49. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2010/2011. ГОДИНЕ.

IV РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД
9.04.2011.

1. Стаклени отворени суд цилиндричног облика има висину h_0=40 cm и пречник d=20 cm. На његовом дну налази се мали отвор кроз који истиче вода из суда. Ако се суд потпуно напуни водом она из њега истекне за да t_0=2h . Коефицијент контракције млаза износи k=0,65.

а) одредити колика је површина S_1 отвора на дну суда,

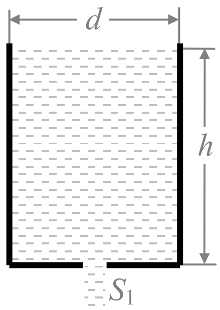
б) наћи како висина воде у суду h зависи од времена,

в) на којем растојању од дна суда треба да се налазе зарези тако да ниво воде између било која два суседна зареза опадне за τ =20 min. **(21п)**

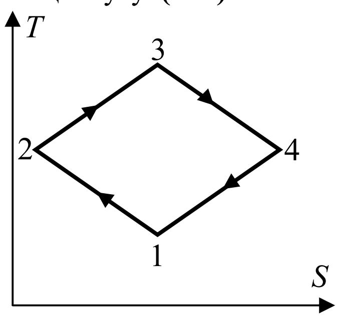
2. Емисиони и апсорпциони спектар атома се не поклапају због узмака атома. До појаве резонантне апсорпције долази само ако је ширина енергетских нивоа ΔE, између којих се врши прелаз, већа од двоструке енергије узмака атома. Наћи количник ових енергија те показати да ли постоји могућност резонантне апсорпције при прелазима електрона у омотачу атома за атоме у миру. Таласна дужина Лајманове L_α линије атома водоника је λ=121,6nm, а вероватноћа прелаза са побуђеног, n = 2, на основни, m = 1, ниво је A = 5,46 $\cdot 10^8 s^{-1}$. Маса атома водоника је $M = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg . Користити $\sqrt{1+2\varepsilon} \approx 1+\varepsilon-\varepsilon^2/2$ за ε<<1 **(25п)**

3. Честица се налази у бесконачно дубокој правоугаоној потенцијалној јами. Одредити вероватноћу налажења честице на другом енергетском нивоу у интервалу координата одређеним максималним вредностима густине вероватноће. Како се мења укупна вероватноћа налажења између узастопних максимума са повећањем квантног броја n? **(17п)**

4. На слици 4 је на T-S (температура – ентропија) дијаграму приказан топлотни циклус, који има облик ромбоида, чије су дијагонале паралелне осама. Температура се у целом циклусу промени 2 пута. Наћи степен корисног дејства топлотне машине која би радила по датом циклусу. **(12п)**



Слика 1



Слика 4

5. __**Дифузија мастила на води.**__ Приликом капања мастила на површину воде долази до процеса дифузије што резултује повећањем површине мрље од мастила током времена. Процес дифузије честица мастила се у овом случају може описати једначином $S = kt^\gamma$, где су S површина мрље од мастила у датом тренутку t, а k и γ константе које описују овај процес. У случају нормалне дифузије повећање површине је линеарно у времену, па је дифузиони коефицијент γ = 1. У случају када је 0< γ < 1 процес је субдифузиони, а када је 1< γ < 2 реч је о супердифузији.

У прилогу су дате фотографије мастиљаве мрље на површини воде снимљене након одређених временских интервала од тренутка укапавања мастила. Испод сваке фотографије је назначено време након којег је она снимљена.

а) Користећи се лењиром одредити површину мрље на свакој фотографији. Резултате приказати табеларно и нацртати график зависности $S(t)$ са одговарајућим грешкама.

б) Одредити дифузиони коефицијент γ и константу сразмерности k.Да ли је приком ширења мастила на површини воде присутан процес субдифузије или супердифузије? **(25п)**

Константе: $g = 9,81 m/s^2$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js , $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C .

