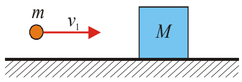
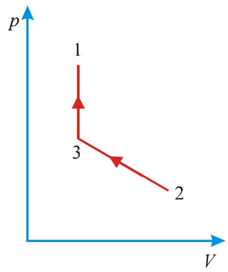
ДРУШТВО ФИЗИЧАРА СРБИЈЕ
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ И СПОРТА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Задаци за републичко такмичење из физике ученика средњих школа
Гимназија "Свети Сава", Београд, 21-22. април 2007. године
II разред

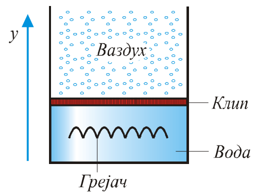


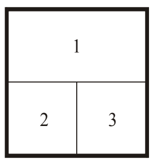
1. На коцку масе $M = 1\,\mathrm{kg}$ која на хоризонталној подлози мирује, налеће метак занемарљивих димензија, масе $m = 1\,\mathrm{g}$, летевши хоризонтално брзином $v_1 = 10^3\ \mathrm{m/s}$ (види слику). Израчунајте колики пут ће прећи коцка после интеракције са метком до заустављања: а) ако се метак еластично одбије од коцке крећући се после судара истим правцем као и пре судара, али супротним смером; б) ако се метак зарије у коцку и настави са њом да се креће до заустављања; в) ако метак прође кроз коцку и настави кретање истим правцем и смером брзином $v_2 = 500\,\mathrm{m/s}$: г) Израчунајте однос почетних брзина коцке у случају а) и б) после интеракције са метком ако је $m = M$? Коефицијент трења између подлоге и коцке износи $k = 0{,}2$. Убрзање силе земљине теже је $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. (20 п)



2. Један мол хелијума из почетног стања 1 са температуром $T_1 = 100\,\mathrm{K}$ рашири се кроз турбину у празан суд, извршивши при томе неки рад, и прелази на крају у равнотежно стање 2. Овај неравнотежни $(m \neq const.)$ процес ширења се одиграва без размене топлоте са околином $(\Delta Q = 0)$. Затим се гас сажима у процесу 2 – 3 при чему постоји линеарна зависност притиска од запремине и, на крају, гас се изохорским процесом 3 – 1 враћа у своје почетно стање (види слику). Израчунати рад који изврши гас при ширењу кроз турбину на прелазу 1 – 2, као и рад при сажимању у процесу 2 – 3, ако је у процесима 2 – 3 и 3 – 1 гасу била укупно доведена количина топлоте $Q = 72\,\mathrm{J}$. Познато је да је $T_2 = T_3$ и $V_2 / V_3 = 3$. Универзална гасна константа је R = 8,3 J/(mol K). (20 п)

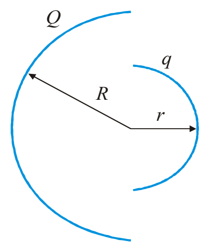
3. У високом цилиндричном суду површине попречног пресека $S = 20\,\mathrm{cm}^2$ испод лаког клипа налази се $m = 9\,\mathrm{g}$ воде (види слику) на температури од $t_0 = 20^\circ\mathrm{C}$. Воду почнемо да загревамо помоћу грејача снаге $P = 100\,\mathrm{W}$ у току следећих пет минута. За задати временски период скицирајте график зависности y – координате клипа од времена, израчунајте релевантна времена и положаје клипа потребне да скицирате график и израчунајте максималну брзину клипа. За вредност атмосферског притиска узети да је $p_0 = 10^5\ \mathrm{Pa}$, за специфични топлотни капацитет воде $c = 4200\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}$ а за специфичну топлоту испаравања воде $r = 2{,}26 \times 10^6\ \mathrm{J/kg}$. Топлотно ширење воде занемарити. (20 п)





4. Високи метални вертикални суд занемарљиве масе и квадратног попречног пресека подељен је вертикалним преградама на три дела (види слику). Запремина дела 1 једнака је збиру запремина делова 2 и 3. Запремине делова 2 и 3 су једнаке. У сваки од тих делова улили смо воду различите температуре до исте висине, и то: у део 1 воду температуре $+65^{\circ}\mathrm{C}$, у део 2 воду температуре $+35^{\circ}\mathrm{C}$ и у део 3 воду температуре $+20^{\circ}\mathrm{C}$. Спољашње облоге суда су јако добро топлотно изоловане, док су унутрашње преграде јако танке и сачињене од истог материјала, имају исту дебљину и слабо проводе топлоту. Кроз неко време се температура воде у делу 1 смањи за $1^{\circ}\mathrm{C}$. Процените за колико се, за то исто време, променила температура воде у деловима 2 и 3, ако је количина топлоте која пролази кроз преграду у јединици времена пропорционална површини контакта и разлици температура са обе стране преграде. (15 п)

