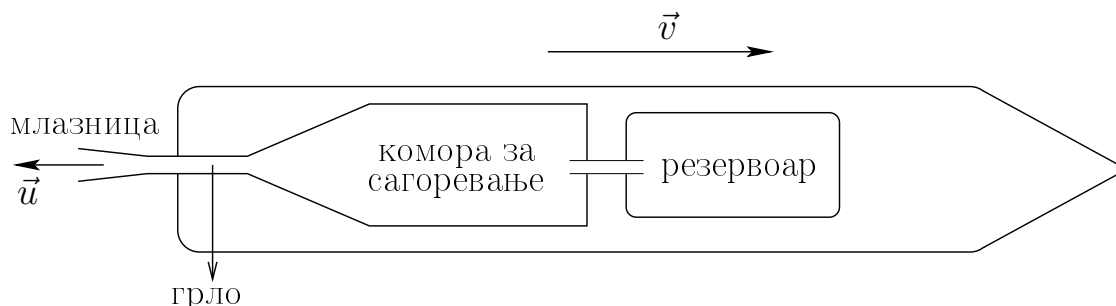




Задатак 1: Ракета (23 поена)

Ракете као погонско гориво најчешће користе неку течност. У комори за сагоревање ракете долази до хемијске реакције при којој се течнo гориво претвара у гасну смешу високе температуре. Млаз гасова истиче кроз млазницу и услед тога се ракета убрзава. У овом задатку ћемо испитати колико је горива потребно искористити да се ракета убрза до прве космичке брзине и тако постане Земљин сателит, као и колики је притом степен искоришћења хемијске енергије горива.



Шематски приказ ракете

- а) Одредити брзину сателита који се креће на ниској кружној орбити око Земље. За ниску орбиту важи да је полупречник орбите приближно једнак полупречнику Земље. Колика је кинетичка енергија тог сателита ако је његова маса $m_s = 200 \text{ kg}$? Колико пута је та кинетичка енергија већа од месечне потрошње електричне енергије једног домаћинства која износи $Q_d = 350 \text{ kW} \cdot \text{h}$? **(3 поена)**
- б) У референтном систему везаном за ракету гасна смеша истиче кроз млазницу брзином u . Ракета је кренула из мировања и тада је њена маса била једнака m_0 . Колика ће бити брзина ракете v кад њена маса буде m ? Занемарити утицај силе Земљине теже и Земљине атмосфере на кретање ракете. **(5 поена)**
- в) У ракети се као гориво користи течни нитрометан (CH_3NO_2). Нитрометан се чува у резервоару на температури $T_r = 300 \text{ K}$ и притиску p и одатле се убризгава у комору за сагоревање. У комори за сагоревање долази до хемијске реакције која се одвија при константном притиску p :



при којој се течни нитрометан разлаже на смешу гасова. Количина топлоте која се ослободи при наведеној реакцији једног мола нитрометана на температури T_r и притиску p је $q_m = 246 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$. Настала гасна смеша се може посматрати као идеални гас коефицијента адијабате $\gamma = 1,25$ и моларне масе $M = 20,3 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Одредити температуру T гасне смеше. Сматрати да сва топлота која се ослободи у реакцији одлази на загревање гасне смеше при константном притиску p . **(4 поена)**



6. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2011/2012. ГОДИНА



Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ

БЕОГРАД
26-27.5.2012.

- г) Услед разлике притиска у комори за сагоревање и притиска ван ракете долази до протока гасне смеше кроз грло, млазницу и њеног истицања из ракете. Наћи брзину u којом гасна смеша истиче из ракете (у референтном систему везаном за ракету) ако је температура гасне смеше у комори T . Сматрати да је попречни пресек млазнице знатно мањи од попречног пресека коморе за сагоревање, а да је ван ракете вакуум. Колика је бројна вредност брзине u када се користи гориво из дела задатка в) ? (4 поена)
- д) Колику масу нитрометана треба потрошити на убрзавање ракете од мировања до прве космичке брзине, при чему ће коначна маса ракете бити $m_s = 200 \text{ kg}$? (2 поена)
- ђ) Степен искоришћења хемијске енергије горива при процесу убрзавања ракете се дефинише као однос крајње кинетичке енергије ракете и топлоте која се ослободи при сагоревању потрошеног течного горива.
- ђ1) Уколико се у решењу делу задатка под в) занемари члан који садржи T_r (тј. замени да је $T_r = 0$), степен искоришћења се може изразити у зависности само од односа v/u брзине ракете и брзине истицања горива. Одредити математички облик те зависности. Колики је степен искоришћења за ракету испитивану у овом задатку? (3 поена)
- ђ2) При ком односу v/u је степен искоришћења максималан и колики је тај степен искоришћења? Признавање се сва образложена нумеричка решења која од тачних одступају за мање од 10%. (2 поена)

Физичке константе које можете користити у овом задатку:

- Убрзање силе теже на површини Земље: $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- Полупречник Земље: $R_z = 6400 \text{ km}$
- Универзална гасна константа: $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
- Моларне масе атома водоника, угљеника, азота и кисеоника:
 $M_H = 1 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $M_C = 12 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $M_N = 14 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $M_O = 16 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

Подсетник:

- $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}$, за $a > 0$ и $b > 0$.
- Коефицијент адијабате је по дефиницији једнак $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, где је C_p моларни топлотни капацитет при константном притиску, а C_v моларни топлотни капацитет при константној запремини.

Задатак припремио: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику, Београд

Рецензент: *др Дарко Танасковић*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Александар Крмпот*, Институт за физику, Београд



Задатак 2: Молекулске интеракције (24 поена)

- а) Сви молекули у природи међусобно дејствују на различите начине у зависности од самог типа молекула и карактера сила које делују између њих. Уопштено говорећи, понашање система од два интерагујућа молекула прикладно је разматрати помоћу зависности њихових потенцијалних енергија. Свака интеракција молекула на неком међусобном растојању r може се описати дефинисањем адекватног међумолекулског потенцијала $U = f(r)$. До данас теоријски није добијен аналитички облик криве $U = f(r)$ који би у потпуности репродуковао реално међудејство било која два молекула нпр. неког гаса. Семиемпиријски је, међутим, добијено неколико међумолекулских потенцијала који доста добро описују молекулске интеракције. Најједноставнији такав међумолекулски потенцијал је потенцијал круте сфере $U_{\text{кк}}(r)$, помоћу кога молекуле и њихово међудејство можемо посматрати као апсолутно еластичне сударе крутих билијарских куглица. Потенцијал $U_{\text{кк}}(r)$ међудејства таквог система дат је у аналитичком облику као

$$U_{\text{кк}}(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq d \\ 0, & r > d \end{cases}$$

где r представља међумолекулско растојање а d – ефективни пречник молекула (најмање растојање које достигну центри два молекула приликом судара). Помоћу овог потенцијала могу се израчунати карактеристични параметри реалних гасова a и b из Ван дер Валсове једначине стања реалних гасова

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT,$$

где је $V_M = V/\nu$ моларна запремина гаса, ν је број молекула гаса, p његов притисак, T његова апсолутна температура, док је $R = 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ универзална гасна константа. Најпогоднији експерименти којима се врше мерења одступања понашања реалних од идеалних гасова су они који се заснивају на мерењима тзв. *фактора компресибилности* z дефинисаног као

$$z = \frac{pV_M}{RT}.$$

За идеалне гасове је $z = 1$, док је за реалне гасове: $0 < z < 1$ (када доминирају привлачне силе међудејства) или $z > 1$ (када доминирају одбојне силе међудејства). Ако се z развије у ред по V_M добиће се да је

$$z = 1 + \frac{B_2(T)}{V_M} + \frac{B_3(T)}{V_M^2} + \frac{B_4(T)}{V_M^3} + \dots = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(T) \left(\frac{1}{V_M}\right)^{k-1},$$

где су $B_k(T)$ тзв. *виријални коефицијенти* који указују на степен међудејства молекула јер су уско повезани са међумолекулским потенцијалом. За једноставне молекуле довољно је задржати се на другом виријалном коефицијенту $B_2(T)$ који се израчунава помоћу формуле



$$B_2(T) = -2\pi N_A \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{U(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr,$$

где је $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ Авогадров број, $U(r)$ је претпостављени међумолекулски потенцијал, r је међумолекулско растојање, T је апсолутна температура гаса а $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ је Болцманова константа. Његова веза са параметрима a и b из Ван дер Валсове једначине стања дата је једноставном формулом облика

$$B_2(T) = b - \frac{a}{RT}.$$

Очигледно је да, уколико је $B_2(T) < 0$ преовлађују дејства привлачних сила, тј. доминира параметар a (нпр. на нижим температурама), а ако је $B_2(T) > 0$ преовлађују дејства одбојних сила између молекула тј. доминира параметар b (нпр. на вишим температурама). Јединица за $B_2(T)$ је m^3/mol .

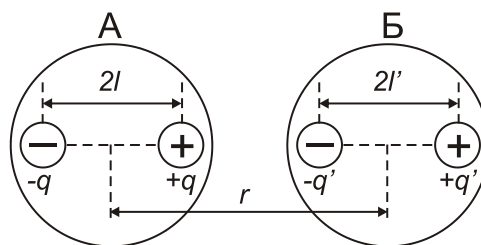
Израчунајте $B_2(T)$ и $z = f(B_2)$ за потенцијал круте сфере $U_{\text{kc}}(r)$, један мол гаса и $V_M = 1 \text{ m}^3/\text{mol}$ ако је гас:

- аргонски ($d_{\text{Ar}} = 316,2 \text{ pm}$);
- угљендиоксидни ($d_{\text{CO}_2} = 391,7 \text{ pm}$).

На основу добијених резултата повежите $B_2(T)$ са Ван дер Валсовим параметрима a и b .