Задатке припремио: *др Александар Крмпот,* Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Ђорђе Спасојевић,* Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,*Физички факултет, Београд

1. Нека је h ниво воде у суду мерен у односу на ниво малог отвора. Ако се има у виду да атмосферски притисак p_a влада и изнад и испод суда, онда Бернулијева једначина има облик

$$p_a + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = p_a + \frac{\rho v_1^2}{2} \quad \textbf{(2п)}$$

где су ρ густина флуида, а v и v_1 брзина спуштања флуида у суду и брзина истицања флуида кроз мали отвор на дну суда, респективно. Одавде је брзина истицања $v_1 = \sqrt{2gh + v^2}$ **(1п).** Према једначини континуитета је $Sv = kS_1 v_1$ **(1п),** те уз помоћ израза за брзину истицања налазимо $v = a\sqrt{h}$, где је a константа која износи $a = kS_1\sqrt{\frac{2g}{S^2 - k^2 S_1^2}}$ **(2п).**

У датом примеру за брзину спуштања флуида у суду важи $v = -dh/dt$ **(1п)** те тако добијамо једначину

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -a dt \ \textbf{(1п)},$$

која одређује како се ниво воде у суду h мења током времена. Њеном интеграцијом налазимо

$$\sqrt{h} - \sqrt{h_0} = -\frac{a}{2} t \ \textbf{(2п)},$$

односно

$$h(t) = h_0 - at\sqrt{h_0} + \frac{a^2}{4} t^2 \ \textbf{(2п)},$$

где је искоришћено да је h_0 ниво воде у суду у почетном тренутку времена t=0. У тренутку t_0 сва вода је истекла (h=0), те је $h_0 = a^2 t_0^2 / 4$ **(2п).** Из овог услова и израза за константу a налазимо

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{2k}\sqrt{\frac{h_0}{4h_0 + 2gt_0^2}} = 1{,}92\,\mathrm{mm}^2 \quad \textbf{(3п)}$$

Лако се види и да зарезе треба поставити на висинама $\sqrt{h_n} - \sqrt{h_0} = -n\frac{a\tau}{2}$ **(2п),** где је $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Заменом бројних вредности налазимо: h_1=27,8cm, h_2=17,8cm, h_3=10cm, h_4=4,4cm и h_5=1,1cm **(2п)**.

2. Узмак је највећи код најлакших атома. Због тога посматрајмо Лајманову L_α линију атома водоника чија је таласна дужина дата у задатку. Како је A=1/τ добија се да је средње време побуђеног стања $\tau = \Delta t = 1{,}83 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}$ **(1п).**

Из релације неодређености $\Delta t \Delta E = \hbar$ може се израчунати неодређеност енергије побуђеног стања (пошто је основно стање дугоживеће, односно неодређеност енергије у том стању је нула)

$$\Delta E = \hbar / \tau = 5{,}76 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{J} \ \text{ односно } \ \Delta E = 3{,}6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{eV} \ \textbf{(2п)}.$$

С друге стране енергија узмака атома, у тренутку емитовања фотона, се може добити из закона одржања импулса и енергије

$$p_{atom} = p_{foton} = \frac{h\nu}{c} \ \textbf{(1п)}, \qquad E_2 = E_1 + \frac{p_{atom}^2}{2M} + h\nu \ \textbf{(3п)}$$

где су E_1 и E_2 енергије основног, m = 1, и побуђеног стања, n = 2, респективно.
Комбинујући претходне две формуле добија се

$$E_2 - E_1 = h\nu\left(1 + \frac{h\nu}{2Mc^2}\right) \textbf{(2п)}$$

Одавде је $h\nu = Mc^2\left(-1+\sqrt{1+2\dfrac{E_2-E_1}{Mc^2}}\right)$ **(3п)** јер је друго решење физички бесмислено. Нађено решење се може написати у једноставнијем облику ако се уочи да је $\left(E_2-E_1\right)/Mc^2 \ll 1$ **(1п)** и искористи апроксимативна формула $\sqrt{1+2\varepsilon} \approx 1+\varepsilon-\varepsilon^2/2$. Тако налазимо

$$h\nu = E_2 - E_1 - \frac{\left(E_2-E_1\right)^2}{2Mc^2} \quad \textbf{(3п)}$$

Упоређивањем овог израза са изразом који представља закон одржања енергије при емисији фотона, следи да последњи члан представља енергију узмака атома.
У трнеутку упијања (апсорбовања) фотона, закони одржања импулса и енергије имају облик

$$p_{atom} = p_{foton} = \frac{h\nu}{c} \qquad E_1 + h\nu = E_2 + \frac{p_{atom}^2}{2M} \quad \textbf{(2п)}$$