5. Посматрајте две непроводне полусфере полупречника R и r ($R > r$), које су наелектрисане одговарајућим количинама истоимених наелектрисања Q и q (види слику њиховог попречног пресека). Наелектрисања су равномерно распоређена по површинама полусфера, тј. површинске густине наелектрисања су: $\sigma_R = \dfrac{Q}{2\pi R^2}$ за већу и $\sigma_r = \dfrac{q}{2\pi r^2}$ за мању полусферу. Центри полусфера се поклапају а површине максималних пресека полусфера се налазе у истој равни. а) Нађите општи израз за укупну силу међусобног дејства F између ове две полусфере, ако је притисак којим једна полусфера делује на другу дефинисан са $p = E\sigma$. б) Користећи се резултатом добијеним под а), а на основу података из табеле, графичком методом израчунајте вредност R и обрадите одговарајуће грешке мерења,



F [10^{-7} N]	4,5	6,3	7,9	10,2	11,7	13,5
Q [10^{-8} C]	0,48	0,70	0,90	1,10	1,32	1,50

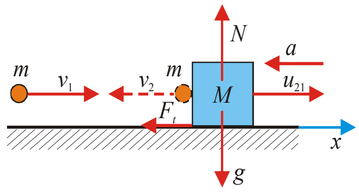
уз $\Delta F = 2\times10^{-8}$ N и $\Delta Q = 4\times10^{-10}$ C. Узети да је $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\times10^{9}\,\mathrm{m/F}$, $q = 2\times10^{-8}\,\mathrm{C}$. (25 п)

Задатке припремила: ***Маја Рабасовић,***
Институт за физику, Београд-Земун
Рецензент: ***др Драган Маркушев,***
Институт за физику, Београд-Земун
Председник Комисије за такмичење: ***др Мићо Митровић,***
Физички факултет, Београд

ДРУШТВО ФИЗИЧАРА СРБИЈЕ
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ И СПОРТА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Решења задатака за републичко такмичење из физике ученика средњих школа
Гимназија "Свети Сава", Београд, 21-22. април 2007. године
II разред

Р1. а) На основу закона одржања импулса, дуж x – осе (види слику) добијамо:



$$mv_1 = -mv_2 + Mu_{21},$$

где су v_2 и u_{21} брзине метка и коцке после судара. На основу закона одржања енергије имамо:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu_{21}^2}{2}.$$

Решавањем овог система једначина, уз услов $m << M$ добијамо:

$$v_2 = v_1 \frac{M-m}{M+m} \approx v_1; \quad u_{21} = \frac{2mv_1}{M}.$$

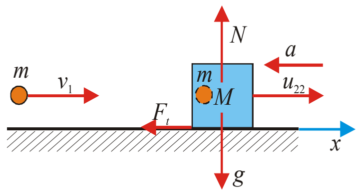
Применом другог Њутновог закона можемо да пишемо да је

$$Ma = F_t = kN = kMg.$$

Сада можемо да израчунамо пут l_1 који коцка прође до заустављања:

$$\boxed{l_1 = \frac{u_{21}^2}{2kg} = \frac{2m^2v_1^2}{kgM^2} \approx 1\,\text{m}.}$$

б) У овом случају закон одржања импулса даје



$$mv_1 = (m+M)u_{22}.$$

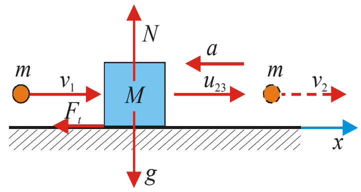
Из ове једначине се лако налази почетна брзина коцке (уз услов $m << M$):

$$u_{22} = \frac{mv_1}{(M+m)} \approx \frac{mv_1}{M}.$$

Сада је пут l_2 који пређе коцка до заустављања

$$\boxed{l_2 = \frac{u_{22}^2}{2kg} = \frac{m^2v_1^2}{2kgM^2} \approx 0{,}25\,\text{m}.}$$

