Државна Заједница Србија и Црна Гора

Министарство просвјете и науке Републике Црне Горе

Министарство просвете и спорта Републике Србије

Министарство за просвету, науку и културу Републике Српске

Друштво физичара Србије и Црне Горе

38. такмичење Заједнице из физике ученика средњих школа

Бечићи, 30. мај – 1. јун 2003.

Општа група

Теоријски задаци

Пре него што почнете са решавате задатке пажљиво прочитајте ово упутство:

- Задаци се решавају на папирима које сте затекли на радном месту, а коначни резултати се уписују у Табеле за одговоре, које сте добили заједно са овим задацима.
- На Табеле за одговоре упишите своју шифру. Своје име НЕ СМЕТЕ написати ни на табелама, ни на папирима.
- Ако за неки задатак имате неколико различитих решења, у Табелу за одговоре упишите онај резултат којег сматрате тачним, а на папирима прецртајте решења која сматрате нетачним.
- Када завршите са израдом задатака, предаћете и папире на којима решавате задатке и Табеле за одговоре.
- Теоријски задаци раде се 5 сати.

Задатке припремио: Душко Латас

Рецензент: др Милан Кнежевић

Председник комисије: др Мићо Митровић

1. ЗАДАТАК – Физика и фудбал (*30 бодова)*

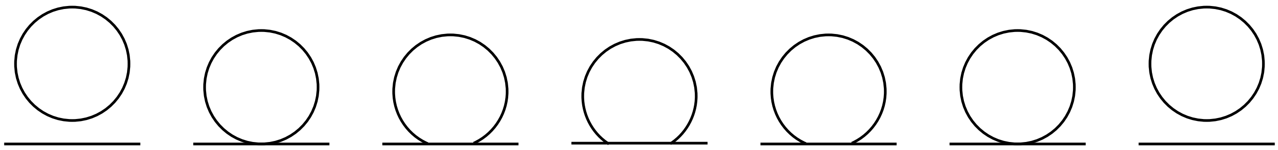
У овом задатку проучаваћемо физичке проблеме који се срећу у фудбалу. Као што је добро познато, фудбал је игра између две екипе на травнатом терену димензија 100×70 метара. Игра се округлом лоптом, обима $O = 70\,\mathrm{cm}$, масе $m = 0.43\,\mathrm{kg}$ која је надувана до притиска $p = 0.85 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$. У свакој екипи игра по $N = 11$ играча. Ове податке ћемо користити у наредним деловима задатка.

Однос између броја играча на терену и површине терена, омогућава да фудбал буде динамична игра. Тај однос је такав да фудбалери морају увек брзо да реагују.

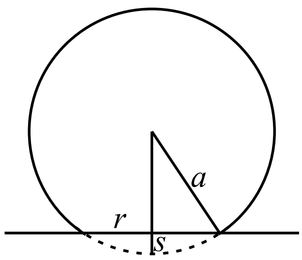
а) Ако претпоставимо да сваком фудбалеру припада иста површина на терену, и да се фудбалери крећу просечном брзином $v = 5\,\mathrm{m/s}$, процените време које фудбалер има на располагању за пријем, контролу и предају лопте, пре него што до њега дотрчи други фудбалер.

Сада ћемо размотрити неколико феномена везаних за кретање фудбалске лопте.

Нека лопта пада вертикално и одбија се од подлоге. Пре него што стигне до подлоге, лопта је недеформисана, силе притиска које делују на унутрашњу површину су уравнотежене, тако да је укупна сила која делује на лопту једнака нули (овде гравитациону силу не урачунавамо).



Међутим, када додирне подлогу (брзином v_0) лопта се деформише, јавља се резултујућа сила на лопту, која доводи до одскока. Геометрија деформације приказана је на слици



a је полупречник лопте, $s \ll a$ је дубина деформације, а r је полупречник кружне површине којом лопта додирује подлогу. Сила деформације је сразмерна површини деформације и унутрашњем притиску, којег сматрамо константним. С друге стране, брзина центра лопте повезана је са величином деформације следећим изразом

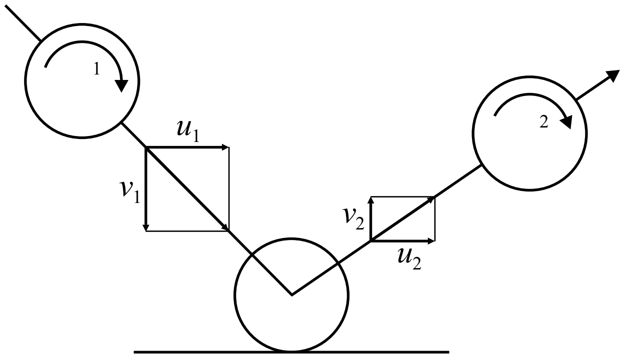
$$v = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

б) Нађите како се сила деформације лопте мења у току времена и одредити њену максималну вредност.