(10 поена)

- б) На садашњем нивоу развоја физике, молекули се сматрају сложеним електродинамичким системима који се покорављају законима квантне механике, али их у основи можемо сврстати у електромагнетни тип деловања. Познато је да између молекула у неком реалном гасу делују и привлачне и одбојне силе. Пошто међудејства молекула сврставамо у електромагнетна, у представљању ових сила можемо се водити аналогијом са Кулоновим силама.



Слика 1

Посматрајмо један фиксирани поларни молекул А који има сталан диполни момент, и један неполарни молекул Б који је неутралан у електричном смислу када се налази ван спољашњег електричног поља (нема сталан диполни момент). Услед дејства електричног поља молекула А молекул Б се поларизује и у њему се индукује диполни момент (слика 1). Први експерименти су показали да, у општем случају, привлачне F_n и одбојне F_o силе међу молекулима реалних гасова у зависности од њихових међусобних растојања r можемо представити у облику: $F_n = -(a_1/r^m)r_0$ и $F_o = (a_2/r^{13})r_0$ где су a_1 , a_2 и m константе, а r_0 је јединични вектор у односу на правац који спаја центре молекула. Резултанта F_{md} ових сила међудејства једнака је $F_{md} = F_n + F_o$.

- Одредите зависност F_n од међусобног растојања r у датом случају (слика 1) израчунавши вредност константе m . **(6 поена)**

- На основу резултата под б1) и података из поставке задатка б), изведите општи израз за укупну потенцијалну енергију међудејства $U_{md}(r)$ ова два молекула са



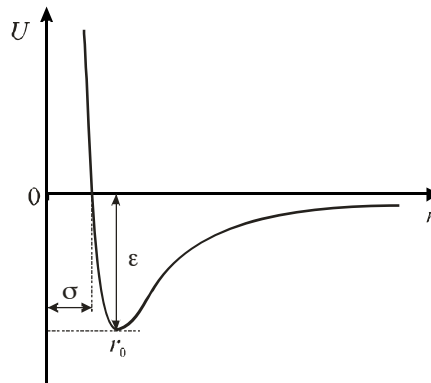
слике 1 као функцију међусобног растојања r , знајући да је $F_{md}(r) = -dU_{md}(r)/dr$.

(3 поена)

в) За молекуле са слике 1 међумолекулски потенцијал који јако добро описује њихово међудејство јесте тзв. Ленард-Џонсов потенцијал $U_{LJ}(r)$ облика

$$U_{LJ}(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

где су p и k вредности степене зависности од растојања добијене под б1) и б2), и података поставке задатка б). Параметар ε представља дубину тзв. “потенцијалне јаме” на међумолекулском растојању r_0 , где одбојне силе преузимају доминацију над привлачним силама, а $U_{LJ}(r)$ има минимум (слика 2).



Слика 2.

Параметар σ представља растојање молекула при $U_{LJ}(r) = 0$ (слика 2).

в1) Користећи се датом једначином за $U_{LJ}(r)$ израчунајте вредност $r_0 = f(\sigma)$. (3 поена)

в2) Користећи се резултатом под в) израчунајте вредност $U_{LJ}(r_0)$. (2 поена)

Задатак припремили: *др Сања Тошић*, Институт за физику, Београд

др Бојан Николић, Институт за физику, Београд

Рецензент: *др Драган Д. Маркушев*, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичење ДФС: *др Александар Крмнот*, Институт за физику, Београд



6. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2011/2012. ГОДИНА

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ



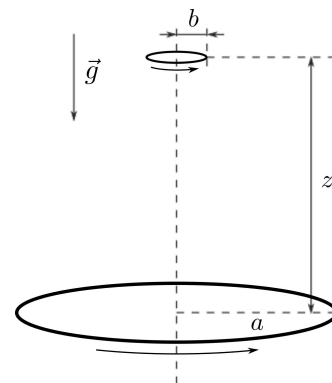
БЕОГРАД
26-27.5.2012.

Задатак 3: Магнетна левитација (23 поена)

У овом задатку проучићемо један од начина да се оствари магнетна левитација. Густо намотан кружни калем са N навоја полупречника a и занемарљиве дебљине налази се у хоризонталној равни. На растојању z изнад центра калема коаксијално је постављен мали проводни прстен полупречника $b \ll a, z$, као на слици. Маса прстена је m , отпор R , а коефицијент самоиндукције L . Систем ћемо посматрати у цилиндричном координатном систему чија се z -оса поклапа са осом калема и усмерена је навише, а калем се налази у равни $z = 0$. Одговарајући јединични вектори у тачки простора са координатама (r, φ, z) су $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z$. Убрзање Земљине теже је $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

Нека кроз калем протиче константна струја I_k у смеру као на слици.

- Покажете да је радијална компонента магнетне индукције на ободу прстена дата са $\vec{B}_r(z) = -\frac{b}{2} \frac{dB_z(z)}{dz} \vec{e}_r$, где је $B_z(z)$ интензитет z -компоненте магнетне индукције у центру прстена. (3 поена)
- Уколико кроз прстен протиче константна струја јачине I_p у смеру приказаном на слици, покажите да је Амперова сила која делује на прстен једнака $\vec{F}_A = \pi b^2 I_p \frac{dB_z(z)}{dz} \vec{e}_z$. Какав треба да буде однос стварних смерова струја I_k и I_p да би прстен могао да левитира, односно да непокретно лебди изнад калема? (3 поена)



Размотримо сада другачију ситуацију. Нека у смеру као на слици кроз калем протиче наизменична струја $i_k(t) = I_k \cos \Omega t$ која се мења тако брзо да је $2\pi/\Omega$ много мање од било ког другог времена карактеристичног за дати систем. Нека се прстен у тренутку t налази на висини z изнад калема.

- Одредите електромоторну силу $\varepsilon_i(z, t)$ индуковану у прстену. (1 поен)
- Одредите струју $i_p(z, t)$ која протиче кроз прстен. (4 поена)
- Одредите Амперову силу $\vec{F}_A(z, t)$ која делује на прстен у овом случају. Представите $\vec{F}_A(z, t)$ у облику збира временски константне компоненте $\vec{F}_A(z)$ и временски променљиве компоненте $\vec{f}_A(z, t)$. Колика је средња вредност $\vec{f}_A(z, t)$ током једног периода $2\pi/\Omega$? (3 поена)

Сада ћемо размотрити магнетну левитацију прстена.

- Претпоставимо да се утицај компоненте $\vec{f}_A(z, t)$ на кретање прстена практично може занемарити, што ћемо показати касније. Уколико прстен левитира на висини z_0 , одредите за које вредности z_0 ће бити могуће мале осцилације прстена око тог равнотежног положаја. Одредите угаону учестаност ω таквих осцилација у функцији g , a и z_0 . Занемарите утицај кретања прстена на индуковану електромоторну силу. (6 поена)
- Колику амплитуду мора да има струја кроз калем да би прстен левитирао на висини $z_0 = a$? (1 поен)
- Услед брзе променљивости струје $i_k(t)$, јасно је да временски променљива компонента Амперове силе слабо утиче на кретање прстена. Њен допринос се може проценити на следећи начин: сматрајући да током кретања прстена важи $\vec{f}_A(z, t) \approx \vec{f}_A(z_0, t)$, одредите амплитуду принудних осцилација прстена за реалне вредности $a = 20 \text{ cm}$, $z_0 = 10 \text{ cm}$ и $\Omega = 100 \text{ Hz}$. (2 поена)

Подсетник:

- Флукс вектора индукције магнетног поља $\vec{B}$ кроз било коју затворену површину једнак је нули.
- Интензитет индукције магнетног поља на оси кружног проводника полупречника r кроз који протиче струја јачине I , на растојању z од његовог центра је $B(z) = \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}}$, где је μ_0 магнетна пермеабилност вакуума.
- Елементарна Амперова сила којом спољашње магнетно поље индукције $\vec{B}$ делује на бесконачно мали део проводника дужине $d\vec{\ell}$ кроз који протиче струја јачине I је $d\vec{F}_A = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$, при чему је смер вектора $d\vec{\ell}$ исти као и референтни смер струје I .
- $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, за $|x| \ll 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задатак припремио: Милан Радоњић, Институт за физику, Београд

Рецензенти: др Антун Балаж и Милан Жежеш, Институт за физику, Београд

Председник комисије за такмичење ученика средњих школа ДФС: др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд



Задатак 1: Ракета (23 поена)