в) У овом случају закон одржања импулса даје:



$$mv_1 = mv_2 + Mu_{23},$$

па је почетна брзина коцке

$$u_{23} = \frac{m(v_1 - v_2)}{M}.$$

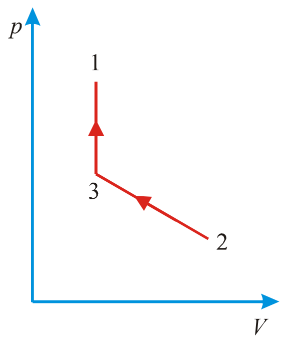
Пут l_3 који коцка пређе у овом случају биће

$$\boxed{l_3 = \frac{u_{23}^2}{2kg} = \frac{m^2(v_1 - v_2)^2}{2kgM^2} \approx 0{,}06\ \mathrm{m}.}$$

г) У том случају је $v_2 = 0$, а $u_{21} = \dfrac{2mv_1}{M+m} = v_1$, и $u_{22} = \dfrac{mv_1}{M+m} = \dfrac{v_1}{2}$, те је однос почетних брзина коцке, за случајеве а) и б): $\boxed{u_{21}/u_{22} = 2}$, и не зависи од односа маса коцке и метка.

* * *

Р2. Иако је процес 1 – 2 кроз турбину неравнотежан $(m \neq const.)$, и не може се приказати адијабатом $(\Delta Q = 0)$, ако су почетно и коначно стање равнотежни, а на основу закона одржања енергије, можемо тврдити да је рад извршен у том процесу једнак промени унутрашње енергије гаса ΔU:



$$A_{12} = -\Delta U = -C_V(T_2 - T_1) = C_V(T_1 - T_2).$$

На делу 2 – 3 где се гас сажима топлотни капацитет није константан, док се унутрашња енергија не мења ($T_2 = T_3$). Рад који се изврши при том процесу једнак је површини испод праве 2 – 3, тј:

$$A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_2 - V_3),$$

па користећи услов задатка $T_2 = T_3$ имамо $p_2V_2 = p_3V_3 = \nu RT_2$ те $\dfrac{V_2}{V_3} = 3$ на крају добијамо $(\nu = 1)$

$$A_{23} = \frac{(p_3V_2 - p_2V_3)}{2} = RT_2 \frac{\left(\dfrac{V_2}{V_3}\right)^2 - 1}{2\dfrac{V_2}{V_3}} = \frac{4}{3}RT_2.$$

Пошто се унутрашња енергија не мења, по закону одржања енергије рад на сажимању гаса једнак је одведеној количини топлоте у том процесу тј. $A_{23} = Q_{23}$.
На делу изохорског загревања 3 – 1 гас добија количину топлоте

$$Q_{31} = C_V\left(T_1 - T_3\right) = C_V\left(T_1 - T_2\right).$$

Из услова задатка следи да је, уз $C_V = (3/2)R$,

$$Q = Q_{31} - Q_{23} = \frac{3}{2}R\left(T_1 - T_2\right) - \frac{4}{3}RT_2,$$

одакле је

$$RT_2 = \frac{9}{17}RT_1 - \frac{6}{17}Q = 414 \text{ J}.$$

Сада можемо израчунати тражене радове помоћу

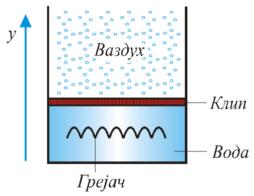
$$\boxed{A_{23} = \frac{4}{3}RT_2 = 552 \text{ J},}$$

и

$$\boxed{A_{12} = \frac{3}{2}R\left(T_1 - T_2\right) = \frac{12}{17}RT_1 + \frac{9}{17}Q \approx 624 \text{ J}.}$$

* * *

Р3. Све док температура воде не достигне тачку кључања $t_\text{k} = 100^\circ\text{C}$ клип ће бити непокретан ($v_1 = 0$). Ако је почетна температура воде $t_0 = 20^\circ\text{C}$, време загревања воде до кључања ће бити



$$\boxed{\tau_1 = \frac{cm\left(t_\text{k} - t_0\right)}{P} \approx 30 \text{ s}.}$$

