1

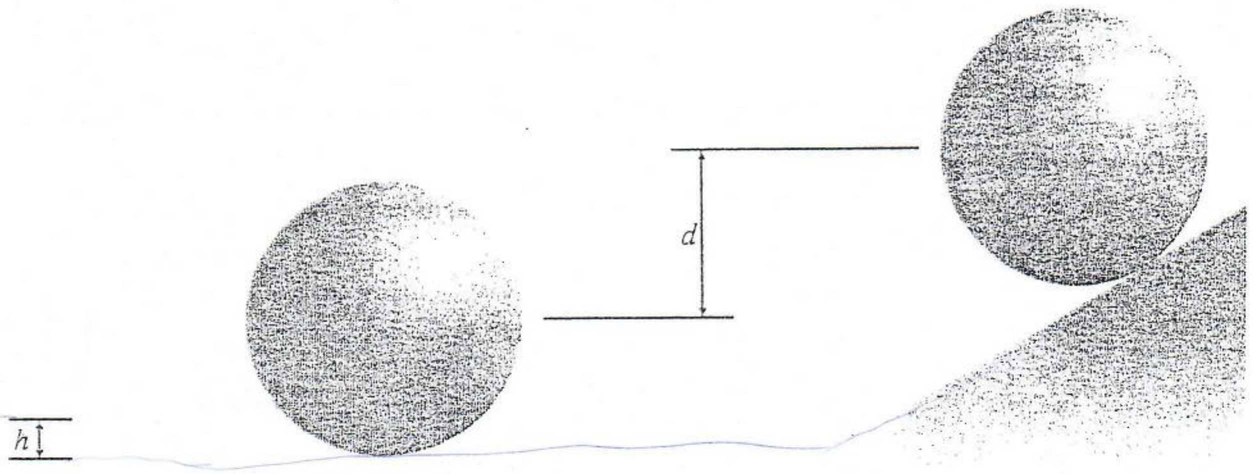
РЕПУБЛИКА СРБИЈА
ДРУШТВО ФИЗИЧАРА СРБИЈЕ
ИНСТИТУТ ЗА ФИЗИКУ И
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Републичко такмичење ученика средњих школа школске 2003/2004. године IV разред

Теоријски задатак 1 25 бодова

Лопта на степенику

Лопта масе M и полупречника R налази се на врху стрме равни као што је приказано на слици 1.



Слика 1.

Центар лопте налази се на висини d у односу на положај када се лопта налази на хоризонталној равни. У подножју стрме равни се налази степеник висине h. Лопта почиње да се котрља низ стрму раван без клизања. Момент инерције лопте у односу на осу која пролази кроз њен центар је $I = \frac{2}{5}MR^2$.

а) Одредити кинетичку енергију лопте, њену угаону брзину, као и брзину центра лопте непосредно пре њеног удара у степеник.

б) Наћи угаону брзину лопте непосредно након њеног удара у степеник. Колики је релативни губитак кинетичке енергије лопте у судару лопте и степеника?

в) Израчунати минималну вредност d за коју ће лопта успети да се *попне* уз степеник.

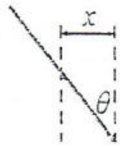
г) Колика је максимална вредност d за коју ће се лопта попети уз степеник а да се не одвоји од њега? За које вредности односа h/R је то могуће?

Теоријски задатак 2 12 бодова

Преламање светлости на полуцилиндру

Полупречник полуцилиндра начињеног од стакла индекса преламања n је R. Светлосни зрак пада на равну страну полуцилиндра на растојању x од његове осе, под углом θ у односу на нормалу.

а) За које вредности x ће светлосни зрак напустити полуцилиндар већ при првом преламању на његовој закривљеној површини.



б) Одредити вредности n и θ за које ће светлосни зрак напустити полуцилиндар при првом преламању без обзира на вредност растојања x. Колика је највећа вредност n за коју је то могуће?

