi}{N}$, може се видети да се сви чланови у имениоцу, осим првог и последњег, скрате. Као коначни резултат добија се:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}(\sin\frac{\pi}{N} + (-1)^{N-1}\sin\frac{\pi}{N})/2\cos\frac{\pi}{N},$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}/(\cos\frac{\pi}{N} + (-1)^{N-1}\cos\frac{\pi}{N})/2\cos\frac{\pi}{N}$$ **[7п]**.

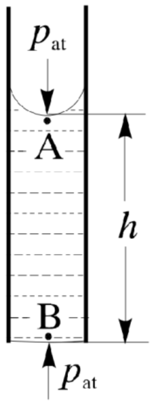
За парно N, осим за N=2, укупно поље је нула **[1п]**. За N=2, $\cos\frac{\pi}{N}$ је нула, па је овај случај потребно издвојити: $E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r^2}$, $E_x = 0$ **[1п]**. У случају непарног N укупно поље је:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{\cos\frac{\pi}{N}}, \quad E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$ **[1п]**.

4. а) За моларне уделе течности A (x_A) и B (x_B) у смеши важи: $x_A + x_B = 1$ **[2п]** док у површинском слоју за моларне уделе течности A (y_A) и B (y_B) важи: $y_A + y_B = 1$ **[2п]**.

Из услова задатка следи: $S = \frac{y_A/(1-y_A)}{x_A/(1-x_A)}$. Искористивши релацију $\gamma = \gamma_A y_A + \gamma_B y_B$, добија се $\gamma = \frac{\gamma_B + x_A(S\gamma_A - \gamma_B)}{1 + x_A(S-1)}$ **[3п].**

б) Када се капиларна цев усправи, пошто вода и алкохол потпуно квасе зидове цеви, горњи менискус има облик сфере полупречника r (слика). Додатни притисак испод овог менискуса износи $\Delta p = \frac{2\gamma}{r}$ **[2п]**.



Притисак у тачки A је мањи од атмосферског за додатни притисак Δp, тј. $p_A = p_a - \frac{2\gamma}{r}$ **[1п],** док је притисак у тачки B већи од притиска у тачки A за хидростатички притисак: $p_B = p_a - \frac{2\gamma}{r} + \rho g h$ **[1п]**.

Раствор почиње истицати ако је овај притисак већи од притиска испод доњег краја течности (атмосферског притиска), односно ако је: $p_B \rangle p_a$ **[1п]**. Тражена висина стуба мора бити: $h \rangle \frac{2\gamma}{\rho g r} = \frac{2(\gamma_B + x_A(S\gamma_A - \gamma_B))}{\rho g r(1 + x_A(S-1))}$ **[2п]**.

в) Бернулијева једначина примењена на пресеку цеви непосредно испод клипа и на отвору гласи:

$\frac{\rho v_1^2}{2}+\rho gh+\frac{Mg}{S}+p_a=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_a$ **[1п]**.

Према једначини континуитета је $Sv_1 = sv_2$. Суд је широк, а отвор мали $(S \gg s)$, па је $v_1 \approx 0$.

Брзина истицања течности износи: $v_2=\sqrt{2(gh+\frac{Mg}{\rho S})}$ **[2п]** .

Према условима задатка $Mg \gg mg=\rho Sgh$, па је брзина истицања течности: $v_2 \approx \sqrt{2\frac{Mg}{\rho S}}$ **[1п]** .

За време Δt из суда истекне маса раствора $\Delta m=\rho s v_2 \Delta t$, па је сила реакције млаза течности, на основу II Њутновог закона: $F_r=\frac{\Delta p}{\Delta t}=v_2\frac{\Delta m}{\Delta t}=\rho v_2^2 s=\frac{2Mgs}{S}$ **[3п]**.

По услову задатка: $F_{tr}=kv$. Од почетка кретања ова сила расте од нулте вредности све док по интензитету не постане једнака сили реакције млаза. Сила трења је супротног смера од силе реакције млаза. Када се сила реакције млаза по интензитету изједначи са силом трења $F_r=F_{tr}$, резултанта свих сила постаје једнака нули и после тога се суд креће равномерно **[1п]**, брзином: $v=\frac{F_r}{k}=\frac{2Mgs}{kS}$ **[3п]**.

5. Анализом графика који је дат у задатку и разматрањем физичког смисла коефицијента правца праве закључује се следеће:
Дат график представља зависност притиска *p* од *1/V* на изнадкритичној температури. При ниским притисцима и високим температурама реални гас понаша се слично идеалном гасу и може се користити једначина стања идеалног гаса за његов опис. На графику се види да је у првом делу притисак линеарна функција од *1/V* док за други део то не важи. У првом делу се може применити једначина стања идеалног гаса: $pV=nRT$, тј. $p=nRT\frac{1}{V}$ и на основу познавања коефицијента правца праве $p=f(\frac{1}{V})$ може се одредити број молова испитиваног гаса.