одакле се аналогним поступком добија

$$h\nu = E_2 - E_1 + \frac{\left(E_2-E_1\right)^2}{2Mc^2} \quad \textbf{(2п)}$$

где сада последњи члан представља енергију узмака атома приликом процеса упијања (апсорпције) фотона. Из нађених израза следи да је двострука енергија узмака атома

$$\frac{(E_2-E_1)^2}{Mc^2} = \frac{(h\nu)^2}{Mc^2} = \frac{h^2}{M\lambda^2} = 1,77\cdot 10^{-26}\,\mathrm{J} = 1,11\cdot 10^{-7}\,\mathrm{eV} \quad \textbf{(2п)}$$

те количник ширине енергетских нивоа ΔE и двоструке енергије узмака атома износи

$$\frac{\Delta E}{\left(E_2-E_1\right)^2/Mc^2} = 3,2 \quad \textbf{(3п).}$$

Према томе узмак не спречава резонантну апсорпцију.

3. Таласне функције за честицу у бесконачно дубокој правоугаоној потенцијалној јами ширине a су $\Psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$, (n=1,2, ...) **(2п).** Густина вероватноће за налажење честице у положају x је

$$w_n(x) = |\Psi_n(x)\Psi_n^*(x)| = \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a} \quad \textbf{(2п)}.$$

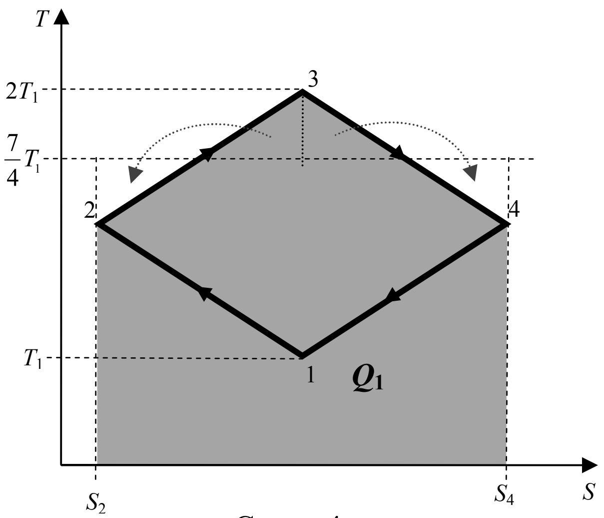
Њени максимуми су у тачкама $x_1 = a/4$ **(1п)** и $x_2 = 3a/4$ **(1п)** за $n = 2$, па је тражена вероватноћа

$$W = \int_{a/4}^{3a/4}\frac{2}{a}\sin^2\frac{2\pi x}{a}dx = \frac{1}{2} \quad \textbf{(2+1п)}.$$

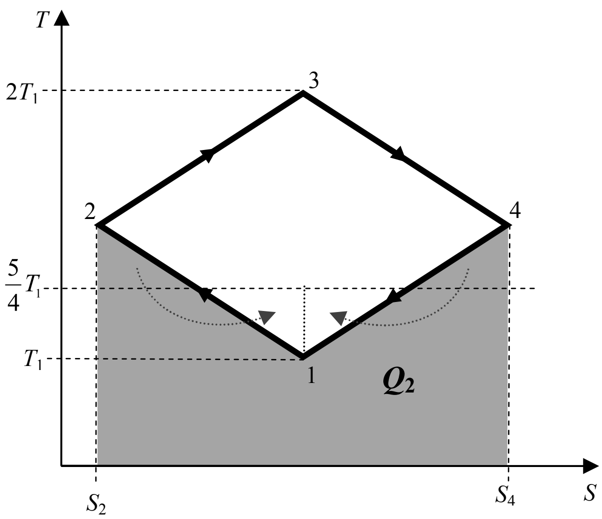
За $n > 1$ густина вероватноће има максимуме у тачкама $x_{n,k} = ka/2n$ **(3п)** где је k = 1, 3, 5…2n-1. Стога је вероватноћа налажења честице између два суседна максимума, зависно од квантног броја n, једнака

