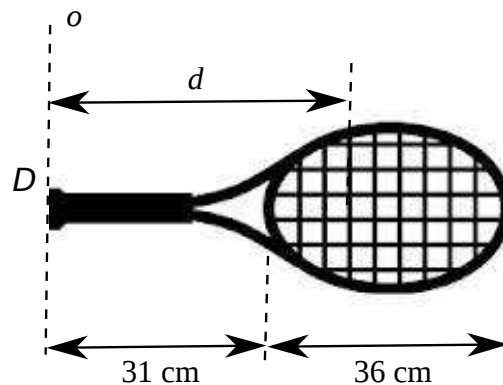




Задатак 1: Тенис (10 поена)

Тенис је спорт који је настао у 19. веку у Енглеској. У тенису играчи користе рекет којим ударају лоптицу са циљем да противник не успе да је врати. Притом се играчи труде или да лоптици саопште што већу брзину или што већу угаону брзину (спин). У првом случају противник нема довољно времена да стигне лоптицу, а у другом случају лоптица незгодно одскаче и противнику је тешко да је контролисано удари рекетом. У овом задатку размотрићемо услове који треба да буду испуњени да би тенисер лоптици саопштио велику брзину или велики спин.

Маса тениске лоптице је $m = 57 \text{ g}$, а момент инерције рекета у односу на осу o која се налази у равни рекета и пролази кроз крајњу тачку D дршке рекета (слика 1) је $I = 0,057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Сматрати да сви судари рекета и лоптице у овом задатку трају кратко, тако да је дејство силе гравитације током судара занемарљиво.



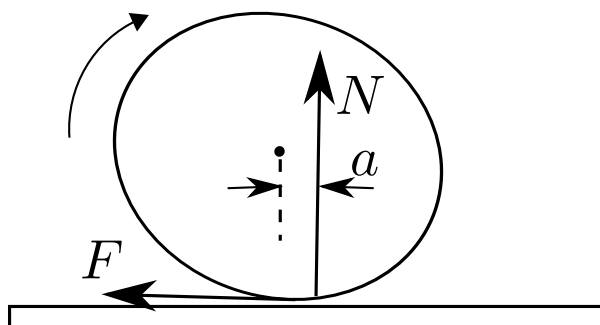
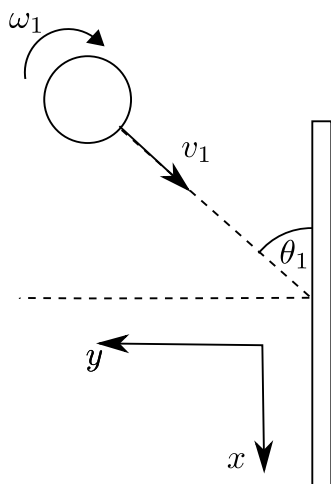
Слика 1: Шематски приказ рекета

- (а) Најпре ћемо размотрити како приликом сервиса тенисер треба да удари лоптицу да јој саопшти што већу брзину. Тенисер држи рекет у тачки D , тако да рекет може искључиво да врши ротацију око осе o . Сматрати да пре судара са лоптицом рекет ротира око осе o угаоном брзином ω , као и да лоптица пре судара са рекетом мирује и нема спин. Рекет удара лоптицу тачком на оси рекета која се налази на растојању d од тачке D (слика 1). Изразити брзину лоптице v након сервиса у зависности од ω , d , I и m . На основу тог израза и димензија и облика рекета одредити којим делом рекета треба да се удари лоптица тако да добије највећу могућу брзину, као и при ударцу којим делом рекета је та брзина најмања. У овом делу задатка сматрати да нема губитака енергије, односно да се почетна кинетичка енергија рекета искључиво размењује између рекета и лоптице. **(1,5 поена)**
- (б) Блок-ритерн је ударац у коме након противничког сервиса тенисер само постави рекет и врати лоптицу. Сматрати да лоптица која нема спин удара у рекет под правим углом у тачки на оси рекета која се налази на растојању d од тачке D (слика 1). Тенисер притом држи рекет у тачки D , тако да рекет може искључиво да врши ротацију око осе o . Коефицијент реституције e се у овом случају дефинише као однос интензитета брзине лоптице после и пре судара. Изразити e у функцији I , m



и d . На основу тог израза и димензија и облика рекета одредити којим делом рекета треба да се удари лоптица тако да добије највећу могућу брзину, као и при ударцу којим делом рекета је та брзина најмања. У овом делу задатка сматрати да нема губитака енергије, односно да се почетна кинетичка енергија лоптице искључиво размењује између рекета и лоптице. (1,5 поена)

Надаље ћемо у овом задатку разматрати судар лоптице са рекетом у случају кад лоптица има неки почетни спин (слика 2), са циљем да разумемо колики ће бити спин лоптице после судара. Кретање рекета пре судара је чисто транслационо. Једноставности ради, сматраћемо да судар лоптице са рекетом не доводи до ротационог кретања рекета, односно да лоптица удара у центар масе рекета. Појаву ћемо посматрати у инерцијалном референтном систему S у коме пре судара рекет мирује. Претпоставити такође да током судара лоптице и рекета рука тенисера не делује на рекет.



Слика 2: Судар лоптица-рекет

Слика 3: Котрљање без клизања лоптице по рекету

- (в) У зависности од параметара система, приликом судара лоптице са рекетом може доћи и до проклизавања лоптице по рекету и до котрљања (без проклизавања) лоптице по рекету. У овом делу задатка ћемо разматрати котрљање лоптице по рекету. Приликом котрљања се јавља сила трења котрљања која је по интензитету једнака $F = \mu_R N$, где је μ_R коефицијент трења котрљања, а N сила реакције рекета. Притом због деформације рекета и лоптице сила реакције рекета није усмерена ка центру лоптице, већ има момент $N \cdot a$ у односу на центар лоптице (слика 3). При ротацији у смеру назначеном на слици 3, сила F има смер назначен на истој слици, а сматрати да је њен момент у односу на центар лоптице по интензитету једнак $F \cdot R$, где је R полупречник лоптице. Изразити a у функцији R , μ_R , масе лоптице m и масе рекета M . Одредити бројну вредност a ако је $R = 32,5 \text{ mm}$, $\mu_R = 0,05$, $m = 57 \text{ g}$ и $M = 180 \text{ g}$. Момент инерције лоптице у односу на осу која пролази кроз центар лоптице је $I_L = \frac{2}{3}mR^2$. (2 поена)



7. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2012/2013. ГОДИНА



Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ
НОВИ САД
18-19. 5. 2013.

- (г) Судар лоптице и рекета у реалности није потпуно еластичан, а део енергије се преноси на вибрацију рекета и унутрашњу енергију лоптице. Утицај губитака енергије се урачунава кроз коефицијент реституције који се у овом случају дефинише као $e = \frac{v_{2y} - V_{2y}}{-v_{1y}}$, где v_{1y} и v_{2y} представљају y -компоненте брзине лоптице пре и после судара, V_{2y} је y -компонента брзине рекета после судара (све ове брзине су дефинисане у систему S). Координатни систем је назначен на слици 2. Привидни коефицијент реституције се дефинише као $e_P = \frac{v_{2y}}{-v_{1y}}$. Изразити e_P у функцији e , m и M . Одредити бројну вредност e_P ако је $e = 0,9$, док M и m имају исте бројне вредности као у делу задатка (в). (1 поен)
- (д) Лоптица пада на рекет под упадним углом од $\theta_1 = 45^\circ$ брзином $v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (у референтном систему S , слика 2). Угаона брзина лоптице пре судара је $\omega_1 = 300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ и усмерена је као на слици 2. Занемарити момент силе N током клизања лоптице по рекету и сматрати да током котрљања лоптице по рекету силе делују на начин који је описан у делу задатка под (в). Одредити како угаона брзина лоптице након судара ω_2 зависи од коефицијента трења клизања μ_S између рекета и лоптице. Нацртати и одговарајући график зависности ω_2 од μ_S . Користити бројне вредности за m , M , R , μ_R , e_P и a из претходних делова задатка. Уколико нисте урадили делове задатка под (в) и (г), можете користити $e_P = 0,40$ и $a = 3,0 \text{ mm}$. За које μ_S ће лоптица при судару променити смер спина, а да притом интензитет угаоне брзине буде максималан? (4 поена)

Задатак припремио: др Ненад Вукмировић, Институт за физику, Београд

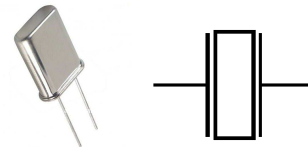
Рецензенти: Вељко Јанковић, Физички факултет; др Дарко Танасковић, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења за средње школе: др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд



Задатак 2: Пиезоелектрични осцилатор (10 поена)

Пиезоелектрични ефекат је појава стварања електричног напона на крајевима неких врста кристала услед механичког притиска. Ефекат је двосмеран, односно ако се на пиезоелектрични кристал доведе напон, доћи ће до његове механичке деформације. Постојање овог ефекта открили су браћа Жак и Пјер Кири 1880. године, а типични пиезоелектрици су кварц, топаз, Рошелова со, али и неки органски макромолекули (дентин, ДНК).