в) Одредите време трајања додира лопте са подлогом.

Када се лопта одбија од тврде површине, део кинетичке енергије се губи на нееластичну деформацију лопте (у претходном делу задатка тај ефекат нисмо урачунавали). Квантитативно, тај губитак се мери реституционим коефицијентом $e = v_{\text{posle}}/v_{\text{pre}}$. За траву, реституциони коефицијент једнак је $e = 0.60$.

Нека лопта удара у земљу тако да непосредно пре удара има хоризонталну, вертикалну и угаону брзину v_1, u_1 и ω_1 респективно (смерови брзина су дати на слици).



г) Израчунајте хоризонталну, вертикалну и угаону брзину непосредно после судара, ако се лопта приликом додира са подлогом климза, а коефицијент трења клизања износи $\mu = 0.70$. Момент инерције лопте која се ротира око осе која пролази кроз лопте је $I = \frac{2}{3}ma^2$.

д) За режим клизања, важи $u_2 > \omega_2 a$. Уколико овај услов није задовољен, неће доћи до клизања, већ ће се лопта котрљати. Нађите област углова под којим треба да падне лопта, која се не котрља, да би се после удара о тло закотрљала.

ђ) Израчунајте хоризонталну, вертикалну и угаону брзину непосредно после судара, ако се лопта котрља без клизања. У овом делу задатка претпоставите да се лопта котрља и пре одбијања од подлоге.

Ради једноставности, претпоставићемо да ефикасност екипе можемо да опишемо једним фактором r који представља вероватноћу постизања гола у јединици времена. Тада је вероватноћа да тим постигне n голова за време t дата Пуасоновом расподелом

$$P_r(n,t) = \frac{(rt)^n}{n!}e^{-rt}.$$

е) Одредите вероватноћу да у сусрету два тима, који имају ефикасност r_1 и r_2, резултат у тренутку t буде $n_1 : n_2$.

ж) Колика је вероватноћа да за време t тим 1 први постигне погодак.

Математички додатак: Диферанцијална једначина

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x(t) = 0,$$

има решење

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

где су A и B константе, које се одређују из почетних услова.

2. ЗАДАТАК – Физичар детектив *(20 бодова)*

Једног послеподнева, како је са одређеног растојања видела његова породица, човек је шетао бос по влажној подлози у близини ступа електричног далековода. У једном тренутку човек се зауставио и пао је на земљу. Рођаци су позвали хитну помоћ, али ови су дошли сувише касно тако да су само констатовали смрт.

Аутопсија је показала да је срце жртве прошло кроз стање *вентрикуларне фибрилације,* која није прекинута довољно брзо, тако да је дошло до трагичног исхода. Рођаци су сматрали да је смрт човека наступила од неке залутале струје са далековода, па су тужили електричну компанију.

Суд је наложио истрагу, да би се утврдило да ли је компанија крива за ову трагедију. У тој истрази коришћена је помоћ физичара.

Физичар је приметио да са далековода виси једна проводна жица, чији се један крај налази тик изнад земље. Када жица додирне тло, у подлогу тече струја од $100\,\mathrm{A}$. Жртва се налазила на удаљености $r = 10\,\mathrm{m}$ од места где жица може да додирне земљу и кретала се према жици. Специфични отпор влажне подлоге износи $\rho = 100\,\Omega\mathrm{m}$.

а) Нађите везу између интензитета густине струје и електричног поља, која постоји код проводних средина. Претпостављајући да се струја са краја проводне жице распростире униформно у земљу, одредите интензитет густине струје J и електрично поље E у функцији растојања од места где жица додирује тло.

б) Израчунајте J и E на месту на којем се налазила жртва.

в) Процените разлику потенцијала између човекове леве и десне ноге, ако се оне налазе на растојању $d = 0.5\,\mathrm{m}$.