$$W(n) = \int_{(2k-1)\frac{a}{2n}}^{(2k+1)\frac{a}{2n}}\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{1}{n} \quad \textbf{(3+2п)}.$$

4. Из дефиниције ентропије $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ **(1п)** следи да је размењена количина топлоте у неком процесу $\Delta Q = T\Delta S$ **(1п)**, што је једнако површини испод криве која представља дати процес на *T*-*S* дијаграму. Примљена количина топлоте Q_1 је једнака површини испод криве 2-3-4 (слика 4а), а апсолутна вредност предате количине топлоте Q_2 је једнака површини испод криве 2-1-4 (слика 4б). На основу података датих у задатку, лако се налази да средња температура у току процеса 2-3-4 износи $\frac{7}{4}T_1$, те је $Q_1 = \frac{7}{4}T_1\Delta S$ **(4п)**, где је ΔS промена ентропије у току процеса 2-3-4. На сличан начин налазимо да је $Q_2 = \frac{5}{4}T_1\Delta S$ **(4п)**, те је коефицијент корисног дејства $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2}{7}$ **(2п)**.



Слика 4а

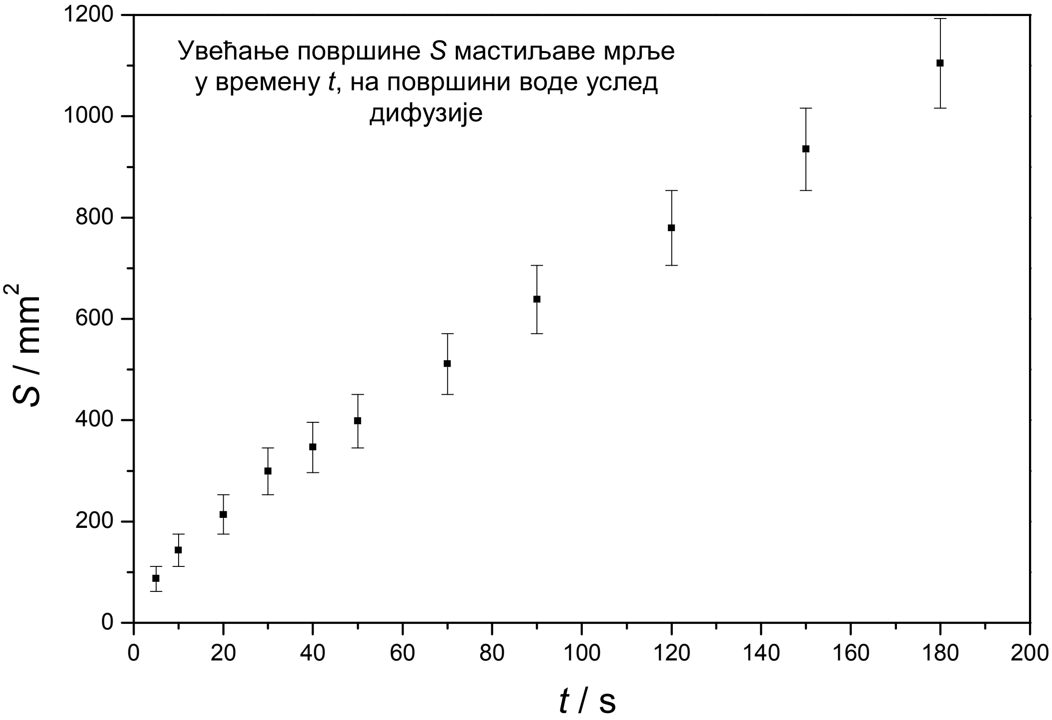


Слика 4б

