ДРЖАВНА ЗАЈЕДНИЦА СРБИЈА И ЦРНА ГОРА
39. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
Основна школа “Милош Црњански”
Београд, 28.-30. мај 2004.
Општа група

Пре него што почнете да решавате задатке, пажљиво прочитајте следеће упутство:

- Задаци се решавају на папирима које сте затекли на столу, а коначни резултати се уписују у **табеле за одговоре,** које сте добили заједно са овим задацима.

- На табеле за одговоре упишите своју шифру. Своје име НЕ СМЕТЕ уписати ни на табелама, ни на папирима.

- Ако за неки задатак имате неколико различитих решења, у табелу за одговоре упишите онај резултат који сматрате тачним, а на папирима прецртајте решења која не сматрате тачним.

- Када завршите са израдом задатака, предаћете и папире на којима решавате задатке и табеле за одговоре.

- Теоријски задаци се раде 5 сати

- Можете да користите следеће интеграле и апроксимације:
  $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$; $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ где је α реалан број и $\alpha \neq -1$;
  $\int \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$; $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$, где је $x << 1$.

Задатке припремили: Бранислав Цветковић
Душко Латас
Антун Балаж
Председник комисије: др Мићо Митровић

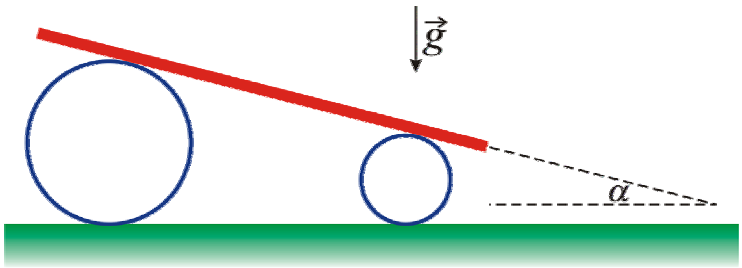
Теоријски задатак 1

Део А 6 бодова

Шипка на цилиндрима

Танка хомогена шипка налази се на два лака, шупља цилиндра различитог полупречника као што је приказано на слици 1. Цилиндри се налазе на хоризонталној подлози, а шипка заклапа угао α са хоризонталом. Колико ће бити убрзање шипке непосредно након почетка кретања? Током кретања шипка не проклизава по цилиндрима, а цилиндри не проклизавају по подлози.

Слика 1



Део Б 6 бодова

Релативистичка ракета

Релативистичка ракета избацује гас константном брзином u у односу на ракету. Ако је у почетном тренутку маса ракете била m_0, одредити зависност брзине v ракете од њене масе m. Сматрати да у почетном тренутку ракета мирује и да је $u << c$.

Део В 5 бодова

Бор – Зомерфелдов услов кватновања

Из Бор-Зомерфелдовог постулата за периодично кретање честице у потенцијалном пољу следи правило квантовања $\oint p\,\mathrm{d}q = 2\pi\hbar n$, где су p и q импулс и координата честице, n природан број, док се интеграција врши по затвореној трајекторији честице. Користећи овај услов одредити дозвољене вредности енергије за честицу масе m која се креће:

а) у једнодимензионалној бесконачно дубокој потенцијалној јами ширине l;

б) у једнодимензионалном потенцијалном пољу $U = \alpha x^2/2$, где је α позитивна константа.

Део Г 3 бода

Семиемпиријска формула за масу језгра

Семиемпиријску формулу за масу језгра поставио је Вајцзекер:

$$M_j(A,Z)c^2 = Zm_p c^2 + (A-Z)m_n c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta .$$

Овде су m_p и m_n масе протона и неутрона, а остале величине су константе које имају следеће вредности: $a_v = 14{,}0\,\mathrm{MeV}$, $a_s = 13{,}0\,\mathrm{MeV}$, $a_c = 0{,}584\,\mathrm{MeV}$, $a_a = 19{,}3\,\mathrm{MeV}$. Сматрати да су енергије мировања протона и неутрона приближно једнаке. Одредити редни број бета-стабилног језгра за изобарни ланац са масеним бројем 23.