г) Сматраћемо да струја пролази најпре кроз једну ногу, затим кроз тело (а тиме и кроз срце) па кроз другу ногу. Уобичајне вредности за отпор ноге и трупа су $R_\mathrm{n} = 300\,\Omega$ и $R_\mathrm{t} = 1000\,\Omega$ респективно. На основу тих података одредите струју која је прошла кроз тело жртве.

д) Фибрилацију срца могу изазвати струје кроз тело између $i_\mathrm{min} = 0.10\,\mathrm{A}$ и $i_\mathrm{max} = 1.0\,\mathrm{A}$. Да ли је несрећу изазвала струја која потиче од жице?

ђ) Користећи израз за $E(r)$, нађите потенцијал $V(r)$ на растојању r од центра жице.

е) Да би избегла будуће тужбе, компанија је одлучила да у близини сваког далековода направи јасно уочљив знак упозорења. Одредите пречник области опасности D. Претпоставите да корак просечног човека није већи од $L = 1.5\,\mathrm{m}$

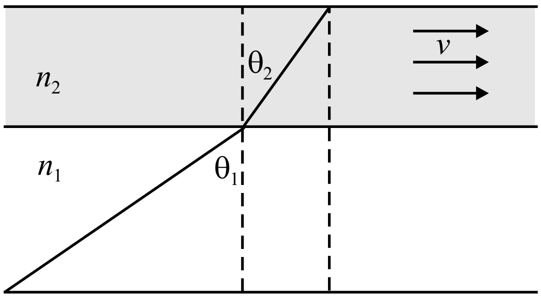
3. ЗАДАТАК – Преламање светлости између средина у релативном кретању (20 бодова)

Углови θ_1 и θ_2 упадног и преломљеног светлосног зрака на равној површини, која раздваја области са константним и изотропним индексима преламања n_1 и n_2 повезани су Снеловим законом

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

Међутим, ова формула је примењива само уколико су средине у релативном мировању. Уколико су средине у релативном трансферзалном кретању, долази до корекције угла под којим се зрак прелама – ефективно преламање зависи и од релативне брзине којом се средине крећу.

Да бисмо пронашли уопштење Снеловог закона на средине у релативном кретању, размотрићемо случај приказан на слици.



Средина са индексом преламања n_1 мирује, а средина са индексом преламања n_2 се креће релативном брзином v. На основу Фермаовог принципа *минималног времена,* познато је да ће се зрак између две тачке путање кретати по оној путањи на којој је време путовања најкраће.

а) Користећи се Фермаовим принципом и чињеницом да је n_i индекс преламања у сопственом референтном систему нађите уопштење Снеловог закона, тј. једначину која повезује упадни угао θ_1, угао преламања θ_2, индексê преламања у сопственим системима n_i и релативну брзину v.

б) Покажите да се уопштење Снеловог закона своди на обичан Снелов закон када се узме $v = 0$. Постоји још један случај када се уопштени Снелов закон своди на обичан, а када је $v \neq 0$. Пронађите тај случај и објасните његов физички смисао.

Југословенско друштво физичара
Министарство просвјете и науке Републике Црне Горе
Министарство просвете и спорта Републике Србије
Министарство за просвјету, науку и културу Републике Српске

38. Савезно такмичење из физике

III и IV разред

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ЗАДАТАК

Мерење капацитета кондензатора помоћу струјног извора

ПРИБОР

3. Извор константне струје
4. Напонски компаратор
5. Линеарни потенциометар
6. Референтни напонски извор +5V
7. Тастер прекидач
8. Ваш часовник као штоперица – хронометар
9. Кондензатор капацитета $C = 470\,\mu F$ занемарљиве грешке капацитета
10. Кондензатор непознате вредности капацитета
11. 2 кабла

ЗАДАЦИ

1. Извршити калибрацију линеарног угаоног потенциометра, тј. одредити вредност подеока на скали потенциометра. Проценити грешку мерења. (5 поена)

Препорука: Користити референтни напонски извор и компаратор.

2. Одредити јачину струје коју даје струјни извор. Проценити грешку мерења. (15 поена)

Препоруке: Пратити процес пуњења кондензатора познатог капацитета. Успоставити линеарну везу између физичких величина које карактеришу пуњење кондензатора и које се могу мерити прибором којим располажете.

При мерењу користити дати струјни извор, потенциометар и компаратор напона.

Напомена: Кондензатор се празни кратким спојем плоча притиском тастер прекидача у минималном трајању од 10 секунди. Када тастер није притиснут, струјни извор пуни кондензатор.