5. а) Са слика се јасно види да можемо сматрати да су мрље од мастила кружног облика те се површина може одредити мерењем пречника мрље и коришћењем размерника, датог на првој фотографији у прилогу. У табели су дате измерене вредности пречника мастиљаве мрље d_i и реалног пречника d добијеног као $d = 1{,}5\ d_i$**(0,5п)**. Приликом мерења лењиром са милиметарском поделом грешка мерења је Δd_i = 1mm . Из једнакости релативних грешака за измерен и реалан пречник мрље се добија $\Delta d = \frac{\Delta d_i}{d_i} d$ **(0,5п)**. Површина мрље се рачуна као $S = \frac{d^2\pi}{4}$, те следи да је $\Delta S = 2\frac{\Delta d}{d} S$ **(0,5п)**.

Бр.	t [s]	d_i [mm]	Δd_i [mm]	d [mm]	Δd [mm]	S [mm^2]	ΔS [mm^2]
1	5	7	1	10,5	1,5	90	20
2	10	9	1	13,5	1,5	140	30
3	20	11	1	16,5	1,5	210	40
4	30	13	1	19,5	1,5	300	50
5	40	14	1	21	1,5	350	50
6	50	15	1	22,5	1,5	400	50
7	70	17	1	25,5	1,5	510	60
8	90	19	1	28,5	1,5	640	70
9	120	21	1	31,5	1,5	780	80
10	150	23	1	34,5	1,5	930	80
11	180	25	1	37,5	1,5	1100	90

(2п)



(2п)

б) Да би се одредио дифузиони коефицијент γ и константа сразмерности k потребно је линеаризовати функцију $S(t)$ на следећи начин:

$$\ln(S/1\text{mm}^2) = \ln(kt^{\gamma}/1\text{mm}^2)\ \textbf{(2п)}$$

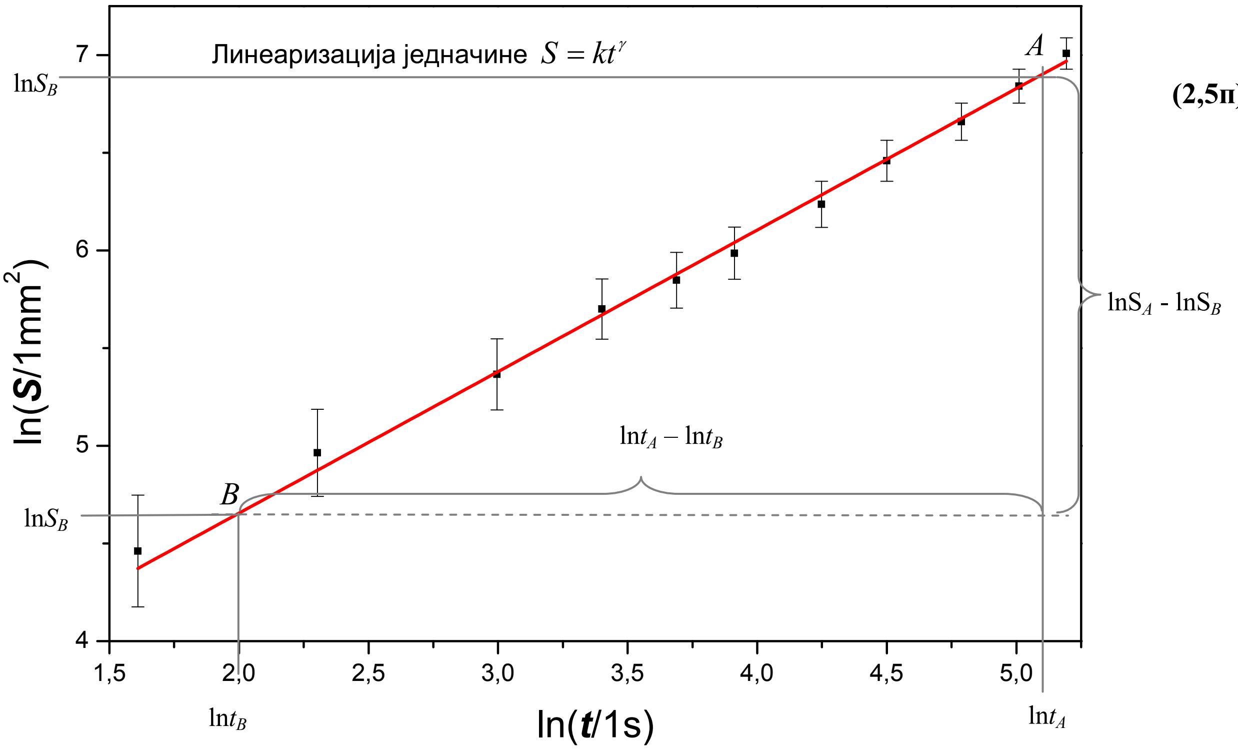
(дељење са 1mm^2 је потребно извршити да би подлогаритамска величина била бездимензионална). Одавде је