Теоријски задатак 2 20 бодова

Термоелектрично хлађење

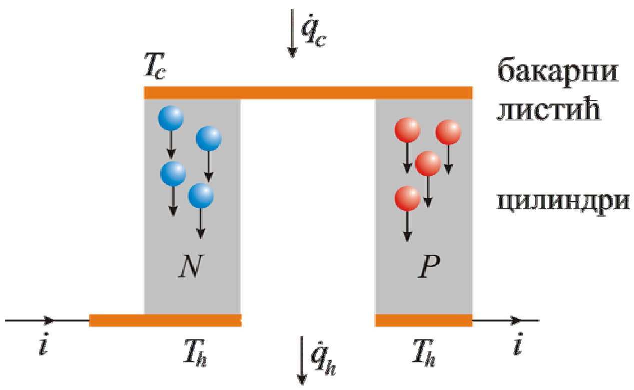
Када електрична струја i протиче од проводника A ка проводнику B, на споју два проводника се у јединици времена апсорбује или емитује количина топлоте по закону:

$$\dot{q} = (\alpha_B - \alpha_A) \cdot T \cdot i ,$$

где је T апсолутна температура споја, док су α_A и α_B *Сибекови коефицијенти* који одговарају проводницима A и B респективно. Величина $\dot{q}$, која се назива *Пелтијеова топлота*, је позитивна када се на споју апсорбује топлота.

Пелтијеова топлота омогућава да склоп приказан на слици 2 ради као фрижидер. Бакарни листићи су повезани са цилиндрима начињеним од полупроводника N и P типа. Када кроз склоп протиче електрична струја i, топлота се апсорбује на "горњим" спојевима, а емитује на "доњим". Због тога се горња страна склопа охлади до температуре T_c, а доња страна се загреје до температуре T_h. Предмет који би требало охладити може се ставити на хладну страну склопа. Топла страна склопа повезана је са апсорбером топлоте.

Слика 2



Капацитет склопа за хлађење је делимично умањен Џуловом топлотом која се издваја на цилиндрима, као и провођењем топлоте од топле ка хладној страни. Топлота коју у јединици времена апсорбује склоп (на својој хладној страни) је дата модификованим изразом:

$$\dot{q}_c = (\alpha_P - \alpha_N)\, T_c\, i - a(T_h - T_c) - b i^2 ,$$

где су a и b позитивне константе.

У претходној једначини занемарен је електрични отпор спојева и бакарних листића и претпоставља се да се размена топлоте са околином одвија само на спојевима. Сибекови коефицијенти, као и коефицијенти топлотне и електричне проводљивости полупроводних цилиндара N и P су α_N и α_P, k_N и k_P те σ_N и σ_P респективно. Ове величине не зависе од температуре.

Количина топлоте која у јединици времена протекне кроз попречни пресек сваког од полупроводних цилиндара једнака је производу коефицијента топлотне проводљивости, површине попречног пресека цилиндра и градијента температуре $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$.

Дужина полупроводних цилиндара је L, а површина њиховог попречног пресека A.

а) Одредите електричне отпоре полупроводних цилиндара. Колика је Џулова топлота која се у јединици времена издваја на сегменту дужине $(x - x_0)$

полупроводног цилиндра N типа ?

б) Посматрајте сегмент дужине $(x - x_0)$ цилиндра N типа и напишите једначину топлотног баланса. Одредите количину топлоте која се у јединици времена апсорбује кроз хладни спој бакарног листића и полупроводног цилиндра N типа.

в) Изразите a и b у функцији k_N, k_P, σ_N, σ_P, A и L.

г) Колика је најнижа могућа температура T_c за дато T_h? Користећи податке дате у табели одредите најнижу могућу вредност T_c за $T_h = 300\,\mathrm{K}$.

Упутство: да би посматрани склоп радио као фрижидер мора да важи $\dot{q}_c \geq 0$.

$\alpha_P - \alpha_N$ [V/K]	a [W/K]	b [Ω]
$4.0 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$

Теоријски задатак 3

Електромагнетна левитација

Мали магнет у облику шипке може се посматрати као магнетни дипол, који се по аналогији са електричним диполом састоји од магнетних набоја q_m и $-q_m$ који се налазе на његовом северном и јужном полу, респективно. Магнетни момент дипола је дат изразом $\vec{m} = q_m \vec{d}$, где је $\vec{d}$ вектор растојања усмерен од јужног ка северном полу магнета.

