ДРУШТВО ФИЗИЧАРА СРБИЈЕ
И МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

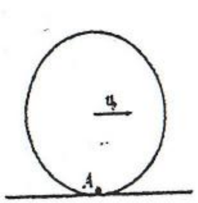
Републичко такмичење ученика средњих школа
школске 1999/2000. год.
IV разред

1. На унутрашњој страни танког крутог обруча полупречника R и масе M причвршћен је тег A занемарљивих димензија, чија је маса m. Обруч се котрља без клизања по хоризонталној равни. У почетном тренутку тег A је у најнижем положају, а центар обруча има брзину v_0, која је једнака максималној брзини при којој систем не поскакује. Одредити брзину центра обруча у тренутку када је тег у највишем положају. (20 п.)

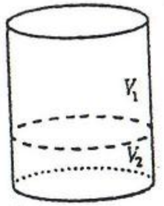
2. Вертикални цилиндар је подељен хоризонталним клипом на два дела. У сваком делу се налази иста количина ваздуха. На температури $T = 300\mathrm{K}$ однос горње и доње запремине је $\eta = 4$. На којој температури ће тај однос бити $\eta' = 3$. Трење занемарити. (15 п.)

3. Две ракете A и B крећу се у односу на посматрача на Земљи брзинама истог интензитета $v = \sqrt{3}c/2$. Правци брзина заклапају угао $\alpha = \pi/3$. Када су се ракете налазиле на растојању x_0 од посматрача, послат је светлосни сигнал ка оба брода. Чим је примио сигнал, посматрач у броду A је емитовао нови сигнал ка броду B. Одредити време које протекне за посматрача у броду B, између пријема сигнала са Земље и са брода A. (20 п.)

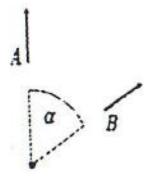
4. Распадом урана $^{238}\mathrm{U}$ настаје $^{206}\mathrm{Pb}$, док се торијум $^{232}\mathrm{Th}$ распада на $^{208}\mathrm{Pb}$. Константе распада урана и торијума су $\lambda_{238} = 1,54\cdot10^{-10}\mathrm{god}^{-1}$ и $\lambda_{232} = 4,99\cdot10^{-11}\mathrm{god}^{-1}$. Масеном анализом је констатовано да нека руда садржи 50% торијума, 30% урана и 0,08% олова. Претпостављајући да је целокупна количина олова у руди радиогене природе, наћи старост ове руде. (У рачуну користити приближну формулу $e^x \approx 1 + x$ за $x \ll 1$.) (20 п.)



Задатак 1



Задатак 2



Задатак 3

Задатке припремио: Душко Латас
Рецензент: др Воја Радовановић
Председник комисије: др Мићо Митровић

ДРУШТВО ФИЗИЧАРА СРБИЈЕ
И МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Републичко такмичење ученика средњих школа
школске 1999/2000. год.
IV разред

РЕШЕЊА

1. Почетна брзина се налази из услова непоскакивања обруча на хоризонталној равни, што је еквивалентно услову $N > 0$, где је N пројекција нормалне силе којом подлога делује на обруч. Најкритичнија тачка у којој може доћи до поскакивања је када се тег нађе у највишем положају. Тада је $N = Mg - N'$, где је $\vec{N'}$ нормална сила којом тег A делује на обруч, тј. $N' = mv^2/R - mg$, па је $N = (M-m)g - mv^2/R$. Овде је v брзина центра обруча када је тег у највишем положају. Ова брзина се одређује на основу закона одржања механичке енергије $T + U_g = \mathrm{const}$, из чега се добија $v^2 = \frac{Mv_0^2 - 2mgR}{M+2m}$, па је услов $N > 0$ еквивалентан са $(M+m)g - \frac{m}{M+2m}\frac{Mv_0^2 - 2mgR}{R} > 0$ односно $v_0 < \sqrt{\frac{2mgR}{M} + \frac{(M+m)(M+2m)gR}{mM}}$. По услову задатка $v_0 = \sqrt{\frac{2mgR}{M} + \frac{(M+m)(M+2m)gR}{mM}}$, па је онда тражена брзина центра обруча $v = \sqrt{\frac{M+m}{m}gR}$.