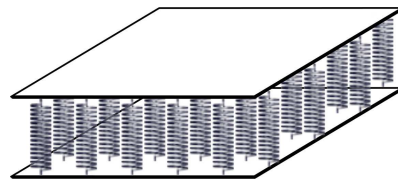


Слика 1: Кварцни осцилатор и његов електрични симбол

Данас су у широкој употреби пиезо-уређаји који претварају механичку енергију у електричну и обратно. Један од најважнијих уређаја овог типа је кварцни осцилатор (слика 1), који користи механичку резонанцу вибрирајућег пиезоелектричног кристала за стварање електричног сигнала веома прецизне фреквенције, што се користи код кварцних ручних сатова, дигиталних интегрисаних кола у рачунарима, мобилним телефонима, као и код радио-одашиљача и пријемника.

Део А: Прост модел механичко-електричног осцилатора (4 поена)

У овом делу задатка ћемо разматрати поједностављен модел пиезоелектричног осцилатора. Две металне плоче, свака површине S и масе m , постављене су паралелно једна изнад друге у пољу Земљине теже (слика 2). Кристал који се налази између плоча пиезоелектричног осцилатора, моделиран је помоћу n опруга направљених од изолатора. Константа еластичности сваке опруге је k . Доња плоча је учвршћена за хоризонталну подлогу, а равнотежно растојање између плоча је X_0 .



Слика 2: Једноставан модел пиезоелектричног осцилатора

- А.1. Плоче су затим прикључене на извор константног напона U и чине кондензатор. Електростатичка сила између плоча изазива помак горње плоче, па је равнотежно растојање између плоча сада X_1 . Изведите изразе за интензитет електричне привлачне силе F_q и напон U на плочама у зависности од X_0 , X_1 , S , k и n .
- А.2. Након тога, систем доводимо у стање хармонијског осциловања померањем горње плоче за мало растојање x у односу на равнотежан положај, при константном напону U . Изведите израз за убрзање горње плоче $\ddot{x}$ у зависности од X_0 , X_1 , k , n , m и x , као и израз за угаону фреквенцију малих вертикалних осцилација горње плоче ω_0 у зависности од X_0 , X_1 , k , n и m .
- А.3. Додајмо у коло калем индуктивности L редно повезан са извором напона и кондензатором. У почетном тренутку кондензатор је напуњен и растојање између његових плоча је X_1 , а онда је његова горња плоча изведена из равнотежног положаја за мало растојање x . Овај систем са два степена слободе се описује помоћу помераја горње плоче x и промене количине наелектрисања q на кондензатору. Изведите изразе за $\ddot{x}$ и $\ddot{q}$ у зависности од X_1 , S , k , n , m , L , U , x и q .

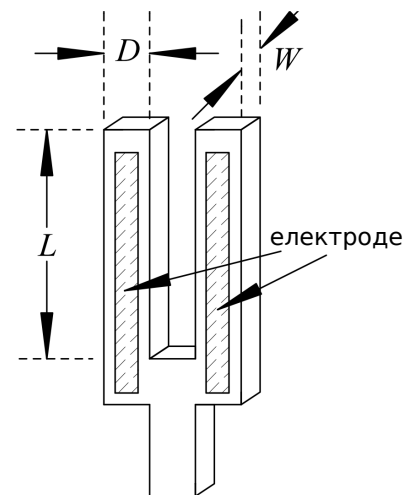


А.4. Пошто су осцилације система из претходног дела задатка хармонијске, може се претпоставити да важи $\ddot{x} = -\omega^2 x$ и $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Изведите израз за угаону фреквенцију система ω у зависности од X_0 , X_1 , S , k , n , t и L . Коју релацију морају да задовољавају величине X_0 и X_1 да би систем хармонијски осциловао?

Део Б: Механички модел кварцне виљушке

(1,5 поена)

У овом делу задатка ћемо разматрати кварцну виљушку која представља пример реалног пиезоелектричног осцилатора. Кварцне виљушке се најчешће користе као фреквентни стандарди у сатовима, а механички се могу посматрати као хармонијски осцилатори у отпорној средини са малим коефицијентом пригушења $b = 7,83 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$. Кварцна виљушка је облика звучне виљушке, али је много мања и ради на ултразвучним фреквенцијама (слика 3). Можемо је посматрати и као електрични уређај са два улаза, при чему се на сваком улазу налази танак филм који има улогу електроде и служи за повезивање са остатком електричног кола, односно механизма. Механичке осцилације виљушке стварају наелектрисање на електродама. Обратан ефекат се добија ако се на електроде прикључи напон који у зависности од поларитета привлачи или одбија делове кварцне виљушке на којима су електроде.



Слика 3: Кварцна виљушка

За мале амплитуде осциловања, кретања свих делова виљушке међусобно су пропорционална, тако да се тродимензионално кретање виљушке може редуковати на само једну координату. Овде ћемо изабрати координату x која описује положај једног врха виљушке дуж линије која спаја оба врха (при чему је положај другог врха $-x$). Тада је једначина осциловања кварцне виљушке:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \varphi).$$

Принудна сила постоји због прикљученог спољашњег наизменичног напона између електрода. Ефективна маса зупца кварцне виљушке је $m = 0,243 \rho_q V$, где је густина кварца $\rho_q = 2659 \text{ kg/m}^3$, а V је запремина једног зупца виљушке. Ефективни коефицијент еластичности је $k = \frac{EWD^3}{4L^3}$, где је Јангов моду еластичности кварца $E = 7,87 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, а $W = 0,127 \text{ mm}$, $D = 0,325 \text{ mm}$ и $L = 2,809 \text{ mm}$ су димензије зупца виљушке.

Б.1. Написати једначину принудних пригушених осцилација кварцне виљушке у зависности од m , k , x , b и принудне силе облика $F = F_0 \cos(\Omega t + \varphi)$.

Б.2. Израчунати вредности коефицијената γ и Ω_0 .

Б.3. Принудне осцилације кварцне виљушке су описане изразом $x = x_0 \cos(\Omega t + \phi)$. Нађите изразе за амплитуду x_0 и разлику фаза принудних осцилација и принудне силе $\delta\varphi = \phi - \varphi$ у зависности од f_0 , γ , Ω и Ω_0 .



Део В: Електрични модел кварцне виљушке

(3 поена)

Наелектрисање на електродама q се јавља због пиезоелектричних особина кварца и пропорционално је померају врха зупца виљушке x , при чему је константа пропорционалности $\eta = 8,13 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$. Ова константа зависи од геометрије виљушке, начина резања кристала у односу на осе кристалографских равни кварца и облика и положаја електрода. Користећи везу наелектрисања q и помераја x , механички модел кварцне виљушке се може приказати еквивалентним електричним колом које се састоји од отпорника отпорности R_e , завојнице индуктивности L_e и кондензатора капацитета C_e .

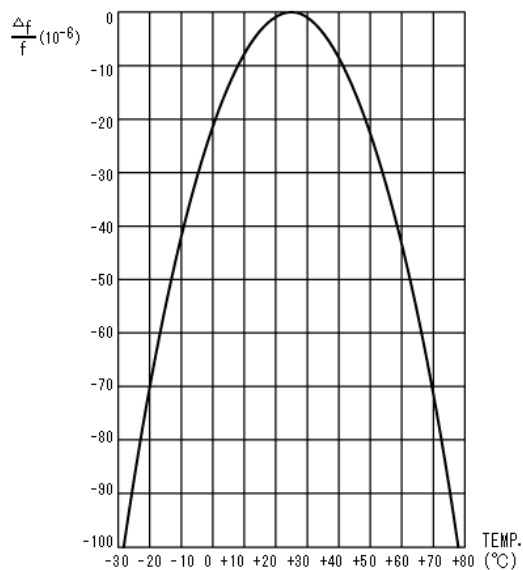
- В.1. Имајући у виду основну особину пиезоелектрика да претвара механичку снагу у електричну и обратно, нађите везу између амлитуде прикљученог напона и амплитуде принудне силе која делује на зупце виљушке.
- В.2. Нађите једначину осциловања наелектрисања на електродама.
- В.3. Нађите изразе за еквивалентни отпор R_e , индуктивност L_e и капацитет C_e у зависности од механичких карактеристика кварцне виљушке и константе η и израчунајте њихове вредности.
- В.4. Пошто се механичке особине кварцне виљушке могу описати еквивалентним електричним колом, то се и читав модел кварцне виљушке може заменити еквивалентним електричним колом. Нацртајте ово електрично коло.