Јачина магнетног поља $\vec{B}$ магнетног набоја q_m је обрнуто сразмерна квадрату растојања и дата је изразом:

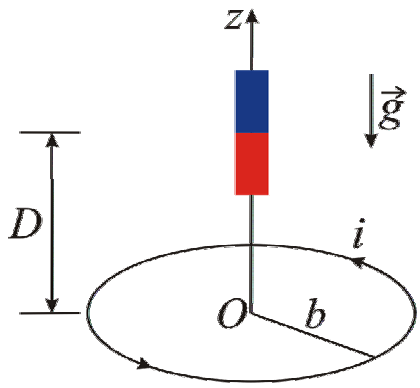
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{r^2}\vec{e}_r,$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја посматране тачке (у односу на набој који се налази у координатном почетку), а $\vec{e}_r$ јединични вектор $\vec{r}/r$. Јачина магнетног поља дипола магнетног момента $\vec{m}$ је:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{m}}{r^3}\right].$$

На слици 3 је приказан жичани прстен радијуса b. Центар прстена O налази се у тачки $z = 0$. Мали стални магнет масе M може да се креће по оси симетрије прстена, односно по $z-$оси. Гравитационо убрзање је g. Занемарите ефекте самоиндукције у прстену.

Слика 3



Део А 12 бодова

Нека кроз прстен протиче стална електрична струја јачине i. Растојање између магнета и центра прстена је D. Сматрати да је $d << D$.

а) Колика је јачина струје која протиче кроз прстен ако се магнет налази у равнотежи?

б) Одредите фреквенцију малих осцилација магнета око равнотежног положаја.

Део Б 18 бодова

Нека је у почетном тренутку $i = 0$ и нека прстен није повезан са изворима струје или напона.

в) Претпоставимо да се магнет креће по $z-$оси. Електрични отпор прстена је R. Израчунајте интензитет магнетне силе F_m која делује на магнет у тренутку када се он налази на растојању z од центра прстена и када је његова брзина v.

г) Нека се магнет креће дуж $z-$осе тако да је његов положај у тренутку t дат изразом $z(t) = h\cos\omega t$. Одредите индуковану електромоторну силу у прстену као функцију времена t. Сматрати да је $h << b$.

СРБИЈА И ЦРНА ГОРА
Југословенско друштво физичара
Министарство просвете и спорта Републике Србије
Министарство просвјете и науке Републике Црне Горе
Министарство за просвјету, науку и културу Републике Српске

39. Савезно такмичење из физике
Београд 2004.

Експериментални задаци
трећи разред и општа група

Задатак 1.

Одредити коефицијент еластичности дате опруге, мерењем периода малих осцилација. Проценити грешку мерења.

(15 поена)

Препорука: Пратите зависност периода осциловања опруге од масе којом је оптерећена.

Мерни комплет

1. Опруга
2. Хронометар
3. Носачи
4. Комплет тегова

На теговима је означена њихова маса. Грешке масе су занемарљиве.

Задатак 2.

Одредити таласну дужину светлости коју емитује ласер, помоћу дифракционих решетки познатих константи. Проценити грешку мерења.

(15 поена)

Препорука: Пратите зависност положаја дифракционих максимума на екрану иза решетке од параметра решетке.

Мерни комплет

1. Ласер 2. Екран 4. Милиметарски папир

5. Дифракционе решетке чије су константе дате у табели која следи. На располагању су вам 5 од 6 наведених решетки.

решетка	R_5	R_4	R_X	R_3	R_2	R_1
d [μm]	16	24	29	36	40	46

Грешке параметара решетке се могу занемарити.

Аутор: Андријана Жекић (1), Мићо Митровић (2)
Рецензент: Мићо Митровић (1), Андријана Жекић (2)
Председник комисије: Мићо Митровић

39. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
Београд, 28.-30. мај 2004.