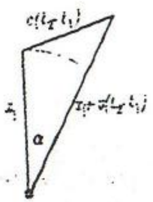
2. Означимо са индексима 1 и 2 дес изнад и испод клипа респективно, а са Q тежину клипа. Услови равнотеже су $p_1S + Q = p_2S$, односно $\nu RT/V_1 + Q/S = \nu RT/V_2$, где је ν количина ваздуха у оба дела. На почетку је $T = 300\mathrm{K}$ и важи да је $V_1/V_2 = \eta$, па је $V_1 = \frac{\eta}{1+\eta}V$ и $V_2 = \frac{1}{1+\eta}V$. Стога се из услова равнотеже добија $Q/S = p_2 - p_1 = \nu RT\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{\nu RT}{V}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)$. Аналогно се за температуру T' добија

$$Q/S = p_2' - p_1' = \cdots = \frac{\nu RT'}{V}\left(\eta' - \frac{1}{\eta'}\right),\ \text{па је}\ T' = T\frac{\eta - 1/\eta}{\eta' - 1/\eta'} = \cdots = 422\mathrm{K}.$$

3. У почетном тренутку $t = 0$ ракете се налазе на растојању x_0 од посматрача. Тада се емитују сигнали, који истовремено стижу на обе ракете. Са становишта посматрача на Земљи, то се дешава у тренутку t_1, за којег важи $x_0 + vt_1 = x_1 = ct_1$, тј. у тренутку $t_1 = x_0/(c-v)$. У тренутку t_1 са A се шаље светлосни сигнал, који у тренутку t_2 доспева на ракету B. За t_2 важи $c^2(t_2-t_1)^2 = x_1^2 + (x_1 + v(t_2-t_1))^2 - 2x_1(x_1 + v(t_2 - t_1))\cos\alpha$. Време које протекне између пријема сигнала са Земље и са брода A је на часовнику на Земљи $\Delta t = t_2 - t_1$. Из последње једначине следи да је $\Delta t = \frac{x_1 v(1-\cos\alpha)}{c^2 - v^2} \pm \frac{\sqrt{x_1^2v^2(1-\cos\alpha)^2 + 2x_1^2(1-\cos\alpha)(c^2-v^2)}}{c^2-v^2}$, где је $x_1 = \frac{cx_0}{c-v}$. У обзир долази само позитиван корен, јер су слање сигнала са A и пријем на B узрок и последица. Пријем оба сигнала са становишта посматрача B дешавају се на једном месту, па је тражено време

$$\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{cx_0\sqrt{1-v^2/c^2}}{(c-v)(c^2-v^2)}\left(v(1-\cos\alpha) + \sqrt{v^2(1-\cos\alpha)^2 + 2(c^2-v^2)(1-\cos\alpha)}\right)$$

или у нашем конкретном случају $\tau = (\sqrt{7} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})\frac{x_0}{c}$.



4. Нека је m маса руде, m_1 маса торијума, m_2 маса урана и m_3 маса олова. Тада је по условима задатка $m_1 = 0,5m$, $m_2 = 0,3m$ и $m_3 = 0,0008m$, при чему је $m_3 = m_3(^{208}\mathrm{Pb}) + m_3(^{206}\mathrm{Pb})$. Ако је N_1^0 број атома торијума у почетном тренутку, а $N_1 = N_1^0 e^{-\lambda_{232}t}$ у тренутку t, онда је број изотопа олова-208 $N(^{208}\mathrm{Pb}) = N_1^0 - N_1 = N_1(e^{\lambda_{232}t} - 1)$. На основу релације $N = mN_{AV}/M$ може се прећи са броја атома на одговарајуће масе, тј. $m_3(^{208}\mathrm{Pb}) = m_1\frac{208}{232}(e^{\lambda_{232}t} - 1) \approx m_1\frac{208}{232}\lambda_{232}t$. Аналогно се добија да је након истека времена t: $m_3(^{206}\mathrm{Pb}) \approx m_2\frac{206}{238}\lambda_{238}t$. Стога је $m_3 = m_1\frac{208}{232}\lambda_{232}t + m_2\frac{206}{238}\lambda_{238}t$, из чега се добија да је старост руде $T = \frac{0,0008m}{0,5m\frac{208}{232}\lambda_{232} + 0,3m\frac{206}{238}\lambda_{238}} = 1,28\cdot10^7$ година.