3. Одредити капацитет кондензатора непознатог капацитета. Проценити грешку мерења. (10 поена)

ВАЖНЕ НАПОМЕНЕ!!!

1. Кондензатори који се користе за мерења су електролитички и дефинисан им је поларитет, тј. један крај је дефинисан као + , а други као -. Црвеном бојом је обележен + улаз кондензатора, док је црном обележен – крај. На исти начин је обележен и поларитет струјног извора.

УЛАЗ КОНДЕНЗАТОРА КОЈИ ЈЕ ОБЕЛЕЖЕН СА ЦРВЕНОМ БОЈОМ МОЖЕ СЕ ВЕЗАТИ САМО ЗА ИЗЛАЗ СТРУЈНОГ ИЗВОРА ОБЕЛЕЖЕН ЦРВЕНОМ БОЈОМ. НА ИСТИ НАЧИН СЕ СПАЈАЈУ ЦРНИ КРАЈЕВИ КОНДЕНЗАТОРА И СТРУЈНОГ ИЗВОРА.

2. Кондензаторе пуните напонима који су мањи или једнаки напону на крајевима референтног извора.

Опис електонских елемената потребних за мерење

Иделани струјни извор је електронски уређај који на свом пару излазних крајева даје константну вредност струје независно од отпора потрошача прикљученог на његов излаз, односно независно од напона који се успоставља на његовим крајевима. У случају када напон на крајевима струјног извора расте, уређај мора да развија већу снагу да би одржао вредност струје константном. Реални струјни извори се понашају готово идеално али само у одређеном напонском опсегу од (0-Vmax).

Напонски компаратор је електронски уређај који на два своја улаза пореди њихове потенцијале и на излазу даје "логичке" напоне, који су углавном дефинисани као 0V (логичка нула) и ц (логичка јединица), као индикацију стања на улазима. Уколико је на + улазу потенацијал већи од потенцијала на – улазу на излазу напонског компаратора се генерише логичка јединица, односно напон од +5V. На излазу компаратора који имате у прибору постављена је лед диода која у случају логичке јединице светли указујући на стање на улазима. Уколико је на + улазу потенацијал мањи или једнак потенцијалу на – улазу на излазу напонског компаратора се генерише логичка нула , односно напон од 0 V те диода не светли.

Линеарни потенциометар је електрични уређај који на свом излазу даје потенцијал који је у корелацији са положајем његовог показивача. Потенцијал се на излазу може да се мења континуално од 0 до Vmax и линеарно зависи од положаја показивача. Линеарни потенциометар конструише се као хомогена отпорна жица или површина са клизачем, на чијим се крајевима доводе Vmin и Vmax потенцијал, а клизач у зависности од свог положаја дели укупан отпор на одређене делове и на тај начин формира делитељ напона. У вашем прибору имате такозвани угаони линеарни потенциометар код кога је потенцијал на излазу пропорционалан углу под којим је постављен клизач у односу на уземљени крај потенциометра.

Референти напонски извор је електронски је уређај који на свом излазу даје тачно одређен потенцијал у односу на масу (односно уземљење) уређаја. Обично се користи за контролу или калибрацију других електронских елемената. Референтни извор у вашем прибору даје на излазуј потенцијал +5V.

Задатак саставио:
Др Горан Попарић

Рецензент:
Др Мићо Митровић

38. такмичење Заједнице из физике ученика средњих школа

Општа група

Решења

1. ЗАДАТАК – Физика и фудбал

а) Ако у сваком тиму игра по N ирача, а површина терена је A, тада је број играча једног тима по јединици површине

$$n = \frac{N}{A}.$$

Приближна удаљеност до најближег противничког играча износи

$$d = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ако се фудбалер креће брзином v, онда је време потребно да се пређе растојање d једнако

$$t = \frac{d}{v},$$

тако да је време којег фудбалер има на располагању за пријем, контролу и предају лопте прилижно

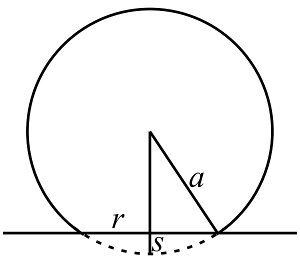
$$t = \frac{1}{2v}\sqrt{\frac{A}{N}} = 2.5\,\mathrm{s}.$$

НАПОМЕНА: Пошто је овај резултат приближан, приликом прегледања задатака признаће се сваки резултат који се од претходног не разликује за фактор већи од $\sqrt{2}$.