Део Г: Утицај температуре на кварцну виљушку

(1,5 поен)

Експериментално је утврђено да се фреквенција кварцне виљушке мења са температуром и то по параболичном закону. На слици 4 је приказан график те зависности, а у експерименту је коришћена кристална кварцна виљушка фреквенције $f = 2^{15} \text{ Hz}$.

- Г.1. На којој температури часовник са оваквом кварцном виљушком показује тачно време?
- Г.2. Да ли ће овај часовник каснити или журити ако се користи при нижим или вишим температурама?
- Г.3. Нађите емпиријску формулу зависности фреквенције кварцне виљушке од температуре.
- Г.4. За колико ће се разликовати време које показују идентични кварцни часовници аутора овог задатка и рецензента после годину дана коришћења, ако је просечна температура просторије у којој ради аутор 25°C , а просечна температура просторије у којој ради рецензент 10°C ?



Слика 4: График зависности релативне промене фреквенције од температуре



7. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2012/2013. ГОДИНА



Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ

НОВИ САД
18-19.5.2013.

Задатак 3: Балон за разгледање (10 поена)

Ваздушни балон, отворен с доње стране, има константну запремину $V = 1,1 \text{ m}^3$. Материјал од кога је направљен занемарљиве је запремине а његова маса је $m_0 = 0,187 \text{ kg}$. Балон се налази у ваздуху температуре $t_1 = 20^\circ \text{C}$ и нормалног атмосферског притиска $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Густина ваздуха врло близу земље при овим условима је $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$.

а) До које температуре t_2 се мора загрејати ваздух у балону да би он лебдео? (2п)

б) У балону који је конопцем привезан за земљу загрева се ваздух до температуре $t_3 = 110^\circ \text{C}$. Израчунати силу затезања ужета којим је балон привезан за Земљу. Занемарити отпор ваздуха. (2п)

в) Претпоставимо да је отвор балона на дну затворен (густина ваздуха у балону је тада константна). Балон се подиже при константној температури ваздуха у њему $t_3 = 110^\circ \text{C}$ у изотермској атмосфери при температури 20°C и притиску на површини Земље $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. До које висине h ће се подићи балон при овим условима? (2п)

г) Балон који се налази на висини h (питање в) помери се из свог равнотежног положаја за висину $\Delta h = 10 \text{ m}$ и затим поново ослободи. Показати да је кретање балона осцилаторно и наћи период осцилација. (4п)

Узети да је $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

* * * * *

ПОМОЋ

Барометарска формула је $\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g x}{p_0}}$, где су ρ_0 и p_0 вредности густине и притиска за $x = 0$.

За функцију e^{-ax} , где је a константа и $ax \ll 1$ важи: $e^{-ax} \approx 1 - ax$.

Задатак припремио: *др Бојан Николић*, Институт за физику, Београд

Рецензент: *др Драган Д. Маркушев*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа ДФС: *др Александар Крмпот*,
Институт за физику, Београд



Задатак 1: Тенис

- (а) Из закона одржања енергије следи $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$, где је ω_1 угаона брзина рекета након судара. Из одржања пројекције на осу o момента импулса у односу на тачку D следи $I\omega = mvd + I\omega_1$. Из претходних једначина следи $v = \frac{2\omega Id}{I+md^2}$. Ова функција достиже максимум за $d = \sqrt{\frac{I}{m}} = 1$ m. Пошто је тачка са $d = 1$ m ван рекета следи да лоптица има највећу брзину ако се удари врхом рекета, тј. тачком са $d = 67$ cm. Лоптица има најмању брзину ако се удари дном рекета, тј. тачком са $d = 31$ cm.
- (б) Из закона одржања енергије следи $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, где је v_1 брзина лоптице после судара са рекетом. Из одржања пројекције на осу o момента импулса у односу на тачку D следи $mvd = I\omega - mv_1d$. Коефицијент реституције је $e = \frac{v_1}{v}$. Из претходних једначина следи $e = \frac{I-md^2}{I+md^2}$. Функција $e(d)$ монотono опада са порастом d и узима вредност 0 за $d = \sqrt{\frac{I}{m}} = 1$ m. Пошто је та тачка ван рекета, следи да лоптица има најмању брзину ако се удари врхом рекета ($d = 67$ cm), а највећу ако се удари дном рекета ($d = 31$ cm).
- (в) Други Њутнов закон за translацију лоптице и рекета даје $m\frac{dv_x}{dt} = -F$ и $M\frac{dV_x}{dt} = F$, а за ротацију лоптице $I_L\frac{d\omega}{dt} = FR - Na$. Услов да нема проклизавања је $v_x - R\omega = V_x$, тј. $\frac{dv_x}{dt} - R\frac{d\omega}{dt} = \frac{dV_x}{dt}$. Притом је и $F = \mu_R N$. Из претходних једначина следи $a = R\mu_R\left(\frac{5}{3} + \frac{2m}{3M}\right) = 3,05$ mm.
- (г) Из одржања y -компоненте импулса следи $mv_{1y} = MV_{2y} + mv_{2y}$. Користећи дефиниције величина e и e_P следи $e_P = \frac{eM-m}{M+m} = 0,443$.
- (д) У зависности од вредности μ_S могућа су два случаја: 1) лоптица проклизава по рекету током целог трајања судара; 2) лоптица проклизава на почетку судара, а затим се котрља по рекету. У првом случају важе једначине $I_L\frac{d\omega}{dt} = -FR$ и $m\frac{dv_y}{dt} = N$, одакле се интеграцијом од тренутка пре судара t_1 до тренутка после судара t_2 добија $m(v_{2y} - v_{1y}) = \int_{t_1}^{t_2} Ndt$ и $I_L(\omega_2 - \omega_1) = -R \int_{t_1}^{t_2} Fdt$, где се брзине и угаоне брзине означене индексом 2 односе на тренутак t_2 . Користећи $v_{2y} = -e_P v_{1y}$ и $F = \mu_S N$, елиминацијом непознатог интеграла из претходне две једначине добијамо $\omega_2 = \omega_1 - \frac{3v_1 \sin \theta_1}{2R} \mu_S (1 + e_P)$. У другом случају за време док лоптица проклизава важе једначине $m(v_{0x} - v_{1x}) = - \int_{t_1}^{t_0} Fdt$, $I_L(\omega_0 - \omega_1) = - \int_{t_1}^{t_0} FRdt$ и $MV_{0x} = \int_{t_1}^{t_0} Fdt$, где је t_0 тренутак кад лоптица престаје да проклизава, а величине са индексом 0 се односе на тај тренутак. Из услова престанка проклизавања $v_{0x} + R\omega_0 = V_{0x}$ и претходне три једначине следи $\int_{t_1}^{t_0} Fdt = \frac{v_1 \cos \theta_1 + R\omega_1}{\frac{1}{M} + \frac{5}{3m}}$, одакле је $\omega_0 < 0$. Интеграцијом другог Њутновог закона током целог времена судара (при чему је смер силе F током котрљања одређен имајући у виду део (в) и чињеницу да је $\omega_0 < 0$) се добијају једначине $I_L(\omega_2 - \omega_1) = - \int_{t_1}^{t_0} FRdt - \int_{t_0}^{t_2} FRdt + \int_{t_0}^{t_2} Nadt$ и $m(v_{2y} - v_{1y}) = \int_{t_1}^{t_0} Ndt + \int_{t_0}^{t_2} Ndt$. Користећи претходне три једначине и чињенице да је док траје проклизавање $F = \mu_S N$, а док траје котрљање $F = \mu_R N$, добија се

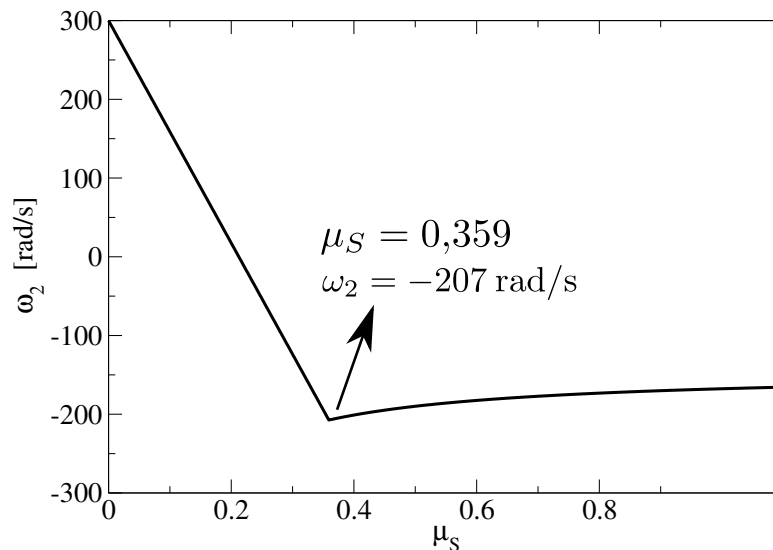


7. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2012/2013. ГОДИНА



Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
НОВИ САД
18-19. 5. 2013.