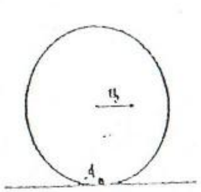
Задатке припремио: Душко Латас
Рецензент: др Воја Радовановић
Председник комисије: др Мићо Митровић

1. На унутрашњој страни танког крутог обруча полупречника R и масе M причвршћен је тег A занемарљивих димензија, чија је маса m. Обруч се котрља без клизања по хоризонталној равни. У почетном тренутку тег A је у најнижем положају, а центар обруча има брзину v_0, која је једнака максималној брзини при којој систем не поскакује. Одредити брзину центра обруча у тренутку када је тег у највишем положају. (20 п.)

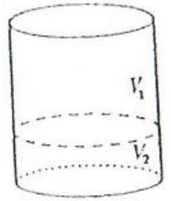
2. Вертикални цилиндар је подељен хоризонталним клипом на два дела. У сваком делу се налази иста количина ваздуха. На температури $T = 300$K однос горње и доње запремине је $\eta = 4$. На којој температури ће тај однос бити $\eta' = 3$. Трење занемарити. (15 п.)

3. Две ракете A и B крећу се у односу на посматрача на Земљи брзинама истог интензитета $v = \sqrt{3}c/2$. Правци брзина заклапају угао $\alpha = \pi/3$. Када су се ракете налазиле на растојању x_0 од посматрача, послат је светлосни сигнал ка оба брода. Чим је примио сигнал, посматрач у броду A је емитовао нови сигнал ка броду B. Одредити време које протекне за посматрача у броду B, између пријема сигнала са Земље и са брода A. (20 п.)

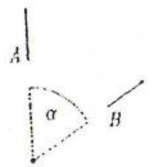
4. Распадом урана ^{238}U настаје ^{206}Pb, док се торијум ^{232}Th распада на ^{208}Pb. Константе распада урана и торијума су $\lambda_{238} = 1,54\cdot10^{-10}\mathrm{god}^{-1}$ и $\lambda_{232} = 4,99\cdot10^{-11}\mathrm{god}^{-1}$. Масеном анализом је констатовано да нека руда садржи 50% торијума, 30% урана и 0,08% олова. Претпостављајући да је целокупна количина олова у руди радиогене природе, наћи старост ове руде. (У рачуну користити приближну формулу $e^x \approx 1 + x$ за $x \ll 1$.) (20 п.)



Задатак 1



Задатак 2



Задатак 3

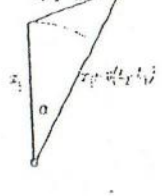
Задатке припремио: Душко Латас
Рецензент: др Воја Радовановић
Председник комисије: др Мићо Митровић

РЕШЕЊА

1. Почетна брзина се налази из услова непоскакивања обруча на хоризонталној равни, што је еквивалентно услову $N > 0$, где је N пројекција нормалне силе којом подлога делује на обруч. Најкритичнија тачка у којој може доћи до поскакивања је када се тег нађе у највишем положају. Тада је $N = Mg - N'$, где је $\vec{N}'$ нормална сила којом тег A делује на обруч, тј. $N' = mv^2/R - mg$, па је $N = (M+m)g - mv^2/R$. Овде је v брзина центра обруча када је тег у највишем положају. Ова брзина се одређује на основу закона одржања механичке енергије $T + U_g = \mathrm{const}$, из чега се добија $v^2 = \frac{Mv_0^2 - 2mgR}{M+2m}$, па је услов $N > 0$ еквивалентан са $(M+m)g - \frac{m}{M+2m}\frac{Mv_0^2-2mgR}{R} > 0$ односно $v_0 < \sqrt{\frac{2mgR}{M} + \frac{(M+m)(M+2m)gR}{mM}}$. По услову задатка $v_0 = \sqrt{\frac{2mgR}{M} + \frac{(M+m)(M+2m)gR}{mM}}$, па је онда тражена брзина центра обруча $v = \sqrt{\frac{M+m}{m}gR}$.