- а) Из једначине кретања сателита по орбити следи $\frac{m_s v^2}{R_z} = m_s g$. Одатле је $v = \sqrt{g R_z} = 7,92 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, а кинетичка енергија је $T = \frac{1}{2} m_s v^2 = \frac{1}{2} m_s g R_z = 6,28 \cdot 10^9 \text{ J} = 1,74 \text{ MW} \cdot \text{h}$. Та кинетичка енергија је $n = \frac{T}{Q_d} = 4,98$ пута већа од месечне потрошње једног домаћинства **[3п]**.
- б) Из закона одржања импулса примењеног на тренутке t и $t+dt$ следи $m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) + [m(t) - m(t+dt)][v(t+dt) - u]$, где је члан с леве стране импулс ракете у тренутку t , први члан с десне стране је импулс ракете у тренутку $t+dt$, а други члан с десне стране импулс избачене количине гаса. Сређивањем ове једначине се добија $[m(t) - m(t+dt)]u = m[v(t+dt) - v(t)]$, одакле је $-\frac{dm}{m} = \frac{1}{u} dv$. Интеграцијом последње једначине следи $-\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = \frac{1}{u} \int_0^v dv$, па је $v = u \cdot \ln \frac{m_0}{m}$ **[5п]**.
- в) Ако у реакцији учествује n_L молова реактанта, тад настаје $n_D = 3n_L$ молова гасне смеше. Пошто ослобођена топлота одлази на грејање гасне смеше, следи $q_m n_L = n_D C_p (T - T_r)$, где је $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$ моларни топлотни капацитет гасне смеше при константном притиску. Тако се добија $T = T_r + \frac{q_m}{R} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{n_L}{n_D} = 2270 \text{ K}$ **[4п]**.
- г) Нека је Δm маса гасне смеше која истекне за неко мало време, Δn број молова у тој маси, а ΔV запремина коју је та количина гаса заузимала у комори. Из енергијског баланса следи $p \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m u^2 - \Delta n C_v T$. Користећи једначине $p \Delta V = \Delta n R T$, $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$ и $M = \frac{\Delta m}{\Delta n}$ следи $u = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT}{M}}$. Одатле је $u = \sqrt{\frac{2q_m}{M} \frac{n_L}{n_D} + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT_r}{M}} = 3,05 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ **[4п]**.
- д) Из дела б) следи $m_s = m_0 \exp\left(-\frac{v}{u}\right)$, па је маса потрошеног горива $m_g = m_0 - m_s = m_s (\exp \frac{v}{u} - 1) = 2480 \text{ kg}$ **[2п]**.
- ђ1) Степен искоришћења је $\eta = \frac{\frac{1}{2} m_s v^2}{m_g \frac{q_m}{M} \frac{n_L}{n_D}}$. Користећи решења делова г), д) и б) следи $\eta = \frac{(v/u)^2}{\exp \frac{v}{u} - 1}$. Пошто је $v/u = 2,79$ добија се $\eta = 0,51$ **[3п]**. Напомена: Ако се узме бројна вредност из дела г) (која не укључује занемаривање члана који садржи T_r) добија се $v/u = 2,59$ и $\eta = 0,54$. Признавање се оба наведена решења.
- ђ2) Испитивањем функције $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ се добија да се максимум достиже за $x = 1,59$ и тај максимум износи $\eta = 0,648$ **[2п]**.



Задатак 2: Молекулске интеракције (24 поена)

а) Ако се искористи једначина за $B_2(T)$ и дати потенцијал $U_{\kappa\kappa}(r)$ из поставке задатка онда је

$$B_2(T) = -2\pi N_A \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{U_{\kappa\kappa}(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr =$$

$$= -2\pi N_A \left\{ \int_0^d \left[\exp\left(-\frac{\infty}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr + \int_d^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{0}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr \right\}. \quad (2 \text{ п})$$

Искористивши да су $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(-x) = 1$ добија се да је

$$B_2(T) = -2\pi N_A \int_0^d [0 - 1] r^2 dr \rightarrow \frac{2\pi N_A d^3}{3}. \quad (2 \text{ п})$$

Добијени израз за други виријални коефицијент $B_2(T)$ представља, за један мол гаса, запремину која није слободна за кретање молекула гаса услед њихових коначних (незанемарљивих) димензија. Да би то боље разумели замислимо два молекула облика идеалне куглице (сфере) пречника d . Када им се површине додирну њихови центри ће бити на растојању d . Површина круте сфере се опире њиховом даљем приближавању (потенцијал $U(r)$ расте до бесконачности), тако да се њихови центри не могу више приближавати, а оба молекула заузимају неку запремину једнаку запремини сфере полупречника d која онемогућава кретање других молекула у њој. За сваки пар молекула та запремина износи $4\pi d^3/3$. За један мол честица које имају $N_A/2$ молекулских парова, укупна запремина коју заузимају и не могу користити за кретање износи $2\pi N_A d^3/3$.

а1) за аргон је $B_{2\text{Ar}}(T) = \frac{2\pi N_A d_{\text{Ar}}^3}{3} = 3,987 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}. \quad (1 \text{ п})$

а2) за угљендиоксид је $B_{2\text{CO}_2}(T) = \frac{2\pi N_A d_{\text{CO}_2}^3}{3} = 7,572 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}. \quad (1 \text{ п})$

Пошто су температурски ефекти везани за привлачне силе, модел потенцијала круте сфере их искључује (нема потенцијалне јаме) па је и резултат за $B_2(T)$ такав да нема зависности од T .

Сада се може израчунати и вредност фактора компресибилности z узевши да је $V_M = 1 \text{ m}^3/\text{mol}$:

а1) $z_{\text{Ar}} = 1 + \frac{B_{2\text{Ar}}(T)}{1} \approx 1,0004$ и а2) $z_{\text{CO}_2} = 1 + \frac{B_{2\text{CO}_2}(T)}{1} \approx 1,0008. \quad (2 \text{ п})$

Види се да је $z > 1$ у оба случаја (одбојне силе доминирају), што је и на основу модела и



очекивано. То значи да је

$$a1) \boxed{B_{2Ar}(T) = b - \frac{a}{RT} \approx b = 0,04 \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}}, \text{ и } a2) \boxed{B_{2CO_2}(T) = b - \frac{a}{RT} \approx b = 0,05 \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}}. \quad (2 \text{ п})$$

б) Јачина електричног поља на растојању r од центра дипола А дуж линије која спаја центре оба дипола (молекула) износи

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r-l)^2} - \frac{q}{(r+l)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{r}\right)^2} \right], \quad (1) \quad (1 \text{ п})$$

где је q апсолутна вредност наелектрисања која су се раздвојена у молекулу на растојању $2l$. Ако је за $l \ll r$ (наш случај)

$$\frac{1}{\left(1 \pm \frac{l}{r}\right)^2} \approx 1 \mp \frac{2l}{r} \quad (2) \quad (0,5 \text{ п})$$

онда је јачина поља (1) једнака

$$E(r) = \frac{ql}{\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (3) \quad (0,5 \text{ п})$$

Сада се може израчунати сила F_n којом поље (3) делује на поларизован молекул Б. Очигледно је

$$F_n(r) = [q'E(r+l') - q'E(r-l')] = \frac{q'ql}{\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{l'}{r}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 - \frac{l'}{r}\right)^3} \right], \quad (4) \quad (1 \text{ п})$$

па је, као и у (2),

$$\frac{1}{\left(1 \pm \frac{l'}{r}\right)^3} \approx 1 \mp \frac{3l'}{r},$$

те једначина (4) поприма облик

$$F_n(r) = -\frac{6q'ql'l'}{\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (5) \quad (1 \text{ п})$$

б1) Поларизација молекула Б тј. раздвојеност његових наелектрисања l' , директно зависи од јачине поља (3) молекула А, па важи да је $l' \sim E(r) \sim 1/r^3$. Ако се тако добијено l' замени у (5) добија се да је тражена зависност

$$\boxed{F_n(r) \sim \frac{1}{r^7}}, \text{ тј. } \boxed{m=7}. \quad (6) \quad (2 \text{ п})$$



б2) Искористивши резултат добијен у iii) и дату везу да је $F_{md}(r) = -dU_{md}(r)/dr$ добија се општи облик потенцијала међудејства молекула са слике 1:

$$U_{md}(r) = -\frac{a'_1}{r^6} + \frac{a'_2}{r^{12}}, \quad (3 \text{ п})$$

где су a'_1 и a'_2 константе интеграљења.

в) На основу резултата под б2) вредности степених зависности p и k Ленард-Џонсовог потенцијала $U_{LJ}(r)$ су $p = 12$ за зависност која потиче од одбојних сила и $k = 6$ за зависност која потиче од привлачних сила међудејства, па може да се напише да је

$$U_{LJ}(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]. \quad (1 \text{ п})$$

в1) Минимум функције $U_{LJ}(r)$ добија се израчунавањем $dU_{LJ}(r)/dr = 0$, одакле је

$$r_0 = 2^{\frac{1}{6}} \sigma. \quad (2 \text{ п})$$

в2) Вредност $U_{LJ}(r_0)$ је вредност минимума функције $U_{LJ}(r)$, а она износи, користећи се резултатом добијеним под в1),

$$U_{LJ}(r) = -\varepsilon. \quad (2 \text{ п})$$



6. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2011/2012. ГОДИНА

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
РЕШЕЊА



БЕОГРАД
26-27.5.2012.

Задатак 3: Магнетна левитација (23 поена)