б) Резултујућа сила која делује на лопту је

$$F = pS,$$

где је p додатни притисак на унутрашњи зид лопте, а S је површина додира лопте и подлоге. Геометрија деформације приказана је на слици,



a је полупречник лопте, s је дубина деформације, а r је полупречник кружне површине којом лопта додирује подлогу, тако да је

$$r^2 = a^2 - (a-s)^2 = 2as - s^2.$$

Пошто је $s \ll a$, последњи се сабирак може занемарити. Стога је површина додира лопте и подлоге једнака

$$S = \pi r^2 = 2\pi as = Os.$$

Овде је O обим лопте. У току одскока, вертикална брзина центра лопте v је повезана са s на следећи начин

$$v = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

тако да је други Њутнов закон за идеалан одскок лопте

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -Ops.$$

Решење ове диференцијалне једначине је

$$s(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

где је $\omega = \sqrt{Op/m}$, док су A и B интеграционе константе које се одређују из почетног услова, да је у тренутку почетка контакта $t = 0$ интензитет вертикалне брзине лопте v_0, тако да се коначно добија да је деформација

$$s = \frac{v_0}{\sqrt{Op/m}}\sin\left(\sqrt{\frac{Op}{m}}t\right),$$

из чега следи да се сила деформације током времена мења по закону

$$F = v_0\sqrt{Opm}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{Op}{m}}t\right).$$

в) На основу ове једначине, следи да је време трајања деформације

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{Op}} = 8.4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}.$$

г) Вертикална компонента брзине лопте после одбијања одређена је вредношћу реституционог коефицијента

$$v_2 = ev_1,$$

тако да је промена вертикалне компоненте брзине једнака

$$\Delta v = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1 = (1+e)v_1.$$

Када се лопта клиза, на њу делују сила трења, F_{tr}, која успорава лопту а уједно изазива обртни моменат око центра масе лопте $F_{\mathrm{tr}}a$. Сила трења је дата са

$$F_{\mathrm{tr}} = \mu F_{\mathrm{v}},$$

где је F_{v} вертикална сила између лопте и подлоге. Други Њутнов закон је

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -F_{\mathrm{tr}}; \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_{\mathrm{v}},$$

тако да је

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\frac{F_{\mathrm{tr}}}{F_{\mathrm{v}}} = -\mu.$$

Интеграција ове једначине даје

$$\Delta u = -\mu\Delta v = -\mu(1+e)v_1,$$

где је $\Delta u = u_2 - u_1$. Момент силе трења доводи до промене момента импулса лопте

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = F_{\mathrm{tr}}a,$$

при чему је $I = \frac{2}{3}ma^2$. Интеграцијом последње једначине добија се да је промена угаоне брзине $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ једнака

$$\Delta\omega = \frac{3}{2}\mu(1+e)\frac{v_1}{a}.$$

Сумирајући претходне резултате, имамо

$$v_2 = ev_1,$$
$$u_2 = u_1 - \mu(1+e)v_1,$$
$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{3}{2}\mu(1+e)\frac{v_1}{a}.$$

д) Да би се лопта котрљала, потебно је да буде испуњен услов $u_2/\omega_2 a \leq 1$, што након тривијалних трансформација даје

$$\mu(1+e)v_1 \geq \frac{2}{5}(u_1 - \omega_1 a).$$

За лопту која се не котрља пре одскока $\omega_1 = 0$ последња неједнакост постаје

$$\operatorname{tg}\theta \geq \frac{2}{5\mu(1+e)},$$

где је θ угао између правца кретања лопте и подлоге. За податке дате у задатку је

$$\theta > 20^\circ.$$

ђ) Услов котрљања без клизања даје релацију

$$u_2 = \omega_2 a.$$

Интеграцијом једначина кретања добија се

$$\Delta\omega = -\frac{ma}{I}\Delta u,$$

тако да се добија

$$v_2 = ev_1,$$
$$u_2 = \frac{3}{5}u_1 + \frac{2}{5}\omega_1 a,$$
$$\omega_2 = \frac{2}{5}\omega_1 + \frac{3}{5}\frac{u_1}{a}.$$