2. Означимо са индексима 1 и 2 део изнад и испод клипа респективно, а са Q тежину клипа. Услови равнотеже су $p_1S + Q = p_2S$, односно $\nu RT/V_1 + Q/S = \nu RT/V_2$, где је ν количина ваздуха у оба дела. На почетку је $T = 300$K и важи да је $V_1/V_2 = \eta$, па је $V_1 = \frac{\eta}{1+\eta}V$ и $V_2 = \frac{1}{1+\eta}V$. Стога се из услова равнотеже добија $Q/S = p_2 - p_1 = \nu RT\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{\nu RT}{V}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)$. Аналогно се за температуру T' добија
$Q/S = p_2' - p_1' = \cdots = \frac{\nu RT'}{V}\left(\eta' - \frac{1}{\eta'}\right)$, па је $T' = T\frac{\eta - 1/\eta}{\eta' - 1/\eta'} = \cdots = 422$K.

3. У почетном тренутку $t = 0$ ракете се налазе на растојању x_0 од посматрача. Тада се емитују сигнали, који истовремено стижу на обе ракете. Са становишта посматрача на Земљи, то се дешава у тренутку t_1, за који важи $x_0 + vt_1 = x_1 = ct_1$, тј. у тренутку $t_1 = x_0/(c-v)$. У тренутку t_1 са A се шаље светлосни сигнал, који у тренутку t_2 доспева на ракету B. За t_2 важи $c^2(t_2-t_1)^2 = x_1^2 + (x_1+v(t_2-t_1))^2 - 2x_1(x_1+v(t_2-t_1))\cos\alpha$. Време које протекне између пријема сигнала са Земље и са брода A је на часовнику на Земљи $\Delta t = t_2 - t_1$. Из последње једначине следи да је $\Delta t = \frac{x_1v(1-\cos\alpha)}{c^2-v^2} \pm \frac{\sqrt{x_1^2v^2(1-\cos\alpha)^2 + 2x_1^2(1-\cos\alpha)(c^2-v^2)}}{c^2-v^2}$, где је $x_1 = \frac{cx_0}{c-v}$. У обзир долази само позитиван корен, јер су слање сигнала са A и пријем на B узрок и последица. Пријем оба сигнала са становишта посматрача B дешавају се на једном месту, па је тражено време
$\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{cx_0\sqrt{1-v^2/c^2}}{(c-v)(c^2-v^2)}\left(v(1-\cos\alpha) + \sqrt{v^2(1-\cos\alpha)^2 + 2(c^2-v^2)(1-\cos\alpha)}\right)$
или у нашем конкретном случају $\tau = (\sqrt{7} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})\frac{x_0}{c}$.



4. Нека је m маса руде, m_1 маса торијума, m_2 маса урана и m_3 маса олова. Тада је по условима задатка $m_1 = 0,5m$, $m_2 = 0,3m$ и $m_3 = 0,0008m$, при чему је $m_3 = m_3(^{208}Pb) + m_3(^{206}Pb)$. Ако је N_1^0 број атома торијума у почетном тренутку, а $N_1 = N_1^0e^{-\lambda_{232}t}$ у тренутку t, онда је број насталих атома олова-208 $N(^{208}Pb) = N_1^0 - N_1 = N_1(e^{\lambda_{232}t} - 1)$. На основу релације $N = mN_A/M$ може се прећи са броја атома на одговарајуће масе, тј. $m_3(^{208}Pb) = m_1\frac{208}{232}(e^{\lambda_{232}t} - 1) \approx m_1\frac{208}{232}\lambda_{232}t$. Аналогно се добија да је након истека времена t: $m_3(^{206}Pb) \approx m_2\frac{206}{238}\lambda_{238}t$. Стога је $m_3 = m_1\frac{208}{232}\lambda_{232}t + m_2\frac{206}{238}\lambda_{238}t$, из чега се добија да је старост руде $T = \frac{0,0008m}{0,5m\frac{208}{232}\lambda_{232} + 0,3m\frac{206}{238}\lambda_{238}} = 1,28\cdot10^7$ година.