По достизању температуре кључања притисак засићене водене паре постаје једнак атмосферском, и клип почиње да се креће на горе. Померај клипа одређен је количином испарене воде. За неко време $\Delta\tau$ у пару ће се претворити маса воде једнака

$$\Delta m = \frac{P\Delta\tau}{r}.$$

Та количина ће имати запремину

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{M}\frac{RT}{p_0},$$

где је $M = 18\,\text{g/mol}$, а $T = 373\,\text{K}$ тј. температура t_k. Брзина кретања клипа биће једнака

$$\boxed{v_2 = \frac{\Delta V}{S\Delta\tau} = \frac{PRT}{rSMp_0} \approx 0{,}04\,\text{m/s}.}$$

Сва вода ће испарити за време

$$\boxed{\tau_2 - \tau_1 = \frac{mr}{P} = 203{,}4\,\text{s}.}$$

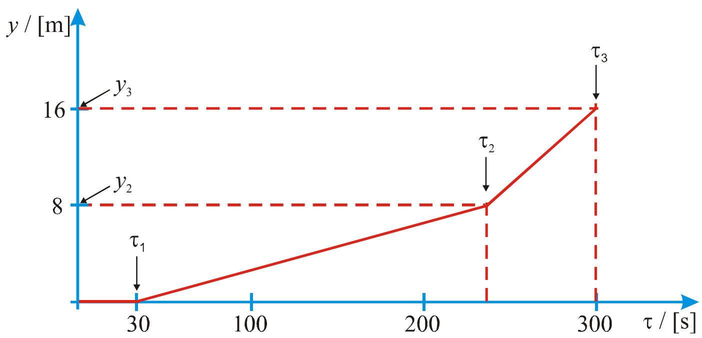
То значи да је $\tau_2 \approx 233{,}4\,\text{s}$ а $y_2 = v_2(\tau_2 - \tau_1) \approx 8\,\text{m}$. Након тога ће се испод клипа налазити само водена пара (троатомни гас) и промена запремине испод клипа ће бити везана за повећање температуре гаса при константном притиску. Топлотни капацитет троатомног гаса ће бити $C_p = C_V + R = 4R$. Тада је

$$\Delta T = \frac{Q}{\nu C_p} = \frac{P\Delta\tau}{\frac{m}{M}4R}, \quad \Delta V = \frac{m}{M}\frac{R\Delta T}{p_0} = \frac{P\Delta\tau}{4p_0},$$

па брзина кретања клипа у периоду између τ_2 и $\tau_3 = 300\,\text{s}$ износи

$$\boxed{v_3 = \frac{\Delta V}{S\Delta\tau} = \frac{P}{4Sp_0} = 0{,}125\,\text{m/s} \approx 3v_2.}$$

То значи да је $y_3 = y_2 + v_3(\tau_3 - \tau_2) \approx 16\,\text{m}$. *Такође је v_3 уједно и максимална брзина кретања клипа у задатом временском периоду*. График зависности y – координате клипа од времена τ скициран је на доњој слици.



* * *

Р4. Приликом решавања овог задатка сматраћемо да је топлотни капацитет овог суда занемарљиво мали. То је и разумљиво јер је, по услову задатка, маса суда занемарљива у односу на масу воде, преграде су јако танке, а и специфични топлотни капацитет метала је много мањи од воде. По услову задатка је $Q \sim S(T'-T'')$. Површине контакта са водом различитих температура су у нашем случају једнаке, па можемо написати да вода из суда 1 предаје топлоту води из суда 2

$$Q_1 = k(65^\circ - 35^\circ) = k \cdot 30^\circ,$$

из суда 1 води из суда 3

$$Q_2 = k(65^\circ - 20^\circ) = k \cdot 45^\circ,$$

и из суда 2 води из суда 3

$$Q_3 = k(35^\circ - 20^\circ) = k \cdot 15^\circ,$$

где је k константа пропорционалности. Укупан *губитак* топлоте воде из дела 1 износи

$$Q_1 + Q_2 = k \cdot 75^\circ,$$

док је вода из дела 2 *добила* количину топлоте

$$Q_1 - Q_3 = k \cdot 15^\circ,$$

а вода из дела 3 је *добила* количину топлоте

$$Q_2 + Q_3 = k \cdot 60^\circ.$$

Узимајући у обзир да вода у делу 1 има двоструко већу масу од воде у деловима 2 и 3 појединачно, *прираштај* температуре воде у делу 2 износи

$$\boxed{\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1 \cdot 15 \cdot 2}{75} = 0{,}4^\circ \mathrm{C},}$$

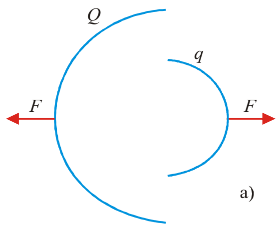
док је *прираштај* температуре воде у делу 3