Решења задатака за Општу групу

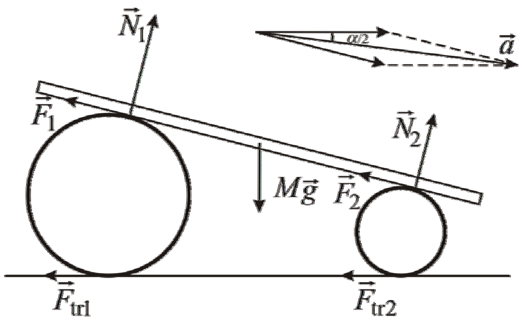
Теоријски задатак 1

Део А

Шипка на цилиндрима

Како се цилиндри крећу без проклизавања то је $\alpha_1 r_1 = a_1$ и $\alpha_2 r_2 = a_2$. Како даска не проклизава по цилиндрима убрзање даске је једнако убрзањима додирних тачака цилиндара и даске (слика 1):

Слика 1



$a = 2a_1 \cos\frac{\alpha}{2} = 2a_2 \cos\frac{\alpha}{2}$. Као што се види са слике вектор убрзања даске са хоризонталом заклапа угао $\alpha/2$. Дакле једначине кретања за шипку су:

$$Mg\sin\frac{\alpha}{2} + N_1 \sin\frac{\alpha}{2} + N_2 \sin\frac{\alpha}{2} - F_1 \cos\frac{\alpha}{2} - F_2 \cos\frac{\alpha}{2} = Ma\,,$$

$$Mg\cos\frac{\alpha}{2} = N_1 \cos\frac{\alpha}{2} + N_2 \cos\frac{\alpha}{2} + F_1 \sin\frac{\alpha}{2} + F_2 \sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Једначине кретања за транслацију и ротацију цилиндара су:

$0 = F_i \cos\alpha - N_i \sin\alpha - F_{tri}$, $F_i r_i + F_{tri} r_i = 0$, где је $i = 1,2$, одакле следи да је

$$F_i = \frac{N_i \sin\alpha}{1+\cos\alpha} = N_i \tan\frac{\alpha}{2}\,.$$

Заменом добијеног израза у прву једначину за шипку добија се да је убрзање шипке:

$$a = g\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Део Б

Релативистичка ракета

Нека је брзина ракете у неком тренутку v. Закон одржања импулса за систем гориво+ракета у инерцијалном систему који се креће брзином v гласи: $m \cdot \mathrm{d}v' = -\mathrm{d}m \cdot u$.

Из релативистичког закона слагања брзина следи $\mathrm{d}v' = \dfrac{\mathrm{d}v}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$.

Заменом у претходну једначину добија се: $\dfrac{\mathrm{d}v}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = -\dfrac{\mathrm{d}m}{m}u$.

Интеграцијом се добија: $v = c\dfrac{1-\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^{2u/c}}{1+\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^{2u/c}}$.

Део В

Бор – Зомерфелдов услов кватновања

а) Импулс честице која се налази у бесконачно дубокој потенцијалној јами је константан. Честица се еластично одбија од зидова потенцијалне јаме и врши периодично кретање па је $\int p\mathrm{dx} = p2l = 2\pi\hbar n$. Одавде следи да су дозвољене вредности импулса честице $p_n = \dfrac{n\hbar\pi}{l}$. Дозвољене енергије честице су: $E_n = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ml^2}$.

б) Једначина кретања честице је: $m\ddot{x} + \alpha x = 0$, па је $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, где је $\omega = \sqrt{\dfrac{\alpha}{m}}$. Импулс честице је $p = m\dot{x} = mA\omega\cos(\omega t + \varphi)$. Из Бор-Зомерфелдовог услова квантовања следи: $\int\limits_0^{2\pi/\omega} p\dot{x}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi/\omega} mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = mA^2\omega\pi = 2\pi n\hbar$. Дозвољене вредности енергије честице су: $E_n = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = n\hbar\omega.$

Део Г

Семиемпиријска формула за масу језгра

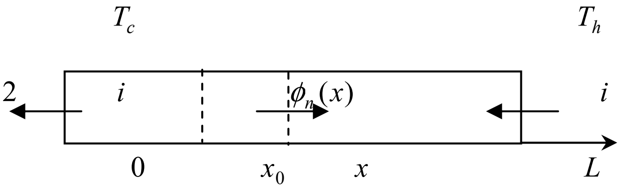
Бета стабилна језгра су она за које је маса језгра минимална за дати масени број. Дакле потребно је наћи минимум функције $M_j(Z,A)$ за дато A. Из услова $\dfrac{\mathrm{d}M_j}{\mathrm{d}Z} = 0$ добија се: $(m_p - m_n)c^2 + 2a_c\dfrac{Z}{A^{1/3}} - 4a_a\dfrac{(A-2Z)}{A} = 0$, одакле следи да је редни број бета стабилног језгра дат изразом: $Z_{st} = \dfrac{(4a_a + (m_n - m_p)c^2)A}{8a_a + 2a_c A^{2/3}}$. Заменом бројних вредности добија се $Z_{st} = 11$.