$$\ln\left(\frac{S}{1\text{mm}^2}\right) = \ln\left(k\cdot 1\frac{\text{s}^{\gamma}}{\text{mm}^2}\right) + \gamma\ln\left(\frac{t}{1\text{s}}\right)\ \textbf{(1п)}$$

што представља једначину праве са коефицијентом правца γ и одсечком $\ln\left(k\cdot 1\frac{\text{s}^{\gamma}}{\text{mm}^2}\right)$ на ординатној оси. Апсолутна грешка логаритма неке величине је једнака релативној грешки подлогаритамске величине, односно $\Delta\left(\ln\left(\frac{S}{1\text{mm}^2}\right)\right) = \frac{\Delta S}{S}$ **(0,5п)**.

Бр.	$\ln(t/1\text{s})$	$\ln(S/1\text{mm}^2)$	$\Delta\left(\ln\left(S/1\text{mm}^2\right)\right)$
1	0,69897	4,5	0,3
2	1	5,0	0,2
3	1,30103	5,4	0,2
4	1,47712	5,7	0,2
5	1,60206	5,9	0,2
6	1,69897	6,0	0,1
7	1,8451	6,2	0,1
8	1,95424	6,4	0,1
9	2,07918	6,6	0,1
10	2,17609	6,84	0,09
11	2,25527	7,01	0,08

(2п)



(2,5п)

У програмском пакету Орицин 8.0 (Origin 8.0) добијени су следећи резултати за параметре праве линије

$$\gamma = 0{,}72 \pm 0{,}05$$

$$\ln\left(k \cdot 1\frac{\text{s}^{\gamma}}{\text{mm}^2}\right) = 3{,}2 \pm 0{,}2$$

Следи да је $k = e^{3,2} = 24{,}53253\dfrac{\text{mm}^2}{\text{s}^{0,7}}$. Грешка за k се добија из $\Delta \ln\left(k \cdot 1\dfrac{\text{s}^{\gamma}}{\text{mm}^2}\right) = \dfrac{\Delta k}{k}$ па је

$$k = (24 \pm 5)\frac{\text{mm}^2}{\text{s}^{0,7}}.$$

Из вредности за дифузиони коефицијент γ јасно се види да је у датом процесу присутна субдифузија.

За одређивање тражених константи графичком методом потребно је унутар мерног опсега одабрати две што удаљеније (неексперименталне) тачке на правој. Да би грешка била што мања треба изабрати тачке чије се апсцисе поклапају са линијама на милиметарском папиру. Тиме се грешка своди на грешку која следи из грешки мерења јер је грешка очитавања на апсциси занемарљива. У „нашем" случају је и грешка мерења занемарљива, те је грешка по апсциси занемарљива. На ординати: грешка очитавања се квадратно сабира са грешком из мерења. Грешка очитавања је једнака вредности једног милиметра у датој размери. Грешке које следе из грешака мерења су овде барем три пута веће од грешака очитавања, те се грешке очитавања могу занемарити.