- а) У тачкама на z -оси магнетно поље има само компоненту $\vec{B}_z = B_z \vec{e}_z$, док у тачкама ван z -осе има и радијалну компоненту $\vec{B}_r = B_r \vec{e}_r$. Уочимо вертикални цилиндар полупречника b и висине Δz који обухвата прстен, тако да се горња основица налази на висини $z + \Delta z/2$, а доња на висини $z - \Delta z/2$. Нека је у свакој тачки површи цилиндра вектор нормале усмерен ка споља. Како је флуks вектора магнетне индукције $\vec{B}$ кроз уочени цилиндар једнак нули, имамо $B_z(z + \Delta z/2) \cdot \pi b^2 - B_z(z - \Delta z/2) \cdot \pi b^2 + B_r(z) \cdot 2\pi b \Delta z = 0$. Имајући у виду да је $\frac{B_z(z + \Delta z/2) - B_z(z - \Delta z/2)}{\Delta z} = \frac{dB_z(z)}{dz}$ и $\vec{B}_r(z) = B_r(z) \vec{e}_r$, коначно добијамо $\vec{B}_r(z) = -\frac{b}{2} \frac{dB_z(z)}{dz} \vec{e}_r$. (3 поена)
- б) Елементарна Амперова сила која делује на делић прстена је $d\vec{F}_A = I_p d\vec{l} \times \vec{B}(z)$, где је $d\vec{l} = b d\varphi \vec{e}_\varphi$, $\vec{B}(z) = B_r(z) \vec{e}_r + B_z(z) \vec{e}_z$. Имајући у виду да је $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = -\vec{e}_z$, добијамо $d\vec{F}_A = I_p B_z(z) b d\varphi \vec{e}_r - I_p B_r(z) b d\varphi \vec{e}_z$. Након интеграције по целом опсегу углова $\varphi \in [0, 2\pi]$, следи $\vec{F}_A = -2\pi b I_p B_r(z) \vec{e}_z$, што заменом резултата дела а) задатка постаје $\vec{F}_A = \pi b^2 I_p \frac{dB_z(z)}{dz} \vec{e}_z$. Како је $B_z(z) = \frac{\mu_0 N I_k a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$ и $\frac{dB_z(z)}{dz} = -\frac{3\mu_0 N I_k a^2 z}{2(z^2 + a^2)^{5/2}}$, добијамо Амперову силу $\vec{F}_A = -\frac{3\pi\mu_0 N a^2 b^2 z}{2(z^2 + a^2)^{5/2}} I_k I_p \vec{e}_z$. Да би прстен могао да левитира изнад калема, Амперова сила мора да буде усмерена навише како би уравнотежила силу Земљине теже, па мора да важи $I_k I_p < 0$, односно стварни смерови струја I_k и I_p морају да буду супротни. (3 поена)
- в) Нека је референтни смер индуковане ЕМС као на слици у поставци задатка. Тада је магнетни флуks кроз прстен $\Phi = B_z(z) \cdot \pi b^2 = \frac{\pi\mu_0 N a^2 b^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} I_k \cos \Omega t$, па је $\varepsilon_i(z, t) = -\frac{d\Phi}{dt} = U_0(z) \sin \Omega t$, где је $U_0(z) = \frac{\pi\mu_0 N a^2 b^2 \Omega I_k}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$. (1 поен)
- г) Пошто је индукована ЕМС наизменична, представимо је у комплексном облику $\varepsilon_i(z, t) = U_0(z)(\cos \Omega t + j \sin \Omega t)$. Индукована ЕМС је имагинарни део комплексне, тј. $\varepsilon_i(z, t) = \text{Im} \varepsilon_i(z, t)$. Комплексна импеданса прстена ће бити $R + j\Omega L$, а струја кроз прстен $i_p(z, t) = \varepsilon_i(z, t)/(R + j\Omega L)$. По услову задатка важи $\Omega \gg R/L$ јер је L/R време пригушења карактеристично за прстен посматран као RL коло. То значи да је $i_p(z, t) \approx -j\varepsilon_i(z, t)/(\Omega L)$. Струја која протиче кроз прстен је $i_p(z, t) = \text{Im} i_p(z, t)$, одакле добијамо $i_p(z, t) \approx -\frac{U_0}{\Omega L} \cos \Omega t = -\frac{\pi\mu_0 N a^2 b^2 I_k}{2(z^2 + a^2)^{3/2} L} \cos \Omega t$. (4 поена)
- д) На основу дела б) задатка, имамо $\vec{F}_A(z, t) = -\frac{3\pi\mu_0 N a^2 b^2 z}{2(z^2 + a^2)^{5/2}} i_k(t) i_p(z, t) \vec{e}_z$. Заменом израза за струје следи да је Амперова сила $\vec{F}_A(z, t) = \frac{3\pi^2 \mu_0^2 N^2 a^4 b^4 I_k^2}{4L} \frac{z}{(z^2 + a^2)^4} \vec{e}_z \cos^2 \Omega t$. Како је $\cos^2 \Omega t = (1 + \cos 2\Omega t)/2$, добијамо да је константна компонента $\vec{F}_A(z) = \frac{Kz}{(z^2 + a^2)^4} \vec{e}_z$ и временски променљива компонента $\vec{f}_A(z, t) = \frac{Kz}{(z^2 + a^2)^4} \cos 2\Omega t$, где је $K = \frac{3\pi^2 \mu_0^2 N^2 a^4 b^4 I_k^2}{8L}$. Очигледно, средња вредност $\vec{f}_A(z, t)$ током једног периода $2\pi/\Omega$ једнака је нули. (3 поена)
- ђ) Једначина кретања прстена дуж z -осе је $m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_A(z) - mg$. Будући да прстен левитира на висини z_0 , биће $0 = F_A(z_0) - mg$, односно $\frac{Kz_0}{(z_0^2 + a^2)^4} = mg$. Размотримо сада кретање прстена врло близу равнотежног положаја, $z = z_0 + \xi$, $|\xi| \ll z_0$. Како је $F_A(z) \approx F_A(z_0) + \xi \left. \frac{dF_A(z)}{dz} \right|_{z=z_0}$, ако искористимо услов равнотеже $F_A(z_0) = mg$, добијамо $F_A(z) \approx mg - mg \frac{7z_0^2 - a^2}{z_0(z_0^2 + a^2)} \xi$, па је једначина кретања прстена око равнотежног положаја $m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -mg \frac{7z_0^2 - a^2}{z_0(z_0^2 + a^2)} \xi$. Мале осцилације прстена око равнотежног положаја ће бити могуће ако је $7z_0^2 - a^2 > 0$, односно ако је $z_0 > a/\sqrt{7}$. Њихова угаона учестаност је $\omega = \sqrt{g \frac{7z_0^2 - a^2}{z_0(z_0^2 + a^2)}}$. (6 поена)
- е) Потребна амплитуда струје кроз калем налази се из услова равнотеже $K = mg(z_0^2 + a^2)^4/z_0$, што за $z_0 = a$ постаје $K = 16mga^7$. Одатле добијамо амплитуду струје $I_k = \frac{8a^2}{\pi\mu_0 N b^2} \sqrt{\frac{2mgL}{3a}}$. (1 поен)
- ж) Временски променљива компонента је приближно $f_A(z, t) \approx f_A(z_0, t) = F_A(z_0) \cos 2\Omega t = mg \cos 2\Omega t$ и има улогу принудне силе. Одговарајућа амплитуда принудних осцилација је $x_0 = \frac{g}{|4\Omega^2 - \omega^2|}$. За вредности дате у поставци задатка добија се $\omega \approx 7,7$ Hz, па је $x_0 \approx 0,25$ mm. Одатле видимо да је x_0 веома мало у односу на остале димензије система и да се због тога деловање временски променљиве компоненте може занемарити. (2 поена)

Задатак припремио: Милан Радоњић, Институт за физику, Београд

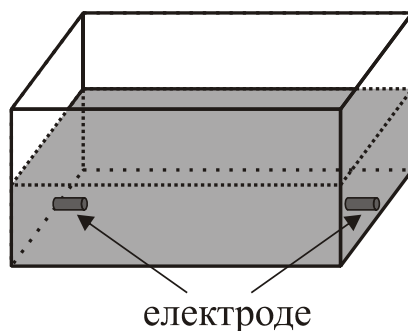
Рецензенти: др Антун Балаж и Милан Жежељ, Институт за физику, Београд

Председник комисије за такмичење ученика средњих школа ДФС: др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд



*Експериментални задаци (20+10 поена):
Сензор количине воде и положаја корњаче у акваријуму*

Перица је за рођендан добио нови акваријум. То га је веома обрадовало, јер је у школи тих дана из физике учио о Омовом закону, па је хтео да провери да ли Омов закон важи за провођење струје у пијаћој води. Познато је да је дестилована вода изолатор, али пијаћа вода у себи садржи разне соли, па се понаша као електролит и проводи струју. Тако је Перица осмислио експеримент у коме ће уронити две електроде у акваријум, прикључити батерију између електрода и мерити јачину струје у колу (слика 1). Батерију напона 9 V је купио у оближњој продавници. Затим је обишао неколико радњи у Београду које продају електронске компоненте и у њима је купио жице које су му потребне за експеримент, али нажалост ниједна од тих радњи није имала одговарајући инструмент за мерење јачине струје и напона. Ипак, то није обесхрабрило Перицу и отишао је на пијацу на отвореном на Новом Београду (популарни “Бувљак”), где је купио два мултиметра – инструмента који могу да мере јачину струје или напон у зависности од положаја преклопника на инструменту.



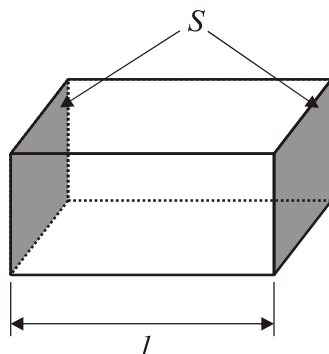
Слика 1

Кад је дошао кући, Перица је са одушевљењем поставио експеримент и извршио мерења зависности отпорности између електрода од висине течности у акваријуму. Очекивао је да ће отпорност између електрода бити обрнуто пропорционална висини течности у акваријуму. Резултати које је добио су за њега били потпуно неочекивани – добио је да отпорност престаје да зависи од висине течности у акваријуму након што ниво воде достигне неку вредност.

Сутрадан се Перица јавио на часу физике и рекао наставници да их је погрешно научила и да Омов закон не важи. Наставница је похвалила Перицу што је самостално изводио експерименте код куће и објаснила је у више детаља под којим условима важи једначина коју су учили у школи

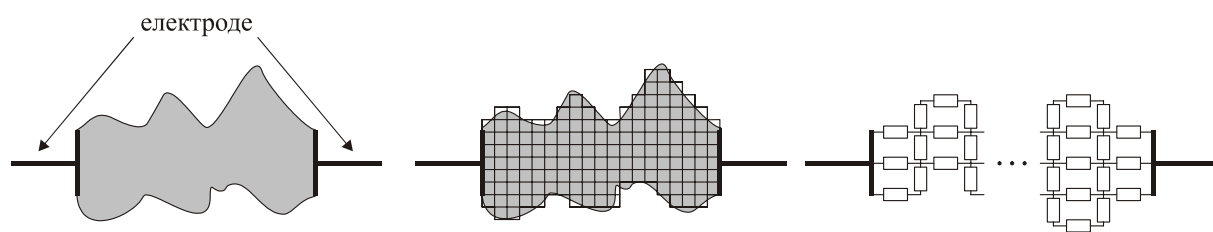
$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (1)$$

У овој формули R је отпорност тела, ρ је специфична отпорност, l је дужина тела, а S је површина попречног пресека тела (слика 2). Наставница је објаснила да наведена формула одређује отпорност када се мери између идеално проводних електрода (означених сивом бојом) чија је површина једнака површини попречног пресека тела. У експерименту који је извео Перица то није био случај јер површина електрода није једнака површини попречног пресека тела.