Теоријски задатак 3 18 бодова

Релативистички електрон у електричном пољу

Електрон масе m и наелектрисања e почиње да се креће под дејством јаког хомогеног електричног поља интензитета ε. За нерелативистички електрон убрзање је константно. У релативистичком случају убрзање зависи од брзине v, тј. није више константно, иако се електрон налази у хомогеном електричном пољу.

а) Одредити зависност убрзања релативистичког електрона од његове брзине.

б) Скицирати график зависности убрзања нерелативистичког и релативистичког електрона од брзине.

Теоријски задатак 4 20 бодова

Сложени радиоактивни распад

При радиоактивном распаду језгара изотопа A_1 константе распада λ_1, његова језгра се трансформишу у језгра изотопа A_2 константе распада λ_2.

а) Написати једначине које описују промене броја језгара изотопа A_1 и A_2 у кратком временском интервалу $\mathrm{d}t$.

б) Ако је у почетном тренутку радиоактивни извор садржао само $N_1^{(0)}$ језгара изотопа A_1 показати да ће у тренутку t број језгара изотопа A_2 бити $N_2(t) = \dfrac{\lambda_1 N_1^{(0)}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)$.

в) Одредити тренутак када ће се сакупити максимална количина изотопа A_2.

Задатке припремио: Бранислав Цветковић
Рецензент: Душко Латас
Председник комисије: др Мићо Митровић

5. Да би се одредила маса тела изведен је следећи експеримент.

Измерена су истезања 5 различитих опруга изазвана силом тежине тега масе $m_1 = (25.5 \pm 0.1)\text{g}$. Опруге су качене на оквир са кукицом, а истезања су мерена помоћу скале направљене од милиметарског папира. Подаци добијени мерењем дужина опруга у неистегнутом l_0 и истегнутом стању l, дати су у табели 1.

Табела 1

Бр. опруге	$l_0[\text{mm}]$	$l[\text{mm}]$
1	56	145
2	15	110
3	134	183
4	113	138
5	29	96

б) Након овог мерења, на сваку од ових 5 опруга окачено је тело непознате масе m_2, и мерено је време, по три пута за сваку опругу, потребно да тело направи 10 осцилација (сматрано је да је осциловање хармонијско). Подаци добијени мерењем дати су табели 2.

Табела 2

Бр. опруге	1	2	3	4	5
$t_i[\text{s}]$	11.4	11.8	8.2	5.8	9.8
	11.2	11.6	8.2	6.0	9.6
	11.4	12.0	8.2	5.8	10.0

Времена су мерена помоћу хронометра чија је вредност најмањег подеока износила 0.2s.

а) Наћи одговарајућу теоријску зависност између мерених величина датих у табелама 1 и 2.

б) Нацртати график према претходно утврђеној теоријској зависности.

в) Користећи график, одредити масу тела m_2, које је изазвало осциловање опруга. Проценити апсолутну грешку ове масе.

(25 бодова)

Аутор: Андријана Жекић
Рецензент: Мићо Митровић
Председник комисије: Мићо Митровић

РЕПУБЛИКА СРБИЈА
ДРУШТВО ФИЗИЧАРА СРБИЈЕ
ИНСТИТУТ ЗА ФИЗИКУ И
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Републичко такмичење ученика средњих школа
школске 2003/2004. године
IV разред

1. а) Како сила трења котрљања без клизања не врши рад то за кретање лопте до судара са степеником важи закон одржања енергије. Нулти ниво потенцијалне енергије је дефинисан када се кугла налази на хоризонталној равни, па је укупна механичка енергија $E = Mgd$. Како је за кретање на хоризонталној равни $E = E_k$ тражена кинетичка енергија лопте је $E_k = Mgd$. Како је $E_k = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$ и $v = \omega R$, за брзину центра лопте и њену угаону брзину непосредно пре судара са степеником се добија: $\omega = \sqrt{\frac{10gd}{7R^2}}$ и $v = \sqrt{\frac{10gd}{7}}$.