Теоријски задатак 2

Термоелектрично хлађење

а) Електрични отпор полупроводника N типа је $R_n = \dfrac{L}{\sigma_n A}$, где је σ_n електрична проводност цилиндра, док за Р-тип важи $R_p = \dfrac{L}{\sigma_p A}$. За сегмент цилиндра N типа дужине $x - x_0$ Џулова топлота која се у јединици времена издваја због протицања електричне струје i је дата изразом $P_{Jn} = \dfrac{(x-x_0)i^2 R_n}{L} = \dfrac{(x-x_0)i^2}{\sigma_n A}$.

б) Размотримо најпре топлотне и електричне струје које теку кроз цилиндар начињен од полупроводника N типа, као што је приказано на слици 2:

Слика 2


Нека је $\phi_n(x)$ струја топлотног провођења која протиче кроз цилиндар, а $T(x)$ температура на попречном пресеку. Тада је на основу Фуријеовог закона:

$$\phi_n(x) = -k_n A \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,.$$

Једначина топлотног баланса гласи:

$\phi_n(x) - \phi_n(x_0) = \dfrac{(x-x_0)}{L} i^2 R_n$, тј. $-k_n A \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \phi_n(x_0) + \dfrac{i^2 R_n}{L}(x - x_0)$.

Решавањем претходне једначине за $x_0 = 0$ добија се:

$-k_n A\left[T(x) - T(0)\right] = \phi_n(0)x + \dfrac{i^2 R_n}{L}\dfrac{x^2}{2}$. Како је $T(L) = T_h$ и $T(0) = T_c$, за $x = L$ из претходне једначине се добија:

$$\phi_n(0) = -k_n \frac{A}{L}(T_h - T_c) - \frac{i^2 R_n}{2}\,.$$

Џулова топлота која се издваја на бакарним листићима као и губици електричне енергије на споју су занемарљиви. Како је температура бакарног листића константна нема топлотног провођења од једног ка другом полупроводном цилиндру. Обележимо топлотну струју коју апсорбује хладни спој са полупроводником N типа са $\dot{q}_n(0)$. Тада је:

$\dot{q}_n(0) - \phi_n(0) = (\alpha_{Cu} - \alpha_n)T_c i$, одакле је:

$$\dot{q}_n(0) = (\alpha_{Cu} - \alpha_n)T_c i - k_n \frac{A}{L}(T_h - T_c) - \frac{i^2 R_n}{2}\,.$$

в) Слична анализа се може применити и на полупроводник Р типа. Тада је:

$$R_p = \frac{L}{\sigma_p A},\ \phi_p(0) = -k_p \frac{A}{L}(T_h - T_c) - \frac{i^2 R_p}{2},\ \dot{q}_p(0) - \phi_p(0) = (\alpha_p - \alpha_{Cu})T_c i\,.$$

Како је $\dot{q}_c = \dot{q}_p(0) + \dot{q}_n(0)$, то је:

$$\begin{aligned}\dot{q}_c &= (\alpha_p - \alpha_{Cu})T_c i + \phi_p(0) + (\alpha_{Cu} - \alpha_n)T_c i + \phi_n(0)\\ &= (\alpha_p - \alpha_n)T_c i - (k_p + k_n)\frac{A}{L}(T_h - T_c) - \frac{i^2(R_n + R_p)\cdot}{2}\end{aligned}$$

Дакле тражени коефицијенти су: $a = \left(k_p + k_n\right)\dfrac{A}{L}$ и $b = \dfrac{R_p + R_n}{2} = \dfrac{L}{2A}\left(\dfrac{1}{\sigma_p} + \dfrac{1}{\sigma_n}\right)$.

г) Из $\dot{q}_c = \beta T_c i - a(T_h - T_c) - bi^2$, где је $\beta = \alpha_p - \alpha_n$ следи да је: $T_c = \dfrac{aT_h + bi^2 + \dot{q}_c}{\beta i + a}$.