$n=\frac{k_1}{RT}$, $\quad \Delta n=\frac{\Delta k_1}{k_1}n$ **[1п]**

Са датог графика:
Јединицу датог коефицијента правца, k_1, потребно је ускладити са SI системом јединица:
$k_1=(39{,}9\pm 0{,}5)\mathrm{bar}\cdot\mathrm{ml}=(3{,}99\pm 0{,}05)\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^3$

Рачуном се добија: $n=0{,}00146248\ \mathrm{mol}$, $\Delta n=0{,}0000183\ \mathrm{mol}$, па је коначно:
$n=(0{,}00146\ \pm 0{,}00002\ )\mathrm{mol}$ **[2п]**

Са графика:
Одабране тачке: $A(0{,}25\,\mathrm{ml};0{,}44\,\mathrm{ml})$ и $B(0{,}73\,\mathrm{ml};0{,}81\,\mathrm{ml})$ **[1п]**.

За коефицијент правца добија се: $k=\frac{y_B-y_A}{x_A-x_B}=\frac{(0{,}81-0{,}44)\mathrm{ml}}{(0{,}73-0{,}25)\mathrm{ml}}=0{,}7708$ **[1п]**

Грешка вредности коефицијента правца се може изразити као:
$\Delta k=(\frac{2\Delta x}{|x_B-x_A|}+\frac{2\Delta y}{|y_B-y_A|})\cdot k=0{,}15$

где су $\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A$ и Δy_B апсолутне грешке одређивања координата x_A, x_B, y_A и y_B са графика.

Свака од ових грешака $\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A$ и Δy_B је једнака већој од одговарајућих апсолутних грешака суседних тачака. У овом задатку је: $\Delta V_A = \Delta V_B = \Delta V_{GA} = \Delta V_{GB} = 0{,}02\,\text{ml}$ **[1п]**
Стога имамо: $k = 0{,}8 \pm 0{,}2$ **[1п]**

Одсечак на y-оси очитава се са графика и износи: $a = 0{,}25\,\text{ml}$ **[1п]**
Грешка мерења запремине је $\Delta V = 0{,}02\,\text{ml}$, док је грешка очитавања једнака вредности највеће грешке мерења величине која се наноси на y-осу: $\Delta V = 0{,}02\,\text{ml}$. (Грешка одсечка може се одредити и повлачењем две праве са минималном и максималном вредности за коефицијент правца и посматрањем одступања та два пресека од a (Δn_1 и Δn_2) добија се апсолутна грешка $\Delta n = \dfrac{\Delta n_1 + \Delta n_2}{2}$. Такође, грешка одсечка се може проценити тако што се посматра веће од ова два одступања (Δn_1 и Δn_2) и апсолутна грешка очитавања се нађе тако што се узима корен од збира квадрата већег одступања и квадрата грешке очитавања. Признавати и наведене начине, као и слободну процену грешке која није мања од најмање грешке појединачног мерења.)

$$\Delta a = 0{,}02\,\text{ml}$$

$$a = (0{,}25 \pm 0{,}02)\,\text{ml} \quad \textbf{[1п]}$$

Користећи задату зависност, добијамо: $V = nV_{\text{mT}} + (1 - \dfrac{V_{\text{mT}}}{V_{mG}})V_{\text{G}}$

На основу одсечка добија се $V_{\text{mT}} = \dfrac{a}{n} = \dfrac{0.25}{0.00146} = 170{,}94\,\dfrac{\text{ml}}{\text{mol}}$ **[1п]**,

$$\Delta V_{\text{mT}} = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta n}{n}\right)V_{\text{mT}} = 15{,}81\,\frac{\text{ml}}{\text{mol}} \quad \textbf{[1п]}$$

$$V_{\text{mG}} = \frac{V_{\text{mT}}}{1 - \text{k}} = 745{,}81\,\frac{\text{ml}}{\text{mol}} \quad \textbf{[1п]}$$

$$\Delta V_{\text{mG}} = \left(\frac{\Delta V_{\text{mT}}}{V_{\text{mT}}} + \frac{\Delta k}{(1-k)}\right)V_{\text{mG}} = 547\,\frac{\text{ml}}{\text{mol}} \quad \textbf{[1п]}$$

Коначно, $V_{\text{mT}} = (170 \pm 20)\cdot 10^{-6}\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{mol}}$ **[1п]** и $V_{\text{mG}} = (800 \pm 600)\cdot 10^{-6}\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{mol}}$ **[1п]**