   б) Обележимо са N средњу силу реакције подлоге, а са F_{tr} средњу силу трења, које у тачки B делују на лопту током судара. Непосредно након судара лопта ротира угаоном брзином ω' око осе која пролази кроз тачку B (слика 1).
   На основу другог Њутновог закона за транслацију и ротацију је:
   $N\tau\sin\alpha + F_{tr}\tau\cos\alpha = M\omega' R\cos\alpha$, $F_{tr}\tau\sin\alpha - N\tau\cos\alpha = M\omega' R\sin\alpha - Mv$ и
   $F_{tr}R\tau = I(\omega - \omega')$, где је τ време трајања судара. Како је $\sin\alpha = 1 - \frac{h}{R}$ решавањем система једначина се добија да је угаона брзина лопте непосредно након судара: $\omega' = \omega\left(1 - \frac{5h}{7R}\right)$, тј. $\omega' = \sqrt{\frac{10gd}{7R^2}}\left(1 - \frac{5h}{7R}\right)$.
   Кинетичка енергија лопте након судара је:
   $E_k' = \frac{(I + MR^2)\omega'^2}{2} = \left(1 - \frac{5h}{7R}\right)^2 E_k$, па је релативни губитак кинетичке енергије лопте током судара: $\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{E_k - E_k'}{E_k} = 1 - \left(1 - \frac{5h}{7R}\right)^2 = \frac{5h}{7R}\left(2 - \frac{5h}{7R}\right)$.

   в) Да би се лопта „попела" уз степеник мора да важи $E_k' \geq Mgh$, $E_k \geq \frac{Mgh}{\left(1-\frac{5h}{7R}\right)^2}$, одакле се добија: $d_{\min} = \frac{h}{\left(1-\frac{5h}{7R}\right)^2}$.

   г) Како лопта након судара са степеником ротира око осе која пролази кроз тачку B то је: $Mg\sin\theta - N(\theta) = M\omega^2(\theta)R$, где је θ угао који правац BC заклапа са хоризонталом. Да се лопта не би одвојила од степеника мора да важи $N(\theta) \geq 0$, тј. $\frac{\omega^2(\theta)R}{g\sin\theta} \leq 1$. Израз на левој страни има највећу вредност непосредно након судара лопте са степеником па је: $d_{\max} = \frac{7(R-h)}{10\left(1-\frac{5h}{7R}\right)^2}$. Да би се лопта „попела" на степеник без одвајања од њега мора да важи: $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$. Из овог услова следи: $\frac{h}{R} \leq \frac{7}{17}$.

2. а) На основу закона преламања светлости је: $n\sin\phi = \sin\theta$. На основу синусне теореме (слика 2) је: $\frac{R}{\sin(\phi + \frac{\pi}{2})} = \frac{x}{\sin\phi'}$. Да би светлосни зрак напустио цилиндар мора да важи: $n\sin\phi' \leq 1$. Даље је: $\frac{nx\cos\phi}{R} \leq 1$, одакле је: $x \leq x_{\max} \equiv \frac{R}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}$.

   б) Тражени услов је задовољен ако је $x_{\max} \geq R$, тј. $n \leq \sqrt{\sin^2\theta + 1}$. Како је $\sin^2\theta \leq 1$, то је највећа вредност n за коју је описана појава могућа $n_{\max} = \sqrt{2}$.

3. а) На основу другог Њутновог закона је: $F = \frac{dp}{dt}$, тј. $e\mathcal{E} = \frac{dp}{dt}$. Даље се добија:
   $e\mathcal{E} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$ Како је $a = \frac{dv}{dt}$ даље је: $e\mathcal{E} = ma\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$, одакле следи: $a = \frac{e\mathcal{E}}{m\gamma^3}$, што је и требало показати.