$\omega_2 = \omega_1 - \frac{\omega_1 + \frac{v_1 \cos \theta_1}{\frac{5}{3} + \frac{2m}{3M}}}{\frac{5}{3} + \frac{2m}{3M}} - (1 + e_P) \frac{v_1 \sin \theta_1}{R} \frac{3}{2} \left(\mu_R - \frac{a}{R} \right) + \frac{1}{\mu_S} \left(\mu_R - \frac{a}{R} \right) \frac{\omega_1 + \frac{v_1 \cos \theta_1}{\frac{5}{3} + \frac{2m}{3M}}}{\frac{5}{3} + \frac{2m}{3M}}$. Изједначавањем израза за ω_2 у случајевима 1) и 2) налазимо да гранични случај настаје за $\mu_S^{\text{gr}} = \frac{v_1 \cos \theta_1 + R\omega_1}{(1+e_P)v_1 \sin \theta_1 \left(\frac{m}{M} + \frac{5}{2} \right)} = 0,359$, при чему за $\mu_S < \mu_S^{\text{gr}}$ лоптица проклизава током свог времена судара, а за $\mu_S > \mu_S^{\text{gr}}$ долази и до котрљања лоптице по рекету. Одговарајући график зависности ω_2 од μ_S је приказан на слици. За $\mu_S = \mu_S^{\text{gr}}$ угаона брзина након судара има максимални интензитет од свих случајева кад је спин лоптице промењен.



Слика 1: График зависности ω_2 од μ_S



Задатак 2: Пиезоелектрични осцилатор

Део А: Прост модел механичко-електричног осцилатора

A.1. (0,5 поена) Сила теже која делује на горњу плочу уравнотежена је еластичном силом опруга, односно $mg = nk(\mathcal{X} - X_0)$, где је $\mathcal{X}$ дужина опруге у неистегнутом стању. Када се плоче прикључе на спољашњи напон, на њих делује и електро-статичка привлачна сила и услов статичке равнотеже је $mg + F_q = nk(\mathcal{X} - X_1)$, одакле се лако добија $F_q = nk(X_0 - X_1)$. Наелектрисање једне плоче кондензатора је $q_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{X_1} U$. Нека је E_p јачина електричног поља које потиче од друге плоче. Тада је, на основу Гаусове теореме, $2SE_p = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$. Електростатичка сила којом једна плоча делује на другу је $F_q = q_0 E_p = \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2X_1^2} = nk(X_0 - X_1)$, одакле се добија $U = X_1 \sqrt{\frac{2nk(X_0 - X_1)}{\varepsilon_0 S}}$.

A.2. (0,5 поена) Када се горња плоча налази на растојању $X_1 + x$ од доње, електро-статичка сила која на њу делује је $F'_q = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(X_1 + x)^2} \approx \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2X_1^2} - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{X_1^3} x = F_q - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{X_1^3} x$, док је еластична сила $F'_e = nk(\mathcal{X} - X_1 - x)$. Из другог Њутновог закона следи $m\ddot{x} = F'_e - mg - F'_q \approx -(nk - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{X_1^3})x = -nk(3 - 2\frac{X_0}{X_1})x$. Дакле, угаона фреквенција малих осцилација горње плоче је $\omega_0 = \sqrt{\frac{nk}{m}(3 - 2\frac{X_0}{X_1})}$. Мале осцилације ће бити могуће ако је $3X_1 > 2X_0$.

A.3. (2 поена) На основу другог Кирхофовог закона важи $U = L\ddot{q} + \frac{(q_0 + q)(X_1 + x)}{\varepsilon_0 S}$, где је $q_0 = \frac{\varepsilon_0 S U}{X_1}$ количина наелектрисања на облогама кондензатора у почетном тренутку. Занемарујући члан другог реда qx , добија се $\ddot{q} = -\frac{U}{LX_1}x - \frac{X_1}{L\varepsilon_0 S}q$. Електростатичка сила у почетном тренутку је $F_q = \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S}$. Након малог померања је $F'_q = \frac{(q_0 + q)^2}{2\varepsilon_0 S} \approx \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_0}{\varepsilon_0 S}q$, док је еластична сила $F'_e = nk(\mathcal{X} - X_1 - x)$. Из другог Њутновог закона следи $\ddot{x} = -\frac{nk}{m}x - \frac{U}{mX_1}q$.

A.4. (1 поен) Замењујући $\ddot{x} = -\omega^2 x$ и $\ddot{q} = -\omega^2 q$ у једначине из дела А.3. налазимо следећи систем једначина: $(\omega^2 - \frac{X_1}{L\varepsilon_0 S})q - \frac{U}{LX_1}x = 0$ и $(\omega^2 - \frac{nk}{m})x - \frac{U}{mX_1}q = 0$. Овај систем има нетривијално решење ако је $(\omega^2 - \frac{X_1}{L\varepsilon_0 S})(\omega^2 - \frac{nk}{m}) = \frac{U^2}{mLX_1^2} = \frac{2nk(X_0 - X_1)}{mL\varepsilon_0 S}$. Након увођења смена $\omega_1^2 = \frac{nk}{m}$ и $\omega_2^2 = \frac{X_1}{L\varepsilon_0 S}$, претходна једначина се поједностављује: $\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2(3 - 2X_0/X_1) = 0$. Физичка решења ове једначине су $\omega_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2(5 - 4X_0/X_1)} \right]^{1/2}$, што значи да систем има две својствене кружне фреквенције, ако је задовољен услов $3X_1 > 2X_0$.

Део Б: Механички модел кварцне виљушке

B.1. (0,2 поена) Једначина осцилација кварцне виљушке је $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t + \varphi)$.

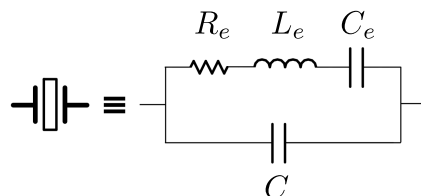
B.2. (0,3 поена) Делењем једначине добијене под B.1. са m добија се једначина еквивалентна једначини датој у задатку, па се на основу упоређивања одговарајућих чланова добија $\gamma = \frac{b}{m} = \frac{b}{0,243 \rho_q WLD} = 104 \text{ s}^{-1}$ и $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{ED^2}{0,972 \rho_q L^4}} = 2,27 \cdot 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



- Б.3. (1 поен) Заменом $x = x_0 \cos(\Omega t + \phi)$ у једначину $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \phi - \delta\varphi)$, где је $\delta\varphi = \phi - \varphi$ и $f_0 = F_0/m$, добијамо $-\Omega^2 x_0 \cos(\Omega t + \phi) - \gamma \Omega x_0 \sin(\Omega t + \phi) + \Omega_0^2 x_0 \cos(\Omega t + \phi) = f_0 \cos(\Omega t + \phi) \cos \delta\varphi + f_0 \sin(\Omega t + \phi) \sin \delta\varphi$. Раздвајањем чланова уз $\sin(\Omega t + \phi)$ и $\cos(\Omega t + \phi)$ добија се систем једначина $-x_0(\Omega^2 - \Omega_0^2) = f_0 \cos \delta\varphi$ и $-\gamma \Omega x_0 = f_0 \sin \delta\varphi$, чија су решења $x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}}$ и $\delta\varphi = \arctg \frac{\gamma \Omega}{\Omega^2 - \Omega_0^2}$.

Део В: Електрични модел кварцне виљушке

- В.1. (1 поен) Амплитуда електричне снаге коју наизменични напонски извор предаје зупцима виљушке је $P = \eta \dot{x} V_0$. Она одговара амплитуди механичке снаге принудне силе која делује на зупце виљушке, односно важи $P = 2F_0 \dot{x}$. Тражена веза је $\eta V_0 = 2F_0$.
- В.2. (0,6 поена) Користећи везу наелектрисања и елонгације врха зупца виљушке, за једначину осциловања наелектрисања се добија $\frac{m}{\eta} \ddot{q} + \frac{b}{\eta} \dot{q} + \frac{k}{\eta} q = F_0 \cos(\Omega t + \varphi) = \frac{\eta}{2} V_0 \cos(\Omega t + \varphi)$.
- В.3. (0,7 поена) Свођењем претходне једначине на $L_e \ddot{q} + R_e \dot{q} + q/C_e = V_0 \cos(\Omega t + \varphi)$, следи да је $L_e = \frac{2m}{\eta^2} = 2,27 \text{ kH}$, $R_e = \frac{2b}{\eta^2} = 237 \text{ k}\Omega$, и $C_e = \frac{\eta^2}{2k} = 8,54 \text{ fF}$.
- В.4. (0,7 поена) Еквивалентно електрично коло се састоји од редног $R_e L_e C_e$ кола које представља механички део кварцне виљушке и паралелно са њим везаног кондензатора C који чине електроде. Еквивалентно коло је приказано на слици 1.



