ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ФИЗИЧАРА
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ И СПОРТА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЈЕТЕ И НАУКЕ РЕПУБЛИКЕ ЦРНЕ ГОРЕ
МИНИСТАРСТВО ЗА ПРОСВЈЕТУ, НАУКУ И КУЛТУРУ РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

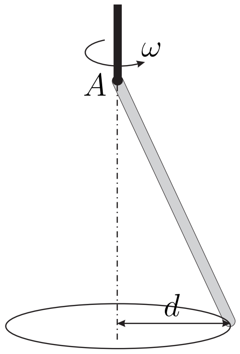
Задаци за савезно такмичење ученика средњих школа
28. мај 2004.
Први разред

1. Хомогени штап масе m и дужине l је једним својим крајем зглобно повезан са осовином у тачки A (слика 1). Штап може слободно да ротира у зглобу око хоризонталне осе која је нормална на осовину. Ако осовина почне да ротира константном угаоном брзином ω око вертикалне осе, одредити растојање доњег краја штапа од осе ротације и силу реакције штапа на осовину. За велики природан број n важе релације: $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+n^2) = \frac{1}{3}$. (15 бодова)

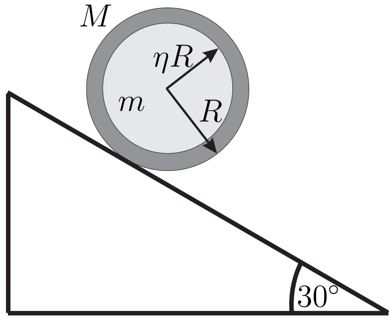
2. Буре масе M је напуњено нафтом масе m и котрља се низ стрму раван нагибног угла 30° (слика 2). Буре се може сматрати шупљим ваљком са танким основама који је направљен од хомогеног материјала. Спољашњи полупречник шупљег ваљка је R, а унутрашњи полупречник је ηR ($\eta < 1$). Одредити убрзање бурета. Трење између зидова бурета и нафте сматрати занемарљиво малим. Претпоставити да се буре котрља без проклизавања низ стрму раван. Такође сматрати да је оса симетрије бурета паралелна хоризонталној равни током кретања. (15 бодова)

3. На глаткој хоризонталној подлози се налази даска масе m_1. На дасци се налазе два иста ваљка масе M и полупречника основе R, а преко њих је положена друга даска масе m_2 (слика 3). У почетном тренутку систем је постављен симетрично и мирује. На горњу даску почне да делује сила F у хоризонталном правцу. Ако се ваљци крећу без проклизавања одредити убрзања даски. Момент инерције ваљка масе M и полупречника основе R око осе ротационе симетрије је $I = \frac{1}{2}MR^2$. (20 бодова)

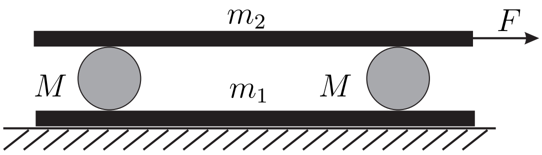
4. Два небеска тела A и B, маса M_A и M_B ротирају око тачке O и налазе се на константном међусобном растојању R. Полупречник тела B је r и много је мањи од R. Свемирски брод C, масе m је усидрен на небеском телу B у тачки која је најближа небеском телу A (слика 4). Свемирски брод се у сваком тренутку налази на правој која спаја центре небеских тела A и B. Сматрајући да је маса свемирског брода много мања од маса небеских тела, одредити тежину свемирског брода. Показати да резултат зависи само од константи: $Q = \gamma\frac{mM_B}{r^2}$, $\eta = \frac{r}{R}$ и $\mu = \frac{M_A}{M_B}$, где је γ гравитациона константа. За реални број x и цели број n, под претпоставком да је $x \ll 1$, важи формула $(1+x)^n = 1+nx$. (20 бодова)



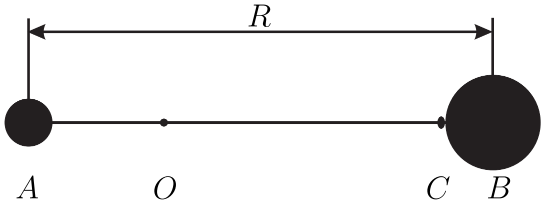
Слика 1



Слика 2



Слика 3



Слика 4

Задатке припремио: Зоран Ристивојевић
Рецензент: др Александар Срећковић
Председник комисије: др Мићо Митровић

СРБИЈА И ЦРНА ГОРА
Југословенско друштво физичара
Министарство просвете и спорта Републике Србије
Министарство просвјете и науке Републике Црне Горе
Министарство за просвјету, науку и културу Републике Српске

39. Савезно такмичење из физике
Београд 2004.