е) Вероватноћа да тренутни резултат у тренутку t буде $n_1 : n_2$ једнака је производу вероватноћа да за време t први тим постигне n_1, а други тим n_2 голова (пошто су ти услови у нашем моделу независни)

$$P_{n_1:n_2} = \frac{(r_1 t)^{n_1}(r_2 t)^{n_2}}{n_1! n_2!}e^{-(r_1+r_2)t}.$$

ж) Вероватноћа да ни један тим не постигне гол за време t износи

$$P_{0:0} = e^{-(r_1+r_2)t}.$$

Вероватноћа да тим 1 за време $\mathrm{d}t$ постигне гол је $r_1\mathrm{d}t$, тако да је вероватноћа да нема голова за време t, а да тим 1 постигне погодак у тренутку t је

$$\mathrm{d}P_1 = r_1 e^{-(r_1+r_2)t}\mathrm{d}t.$$

Интеграцијом овог израза од 0 до t добија се да је вероватноћа да тим 1 постигне први гол

$$P_1 = \frac{r_1}{r_1+r_2}(1 - e^{-(r_1+r_2)t}).$$

2. ЗАДАТАК – Физичар детектив

а) Струја из жице истиче униформно по полусфери површине $2\pi r^2$. Густина струје је

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}.$$

Интензитет електричног поља повезан је са густином струје преко следеће једначине:

$$E = \rho J,$$

где је ρ отпорност тла. До ове везе може се доћи полазећи од Омовог закона или димензионом анализом. Према томе, имамо

$$E = \frac{I\rho}{2\pi r^2}.$$

б) За $r = 10\,\mathrm{m}$ добија се

$$E = 16\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

в) Можемо да претпоставимо да је електрично поље на месту где је човек стајао приближно константно, тако да је

$$V = Ed = 8\,\mathrm{V}.$$

г) Ноге и труп човека налазе се у серијској вези, тако да је укупан отпор читавог тела једнак

$$R = 2R_\mathrm{n} + R_\mathrm{t} = 1600\,\Omega.$$

Из Омовог закона следи да је струја која протиче кроз тело

$$i = \frac{V}{R} = 5\,\mathrm{mA}.$$

д) Прорачуната струја је 20 пута мања од минималне струје која изазива фибрилацију, према томе, електрична компанија није крива за смрт унесрећеног.

ђ) Ако са a обележимо полупречник жице, тада је разлика потенцијала између тачке на растојању r од центра жице и тачке на површини жице једнака

$$V(r) = -\int_a^r \frac{I\rho}{2\pi r^2}\mathrm{d}r = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

То ћемо звати потенцијалом на растојању r од центра жице. Приметимо да је други сабирак константан, тако да га можемо одбацити, па је потенцијал

$$V(r) = \frac{I\rho}{2\pi}\frac{1}{r}.$$

е) Ако је једна нога на растојању r а друга на растојању $r - l$, тада је човек на потенцијалу

$$\Delta V = V(r) - V(r-l) = \frac{I\rho}{2\pi}\frac{l}{r(r-l)},$$

тако да кроз тело пролази струја

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{I\rho}{2\pi R}\frac{l}{r(r-l)}.$$

Ако се последњи израз напише као квадратна једначина по полупречнику r

$$r^2 - rl - \frac{I\rho}{2\pi i R} = 0,$$

а потом се та једначина реши

$$r = \frac{1}{2}\left(l + \sqrt{l^2 + \frac{2I\rho}{\pi i R}}\right),$$

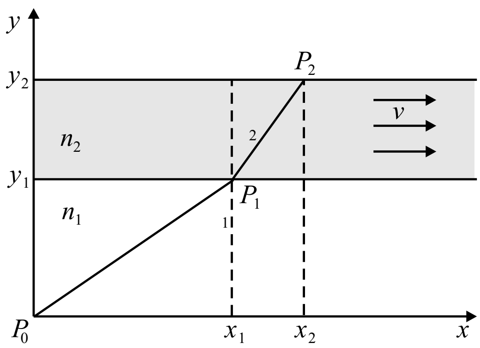
видимо да $r \uparrow$ када $l \uparrow$ и $i \downarrow$. Стога ћемо максималну вредност за пречник зоне опасности добити када је $l = L$ і $i = i_{\min}$

$$D = L + \sqrt{L^2 + \frac{2IL\rho}{\pi i_{\min} R}} = 9.4\,\mathrm{m}.$$

Дакле на знаковима опасности трена нагласити да је забрањено прилажење евентуално присутним жицама на растојање од 4.7 m.

3. ЗАДАТАК – Преламање светлости између средина у релативном кретању

а) Нека је координатни систем изабран као на слици.