Слика 2.

Наставница је даље објаснила да се у пракси често срећу тела која немају правилан облик, као и електроде које не испуњавају наведене услове (слика 3). У таквим случајевима, некад је могуће извести аналитичку формулу којом се отпорност изражава у зависности од специфичне отпорности и геометријских параметара. Ипак, често то није могуће урадити. Да би се израчунао отпор у овим случајевима, тело неправилног облика може да се подели на велики број малих тела правилног облика (нпр. облика квадра), слика 3. На сваки од ових малих делова примењује се формула (1). Тако се рачунање отпорности неправилног тела своди на рачунање еквивалентне отпорности мреже отпорника, при чему је отпорност сваког од тих отпорника добијена из формуле (1).



Слика 3.

На наведени начин могуће је израчунати и отпор између две електроде са слике 1. То није могуће урадити аналитички, већ за то мора да се користи одговарајућа нумеричка симулација на рачунару. Оваква симулација даје зависност отпорности између електрода од геометријских параметара система и специфичне отпорности течности. Када се зна ова веза, могуће је одредити отпор за познату специфичну отпорност, али и одредити специфичну отпорност када је познат отпор између електрода.

Некад је zgodније уместо отпорности и специфичне отпорности користити проводност G и специфичну проводност σ , при чему важи $G = 1/R$ и $\sigma = 1/\rho$. Јединица за проводност је Сименс ($[G] = S$). На основу нумеричке симулације система са слике 1, добијено је да је зависност проводности од запремине течности у акваријуму описана следећом приближном формулом:

$$G = G_0 \left(1 - e^{-V/V_0}\right), \quad (2)$$

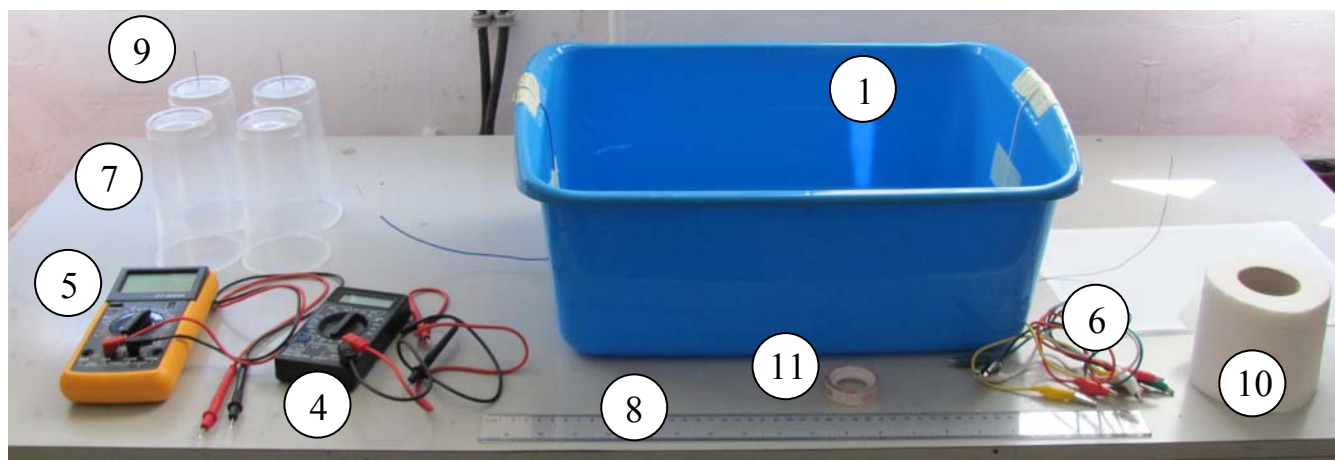
где је V запремина течности, а

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{\pi}{2} \cdot a \cdot \sigma, \\ V_0 &= 3 \cdot a \cdot S_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Притом је a параметар који зависи од геометријских особина система (дужина и пречник електрода, димензије посуде,...) и који има димензије дужине, σ је специфична проводност електролита, а S_0 је средња површина хоризонталног попречног пресека акваријума.



Експериментална апаратура



Слика 4 – бројеви на слици одговарају редним бројевима у списку апаратуре

Фотографија апаратуре дата је на слици 4. На располагању су вам:

1. Плава кадица, која служи као модел акваријума, у којој се налазе две електроде причвршћене на дну. **Електроде приликом рада не померати!**
2. Црвена кофа напуњена водом (није приказана на слици 4). Количина воде у кофи би требало да буде довољна за извођење целог експеримента. Ипак, уколико је такмичару потребно, комисија ће обезбедити још воде.
3. Батерија која омогућава стварање разлике потенцијала између електрода (није приказана на слици 4, већ је запакована у одговарајућу фабричку амбалажу).
4. Инструмент који омогућава мерење напона између електрода (који не мора бити идентичан ономе са слике) и одговарајући конектори. Да би се инструмент користио за мерење напона, потребно је преклопник поставити у положај који је означен са DCV или $V \equiv$ у зависности од инструмента (уколико инструмент који сте добили нема ниједну од тих ознака позовите члана комисије). Грешка мерења напона је једнака збиру 0,25% вредности мерења и тежине најмањег децималног места при мерењу (нпр. за измерену вредност 2,56V грешка је $0,0025 \cdot 2,56V + 0,01V$).
5. Инструмент који омогућава мерење јачине струје и одговарајући конектори (мултиметар Mastech MAS830, донација компаније МикроПринц). Да би се инструмент користио за мерење струје, потребно је преклопник поставити у положај који је означен са $A \equiv$. Грешка мерења јачине струје је једнака збиру 0,5% вредности мерења и тежине најмањег децималног места при мерењу (нпр. за измерену вредност 2,56mA грешка је $0,005 \cdot 2,56mA + 0,01mA$).
6. Пет каблова са крајевима у облику штипаљке (“крокодилке”).
7. Две чаше запремине 4 dL које служе за сипање воде у акваријум. На чашама се налази цртица која означава до ког нивоа треба напунити чашу да би запремина воде у њој била једнака 4dL. Грешку одређивања ове запремине треба сами да процените.
8. Лењир који можете користити за цртање графика и за мерење дужине.
9. Две чаше са избушеним дном у које је загодена игла, које ће у другом делу задатка бити коришћене као модел пластичне корњаче.
10. Папирни убриси, који служе за брисање ако проспете воду или накувасите руке.
11. Лепљива трака (селотејп) који може да послужи за причвршћивање лењира у одређени положај.



Задатак 1. Сензор количине воде у акваријуму (20 поена)

Перица је био веома разочаран што није увек могуће аналитички израчунати како проводност зависи од геометријских параметара система и специфичне проводности материјала. Да би га утешила, наставница му је дала следећи задатак када је могуће да се проблем реши аналитички. Помозите Перици да реши тај задатак.

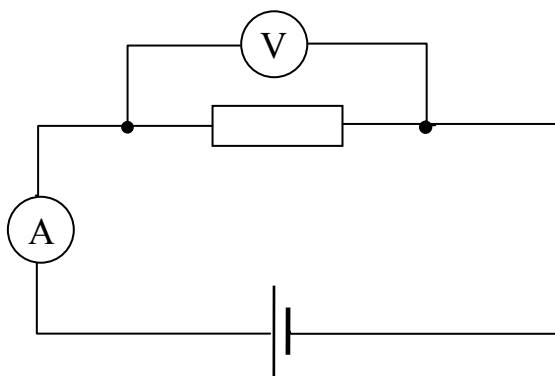
- 1.1. Две идентичне металне сферне електроде полупречника r су постављене у бесконачну средину проводности σ . Растојање између електрода је много веће од њиховог пречника. Показати да је проводност између електрода једнака $G = \beta r \sigma$, где је β бездимензиона нумеричка константа чију вредност треба одредити.

(2 поена)

Након што је решио овај задатак, Перица се орасположио. Посебно је постао срећан кад је увидео да једначина (2) може да се искористи да се на основу мерења проводности утврди запремина воде у акваријуму. Ипак, да би то било могуће, потребно је извршити детаљна мерења зависности проводности од запремине воде у акваријуму. Перица се зато обратио Комисији за такмичења, која је одлучила да то да као задатак на 6. Српској физичкој Олимпијади.

- 1.2. Имајући у виду једначину (2), одредити колика је вредност проводности када је запремина течности у посуди велика ($V \gg V_0$). Решење дати у општим бројевима у зависности од параметара G_0 и V_0 .

(1 поен)



Слика 5

- 1.3. Повезати апаратуру према шеми приказаној на слици 5 (на тој слици правоугаоник представља кадицу са течношћу). Измерити зависност проводности између електрода од запремине воде и направити одговарајућу табелу. Проценити грешке свих величина. Проводност одредити на основу мерења јачине струје у колу и напона између електрода. За сваку следећу тачку додати једну чашу воде (4 d1). Укупан број мерних тачака треба да буде **најмање 30**.

Важне напомене:

- а) Пожељно је све експерименталне тачке измерити у једној серији, без развезивања каблова или већих застоја током те серије.
- б) Након сипања сваке нове чаше воде, сачекати да се бројне вредности на инструментима за мерење јачине струје и напона стабилизују пре њиховог читавања.
- в) Кад завршите са серијом мерења, развезите коло и испразните акваријум (да се



батерија не би трошила и да се јони електролита не би таложили на електродама док обрађујете експерименталне податке). Приликом пражњења акваријума пазите да се електроде не помере.

(5 поена)

1.4. Нацртати график зависности проводности од запремине воде.

(2 поена)

1.5. Користећи график нацртан у делу 1.4, одредити параметар G_0 , као и његову грешку.

(1 поен)

1.6. На погодан начин линеаризовати једначину (2) тако да се са одговарајућег графика може одредити параметар V_0 . Треба имати у виду да је параметар G_0 сад познат.