Експериментални задатак
први и други разред

Задатак

Одредити коефицијент еластичности дате опруге, мерењем периода малих осцилација. Проценити грешку мерења.

(30 поена)

Препорука: Пратите зависност периода осциловања опруге од масе којом је оптерећена.

Мерни комплет

1. Опруга
2. Хронометар
3. Носачи
4. Комплет тегова

На теговима је означена њихова маса. Грешке масе су занемарљиве.

Теоријски увод

Период малих осцилација опруге износи

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \, ,$$

где су k - коефицијент еластичности опруге и m - маса тега обешеног о опругу.

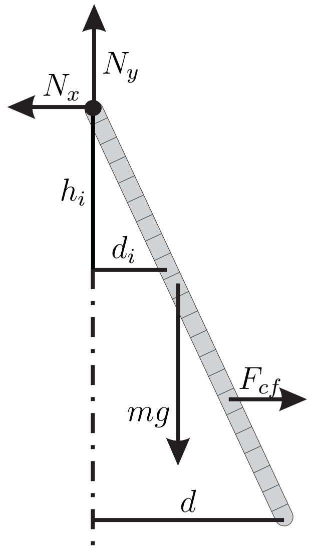
Аутор: Андријана Жекић
Рецензент: Мићо Митровић
Председник комисије: Мићо Митровић

ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ФИЗИЧАРА
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ И СПОРТА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЈЕТЕ И НАУКЕ РЕПУБЛИКЕ ЦРНЕ ГОРЕ
МИНИСТАРСТВО ЗА ПРОСВЈЕТУ, НАУКУ И КУЛТУРУ РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Решења задатака са савезног такмичења ученика средњих школа
28. мај 2004.

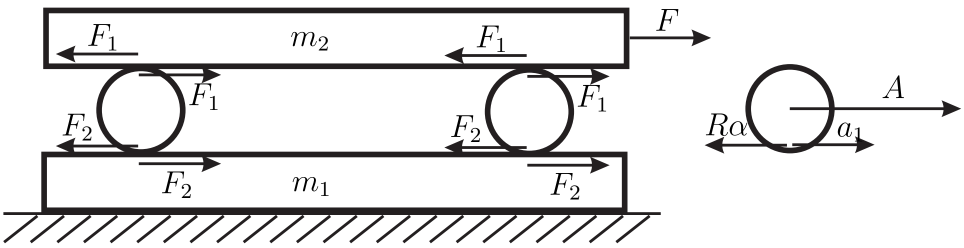
Први разред

1. Изделимо штап на n делића масе $\Delta m = \frac{m}{n}$. Укупна центрифугална сила која делује на штап је сума центрифугалних сила на сваки његов делић $F_{cf} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m d_i \omega^2$. Ако је d_1 растојање првог делића штапа од осе, онда је $d_i = i d_1$ и $d = n d_1$, па је $F_{cf} = \Delta m d_1 \omega^2 \sum_{i=1}^{n} i = m d \omega^2 \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} m d \omega^2$. Укупни момент центрифугалне силе која делује на штап је $M_{cf} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m d_i \omega^2 h_i$. Како је $h_i = i h_1 = i h \frac{d_1}{d}$, то је $M_{cf} = m d h \omega^2 \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3} m d h \omega^2$. Изједначавањем момента силе теже који делује на половини штапа и момента центрифугалне силе $mg\frac{d}{2} = \frac{1}{3} m d h \omega^2$ добијамо $h = \frac{3g}{2\omega^2}$, односно $d = \sqrt{l^2 - \frac{9g^2}{4\omega^4}}$. Из равнотеже сила $mg = N_y$ и $\frac{1}{2} m d \omega^2 = N_x$ добијамо да је сила реакције $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{1}{2} m l \omega^2 \sqrt{1 + \frac{7g^2}{4l^2\omega^4}}$.