Нека је вредност једног милиметра на $\ln(S/1\text{mm}^2)$ оси 0,02. Тада се за одабране тачке $\ln t_A$= 5,1 и $\ln t_B$= 2 са графика могу очитати вредности $\ln S_A$ = 4,72 и $\ln S_B$ = 6,88 **(0,5п)**. Коефицијент правца се добија као

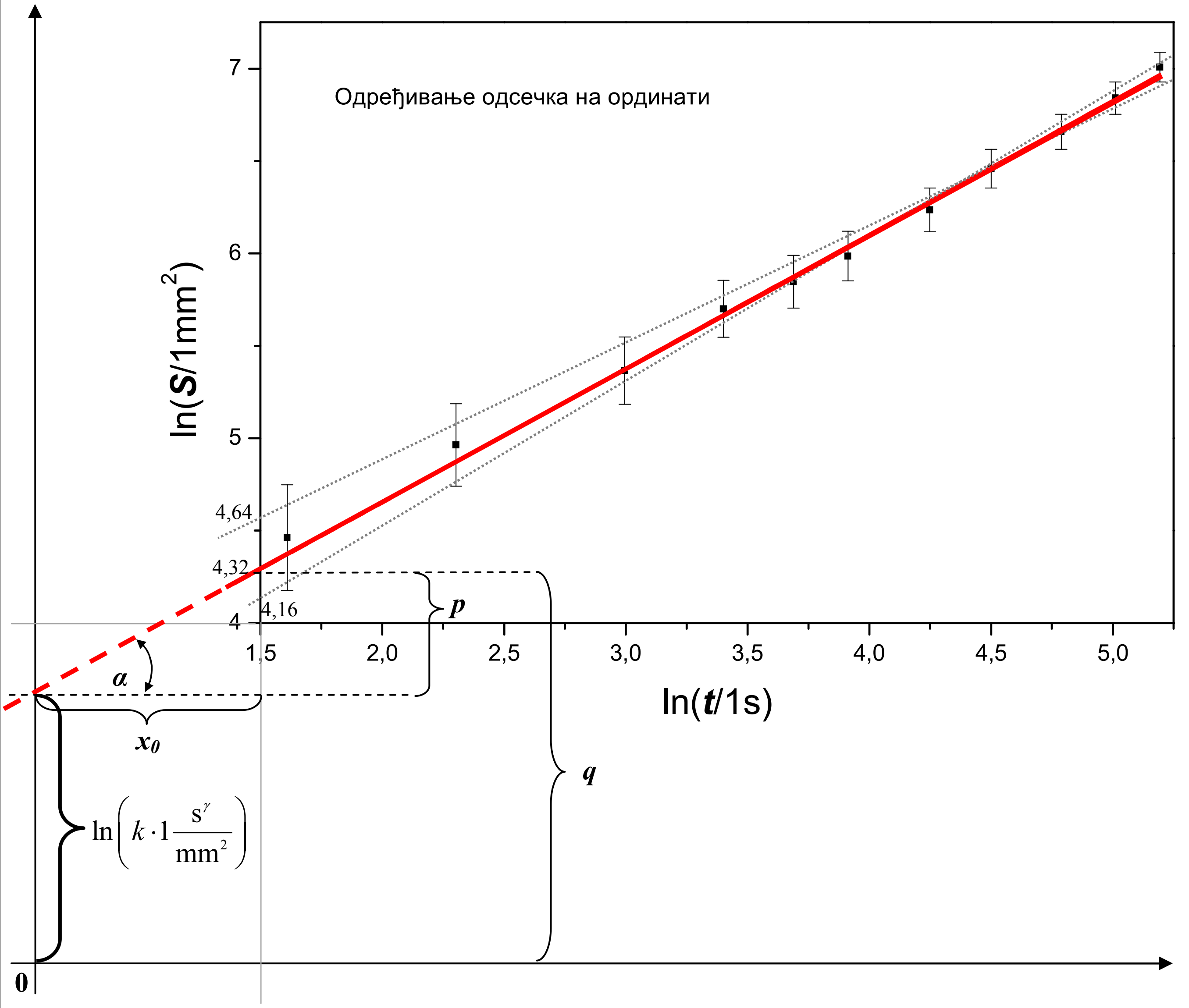
$$\gamma = \frac{\ln(S/1\text{mm}^2)_A - \ln(S/1\text{mm}^2)_B}{\ln\left(t/1\text{s}\right)_A - \ln\left(t/1\text{s}\right)_B} = 0{,}696774$$ **(1п)**. Релативна грешка за коефицијент правца је