Задатке припремио: Душко Латас
Рецензент: др Воја Радовановић
Председник комисије: др Мићо Митровић

монохроматске светлости таласне дужине λ пада нормално на ... дифракциону решетку. Мерена је удаљеност између два максимума ... ог реда x, за неколико различитих дифракционих решетки, различитих константи d, чија је грешка мерења занемарљива. На танком лењиру, нормално постављеном у односу на упадну светлост, на удаљености $L = 100$ cm од решетке, посматрана је интерференциона слика. Резултати мерења приказани су у табели. Вредност најмањег подеока на лењиру и метарској траци којом је мерено растојање L, износи 1 mm.

d [μm]	50.0	25.0	16.7	12.5	10.0
x [mm]	20	40	60	80	100

а) Одредити таласну дужину коришћене монохроматске светлости.
б) Колика треба да је ширина једног отвора на дифракционој решетци да би растојање између максимума првог реда било 50 mm? Ширина сваког непропусног дела решетке износи $a = (4.0\pm0.2)$ μm.

(25п.)

Тражене физичке величине изразити са грешком мерења.

Задатак саставила: Андријана Жекић
Рецензент: Михо Митровић
Председник Комисије: Михо Митровић

Решење 5. задатка за трећи и четврти разред

а) Растојање између нултог и првог максимума износи $x = \frac{\lambda L}{d}$, па је растојање између два максимума првог реда $x = \frac{2\lambda L}{d}$. Одавде се добија да је $x = 2\lambda L \cdot \frac{1}{d}$.

$1/d\,[10^4\,\mathrm{m}^{-1}]$	2	4	6	8	10
x [mm]	20	40	60	80	100

Тражена таласна дужина се може одредити са линеарног графика $x = f(1/d)$. Његов коефицијент правца је одређен из тачака A($3\cdot10^4$ m^{-1}, 30 mm) и B($9\cdot10^4$ m^{-1}, 90 mm).

Грешке очитавања растојања максимума могу се, због њихове ширине, проценити на $\Delta x_A = \Delta x_B = 2$ mm (признати к процену од 1mm).

За размеру као на приложеном графику је $\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_A = \Delta\left(\frac{1}{d}\right)_B = 0.1\cdot10^4\,\mathrm{m}^{-1}$, па је

$$k = \frac{x_B - x_A}{\left(\frac{1}{d}\right)_B - \left(\frac{1}{d}\right)_A} \qquad \Delta k = k\cdot\left(\frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{x_B - x_A} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_A + \Delta\left(\frac{1}{d}\right)_B}{\left(\frac{1}{d}\right)_B - \left(\frac{1}{d}\right)_A}\right),$$ односно:

$$k = (1.0 \pm 0.1)\cdot10^{-6}\,\mathrm{m}^2.$$

$$k = 2L\lambda \implies \lambda = \frac{k}{2L}, \qquad \Delta\lambda = \lambda\cdot\left(\frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta L}{L}\right)$$

Тражена вредност таласне дужине износи

$$\lambda = (5.0 \pm 0.5)\cdot10^{-7}\,\mathrm{m} = (500 \pm 50)\,\mathrm{nm}.$$

б) Задатој вредности $x = 50$ mm одговара $(1/d) = 5\cdot10^4\,\mathrm{m}^{-1} \implies d = 20$ μm

Процењена грешка величине $1/d$, обзиром на грешке величине x износи

$$\Delta(1/d) = 0.2\cdot10^4\,\mathrm{m}^{-1}$$

Релативне грешке величина $1/d$ и d су једнаке, па је:

$$\delta = \Delta(1/d)/(1/d) = 0.04 \Rightarrow \delta = \Delta d/d \Rightarrow \Delta d = 0.8\cdot10^{-6}\,\mathrm{m} = 0.8\,\mu\mathrm{m}$$

Тражена константа решетке износи

$$d = (20.0 \pm 0.8)\,\mu\mathrm{m}.$$

Пошто је константа решетке $d = b + a$, задатој ширини непропусног дела решетке $a = (4.0 \pm 0.2)$ μm одговара величина прореза $b = d - a$.

$$b = 20\,\mu\mathrm{m} - 4.0\,\mu\mathrm{m} = 16\,\mu\mathrm{m}.$$

$$\Delta b = \Delta d + \Delta a = 0.8\,\mu\mathrm{m} + 0.2\,\mu\mathrm{m} = 1\,\mu\mathrm{m}$$

$$b = (16 \pm 1)\,\mu\mathrm{m}$$