На основу Фермаовог принципа, светлост ће путовати из тачке P_0 до тачке P_2 бирајући онај пут на којем је укупно време најкраће. Јасно је да време путовања сигнала зависи од положаја тачке P_1 у којој долази до преламања. Тај положај је одређен координатом x_1. У xyt координатном систему (у којем средина 1 мирује), светлост прелази пут P_0P_1 за време

$$t_1 - t_0 = \frac{n_1}{c}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

С друге стране, за пут од P_1 до P_2 потребно је да знамо како се светлост креће у координатном систему $x'y't'$ у којем средина 2 мирује. Уколико дефинишемо

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\Delta y = y_2 - y_1,$$

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

тада Лоренцове трансформације дају да су одговарајући прираштаји у примованим координатама

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\Delta y' = \Delta y,$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

Пошто је

$$\Delta t' = \frac{n_2}{c}\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2},$$

веза између Δt и Δx је

$$\frac{c^2}{n_2^2}\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)^2 = (\Delta x - v\Delta t)^2 + \Delta y^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Ова веза даје квадратну једначину по Δt, чијим решавањем се добија да је

$$\Delta t = \frac{\frac{v(1-n_2^2)\Delta x}{c^2}}{1 - n_2^2\frac{v^2}{c^2}} \pm$$

$$\pm \frac{\frac{n_2}{c}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})\Delta x^2 + (1 - n_2^2\frac{v^2}{c^2})\Delta y^2}}{1 - n_2^2\frac{v^2}{c^2}}.$$

Пошто је $\Delta t > 0$, у горњој једначини бирамо знак $+$. Време путовања светлости је

$$T = t_2 - t_0 = \Delta t + \frac{n_1}{c}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Из услова

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x_1} = 0,$$

добија се релација

$$(1 - n_2\frac{v^2}{c^2})n_1\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{v}{c}(1 - n_2^2) -$$

$$- \frac{n_2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}\Delta x}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})\Delta x^2 + (1 - n_2^2\frac{v^2}{c^2})\Delta y^2}} = 0.$$

Након извршених смена

$$\sin\theta_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

релација постаје слична Снеловом закону. Коначно, када се изврше тривијална поједностављења, уопштена форма Снеловог закона постаје

$$n_1\sin\theta_1\left(1 - n_2\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v}{c}(1 - n_2^2) =$$

$$= n_2\sin\theta_2\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{1-n_2^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_2}}.$$

б) Као што се и очекује, горња релација се своди на Снелов закон ако се узме да средине релативно мирују $v = 0$. Међутим, ако је покретна средина вакуум ($n_2 = 1$), тада се горња једначина опет своди на Снелов закон, независно од тога колика је релативна брзина v. Разлог ове појаве лежи у чињеници да *не види* кретање вакуума.

РЕШЕЊЕ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ЗАДАТКА ЗА III и IV РАЗРЕД

1.Референтни потенцијал доведен на + компаратора, а потенцијал са клизача потенциометра на -. Гашењеи паљење лед диоде на 20 подеоку показује да је вредност подеока на потенциометру: 5V:20=0.25V

Процењена грешка одређивања положаја клизача је 0.2 подеока, односно грешка вредности подеока износи 0.05V, па је вредност подеока:

1 подеок = (0.25±0.05) V .

2. Напон на кондензатору се мења са временом

$$U = \frac{q}{C} = \frac{I}{C}t$$

Пошто је струја константна, напон на кондензатору линеарно расте са временом пуњења. Мерено је време за које струјни извор напуни кондензатор до напона на потенциометру. Изједначавање ових напона је У табели су дати резултати мерења зависности тогконстатовано светлењем лед диоде на компаратору.

У табели су дати резултати мерења, где је напон на кондензатору изражен преко броја подеока на потенциометру.

	$t_i[\mathrm{s}]$	$U[\mathrm{pod}]$	$\Delta t[\mathrm{s}]$	$t_S[\mathrm{s}]$
1	26.00 25.97 26.00	3	0.02 0.02	25.99
2	50.50 50.75 50.78	6	0.18 0.18	50.677 50.68
3	74.41 74.41 74.38	9	0.02 0.02	74.40
4	100.53 100.35 100.75	12	0.21 0.2	100.54 100.5
5	127.25 127.40 127.62	15	0.2 0.2	127.42 127.4
6	153.90 152.84 153.28	18	0.56 0.6	153.34 153.3

Нацртан је график линеарне зависности времена пуњења кондензатора до одређеног напона од тог напона.