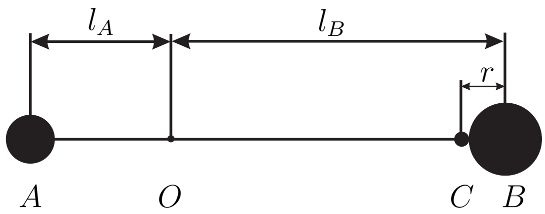


2. Момент инерције шупљег ваљка око осе симетрије добијамо ако од момента инерције ‘целог’ ваљка масе $M + M_1$, где је M_1 маса ‘шупљег дела’, одузмемо момент инерције шупљег дела: $I = \frac{1}{2}(M + M_1)R^2 - \frac{1}{2} M_1 \eta^2 R^2$. Како је $M_1 = M \frac{\eta^2 R^2}{R^2 - \eta^2 R^2}$, то је $I = \frac{1}{2} M R^2 (1 + \eta^2)$. Једначина за транслацију бурета са нафтом низ стрму раван испројектована на правац кретања је $(M+m)a = \frac{1}{2}(M+m)g - F$, где је F сила трења котрљања. Како је трење између нафте и бурета занемарљиво, ротира само буре, па је једначина за ротацију бурета $I\alpha = FR$. Пошто нема проклизавања бурета то је $a = R\alpha$, па је коначно $a = g\frac{M+m}{(3+\eta^2)M + 2m}$.

3. Једначина транслације доње даске је $m_1 a_1 = 2F_2$. Једначина за ротацију ваљка је $I\alpha = (F_1 + F_2)R$, а за транслацију $MA = F_1 - F_2$. Момент инерције ваљка је $I = \frac{1}{2} M R^2$. Једначина кретања горње даске је $m_2 a_2 = F - 2F_1$. Како је убрзање додирне тачке ваљка и доње даске a_1 и цилиндар не проклизава по њој то је $A - R\alpha = a_1$. Убрзање горње даске је $a_2 = A + R\alpha$. Решавањем једначина добијамо да је $a_1 = -F\frac{M}{4m_1 m_2 + 3M(m_1 + m_2) + 2M^2}$ и $a_2 = F\frac{3M + 4m_1}{4m_1 m_2 + 3M(m_1 + m_2) + 2M^2}$. Видимо да се доња даска креће у супротном смеру од претпостављеног.



4. Пошто су масе тела A и B много веће од масе свемирског брода можемо сматрати да се тела A и B крећу око заједничког центра масе O по кружницама јер је међусобно растојање непромењиво током кретања. Једначине кретања су $M_A l_A \omega^2 = \gamma \frac{M_A M_B}{R^2}$ и $M_B l_B \omega^2 = \gamma \frac{M_A M_B}{R^2}$. Како је $l_A + l_B = R$ сабирањем једначина добијамо да је $\omega^2 = \gamma \frac{M_A + M_B}{R^3}$. Ако је F_{CB} укупна сила између тела C и B, једначина за равнотежу тела C је $F_{CB} - \gamma \frac{m M_A}{(R-r)^2} + m(l_B - r)\omega^2 = 0$. Пошто је r много мање од R то је $\frac{r}{R} \ll 1$, па је $\frac{1}{(R-r)^2} = \frac{1}{R^2(1-\frac{r}{R})^2} = \frac{1}{R^2}(1 + 2\frac{r}{R})$. За тело C можемо писати $F_{CB} = \gamma \frac{m M_A}{R^2}(1 + 2\frac{r}{R}) - \gamma \frac{m M_A}{R^2} + \gamma \frac{m(M_A + M_B) r}{R^3} = \gamma \frac{m(3M_A + M_B) r}{R^3}$. С друге стране $F_{CB} = \gamma \frac{m M_B}{r^2} - N$ где је N сила реакције подлоге (тежина свемирског брода). Из претходних једначина добијамо $N = \gamma \frac{m M_B}{r^2} - \gamma \frac{m(3M_A + M_B) r}{R^3}$, што се може написати у облику $N = \gamma \frac{m M_B}{r^2}(1 - \frac{r^3}{R^3}(1 + 3\frac{M_A}{M_B}))$, односно $N = Q(1 - \eta^3(1 + 3\mu))$.