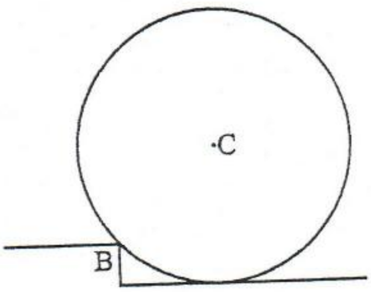
   б) Тражена зависност је приказана на слици 3.

IV РАЗ.

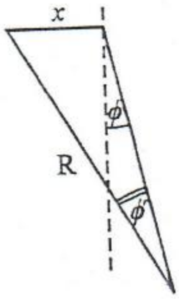
4. а) Распад описан у задатку се може приказати следећом шемом $A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} A_3$. Број језгара изотопа A_1 смањује се на рачун њиховог распада па је: $-\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1$. Број језгара изотопа A_2 повећава се на рачун распада језгара изотопа A_1, а смањује се на рачун сопственог распада па је: $\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$.

б) Како је у почетном тренутку: $N_1(0) = N_1^{(0)}$ и $N_2(0) = 0$ то је: $N_1(t) = N_1^{(0)} e^{-\lambda_1 t}$. Коришћењем израза за $N_2(t)$ добија се: $\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} N_1^{(0)} \left(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right)$. Како је $\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1^{(0)} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} N_1^{(0)} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} N_1^{(0)} \left(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right)$, то је $\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$, тј. дати израз задовољава једначину која описује временску промену броја језгара изотопа A_2.

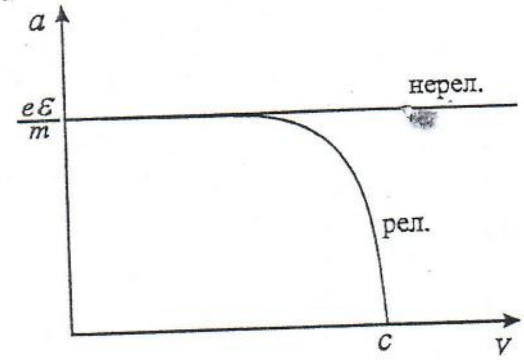
в) Потребно је наћи време за које је $N_2(t)$ максимално. Како је: $\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} N_1^{(0)} \left(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right)$, то се тражено време добија из услова: $\frac{dN_2(t)}{dt} = 0$, тј., $t_{\max} = \frac{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1}$.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

5. а) Из равнотеже силе тежине и реституционе силе, $m_1 g = k\Delta l$, добија се израз за константу еластичности опруге $k = \frac{m_1 g}{\Delta l}$. Релтивна грешка се израчунава као $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta m_1}{m_1} + \frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l}$. Пошто је $\Delta l = l - l_0$, следи да је $\Delta(\Delta l) = \Delta l + \Delta l_0 = 2\mathrm{mm}$, при чему су Δl и Δl_0 вредности најмањег подеока на милиметарском папиру помоћу кога се очитава дужина опруга. Апсолутна грешка константе еластичности дата је изразом $\Delta k = k\left(\frac{\Delta m_1}{m_1} + \frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l}\right)$.

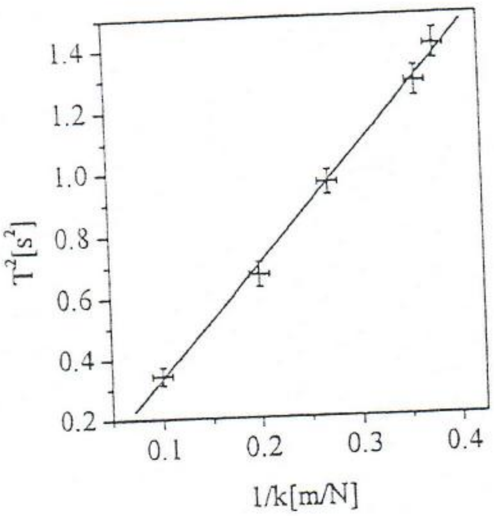
Период осциловања опруге са телом масе m_2, израчунава се помоћу измереног времена као $T = \frac{t}{n}$, где је $n = 10$, број осцилација. Време t се израчунава као средња вредност три измерене, $t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$, а апсолутна грешка као максимално одступање $\left|t_i - t_s\right|_{max}$. Са друге стране, период осциловања је $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$. Из линеарне зависности $T^2 = 4\pi^2 m_2 \frac{1}{k}$ може се одредити непозната маса тега m_2.