Избором две неексперименталне тачке са праве, нпр. $\mathrm{A}(4.5\,\mathrm{pod}, 38\,\mathrm{s})$ и $\mathrm{B}(16\,\mathrm{pod}, 135\,\mathrm{s})$, налази се коеф. правца као:

$$a = \frac{t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}}{U_\mathrm{B} - U_\mathrm{A}} = \frac{(135-38)\mathrm{s}}{(16 - 4.5)\mathrm{pod}} = 8.44\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta t_\mathrm{B} + \Delta t_\mathrm{A}}{t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}} + \frac{\Delta U_\mathrm{B} + \Delta U_\mathrm{A}}{U_\mathrm{B} - U_\mathrm{A}} = \frac{(1+1)\mathrm{s}}{(135-38)\mathrm{s}} + \frac{(0.2+0.2)\mathrm{pod}}{(16-4.5)\mathrm{pod}}\ .$$

$$\frac{\Delta a}{a} = 0.056 \ \Rightarrow\ \Delta a = 0.47\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}} \approx 0.5\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}} \qquad \Rightarrow\ a = (8.4 \pm 0.5)\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}}\ .$$

Пошто је $U = \frac{I}{C}t \ \Rightarrow\ t = \frac{C}{I}U \ \Rightarrow\ a = \frac{C}{I} \ \Rightarrow\ I = \frac{C}{a}$.

$$I = \frac{470\mu\mathrm{F}}{8.44\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}}} = 55.69\frac{\mu\mathrm{Fpod}}{\mathrm{s}} = 13.92\cdot 10^{-6}\,\mathrm{A}$$, а релативна грешка $\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta a}{a}$,

$$\Delta I = 0.056 \cdot 13.92\mu\mathrm{A} = 0.78\mu\mathrm{A} \approx 0.8\mu\mathrm{A} \ ,$$

$$\Rightarrow \ I = (13.9 \pm 0.8)\mu\mathrm{A} \ .$$

3. Претходни поступак је поновљен са кондензатором чији капацитет треба одредити. Резултати мерења су дати у табели.

	t_i [s]	U [pod]	Δt [s]	t_S [s]
1	11.22	3	0.02 0.02	11.24 11.24
	11.25			
	11.25			
2	21.94	6	0.103 0.1	22.043 22.0
	22.07			
	22.12			
3	33.04	9	0.037 0.04	33.077 33.08
	33.10			
	33.09			
4	33.04	12	0.167 0.17	44.257 44.26
	33.10			
	33.09			
5	55.61	15	0.69 0.7	56.30 56.3
	56.28			
	56.00			
6	67.57	18	0.54 0.6	68.11 68.1
	68.53			
	68.22			

Нацртан је график линеарне зависности времена пуњења кондензатора до одређеног напона од тог напона.

Избором две неекспerименталне тачке са праве, нпр. $\mathrm{A}(5\,\mathrm{pod}, 10.85\mathrm{s})$ и $\mathrm{B}(17\,\mathrm{pod}, 60.35\,\mathrm{s})$, налази се коеф. правца као:

$$a = \frac{t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}}{U_\mathrm{B} - U_\mathrm{A}} = \frac{(60.35 - 10.85)\mathrm{s}}{(17-5)\mathrm{pod}} = 4.12\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta t_\mathrm{B} + \Delta t_\mathrm{A}}{t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}} + \frac{\Delta U_\mathrm{B} + \Delta U_\mathrm{A}}{U_\mathrm{B} - U_\mathrm{A}} = \frac{(0.5 + 0.5)\mathrm{s}}{(60.35 - 10.85)\mathrm{s}} + \frac{(0.2 + 0.2)\mathrm{pod}}{(17-5)\mathrm{pod}} \ .$$

$$\frac{\Delta a}{a} = 0.054 \ \Rightarrow \ \Delta a = 0.23\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}} \approx 0.3\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}} \qquad \Rightarrow \quad a = (4.1 \pm 0.3)\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}} \ .$$

Пошто је $a = \frac{C}{I} \ \Rightarrow \ C = Ia = 13.92\mu\mathrm{A} \cdot 4.12\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}} = 229.7\mu\mathrm{F}$,

$$\Delta C = C\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta I}{I}\right) = 21.2\mu\mathrm{F} \approx 30\mu\mathrm{F} \ ,$$

$$\Rightarrow \ C = (230 \pm 30)\mu\mathrm{F} \ .$$