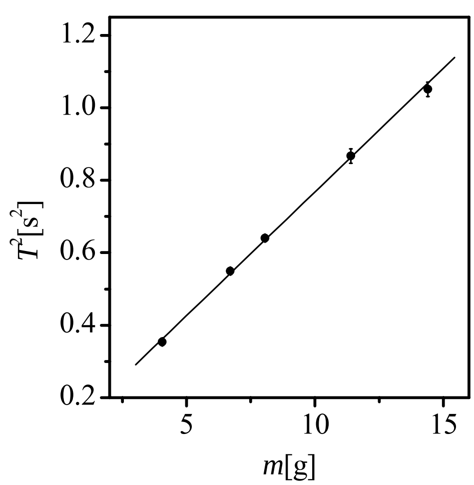
Задатке припремио: Зоран Ристивојевић
Рецензент: др Александар Срећковић
Председник комисије: др Мићо Митровић

Савезно такмичење 2004.

Решење експерименталног задатка

Мерено је време t потребно да опруга оптерећена масом m направи n осцилација. Период осциловања је $T=\frac{t}{n}$, где је $n=10$ број осцилација. Време t се је одређено из три директна мерења, $t_s=\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$, а апсолутна грешка као максимално одступање $\left|t_i-t_s\right|_{max}$. Пошто је $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, из линеарне зависности $T^2=\frac{4\pi^2}{k}m$ може се одредити непозната константа опруге k. Резултати мерења дати су у табели.

	$m[g]$	$t_i[\mathrm{s}]$	$t_S[\mathrm{s}]$	$\Delta t[\mathrm{s}]$	$T=\frac{t}{n}[\mathrm{s}]$	$\Delta T=\frac{\Delta t}{n}[\mathrm{s}]$	$T^2[\mathrm{s}^2]$	$\Delta T^2=2T\Delta T[\mathrm{s}^2]$
1	4.05	5.94 6.04 5.92	5.967 5.97	0.073 0.08	0.5967 0.597	0.0073 0.008	0.356 0.36	0.0087 0.01
2	6.70	7.47 7.39 7.37	7.407 7.41	0.063 0.07	0.7407 0.741	0.0063 0.007	0.549 0.55	0.0093 0.01
3	8.05	8.03 8.06 7.91	8.000 8.00	0.090 0.09	0.8000 0.800	0.0090 0.009	0.640 0.64	0.011 0.01
4	11.4	9.31 9.25 9.38	9.313 9.31	0.067 0.07	0.9313 0.931	0.0067 0.007	0.867 0.87	0.012 0.02
5	14.4	10.31 10.20 10.25	10.253 10.25	0.057 0.06	1.0253 1.025	0.0057 0.006	1.051 1.05	0.012 0.02



Са графика $T^2=f(m)$, одређује се коефицијент правца праве избором две неексперименталне тачке, нпр. $\mathrm{A}(5.3\mathrm{g};\ 0.45\mathrm{s}^2)$ између прве и друге и $\mathrm{B}(12.6\mathrm{g};\ 0.95\mathrm{s}^2)$ између последње и претпоследње експерименталне тачке.

Коефицијент правца се израчунав као:

$$a=\frac{T_{\mathrm{B}}^2-T_{\mathrm{A}}^2}{m_{\mathrm{B}}-m_{\mathrm{A}}}=\frac{(0.95-0.45)\mathrm{s}^2}{(12.6\text{ - }5.3)\mathrm{g}}=68.5\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}\,.$$

Релативна грешка се израчунава као $\dfrac{\Delta a}{a}=\dfrac{\Delta\left(T^2\right)_{\mathrm{B}}+\Delta\left(T^2\right)_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{B}}^2-T_{\mathrm{A}}^2}+\dfrac{\Delta m_{\mathrm{B}}+\Delta m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}-m_{\mathrm{A}}}$

$\dfrac{\Delta a}{a}=\dfrac{0.0093+0.012}{0.95-0.45}+\dfrac{0.1+0.1}{12.6-5.3}=0.07 \Rightarrow \Delta a=4.8\,\dfrac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$, па је $a=(68\pm 5)\dfrac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$.

в) Пошто је $a=\dfrac{4\pi^2}{k}$, следи да је $k=\dfrac{4\pi^2}{a}=\dfrac{4\pi^2}{68.5}=0.576\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

$\dfrac{\Delta k}{k}=\dfrac{\Delta a}{a}= \;\Rightarrow\; \Delta k=0.04\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Тражена константа еластичности опруге износи:

$$k=(0.58\pm 0.04)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$