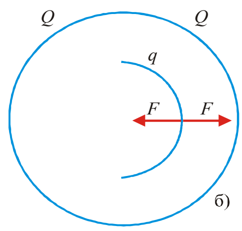
$$\boxed{\Delta t_3 = \frac{\Delta t_1 \cdot 60 \cdot 2}{75} = 1{,}6^\circ \mathrm{C},}$$

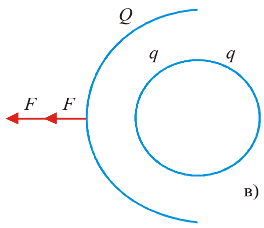
где је $\Delta t_1 = 1^\circ \mathrm{C}$ губитак температуре воде из дела 1.

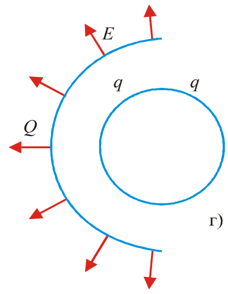
* * *

Р5. На слици а) су приказани смерови дејства сила које делују на полусфере у случају истоимених наелектрисања. Ако овом систему додамо још једну полусферу полупречника R и наелектрисања Q (слика б)), укупна сила која делује на полусферу полупречника r биће једнака нули, јер је поље унутар наелектрисане сфере једнако нули. На овај начин можемо закључити да лева и десна половина веће сфере делују на мању полусферу силама истог интензитета и правца али супротног смера. Ако сада, уместо велике, нашим полусферама додамо мању полусферу полупречника r и наелектрисања q (слика в)), јасно је да ће две мање полусфере деловати на већу као сфера наелектрисања $2q$ полупречника r на полусферу полупречника R и наелектрисања Q силом $2F$. Ту силу лако налазимо знајући да је вредност јачине поља на површини веће полусфере (слика г))







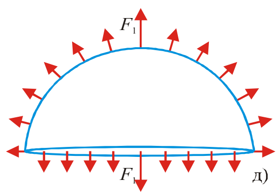


$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{R^2},$$

а да је притисак којим делујемо на већу полусферу

$$p = E\sigma_R = E\frac{Q}{2\pi R^2},$$

где је σ_R површинска густина наелектрисања веће полусфере. Резултујућа сила једнака је по интензитету укупној сили притиска која делује на површину која затвара полусферу (слика д))



$$F_1 = \pi R^2 p.$$

Узевши у обзир да је $F_1 = 2F$ добијамо да је

$$\boxed{F = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = kQ,}$$

где је k коефицијент правца графика $F = f(Q)$. Када нацртамо поменути график узмемо две тачке са праве и то тако да прву тачку узимамо између прве две А($0{,}6 \times 10^{-8}$ C, $5{,}4 \times 10^{-7}$ N/C), а другу између последње две експерименталне тачке В($1{,}4 \times 10^{-8}$ C, $12{,}6 \times 10^{-7}$ N/C). На основу њих добијамо коефицијент правца праве

$$k = \frac{F_2 - F_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{(12{,}6 - 5{,}4)}{(1{,}4 - 0{,}6)} 10\,\frac{\text{N}}{\text{C}} = 90\,\frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Грешка коефицијента правца износи

$$\Delta k = k\left(\frac{\Delta F_1 + \Delta F_2}{F_2 - F_1} + \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_1}{Q_2 - Q_1}\right) = 90\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\left(\frac{0{,}2 + 0{,}2}{7{,}2} + \frac{0{,}04 + 0{,}04}{0{,}8}\right) = 14\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \approx 20\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

Сада је

$$\boxed{k = (9 \pm 2)\times 10^1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.}$$

На основу

$$\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = k,$$

можемо да пишемо да је

$$R^2 = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 k} = \frac{1}{2}\cdot 9\times 10^9 \cdot \frac{2\times 10^{-8}}{90}\,\mathrm{m}^2,$$

па је квадрат полупречника

$$R^2 = 1\,\mathrm{m}^2,$$

а полупречник је $\boxed{R = 1\,\mathrm{m}.}$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2}\frac{\Delta k}{k} = 7{,}8\,\%\text{, тј. } \Delta R = 0{,}078\,\mathrm{m},$$

па је на крају

$$\boxed{R = (1{,}00 \pm 0{,}08)\,\mathrm{m}.}$$