б)

	l_0[mm]	l[mm]	Δl[mm]	k[N/m]	Δk[N/m]	$1/k$[m/N]	$\Delta(1/k) = \Delta k/k^2$ [m/N]
1	56	145	89	2.811 2.81	0.075 0.08	0.356 0.36	0.01 0.01
2	15	110	95	2.633 2.63	0.066 0.07	0.38 0.38	0.0096 0.01
3	134	183	49	5.105 5.10	0.23 0.3	0.196 0.20	0.0089 0.01
4	113	138	25	10.01 10.0	0.81 0.9	0.100 0.10	0.0081 0.01
5	29	96	67	3.734 3.7	0.13 0.2	0.268 0.27	0.0094 0.01

	t_i[s]	t_s[s]	Δt[s]	$T = \frac{t}{n}$[s]	$\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$[s]	T^2[s^2]	$\Delta T^2 = 2T\Delta T$[s^2]
1	11.4 11.2 11.4	11.33 11.3	0.13 0.2	1.133 1.13	0.02	1.284 1.28	0.046 0.05
2	11.8 11.6 12.0	11.8 11.8	0.2 0.2	1.18 1.18	0.02	1.392 1.39	0.048 0.05
3	8.2 8.2 8.2	8.2 8.2	0 0.2	0.82 0.82	0.02	0.672 0.67	0.033 0.04
4	5.8 6.0 5.8	5.87 5.9	0.13 0.2	0.587 0.59	0.02	0.345 0.34	0.024 0.03
5	9.8 9.6 10.0	9.8 9.8	0.2 0.2	0.98 0.98	0.02	0.960 0.96	0.039 0.04

Са графика $T^2 = f(1/k)$, одређује се коефицијент правца праве избором две неекспериментатне тачке, нпр. A $(0.50\text{s}^2; 0.14\text{m/N})$ између прве и друге и B $(1.32\text{s}^2; 0.37\text{m/N})$ између последње и претпоследње експерименталне тачке.



Коефицијент правца се израчунав као: $a = \dfrac{T_B^2 - T_A^2}{(1/k)_B - (1/k)_A} = \dfrac{(1.32-0.50)s^2}{(0.37-0.14)\text{m/N}} = 3.565\text{kg}$.

Релативна грешка се израчунава као $\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta(T^2)_B + \Delta(T^2)_A}{T_B^2 - T_A^2} + \dfrac{\Delta(1/k)_B + \Delta(1/k)_A}{(1/k)_B - (1/k)_A}$.