Напомене везано за начин бодовања:
Негативни поени за график, између осталог за:
- Координатне осе треба цртати по ивицама милиметарског папира -0.2
- Без наслова -0.2 (наслов није $y = f(x)$)
- Лоша размера -0.2 (график заузима мање од 1/4 простора папира)
- Осе нису обележене и недостају јединице -0.2
- Унете су мерене бројне вредности на осе -0.2
- Ако 1. и 2. изабрана тачка није између 1. и 2. односно претпоследње и последње експерименталне -0.5
- Изабране тачке нису у мереном опсегу -0.5
- Лоша размера подеока -0.2 (1 mm на милиметарском папиру може да одговара ... 0.05; 0.1; 0.2; 0.4; 0.5; 1; 2; 4; 5; 10 ... јединица величине која се приказује)

Негативни поени за рачун, између осталог за:
- Лоша размера – за коефицијент правца 50% предвиђених бодова
- Ако нису изабране добре тачке са графика – за тражене величине 50% предвиђених бодова

Коришћење експерименталних тачака уместо тачака са графика не доноси поене, осим поена за линеаризацију.

График: [5п]

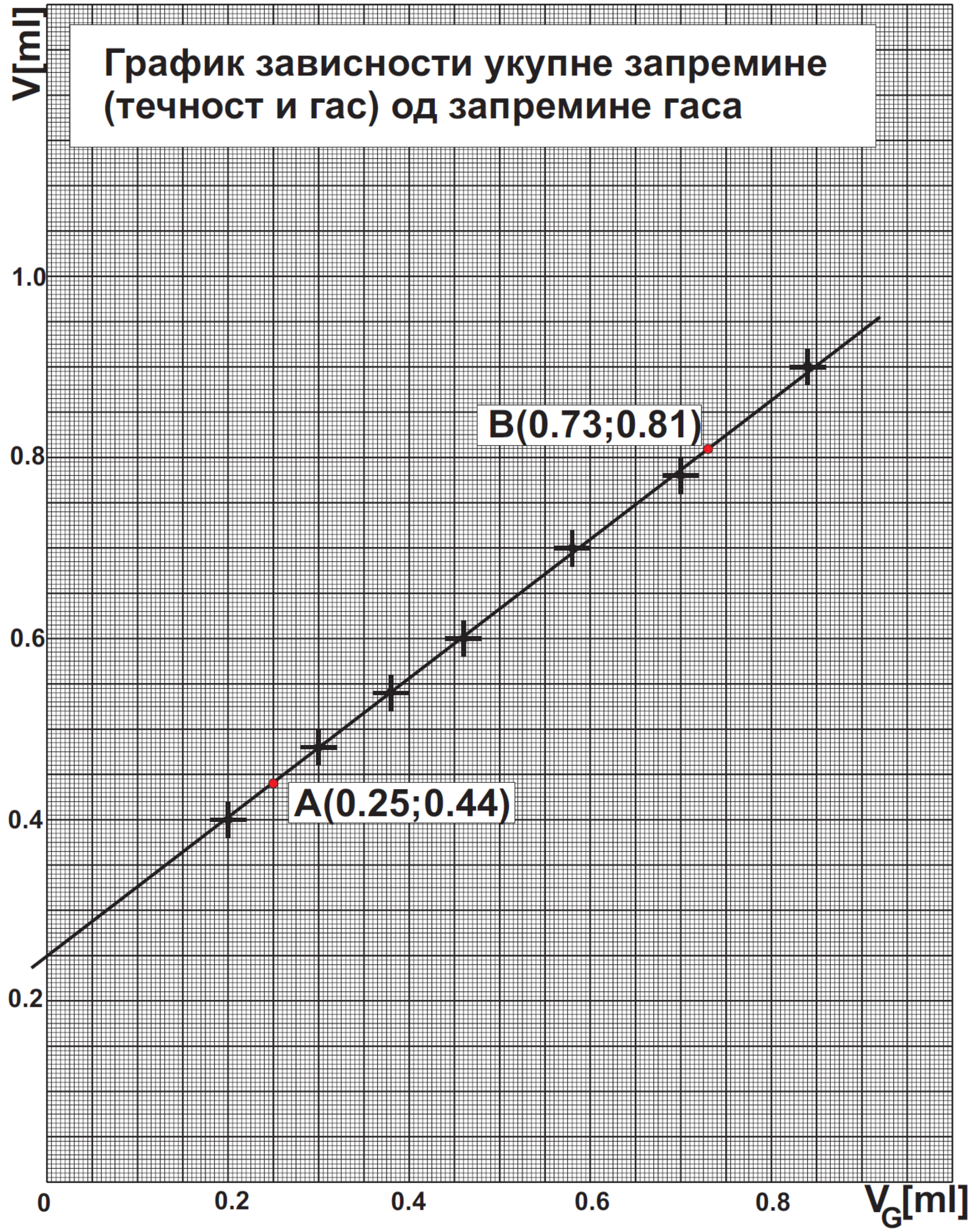


График зависности укупне запремине (течност и гас) од запремине гаса
V[ml]
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
VG[ml]
B(0.73;0.81)
A(0.25;0.44)