Слика 1: Еквивалентно електрично коло

Део Г: Утицај температуре на кварцну виљушку

- Г.1. (0,1 поена) Кварцни часовник показује тачно време када је $\frac{\Delta f}{f} = 0$, што на основу датог графика одговара температури $t_0 = 25^\circ \text{C}$.
- Г.2. (0,1 поена) У оба случаја важи $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta T}{T} < 0$, што значи да оба часовника касне.
- Г.3. (0,8 поена) У задатку је наглашено да је зависност параболична, а са графика се види да је $t_0 = 25^\circ \text{C}$ двострука нула, зато је $\frac{\Delta f}{f} = \alpha(t - t_0)^2$, где је α константа коју је потребно израчунати. Избором једне тачке са графика, нпр. $(-70 \cdot 10^{-6}, -10^\circ \text{C})$, добија се $\alpha = \frac{-70 \cdot 10^{-6}}{2025^\circ \text{C}^2} = -3,5 \cdot 10^{-8}^\circ \text{C}^{-2}$. Дакле, зависност фреквенције од температуре је $f(t) = (1 - 3,5 \cdot 10^{-8}(t/^\circ \text{C} - 25)^2) \cdot 2^{15} \text{ Hz}$.
- Г.4. (0,5 поена) Часовник аутора ради тачно и после годину дана, док часовник рецензента одступа за ΔT . Из $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta T}{T}$ следи $\Delta T = \frac{\Delta f}{f} T = -3,5 \cdot 10^{-8}(10 - 25)^2 \times 365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} \approx -4,14 \text{ min}$, дакле часовник рецензента касни.



**7. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2012/2013. ГОДИНА**



**Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
РЕШЕЊЕ**

**НОВИ САД
18-19.5.2013.**

Задатак 3: Балон за разгледање

а) Услов равнотеже је једнакост силе земљине теже и Архимедове силе: $\rho_2 Vg + m_0 g = \rho_1 Vg$ **(0,5п)**, где је ρ_2 густина ваздуха на t_2 . Из ове једнакости имамо: $m_0 = (\rho_1 - \rho_2)V$ **(0,2п)**. Једначине стања гаса у балону за температуре T_1 и T_2 су, респективно: $p = \rho_1 RT_1 / M$ **(0,5п)** и $p = \rho_2 RT_2 / M$ **(0,5п)**.

Из ових једнакости следи: $T_2 = \frac{T_1}{1 - \frac{m_0}{\rho_1 V}}$ **(0,2п)**. За дате бројне вредности добијамо $T_2 = 341\text{K}$ или

$$t_2 = 68^\circ\text{C} \text{ (0,1п)}.$$

б) Ако гас загрејемо до $T_3 = 383\text{K}$, онда је сила гравитације $F_g = \rho_3 Vg + m_0 g$ **(0,5п)**. Сила затезања је: $F_T = \rho_1 Vg - F_g = [(\rho_1 - \rho_3)V - m_0]g$ **(0,3п)**. Као и у делу под а) имамо: $\rho_1 / \rho_3 = T_3 / T_1$ **(0,6п)**, па коначно добијамо: $F_T = \left[\rho_1 \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right)V - m_0 \right]g$ **(0,5п)**. За дате бројне вредности је $F_T = 1,2\text{N}$ **(0,1п)**.

в) Из услова равнотеже на висини h : $\rho_h Vg = \rho_3 Vg + m_0 g$ **(0,7п)** имамо: $\rho_h = \rho_3 + m_0 / V$ **(0,3п)**.

Густина ваздуха на висини h се добија из барометарске формуле: $\rho_h = \rho_1 e^{-\frac{\rho_1 g h}{p_0}}$ **(0,4п)**. одатле се

добија висина h :
$$h = \frac{p_0}{\rho_1 g} \ln \frac{\rho_1}{\rho_h} = \frac{p_0}{\rho_1 g} \ln \frac{\rho_1 V}{m_0 + \rho_1 V \frac{T_1}{T_3}} \approx 843\text{m} \text{ (0,6п)}.$$

г) Густину на висини $h + \Delta h$ можемо написати као: $\rho_{h+\Delta h} = \rho_1 e^{-\frac{\rho_1 g (h+\Delta h)}{p_0}} = \rho_h e^{-\frac{\rho_1 g \Delta h}{p_0}}$ **(1п)**. Користећи се датом помоћи из поставке задатка, уз $\frac{\rho_1 g \Delta h}{p_0} \approx 10^{-3} \ll 1$, добија се да је $\rho_{h+\Delta h} \approx \rho_h \left(1 - \frac{\rho_1 g \Delta h}{p_0}\right)$

(0,5п). Из једначине кретања балона добијамо:

$$(m_0 + \rho_3 V)a = -(m_0 + \rho_3 V)g + \rho_{h+\Delta h} Vg \approx -\frac{\rho_h \rho_1 g^2}{p_0} V \Delta h = -k \Delta h \text{ (1,5п)}.$$

видимо да је кретање осцилаторно са периодом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_0 + \rho_3 V}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{(m_0 + \rho_3 V) p_0}{\rho_h \rho_1 g^2 V}} = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_1}} = 186\text{s} \text{ (1п)}.$$



Експериментални задаци (20 поена):
Одређивање ефикасности диоде која емитује светлост

Диоде које емитују светлост (LED–*Light Emitting Diode*) су полупроводнички извори светлости. Поред тога што се већ деценијама користе као светлосни индикатори, LED се последњих година све више користе и као замена за класичне сијалице, с обзиром да имају већу ефикасност.

Циљ овог експеримента је одређивање ефикасности црвене LED. Као детектор светлости користићемо фотодиоду (*photodiode*–PD). Када се фотодиода у електричном колу осветли, кроз њу протиче струја која је пропорционална интензитету светлости (интензитет светлости представља енергију светлости која у јединици времена пада на јединичну површину, а јединица је W/m^2).

Експеримент се састоји из три дела: 1) Доказивање да је јачина струје која протиче кроз PD сразмерна интензитету светлости која на њу пада. 2) Налажење јачине струје кроз LED при којој је њена ефикасност максимална. 3) Одређивање ефикасности LED, тј. односа снаге укупног емитованог зрачења и снаге електричне струје утрошене за побуду LED.

Диода која емитује светлост. Као и код већине полупроводничких компоненти, рад LED се заснива на особинама р-п споја. При протицању електричне струје кроз LED, део електрона унутар р-п споја се рекомбинује са шупљинама, при чему се енергија ослобођена у тој рекомбинацији емитује у облику фотона енергије:

$$E_p = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

где су: c - брзина светлости

h - Планкова константа

λ - Таласна дужина емитоване светлости

ν – Фреквенца емитоване светлости

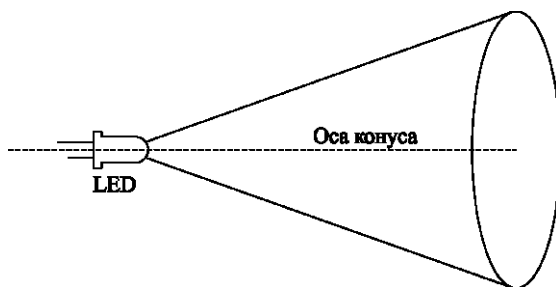
LED емитује светлост у виду радијално симетричног конуса (види слику), при чему интензитет светлости опада са квадратом растојања од LED.

Ефикасност η LED се дефинише као:

$$\eta = \frac{\Phi}{P_{LED}}$$

где је Φ укупна снага светлости коју LED излучује а $P_{LED} = I_{LED}V_{LED}$ представља електричну снагу на LED (I_{LED} и V_{LED} су јачина струје и напон на LED). За сваку LED постоји нека вредност струје I_{LED} при којој је ефикасност η максимална.

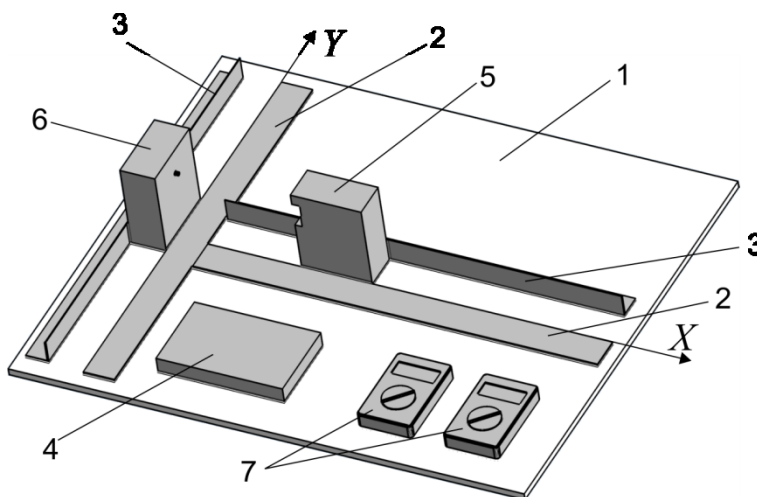
Фотодиода. Фотодиода претвара светлосну енергију у електричну енергију те се може користити за мерење интензитета светлости. Када светлост пада на фотоосетљиви део фотодиоде, један део упадних фотона ослобађа електроне у полупроводнику, што се манифестује као струја кроз фотодиоду. Јачина струје која се јавља у фотодиоди сразмерна је интензитету упадне светлости. Однос броја створених слободних електрона у јединици времена (N_e) и броја упадних фотона у јединици времена (N_p) представља квантну ефикасност q фотодиоде и дата је са $q = \frac{N_e}{N_p}$.