Како је $\dot{q}_c \geq 0$ то је $T_c \geq T_{c\min}(i) = \dfrac{aT_h + bi^2}{\beta i + a}$. Даље је потребно наћи минимум израза на десној страни. Минимум се постиже за $\dfrac{\mathrm{d}T_{c\min}}{\mathrm{d}i} = 0$, одакле је: $i = \dfrac{a}{\beta}\left(\sqrt{1 + \dfrac{T_h \beta^2}{ab}} - 1\right)$. Тражена минимална температура је :

$$T_{c\min} = \frac{2ab}{\beta^2}\left(\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{ab}T_h} - 1\right) = 230\,\mathrm{K}\,.$$

Теоријски задатак 3

Електромагнетна левитација

Део А

а) Јачина магнетног поља $\vec{B}$ прстена кроз који протиче електрична струја i у тачки на $z-$оси са координатом z је: $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z = \dfrac{\mu_0 i b^2}{2(z^2 + b^2)^{3/2}}\vec{e}_z$.

Интензитет магнетне силе која делује на магнет је дат изразом:

$$F_m = q_m B\left(D - \frac{d}{2}\right) - q_m B\left(D + \frac{d}{2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 i b^2 q_m}{2}\left\{\frac{1}{\left[(D - \frac{d}{2})^2 + b^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(D + \frac{d}{2})^2 + b^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$\approx \frac{3\mu_0 i b^2 (q_m d) D}{2(D^2 + b^2)^{5/2}}$$

Да би се магнет налазио у равнотежи мора да важи $F_m = Mg$. Дакле тражена јачина струје је:

$$i = \frac{2Mg(D^2 + b^2)^{5/2}}{3\mu_0 b^2 m D}\text{, где је } m = q_m d\,.$$

б) Када се магнет изведе из равнотежног положаја за мало растојање ε тада је:

$$F_m = \frac{3\mu_0 i b^2 m(D + \varepsilon)}{2\left[(D + \varepsilon)^2 + b^2\right]^{5/2}} \approx \frac{3\mu_0 i b^2 m(D + \varepsilon)}{2(D^2 + b^2)^{5/2}}.$$

Интензитет резултатнтне силе која делује на магнет је:

$F = Mg - F_m = -\dfrac{3\mu_0 i b^2 m}{2(D^2 + b^2)^{5/2}}\varepsilon = M\ddot{\varepsilon}$, па је фреквенција малих осцилилација магнета:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\mu_0 i b^2 m}{2M(D^2+b^2)^{5/2}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{D}}\,.$$

Део Б

в) Када се магнет налази на $z-$оси и када је његова координата z, интензитет $z-$компоненте јачине магнетног поља магнета у тачки која се налази у равни прстена на растојању r од његовог центра је:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-3m\dfrac{z^2}{z^2+r^2}+m}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{1}{(z^2+r^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(z^2+r^2)^{5/2}}\right].$$

Флукс магнетног поља кроз прстен је:

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot\vec{e}_z \mathrm{d}S = 2\pi\int B_z r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 m}{2}\left\{\int_0^b \frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}}\mathrm{d}r - \int_0^b \frac{3z^2 r}{(z^2+r^2)^{5/2}}\mathrm{d}r\right\} = -\frac{\mu_0 m b^2}{2(z^2+b^2)^{5/2}}.$$

Индукована електромоторна сила у прстену је:

$\mathcal{E} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{3\mu_0 m b^2 z v}{2R(z^2+b^2)^{5/2}}$, где је $v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ брзина магнета.

Јачина индуковане струје која протиче кроз прстен је:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{3\mu_0 m b^2 z v}{2R(z^2+b^2)^{5/2}}\,.$$

Магнетно поље индуковане струје на $z-$оси је:

$$\vec{B}_{ind} = B_{ind}(z)\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}}\vec{e}_z = -\frac{3\mu_0^2 m b^4 z v}{4R(z^2+b^2)^4}\vec{e}_z\,.$$

Магнетне сила која делује на магнет је:

$$\vec{F}_m = q_m\left[B_{ind}(z-\frac{d}{2}) - B_{ind}(z+\frac{d}{2})\right]\vec{e}_z$$

$$= \frac{3\mu_0^2 m b^4 v q_m}{4R}\left\{-\frac{z-\dfrac{d}{2}}{\left[(z-\dfrac{d}{2})^2+b^2\right]^4} + \frac{z+\dfrac{d}{2}}{\left[(z+\dfrac{d}{2})^2+b^2\right]^4}\right\}\vec{e}_z,$$