(1 поен)

1.7. На основу извршене линеаризације нацртати одговарајући график. Са овог графика одредити параметар V_0 као и грешку његовог одређивања. Ако неке мерне тачке не узимате у обзир при фитовању, објаснити зашто.

(4 поена)

1.8. Одредити специфичну проводност воде и грешку њеног мерења. Сматрати да је површина попречног пресека акваријума једнака $S_0 = (12,3 \pm 0,7) \text{ dm}^2$.

(2 поена)

Као што смо поменули, Перица жели да мерењем проводности одређује запремину воде у акваријуму. Осетљивост S оваквог мерења се дефинише као однос мале промене проводности и мале промене запремине, тј. $S = dG/dV$.

1.9. На основу формуле (2) одредите при којој запремини воде у акваријуму је осетљивост мерења највећа, а кад је најмања? Одредити бројну вредност (није потребно одређивати грешку) највеће могуће осетљивости користећи се претходно добијеним резултатима мерења.

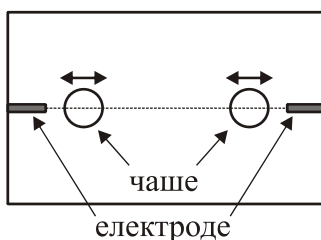
(2 поена)



Задатак 2. Сензор положаја корњача у акваријуму (10 поена)

Перица планира да у акваријуму чува две корњаче. Пошто од Удружења за заштиту животиња није добио дозволу да пушта струју кроз акваријум са живим корњачама, Перица је набавио две пластичне корњаче. У нашем експерименту смо пластичне корњаче заменили пластичним чашама са избушеним дном окренутим наопако (слике 6 и 7). Корњаче се крећу једна другој у сусрет дуж осе која спаја електроде. Перица, као одличан физичар, је схватио да мерењем проводности између електрода може да одреди положај корњача приликом кретања.

поглед одозго



Слика 6.

Као што је наставница већ објаснила Перици, проводност између електрода зависи поред специфичне отпорности течности и од геометријских особина система. Ово се, на пример, види по зависности проводности од висине (запремине) воде у посуди измереној у делу задатка 1. Геометријски параметри проводника (воде) могу да се промене и тако што се у воду стави неки изолатор, као што су пластичне чаше. На пример, када се у акваријум ставе две чаше са избушеним дном геометријски параметри (облик проводника) се мењају, слике 6 и 7. Ово доводи до промене проводности између електрода. Геометријске особине проводника се мењају и када се чаше померају, па се самим тим мења и проводност између електрода. Ово омогућава детекцију положаја пластичне корњаче на основу мерења проводности између електрода. Чаше су увек постављене симетрично тако да је растојање леве чаше од леве електроде једнако растојању десне чаше од десне електроде. Притом правац игле пресеца линију која спаја електроде.



Слика 7



У акваријум сипати 5 чаша воде.

- 2.1. Измерити зависност проводности између електрода од положаја чаша. Чаше померати дуж линије која спаја електроде, а која је означена на дну акваријума. Чаше притом увек треба да буду симетрично постављене. За прву тачку чаше треба да додирују електроде. При постављању чаша треба водити рачуна да се електроде не помере. За следеће 3 тачке чаше треба померати за по 5 mm, а за остале тачке за по 1 cm. Чаше померати све док се не додирну на средини акваријума. Положај чаша (тј. растојање чаше од електроде) мерити коришћењем лењира и игле која је забодена у чашу. Игла служи да би се лењиром лакше прочитао положај чаше (слика 7). Под растојањем чаше од електроде подразумевати растојање тачке на чаши која је најближа тој електроди (тако је у почетном положају то растојање једнако нули). Селотејп можете искористити да лењир причврстите у одређени положај.

Одмах након што завршите са серијом мерења, позовите једног члана комисије који ће симетрично поставити чаше на вама непознати положај и прекрити акваријум тако да се не види где су чаше. Измерити проводност између електрода за тај положај чаша и записати резултат. У делу задатка 2.3 ћете искористити ово мерење да одредите непознати положај симетрично постављених чаша.

Важне напомене:

- а) Пожељно је све експерименталне тачке измерити у једној серији, без развезивања каблова или већих застоја током те серије.
- б) Након симетричног померања чаша, сачекати да се бројне вредности на инструментима за мерење јачине струје и напона стабилизују пре њиховог читавања.
- в) Приликом померања чаша, пазити да се игла у чаши не помери, односно водити рачуна да се правац игле увек поклапа са осом симетрије чаше.
- г) Кад завршите са серијом мерења, развезите коло и испразните акваријум (из истих разлога као и раније). Приликом пражњења акваријума пазите да се електроде не помере.

(4 поена)

- 2.2. На основу мерења из дела 2.1. нацртати график зависности проводности између електрода од растојања чаша од електрода.

(2 поена)

- 2.3. На основу добијене зависности (графика) може да се одреди положај чаша када су оне симетрично постављене у акваријуму. На основу мерења из дела 2.1. одредити непознати положај чаша и која је грешка одређивања тог положаја. Не треба да вас брине ако је **релативна** грешка положаја велика.

(2 поена)

- 2.4. На основу графика из дела 2.1. закључите да ли је могуће на основу мерења проводности одредити положај чаша за било који симетричан положај дуж осе која спаја електроде? Сматрати да је положај могуће одредити ако је апсолутна грешка мања од 1 cm.

(2 поена)

Аутори задатка:

Милан Жежељ, др Михаило Рабасовић и др Ненад Вукмировић, Институт за физику, Београд

Рецензенти:

Зоран Поповић, Физички факултет, Београд

Стефан Богдановић и др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичења средњих школа:

др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд



Експериментални задаци (20+10 поена):
Сензор количине воде и положаја корњаче у акваријуму

1.1.

Посматрајмо најпре једну металну сферу. Ако је њено наелектрисање q , напон између површине сфере и бесконачности је једнак $V = q / (4\pi\epsilon_0 r)$. Интензитет електричног поља на површини сфере је $E = q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, а густина струје на површини сфере је једнака $j = \sigma E$. Одатле је укупна струја која истиче из једне електроде $I = 4\pi \cdot r^2 j$. Иста толика струја утиче у другу электроду, одакле се може закључити да је потенцијал друге електроде једнак $-V$. Проводност између електрода је онда једнака $G = I / (2V)$. Коришћењем свих претходних једначина добијамо да је $G = 2\pi\sigma$.

1.2.

Када је V велико, односно када тежи бесконачности, тада израз e^{-V/V_0} тежи нули, односно израз $1 - e^{-V/V_0}$ тежи 1. Дакле, за велике вредности запремине проводност тежи вредности G_0 .

1.3.

Измерене вредности су приказане у следећој табели:

Број чаша	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$V / [L]$	0,400	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60
$\Delta V / [L]$	0,008 (0,008)	0,02 (0,016)	0,03 (0,024)	0,03 (0,032)	0,04 (0,040)	0,05 (0,048)	0,06 (0,056)	0,07 (0,064)	0,07 (0,072)
$I / [mA]$	0,70	1,33	1,74	2,05	2,29	2,45	2,61	2,74	2,83
$\Delta I / [mA]$	0,02 (0,0135)	0,02 (0,0166)	0,02 (0,0187)	0,02 (0,0202)	0,03 (0,0215)	0,03 (0,0222)	0,03 (0,0231)	0,03 (0,0237)	0,03 (0,0242)
$U / [V]$	8,86	8,85	8,85	8,84	8,84	8,85	8,85	8,84	8,84
$\Delta U / [V]$	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)
$G / [mS]$	0,079	0,150	0,197	0,232	0,259	0,277	0,295	0,310	0,320
$\Delta G / [mS]$	0,002 (0,0018)	0,003 (0,0025)	0,003 (0,0028)	0,004 (0,0032)	0,004 (0,0033)	0,004 (0,0035)	0,004 (0,0037)	0,004 (0,0038)	0,004 (0,0039)

Број чаша	10	11	12	13	14	15	16	17
$V / [L]$	4,00	4,40	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8
$\Delta V / [L]$	0,08 (0,080)	0,09 (0,088)	0,1 (0,096)	0,1 (0,104)	0,1 (0,112)	0,1 (0,120)	0,2 (0,128)	0,2 (0,136)
$I / [mA]$	2,91	2,97	3,03	3,09	3,13	3,17	3,20	3,24
$\Delta I / [mA]$	0,03 (0,246)	0,03 (0,0249)	0,03 (0,0252)	0,03 (0,0255)	0,03 (0,0257)	0,03 (0,0259)	0,03 (0,0260)	0,03 (0,0262)
$U / [V]$	8,84	8,84	8,84	8,84	8,84	8,84	8,83	8,83
$\Delta U / [V]$	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0321)
$G / [mS]$	0,329	0,336	0,343	0,350	0,354	0,359	0,362	0,367
$\Delta G / [mS]$	0,004 (0,0040)	0,004 (0,0041)	0,004 (0,0041)	0,005 (0,0042)	0,005 (0,0042)	0,005 (0,0043)	0,005 (0,0043)	0,005 (0,0043)