Апаратура

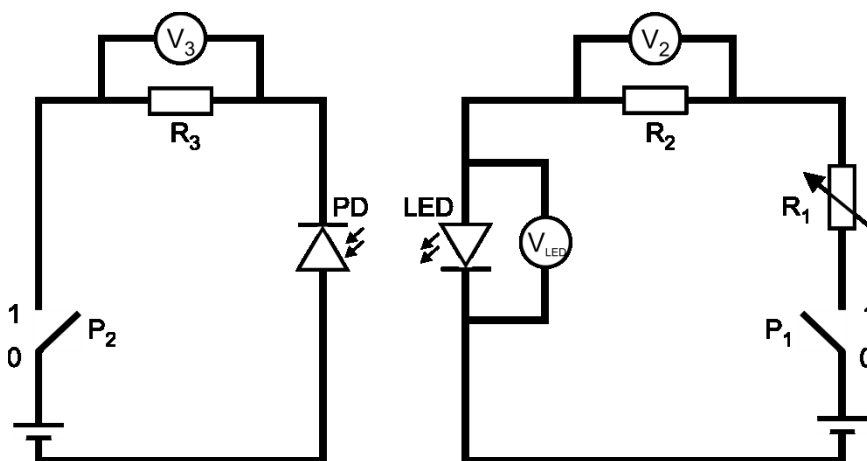
Апаратура за експеримент садржи:

1. дрвено постоље на коме су постављени остали елементи,
2. лењире,
3. вођице,
4. кутију са електричним колом,
5. пластичну кутију са монтираном LED и каблом за прикључивање на електрично коло,
6. пластичну кутију са монтираном фотодиодом и каблом за прикључивање на електрично коло,
7. два инструмента који омогућавају мерење напона, са кабловима и одговарајућим конекторима. Да би се инструмент користио за мерење напона, потребно је преклопник поставити у положај који је означен са DCV или $V_{\text{---}}$, у зависности од инструмента (уколико инструмент који сте добили нема ниједну од тих ознака позовите члана комисије).



Слика 1. Шематски приказ апаратуре.

На дрвеном постољу постављене су вођице тако да пластичне кутије могу да клизе по постољу у простору између вођица и лењира, дуж X и Y правца. Кутију са монтираном LED поставити на вођицу дуж X правца, а кутију са фотодиодом на вођицу дуж Y правца (види слику 1). На кутији са фотодиодом се налази налепница са цртом која означава положај центра фотодиоде. Све елементе повезати као на шеми приказаној на слици 2.



Слика 2. Шема електричног кола.

Конектори на кабловима за LED и фотодиоду су асиметрични и могу се прикључити само у адекватној оријентацији. Кутије са LED и фотодиодом се по потреби могу причврстити у неком положају помоћу лептирасте навртке и подлошке које се налазе на полеђини кутија.



Експеримент

МЕРА ОПРЕЗА: НЕ ГЛЕДАТИ ДИРЕКТНО У LED КАДА ЈЕ УКЉУЧЕНА.

НАПОМЕНЕ:

- (1) Као реперну тачку за мерење положаја кутије са LED користити предњу страницу кутије, тј. страницу са отвором за LED.
- (2) Пре почетка мерења поставити кутије тако да се фотодиода нађе хоризонтално (дуж Y-осе) у центру светлосног снопа емитованог од стране LED. Поставите кутију са LED у положај $x = 0$ cm на лежиру. Коришћењем променљивог отпорника R_1 струју кроз LED поставити на вредност при којој је напон V_2 око 1,5 V. Лагано померајте кутију са фотодиодом и посматрајте промену струје кроз фотодиоду. Положај фотодиоде у коме је струја кроз њу максимална је истовремено и положај у коме је фотодиода у центру снопа.
- (3) При сваком мерењу интензитета светлости коју емитује LED користећи фотодиоду, потребно је извршити корекцију услед доприноса амбијенталног осветљења. Струју амбијенталног осветљења снимати при искљученој LED.
- (4) У овом задатку не захтева се да процењујете грешке тражених величина.

Задатак 1. Линеарност фотодиоде (5 поена)

- 1.1 Измерити зависност струје кроз фотодиоду од положаја LED (при чему треба извршити корекцију за допринос амбијенталног осветљења тој струји). Притом фотодиоду треба поставити тако да се нађе у центру светлосног снопа који емитује LED и њен положај не треба мењати. Положај LED мењати померањем кутије са LED дуж X-осе, и као променљиву мерити растојање од нултог подеока на лежиру до предње странице кутије. Струју кроз фотодиоду (I_{PD}) одређивати мерењем напона на отпорнику R_3 . Коришћењем променљивог отпорника R_1 , струју кроз LED поставити на вредност при којој је напон V_2 око 3 V. Измерити најмање 10 тачака. Резултате мерења приказати табеларно. (2 поена)
- 1.2 Користећи мерења урађена у делу 1.1 извршити линеаризацију добијене зависности и цртањем одговарајућег графика показати да је струја кроз фотодиоду сразмерна интензитету светлости која пада на њу. (3 поена)

Задатак 2. Максимална ефикасност LED (5 поена)

- 2.1 Измерити зависност струје кроз фотодиоду (при чему треба извршити корекцију на допринос амбијенталног осветљења тој струји) од струје кроз LED. Мерења вршити при фиксираном положају LED од $x = 0$ cm на лежиру. Положај фотодиоде не мењати. Струју кроз фотодиоду (I_{PD}) одређивати мерењем напона на отпорнику R_3 . Струју кроз LED одређивати мерењем напона на отпорнику R_2 . Напон на LED мерити директно. Напон на отпорнику R_2 и напон на LED мерити наизменично користећи један уређај за мерење напона. Промену јачине струје кроз LED вршити променљивим отпорником R_1 . Измерити најмање 20 тачака у интервалу напона од 0-2 V на отпорнику R_2 и најмање 5 тачака у интервалу напона од 2-6 V на отпорнику R_2 . Резултате мерења приказати табеларно. (3 поена)
- 2.2 Нацртати одговарајући график и са њега очитати струју кроз LED при којој је ефикасност η LED максимална. Тражену струју је довољно одредити са прецизношћу ± 2 mA. (2 поена)



Задатак 3. Ефикасност LED при датој струји (10 поена)

- 3.1 Измерити зависност струје кроз фотодиоду (при чему треба извршити корекцију на допринос амбијенталног осветљења тој струји) од у-координате њеног положаја, при струји кроз LED од 5 mA. Притом је довољно вршити мерења само за једну страну у односу на центар светлосног снопа LED. Сва мерења вршити при фиксираном положају LED од $x = 0$ cm на лењиру, а фотодиоду померати. Имати у виду да је фотоосетљиви део фотодиоде квадратног облика странице $a = 1$ mm. Струју кроз фотодиоду (I_{PD}) одређивати мерењем напона на отпорнику R_3 . Резултате мерења приказати табеларно и графички. **(3 поена)**
- 3.2 На основу мерења извршених у делу 3.1. (и коришћењем одговарајућих математичких релација и/или графика) одредити ефикасност η LED при струји од 5 mA. **(7 поена)**

Бројне вредности које можете користити у свим деловима задатка:

Квантна ефикасност фотодиоде $q = 0,73$.

Фотоосетљиви део фотодиоде је облика квадрата странице $a = 1$ mm.

Таласна дужина светлости коју емитује LED $\lambda = 620$ nm.

Планкова константа $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js.

Наелектрисање електрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Брзина светлости у вакууму $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s.

R_1 подесив (логаритамски у опсегу до 100 k Ω).

$R_2 = 300 \Omega$.

$R_3 = 100$ k Ω .

Аутори задатка:

др Ненад Лазаревић и мр Новица Пауновић, Институт за физику, Београд

Рецензенти:

др Ненад Вукмировић, Јакша Вучичевић, др Дарко Танасковић и др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа:

др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд



Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ЗАДАЦИ

НОВИ САД
18-19. 5. 2013.