тј. интензитет магнетне силе која делује на магнет је

$$F_m \approx \frac{3\mu_0^2 m^2 b^4 v}{4R(z^2+b^2)^5}\left(b^2-7z^2\right).$$

г) Индукована електромоторна сила је: $\mathcal{E} = -\dfrac{3\mu_0 m b^2 z v}{2R(z^2+b^2)^{5/2}} \approx -\dfrac{3\mu_0 m z v}{2b^3}$.

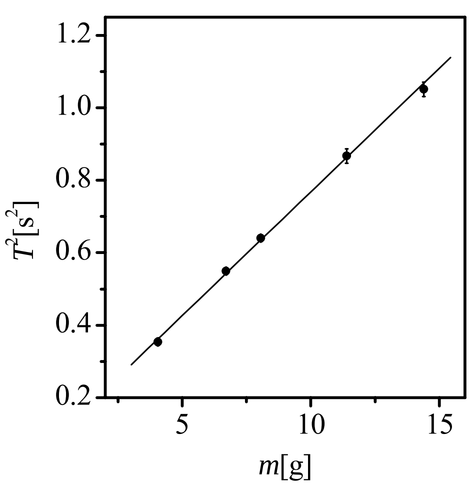
Како је $z = h\cos\omega t$, то је $v = -\omega h\sin\omega t$, па је $\mathcal{E} = \dfrac{3\mu_0 m\omega h^2}{4b^3}\sin 2\omega t$.

Савезно такмичење 2004.

Решење експерименталног задатка 1

Мерено је време t потребно да опруга оптерећена масом m направи n осцилација. Период осциловања је $T=\frac{t}{n}$, где је $n=10$ број осцилација. Време t се је одређено из три директна мерења, $t_s=\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$, а апсолутна грешка као максимално одступање $\left|t_i-t_s\right|_{max}$. Пошто је $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, из линеарне зависности $T^2=\frac{4\pi^2}{k}m$ може се одредити непозната константа опруге k. Резултати мерења дати су у табели.

	$m[g]$	$t_i[s]$	$t_S[s]$	$\Delta t[s]$	$T=\frac{t}{n}[s]$	$\Delta T=\frac{\Delta t}{n}[s]$	$T^2[s^2]$	$\Delta T^2=2T\Delta T[s^2]$
1	4.05	5.94 6.04 5.92	5.967 5.97	0.073 0.08	0.5967 0.597	0.0073 0.008	0.356 0.36	0.0087 0.01
2	6.70	7.47 7.39 7.37	7.407 7.41	0.063 0.07	0.7407 0.741	0.0063 0.007	0.549 0.55	0.0093 0.01
3	8.05	8.03 8.06 7.91	8.000 8.00	0.090 0.09	0.8000 0.800	0.0090 0.009	0.640 0.64	0.011 0.01
4	11.4	9.31 9.25 9.38	9.313 9.31	0.067 0.07	0.9313 0.931	0.0067 0.007	0.867 0.87	0.012 0.02
5	14.4	10.31 10.20 10.25	10.253 10.25	0.057 0.06	1.0253 1.025	0.0057 0.006	1.051 1.05	0.012 0.02



Са графика $T^2=f(m)$, одређује се коефицијент правца праве избором две неекспериментане тачке, нпр. A (5.3g; 0.45s^2) између прве и друге и B(12.6g; 0.95s^2) између последње и претпоследње експерименталне тачке.

Коефицијент правца се израчунав као:

$$a=\frac{T_{\mathrm{B}}^2-T_{\mathrm{A}}^2}{m_{\mathrm{B}}-m_{\mathrm{A}}}=\frac{(0.95-0.45)\mathrm{s}^2}{(12.6\text{ - }5.3)\mathrm{g}}=68.5\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}\,.$$

Релативна грешка се израчунава као $\frac{\Delta a}{a}=\frac{\Delta\left(T^2\right)_{\mathrm{B}}+\Delta\left(T^2\right)_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{B}}^2-T_{\mathrm{A}}^2}+\frac{\Delta m_{\mathrm{B}}+\Delta m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}-m_{\mathrm{A}}}$

$\frac{\Delta a}{a}=\frac{0.0093+0.012}{0.95-0.45}+\frac{0.1+0.1}{12.6-5.3}=0.07\Rightarrow\ \Delta a=4.8\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$, па је $a=(68\pm 5)\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$.