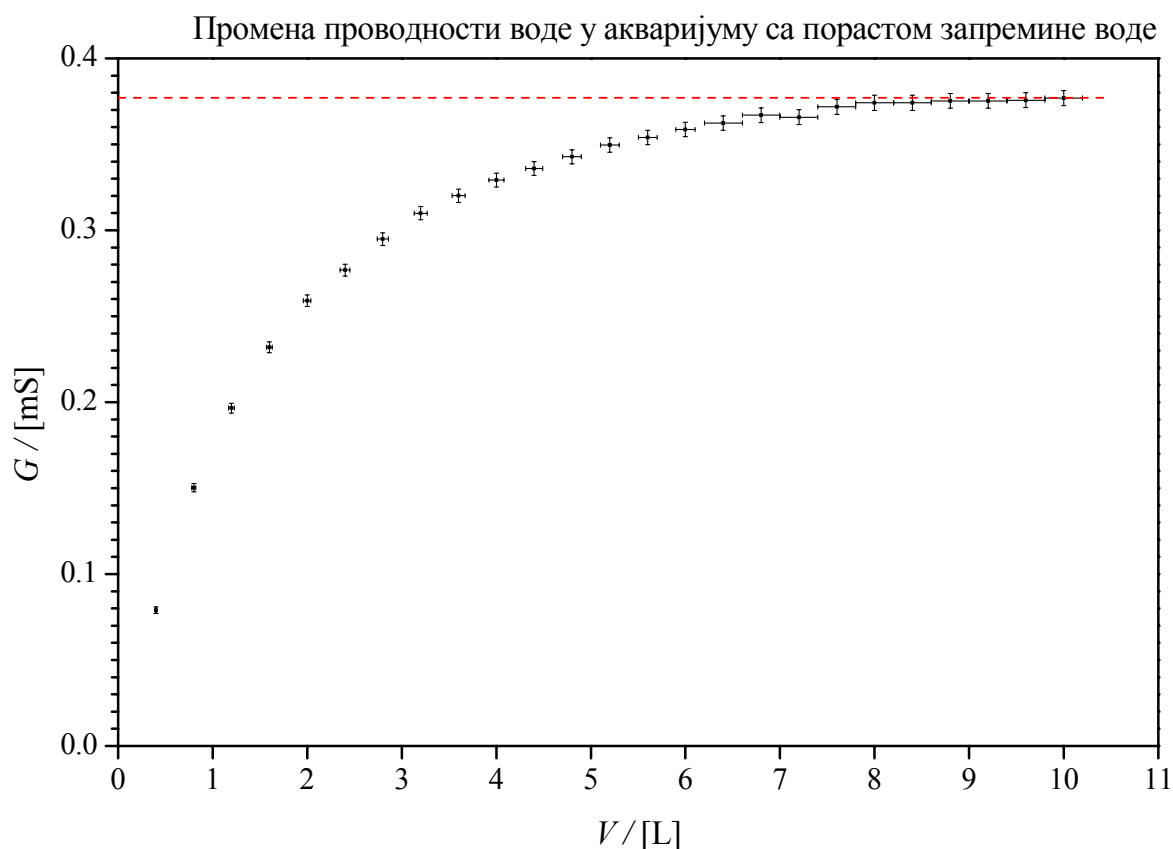
Број чаша	18	19	20	21	22	23	24	25
$V / [L]$	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0
$\Delta V / [L]$	0,2 (0,144)	0,2 (0,152)	0,2 (0,160)	0,2 (0,168)	0,2 (0,176)	0,2 (0,184)	0,2 (0,192)	0,2 (0,200)
$I / [mA]$	3,23	3,28	3,30	3,30	3,31	3,31	3,31	3,32
$\Delta I / [mA]$	0,03 (0,0262)	0,03 (0,0264)	0,03 (0,0265)	0,03 (0,0265)	0,03 (0,0266)	0,03 (0,0266)	0,03 (0,0266)	0,03 (0,0266)
$U / [V]$	8,83	8,82	8,82	8,82	8,82	8,82	8,81	8,81
$\Delta U / [V]$	0,04 (0,0321)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)	0,04 (0,0320)
$G / [mS]$	0,366	0,372	0,374	0,374	0,375	0,375	0,376	0,377
$\Delta G / [mS]$	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)	0,005 (0,0044)

Грешке напона и струје су одређене према упутству датом у задатку. Грешка проводности је

$$\Delta G = G \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} \right).$$

Грешка за запремину је процењена на основу грешке која се прави при одређивању нивоа воде. Процењено је да је грешка у нивоу воде око 2 mm. Пошто је висина до ознаке до које се пуни око 11 cm, процењено је да је релативна грешка одређивања запремине око 2%. Ово је грешка како за једну чашу, тако и за већи број чаша јер се при додавању воде сабирају апсолутне грешке, а релативна грешка остаје иста.

1.4.





1.5.

Параметар G_0 можемо да одредимо са графика као вредност којој тежи проводност када запремина течности тежи бесконачно великој вредности. У нашем случају проводност је практично престала да расте за неколико последњих тачака. Зато параметар G_0 може да се одреди на основу ових тачака. Конкретно, на графику је за G_0 узета вредност проводности за последњу тачку. Хоризонтална асимптота $G = G_0$ је на графику представљена испрекиданом линијом. За грешку параметра можемо да узмемо грешку неколико последњих тачака (0,005mS). Тако добијамо

$$G_0 = (0,377 \pm 0,005)\text{mS}.$$

1.6.

Из једначине (2) следи

$$1 - \frac{G}{G_0} = e^{-V/V_0}.$$

Логаритмовањем ове зависности добијамо

$$-\ln\left(1 - \frac{G}{G_0}\right) = \frac{1}{V_0} V.$$

Одавде следи да зависност $-\ln(1 - G/G_0)$ од V има облик $y = k \cdot x$, дакле график ове зависности је права која пролази кроз координатни почетак са коефицијентом правца $k = 1/V_0$.

1.7.

$V/[L]$	0,400	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60
$\Delta V/[L]$	0,008 (0,008)	0,02 (0,016)	0,03 (0,024)	0,03 (0,032)	0,04 (0,040)	0,05 (0,048)	0,06 (0,056)	0,07 (0,064)	0,07 (0,072)
$-\ln(1 - G/G_0)$	0,24 (0,235)	0,51 (0,509)	0,74 (0,737)	0,96 (0,955)	1,16 (1,162)	1,3 (1,325)	1,5 (1,524)	1,7 (1,727)	1,9 (1,892)
$\Delta(-\ln(1 - G/G_0))$	0,01 (0,009)	0,02 (0,018)	0,04 (0,038)	0,04 (0,040)	0,06 (0,055)	0,1 (0,068)	0,1 (0,088)	0,1 (0,112)	0,2 (0,136)

$V/[L]$	4,00	4,40	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8
$\Delta V/[L]$	0,08 (0,080)	0,09 (0,088)	0,1 (0,096)	0,1 (0,104)	0,1 (0,112)	0,1 (0,120)	0,2 (0,128)	0,2 (0,136)
$-\ln(1 - G/G_0)$	2,1 (2,065)	2,2 (2,219)	2,4 (2,406)	2,6 (2,636)	2,8 (2,797)	3,0 (3,042)	3,2 (3,224)	3,6 (3,630)
$\Delta(-\ln(1 - G/G_0))$	0,2 (0,165)	0,2 (0,196)	0,3 (0,241)	0,3 (0,308)	0,4 (0,366)	0,5 (0,473)	0,6 (0,57)	0,9 (0,87)

$V/[L]$	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0
$\Delta V/[L]$	0,2 (0,144)	0,2 (0,152)	0,2 (0,160)	0,2 (0,168)	0,2 (0,176)	0,2 (0,184)	0,2 (0,192)	0,2 (0,200)
$-\ln(1 - G/G_0)$	3,5 (3,534)	4 (4,323)	5 (4,834)	5 (4,834)	5 (5,239)	5 (5,239)	/ (5,932)	/
$\Delta(-\ln(1 - G/G_0))$	0,8 (0,785)	2 (1,76)	3 (2,945)	3 (2,945)	5 (4,425)	5 (4,425)	/ (8,865)	/

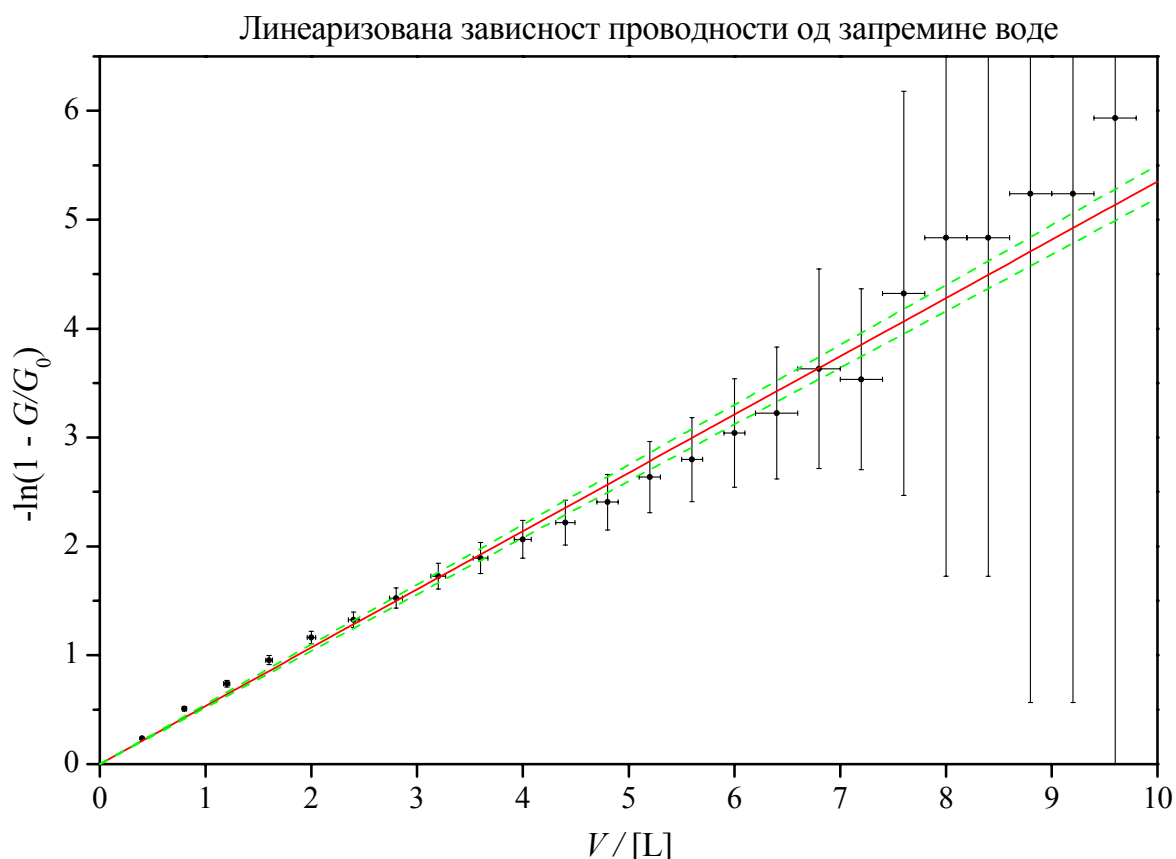
Грешка за величину $-\ln(1 - G/G_0)$ одређује се као

$$\Delta(-\ln(1 - G/G_0)) = \left| \frac{\partial}{\partial G} (-\ln(1 - G/G_0)) \right| \cdot \Delta G + \left| \frac{\partial}{\partial G_0} (-\ln(1 - G/G_0)) \right| \cdot \Delta G_0$$