Решење

1.1 Укупна струја која протиче кроз фотодиоду представља збир струје која је последица LED осветљења (I_{PD}) и струје која потиче од амбијенталног осветљења. Мерењем напона на отпорнику R_3 при укљученој ($V_3^{укљ}$) и искљученој ($V_3^{искљ}$) LED може се одредити I_{PD} :

$$I_{PD} = \frac{V_3^{укљ} - V_3^{искљ}}{R_3} \quad (1)$$

x (mm)	$V_3^{укљ}$ (mV)	$V_3^{искљ}$ (mV)	I_{PD} (μA)	$I_{PD}^{-1/2}$ ($A^{-1/2}$)
0	981	113	8,68	339
30	591	180	4,11	493
60	446	215	2,31	658
90	379	220	1,59	793
120	325	240	0,85	1085
150	309	243	0,66	1231
180	304	250	0,54	1361
210	286	244	0,42	1543
240	276	240	0,36	1667
270	266	237	0,29	1857
300	260	236	0,24	2041

1.2 Интензитет светлости коју емитује LED опада са квадратом растојања. Имајући ово у виду, интензитет LED светлости која пада на фотодиоду зависиће од растојања између LED и фотодиоде на следећи начин:

$$E \sim \frac{1}{(x + d)^2} \quad (2)$$

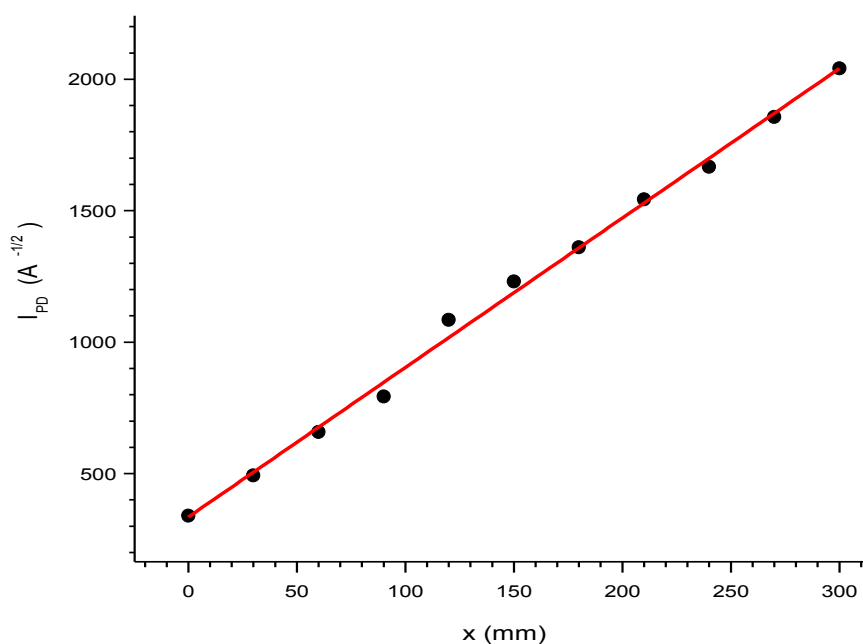
где је x растојање које се мери, а d је неко константно растојање који потиче од релативног положаја нултог подеока на лењиру, као и релативног положаја LED унутар кутије. Да би се показала линеарност фотодиоде потребно је успоставити линеарну зависност између интензитета светлости која пада на фотоосетљиви слој и јачине струје која протиче кроз фотодиоду услед осветљавања LED:

$$I_{PD} = kE = \frac{K}{(x + d)^2} \quad (3)$$

Линеаризацијом претходне зависности имао да је:

$$\frac{1}{\sqrt{I_{PD}}} = \frac{x}{\sqrt{K}} + \frac{d}{\sqrt{K}} \quad (4)$$

Цртањем $I_{PD}^{-1/2}$ у функцији од x , добија се линеарна зависност, што доказује да је јачина струје пропорционална интензитету зрачења.



2.1 Укупна струја која протиче кроз фотодиоду представља збир струје која је последица LED осветљења (I_{PD}) и струје која потиче од амбијенталног осветљења. Мерењем напона на отпорнику R_3 при укљученој ($V_3^{укљ}$) и искљученој ($V_3^{искљ}$) LED може се одредити I_{PD} :

$$I_{PD} = \frac{V_3^{укљ} - V_3^{искљ}}{R_3} \quad (5)$$

V_2 (mV)	V_{LED} (V)	$V_3^{укљ}$ (mV)	$V_3^{искљ}$ (mV)	I_{LED} (mA)	P_{LED} (mW)	I_{PD} (μ A)	I_{PD} / P_{LED} (mA/W)
23	1,662	148	144	0,0767	0,127	0,04	0,3139
100	1,711	176	153	0,333	0,570	0,23	0,4033
151	1,725	179	143	0,503	0,868	0,36	0,4146
201	1,735	202	153	0,67	1,16	0,49	0,4215
254	1,744	223	159	0,847	1,48	0,64	0,4334
313	1,751	240	160	1,04	1,83	0,8	0,4379
408	1,762	270	162	1,36	2,4	1,08	0,4507
517	1,771	303	165	1,72	3,05	1,38	0,4522
603	1,777	334	171	2,01	3,57	1,63	0,4564
709	1,784	372	177	2,36	4,22	1,95	0,4625
807	1,79	398	176	2,69	4,82	2,22	0,4610
915	1,796	433	179	3,05	5,48	2,54	0,4639
1023	1,802	468	180	3,41	6,14	2,88	0,4687
1116	1,806	492	179	3,72	6,72	3,13	0,4659
1196	1,809	518	183	3,99	7,21	3,35	0,4645
1322	1,815	552	180	4,41	8,0	3,72	0,4651
1425	1,819	583	181	4,75	8,64	4,02	0,4653



7. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКА 2012/2013. ГОДИНА



1526	1,822	614	179	5,09	9,27	4,35	0,4694
1632	1,827	646	182	5,44	9,94	4,64	0,4669
1693	1,828	668	184	5,64	10,32	4,84	0,4692
1807	1,832	698	180	6,02	11,03	5,18	0,4694
1904	1,835	733	187	6,35	11,65	5,46	0,4688
1990	1,838	765	192	6,63	12,19	5,73	0,4699
2660	1,857	962	190	8,87	16,47	7,72	0,4689
3010	1,866	1063	187	10,03	18,72	8,76	0,4679
3430	1,876	1179	179	11,43	21,45	10,0	0,4662
4160	1,892	1401	182	13,87	26,24	12,19	0,4646
4580	1,9	1518	177	15,27	29,01	13,41	0,4623
5220	1,911	1694	177	17,4	33,25	15,17	0,4562
5840	1,922	1876	178	19,47	37,41	16,98	0,4538
6270	1,93	1996	176	20,9	40,34	18,2	0,4512

2.2 Ефикасност LED сразмерна је интензитету светлости која пада на фотодиоду. Имајући у виду претходно утврђену линеарност имамо да је:

$$\eta \sim \frac{I_{PD}}{P_{LED}} \quad (6)$$

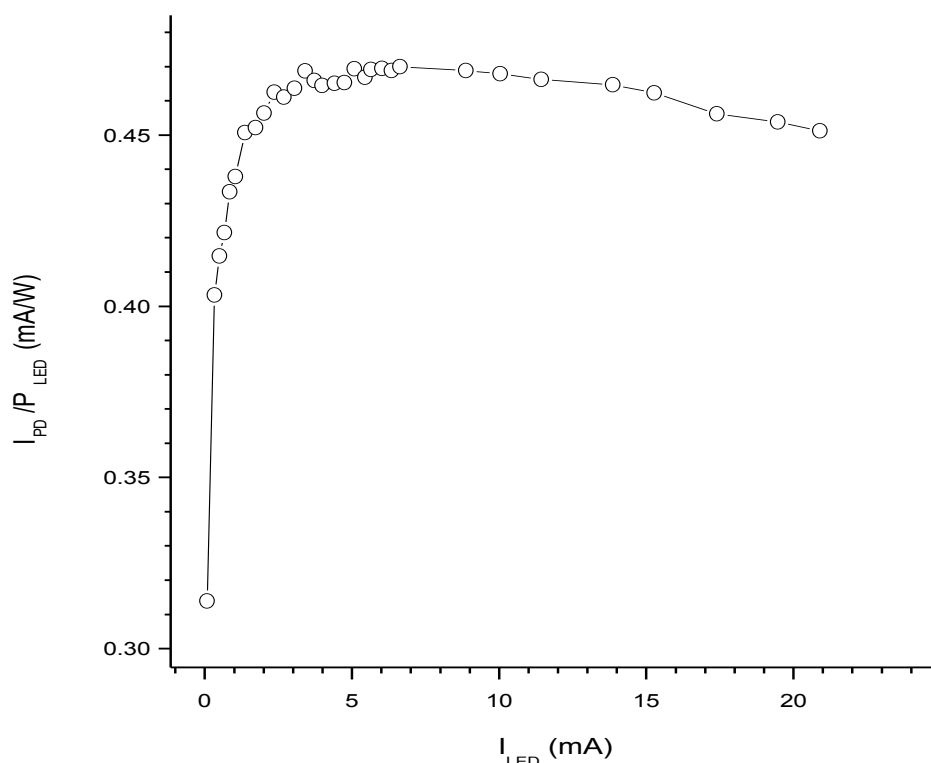
За одређивање струје при којој је η максимална потребно одредити струју при којој је однос $\frac{I_{PD}}{P_{LED}}$ максималан. P_{LED} се добија као производ струје и напона на LED

$$P_{LED} = V_{LED} I_{LED} \quad (7)$$

при чему је

$$I_{LED} = \frac{V_2}{R_2} \quad (8)$$

Цртањем графика зависности $\frac{I_{PD}}{P_{LED}}$ у функцији од јачине струје кроз LED и директним читавањем добијамо да је ефикасност LED максимална при струји од $I_{LED} = 5 \text{ mA}$.