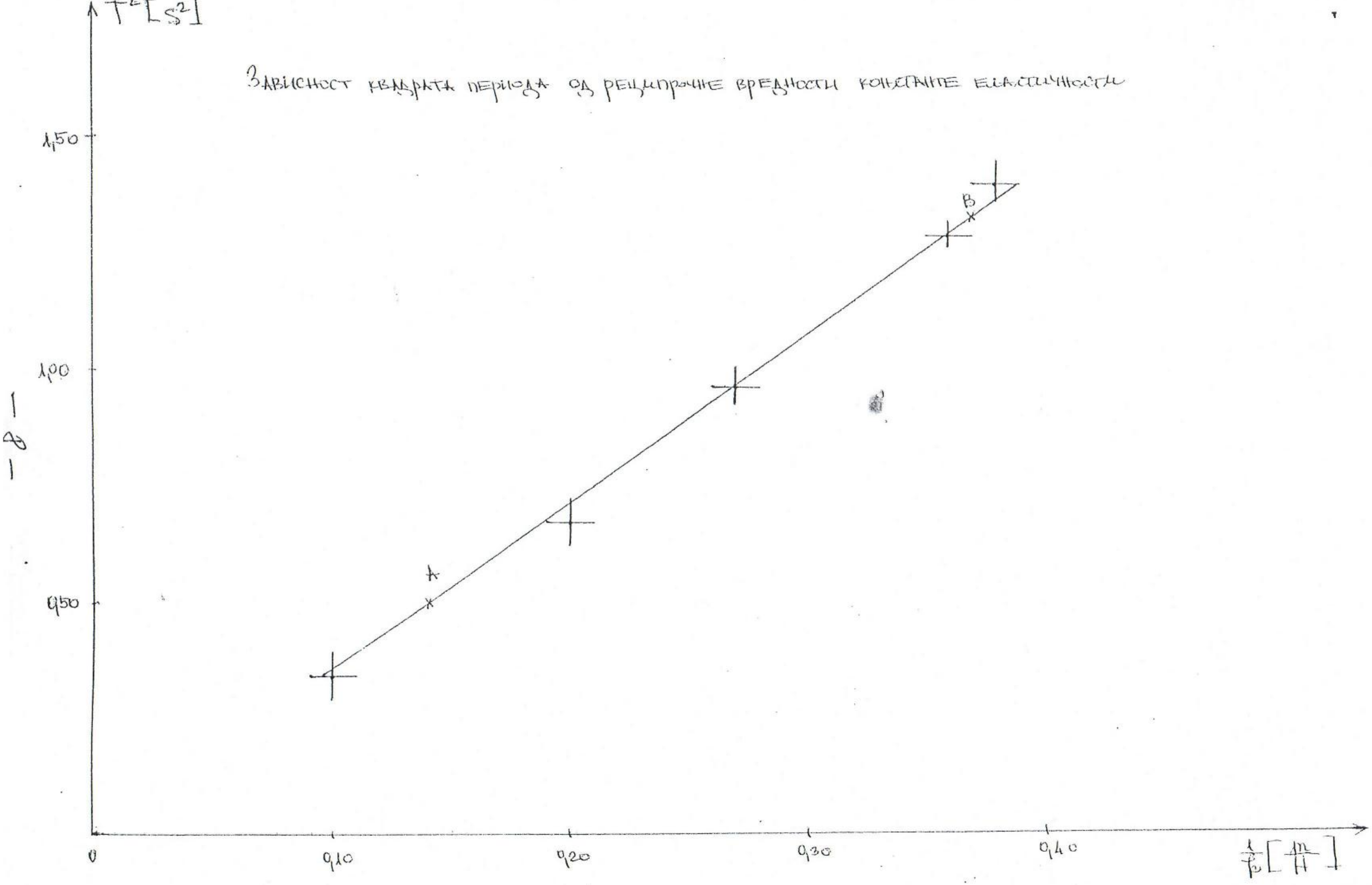
$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{0.033+0.048}{1.32-0.50} + \frac{0.01+0.0094}{0.37-0.14} = 0.183 \Rightarrow \Delta a = 0.65\text{kg}$$

$$a = (3.6 \pm 0.7)\text{kg}$$

в) Пошто је $a = 4\pi^2 m_2$, следи да је $m_2 = \dfrac{a}{4\pi^2} = \dfrac{3.565\text{kg}}{4\pi^2} = 0.0903\text{kg}$.

$$\frac{\Delta m_2}{m_2} = \frac{\Delta a}{a} = 0.183 \Rightarrow \Delta m_2 = 0.017\text{kg}$$

$$m_2 = (90 \pm 17)\text{g}$$


$T^2 [s^2]$
Зависност квадрата периода од реципрочне вредности константе еластичности
1,50
1,00
0,50
0
0,10
0,20
0,30
0,40
$\frac{1}{k} [\frac{m}{N}]$
A
B