одакле добијамо

$$\Delta(-\ln(1 - G/G_0)) = \left| \frac{1}{(1 - G/G_0)G_0} \right| \cdot \Delta G + \left| \frac{G}{(1 - G/G_0)G_0^2} \right| \cdot \Delta G_0$$



Кроз ове тачке провлачимо праву која пролази кроз координатни почетак. При томе не узимамо последње тачке са графика јер су грешке за њих веће или једнаке самој вредности ординате. Ово је последица чињенице да је за ове тачке $G \approx G_0$, односно $G/G_0 \approx 1$. Због овога је разлика $1 - G/G_0 \ll 1$, па је зато њена релативна грешка велика.

Да бисмо одредили нагиб ове праве довољно је да прочитамо апсцису и ординату било које тачке са ове праве. Из нагиба ове праве добијамо да је $V_0 = 1,869\text{L}$. Грешку можемо да добијемо тако што ћемо кроз ове тачке провући две најекстремније праве за које процењујемо да их има смисла провући кроз дате експерименталне тачке и њихове грешке. На овај начин добијамо да је грешка $0,05\text{L}$. Тако је

$$V_0 = (1,87 \pm 0,05)\text{L}.$$

1.8.

Из једначине (3) је

$$\sigma = \frac{6G_0S_0}{\pi V_0} = 0,04751 \frac{\text{S}}{\text{m}}.$$

Грешка одређивања специфичне проводности је



$$\Delta\sigma = \sigma \left(\frac{\Delta G_0}{G_0} + \frac{\Delta V_0}{V_0} + \frac{\Delta S_0}{S_0} \right) = 0,00460 \frac{\text{S}}{\text{m}} \approx 0,005 \frac{\text{S}}{\text{m}}.$$

одакле је

$$\sigma = (48 \pm 5) \text{mS/m}.$$

1.9.

Из једначине (2) следи

$$S = \frac{dG}{dV} = \frac{G_0}{V_0} e^{-\frac{V}{V_0}}.$$

Одатле следи да је највећа осетљивост кад је $V = 0$ и она износи $S_{\max} = \frac{G_0}{V_0} = 0,21 \frac{\text{mS}}{\text{L}}$. Најмања осетљивост је једнака нули и добија се кад запремина тежи бесконачности.

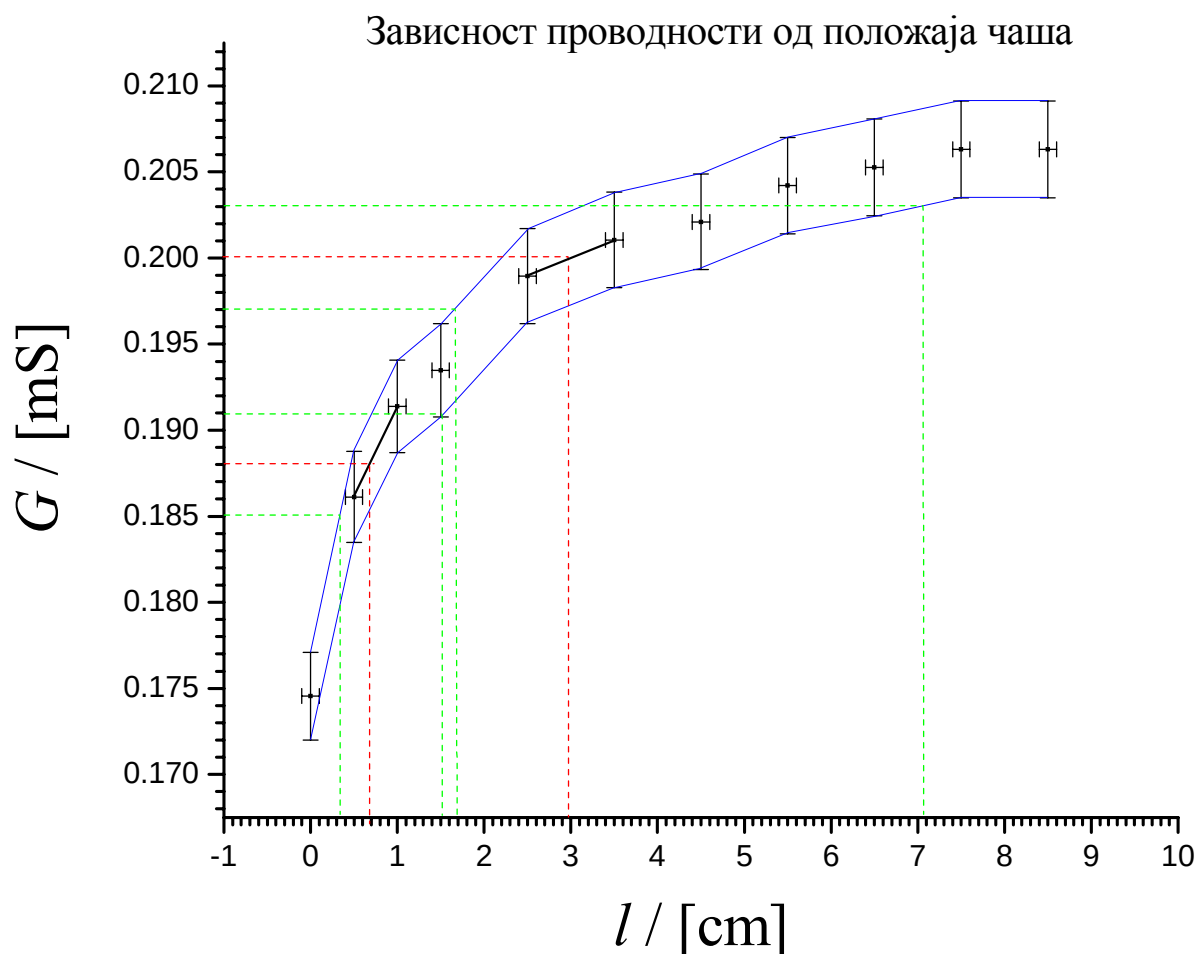
2.1.

$l / [\text{cm}]$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,5	3,5
$\Delta l / [\text{cm}]$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$I / [\text{mA}]$	1,66	1,77	1,82	1,84	1,89	1,91
$\Delta I / [\text{mA}]$	0,02 (0,0183)	0,02 (0,0189)	0,02 (0,0191)	0,02 (0,0192)	0,02 (0,0194)	0,02 (0,0195)
$U / [\text{V}]$	9,51	9,51	9,51	9,51	9,50	9,50
$\Delta U / [\text{V}]$	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)
$G / [\text{mS}]$	0,175	0,186	0,191	0,193	0,199	0,201
$\Delta G / [\text{mS}]$	0,003 (0,0025)	0,003 (0,0026)	0,003 (0,0027)	0,003 (0,0027)	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)

$l / [\text{cm}]$	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
$\Delta l / [\text{cm}]$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$I / [\text{mA}]$	1,92	1,94	1,95	1,96	1,96
$\Delta I / [\text{mA}]$	0,02 (0,0196)	0,02 (0,0197)	0,02 (0,0198)	0,02 (0,0198)	0,02 (0,0198)
$U / [\text{V}]$	9,50	9,50	9,50	9,50	9,50
$\Delta U / [\text{V}]$	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)	0,04 (0,03375)
$G / [\text{mS}]$	0,202	0,204	0,205	0,206	0,206
$\Delta G / [\text{mS}]$	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)	0,003 (0,0028)

Грешке струје, напона и проводности се рачунају као и раније. За грешку мерења растојања од електроде може да се узме вредност јединичног подеока на леђиру, односно 1mm.

2.2.



2.3.

У зависности где је члан комисије ставио чашу могу да се добију различити резултати. Ево једног примера шта може да се добије. За напон је измерена вредност $9,51\text{V}$, а за струју вредност $1,79\text{mA}$. Одавде добијамо да је проводност $(0,188 \pm 0,003)\text{mS}$. Са графика можемо да прочитамо да ова проводност одговара растојању од електрода од $0,7\text{cm}$ (праве за читавање су дате црвеним тачкастим линијама на графику). Процену грешке ове вредности такође је могуће направити са графика, тако што се читају вредности положаја за вредности проводности са почетка и краја интервала грешке (у овом случају за $0,185\text{mS}$ и $0,191\text{mS}$). Праве за то читавање дате су зеленим испрекиданим линијама. Након читавања се добија да је положај чаше у интервалу од $0,3\text{cm}$ до $1,5\text{cm}$. Одатле коначно следи да је положај чаше дат са $(0,9 \pm 0,6)\text{cm}$.

2.4.

Није увек могуће одредити положај чаше са грешком мањом од 1cm . Нпр, ако би била измерена проводност од $(0,200 \pm 0,003)\text{mS}$ истим поступком као у делу 2.3. (који је приказан на слици) би се добило да је положај чаше $3,0\text{cm}$, а истим поступком за анализу грешке би се добило да је положај чаше негде у интервалу од $1,7\text{cm}$ до $7,1\text{cm}$, па је грешка свакако већа од 1cm .