в) Пошто је $a=\frac{4\pi^2}{k}$, следи да је $k=\frac{4\pi^2}{a}=\frac{4\pi^2}{68.5}=0.576\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

$\frac{\Delta k}{k}=\frac{\Delta a}{a}=\ \Rightarrow\ \ \Delta k=0.04\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Тражена константа еластичности опруге износи:

$$k=(0.58\pm 0.04)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$

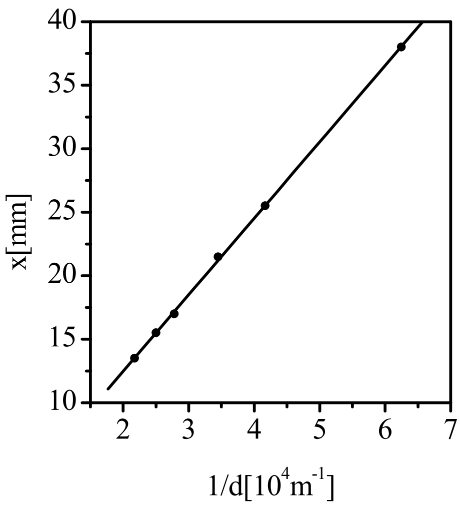
Савезно такмичење 2004.

Решење експерименталног задатка 2

Растојање између нултог максимума и максимума првог реда одређено је формулом $x=\frac{z}{2n}=\lambda L\frac{1}{d}$, где је y мерено растојање између максимума n-тог реда.

$1/d\ [10^4 m^{-1}]$	6.250	4.167	3.448	2.778	2.500	2.174
z [mm]	76	51	43	34	62	81
n	1	1	1	1	2	3
x [mm]	38.0	25.5	21.5	17.0	15.5	13.5

Процењена грешка мерења растојања крајњих видљивих максимума: Δx = 1 mm.
Растојање решетке и екрана је $L=(0.95\pm 0.02)\mathrm{m}$.
У наведеној зависности $x = f\,(1/d)$, фактор λL представља коефицијент правца праве. Нацртан је график $x = f\,(1/d)$.



Ради израчунавања коефицијента правца праве коришћењем графика, изабране се две неексперименталне тачке са праве, на пример A($2.6\cdot 10^4$ m^{-1}, 16 mm) и B($6\cdot 10^4$ m^{-1}, 36.6 mm).

Грешке очитавања са графика су $\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_A=\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_B=0.02\cdot 10^4\,\mathrm{m}^{-1}$.

Дакле, коефицијент правца и његова грешка износе:

$$k = \frac{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}{\left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{B}} - \left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{A}}} = \frac{(36.6 - 16)\mathrm{mm}}{(6 - 2.6)\cdot 10^{4}\,\mathrm{m}^{-1}} = 6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{2},$$

$$\Delta k = k\cdot\left(\frac{\Delta x_{\mathrm{A}} + \Delta x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{A}} + \Delta\left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{B}}}{\left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{B}} - \left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{A}}}\right), \text{ односно}$$

$$\Delta k = 6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{2}\left(\frac{1+1}{36.6-16} + \frac{0.02+0.02}{6-2.6}\right) = 0.66\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{2}.$$

Коефицијент правца износи $k = (6.1 \pm 0.7)\cdot 10^{-7}$ m^2.

Из релације $k = L\lambda$, следи да је таласна дужина светлости $\lambda = \frac{k}{L}$, односно

$$\lambda = \frac{6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{2}}{0.95\mathrm{m}} = 6.38\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 638\mathrm{nm}$$

а апсолутна грешка $\Delta\lambda = \lambda\cdot\left(\frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta L}{L}\right) = 6.38\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\left(\frac{0.66}{6.06} + \frac{0.02}{0.95}\right)$.

Дакле, $\Delta\lambda = 0.83\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

Тражена вредност таласне дужине износи

$$\lambda = (6.4 \pm 0.9)\cdot 10^{-7}\mathrm{m} = (640 \pm 90)\ \mathrm{nm}.$$