$$\delta\gamma = \frac{\Delta \ln(S/1\text{mm}^2)_A + \Delta \ln(S/1\text{mm}^2)_B}{\ln(S/1\text{mm}^2)_A - \ln(S/1\text{mm}^2)_B} + \frac{\Delta \ln\left(t/1\text{s}\right)_A + \Delta \ln\left(t/1\text{s}\right)_B}{\ln\left(t/1\text{s}\right)_A - \ln\left(t/1\text{s}\right)_B} = \frac{0{,}09 + 0{,}3}{6{,}88 - 4{,}72} + \frac{0{,}015 + 0{,}015}{5{,}1 - 2} = 0{,}19023$$

(1п)

где су за $\Delta \ln(S/1\text{mm}^2)_A$ и $\Delta \ln(S/1\text{mm}^2)_B$ узете веће од грешака мерења суседних тачака. Из свега се за коефицијент правца добија $\gamma = (0{,}7 \pm 0{,}1)$ **(2п)**.

За одсечак на y оси је прочитана вредност q = 4,32 **(0,5п)**. Пошто y на приказаном графику не пролази кроз тачку x=0 онда се тражена константа из једначине праве може одредити као $\ln\left(k\cdot 1\frac{s^{\gamma}}{mm^2}\right) = q - p$ што се јасно види са слике. Величина p се може одредити као $p = x_0 \mathrm{tg}\alpha$ где је tgα=γ што је већ одређено, а x_0 =1,5 вредност од које почиње x оса на датом графику. Следи да је $\ln\left(k\cdot 1\frac{s^{\gamma}}{mm^2}\right) = q - x_0 \mathrm{tg}\alpha = 4{,}32 - 1{,}5\cdot 0{,}696774 = 3{,}274839$ **(1п)**



За одређивање грешке одсечка би требало повући праву највећег и праву најмањег нагиба које још увек пролазе кроз експерименталне тачке у домену њихових грешака. Затим наћи разлику одсечака које оне праве са одсечком најбоље праве која је повучена, понаособ, и као грешку узети већу од тих разлика. Овако добијена грешка би требало да се квадратно сабере са грешком очитавања. У нашем случају већа разлика одсечака је 0,32 па се за коначну грешку одсечка на ординати има

$\Delta q = \sqrt{0{,}32^2 + 0{,}02^2} = 0{,}3206$ **(1п)**

Следи да је $\Delta \ln\left(k \cdot 1\frac{\mathrm{s}^{\gamma}}{\mathrm{mm}^2}\right) = \Delta q + \Delta\gamma = 0,4585$ **(0,5п)** (x_0 сматрати за безгрешно ☺). Коначан резултат за одсечак на y оси је $\ln\left(k \cdot 1\frac{\mathrm{s}^{\gamma}}{\mathrm{mm}^2}\right) = 3,3 \pm 0,5$ **(2п).**

Из добијеног резултата константа k се може израчунати као $k = e^{3,3} = 27,1126\frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{s}^{0,7}}$ **(0,5п)**. Грешка за k се добија из $\Delta \ln\left(k \cdot 1\frac{\mathrm{s}^{\gamma}}{\mathrm{mm}^2}\right) = \frac{\Delta k}{k}$ **(0,5п)** па је $k = (30 \pm 10)\frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{s}^{0,7}}$ **(1п)**.