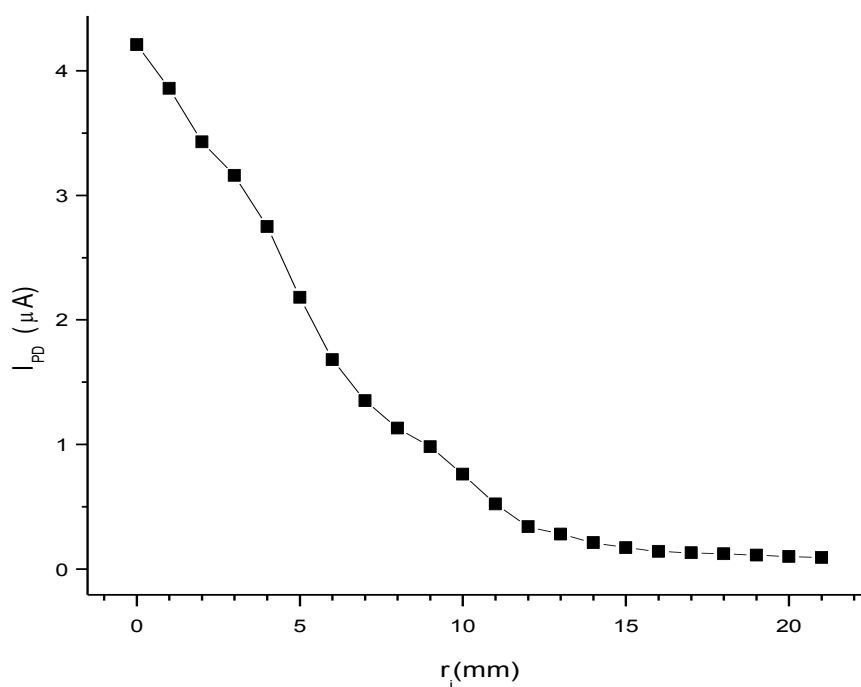
3.1 Да бисмо одредили ефикасност LED, потребно је прво подесити струју I_{LED} кроз LED на задату вредност $I_{LED} = 5 \text{ mA}$, подешавањем R_1 тако да се добије $V_2 = I_{LED} R_2$. Мерења струје $I_{PD}(r_i)$ кроз фотодиоду потребно је вршити на различитим растојањима r_i од централног положаја, са кораком $a = 1 \text{ mm}$. Уколико са y_C означимо положај осе конуса а са y_i положај фотодиоде, тада је $r_i = y_i - y_C$. Укупна струја која протиче кроз фотодиоду представља збир струје која је последица LED осветљења и струје која потиче од амбијенталног осветљења. Мерењем напона на отпорнику R_3 при укљученој ($V_3^{укљ}$) искљученој ($V_3^{искљ}$) LED за сваки од положаја r_i може се одредити $I_{PD}(r_i)$:

$$I_{PD} = \frac{V_3^{укљ} - V_3^{искљ}}{R_3} \quad (9)$$

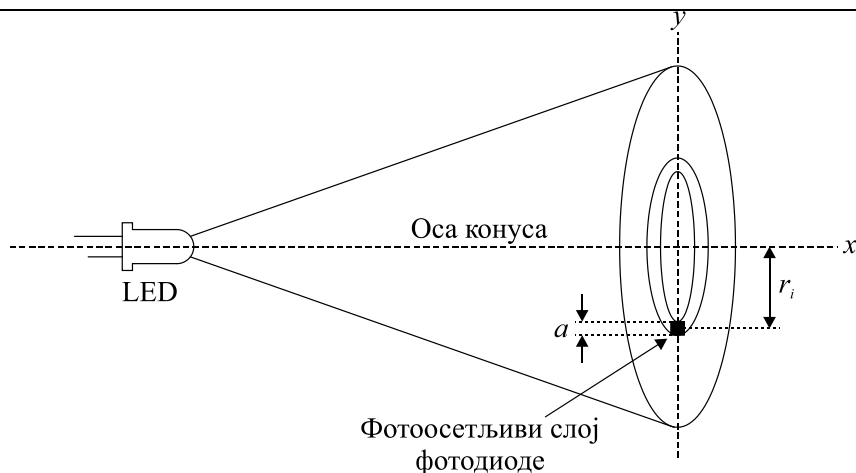
$r_i \text{ (mm)}$	$V_3^{укљ}(r_i) \text{ (mV)}$	$V_3^{искљ}(r_i) \text{ (mV)}$	$I_{PD}(r_i) \text{ (}\mu\text{A)}$	$I_{PD}(r_i) \cdot r_i \text{ (}10^{-9}\text{Am)}$
0	561	140	4,21	0
1	522	136	3,86	3,86
2	476	133	3,43	6,86
3	443	127	3,16	9,48
4	394	119	2,75	11,0
5	333	115	2,18	10,9
6	279	111	1,68	10,08
7	234	99	1,35	9,45
8	206	93	1,13	9,04
9	186	88	0,98	8,82
10	159	83	0,76	7,6



11	131	79	0,52	5,72
12	109	75	0,34	4,08
13	100	72	0,28	3,64
14	89	68	0,21	2,94
15	83	66	0,17	2,55
16	79	65	0,14	2,24
17	74	61	0,13	2,21
18	71	59	0,12	2,16
19	68	57	0,11	2,09
20	67	57	0,10	2,00
21	66	57	0,09	1,89



3.2 Као што је већ речено, LED емитује светлост у виду симетричног конуса. Пресек овог конуса са равни нормалном на осу конуса представља кружни диск.



Како би пронашли укупну снагу коју емитује LED потребно је урачунати допринос зрачења са читавог диска. Диск можемо поделити на прстенове ширине a (где је a страна фотоосетљивог дела фотодиоде, облика квадрата). Површина i -тог прстена је $2\pi r_i a$. Уколико фотодиоду поставимо на растојању r_i , струја која протиче кроз њу, као последица зрачења LED, биће:

$$I_{PD}(r_i) = N_e(r_i)e = N_p(r_i)qe, \quad (10)$$

где је $N_p(r_i)$ број фотона који у јединици времена доспе на фотодиоду, $N_e(r_i)$ је број електрона који се у фотодиоди генерише у јединици времена, а q је квантна ефикасност фотодиоде. Снага зрачења које пада на површину фотодиоде постављене на растојању r_i биће:

$$\Phi_{PD}(r_i) = N_p(r_i)h\nu \quad (11)$$

Комбиновањем предходне две једначине имамо да је:

$$\Phi_{PD}(r_i) = \frac{I_{PD}(r_i)}{qe} h\nu \quad (12)$$

Будући да је сваки прстен хомогено осветљен, добијамо да је снага зрачења на читавом i -том прстену:

$$\Phi_P(r_i) = \Phi_{PD}(r_i) \frac{2\pi r_i}{a} \quad (13)$$

Укупна снага зрачења које емитује LED је:

$$\Phi = \sum_i \Phi_P(r_i) = \frac{2\pi h\nu}{aqe} \sum_i I_{PD}(r_i) \cdot r_i \quad (14)$$

$$\Phi = \frac{2\pi hc}{aqe\lambda} \sum_i I_{PD}(r_i) \cdot r_i \quad (15)$$

Ефикасност LED се добија као

$$\eta = \frac{\Phi}{P_{LED}} \quad (16)$$

где је $P_{LED} = I_{LED}V_{LED}$ снага струје на LED. У случају коришћене LED, при задатој $I_{LED} = 5 \text{ mA}$ добија се $V_{LED} = 1,82 \text{ V}$, те је $P_{LED} = 0,0091 \text{ W}$.

Према једнакости (15), за одређивање укупне снага зрачења коју емитује LED потребно је извршити сумирање $\sum_i I_{PD}(r_i) \cdot r_i$ за све измерене прстенове. На основу једнакости (16) добијена вредност за ефикасност износи $\eta = 22,5\%$.