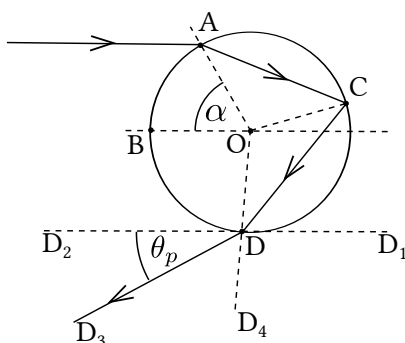


РЕШЕЊА

Решење задатка 1

- (а) При преламању зрака у тачки А угао између упадног зрака и нормале на површину капи ОА је једнак α , па је из закона преламања светлости $\sin \alpha = n \sin \beta$, где је $\beta = \angle OAC$ (слика 1). Троугао АОС је једнакокраки, па је $\angle OCA = \angle OAC = \beta$. Из закона рефлексије светлости у тачки С следи $\angle DCO = \angle OCA = \beta$, а пошто је и троугао DOC једнакокраки важи $\angle ODC = \angle DCO = \beta$. Из закона преламања у тачки D следи $n \sin \beta = \sin \angle D_3DD_4$, па је $\angle D_3DD_4 = \alpha$. Пошто је $\angle BOD = \angle D_2DD_4 = \angle D_2DD_3 + \angle D_3DD_4$, следи $\angle BOD = \alpha + \theta_p$. У четвороуглу AODC унутрашњи углови су једнаки $\angle OAC = \beta$, $\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = 2\beta$, $\angle ODC = \beta$ и $\angle AOD = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOD = 360^\circ - 2\alpha - \theta_p$. Из услова да је збир ових углова једнак 360° следи $\theta_p = 4\beta - 2\alpha$, односно

$$\theta_p = 4 \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) - 2\alpha. \quad (1)$$



Слика 1: уз решење дела задатка (а).

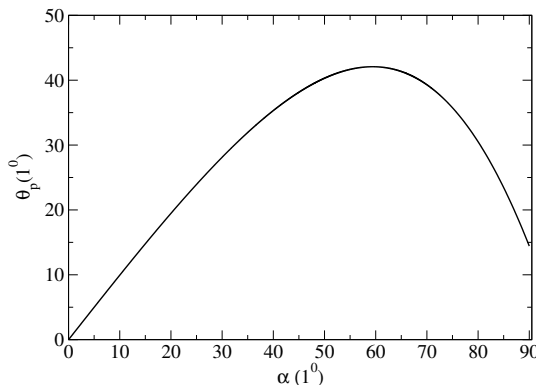
- (б) График зависности θ_p од α израчунат на основу једначине (1) за зелену светлост ($n = 1,333$) је приказан на слици 2. Угао α за који ова зависност достиже максимум се може прочитати са графика или одредити из услова $d\theta_p/d\alpha = 0$. Пошто је

$$\frac{d\theta_p}{d\alpha} = \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2}} - 2, \quad (2)$$

следи да је угао α_{\max} за који θ_p достиже максимум дат са

$$\alpha_{\max} = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} = 59,4^\circ. \quad (3)$$

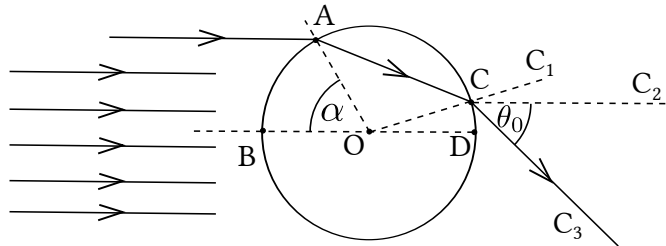
Одатле је максимално θ_p једнако $\theta_p^{\max} = 42,1^\circ$. Са графика приказаног на слици 2 видимо да зраци који упадају на капљицу под угловима у релативно широком опсегу око α_{\max} долазе до посматрача под угловима око $\theta = \theta_p^{\max} = 42,1^\circ$. Зато је правац у коме човек треба да гледа да би видео дугу управо одређен тим углом.



Слика 2: уз решење дела задатка (б).

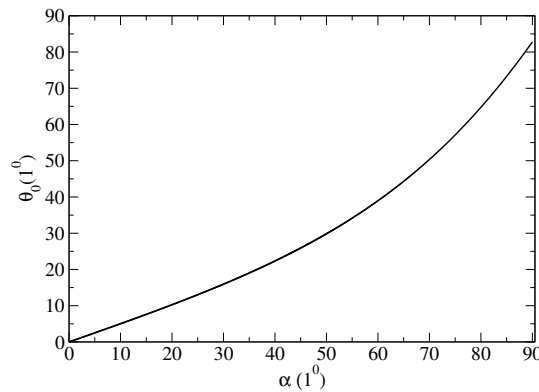
РЕШЕЊА

- (в) Користећи једначине (3) и (1) налазимо да је за црвену светлост $\theta_p^{\max}(n_3) = 42,4^\circ$, а за љубичасту $\theta_p^{\max}(n_1) = 41,2^\circ$. Одатле је угаона ширина примарне дуге $\Delta\theta_p = \theta_p^{\max}(n_3) - \theta_p^{\max}(n_1) = 1,2^\circ$.
- (г) При преламању зрака у тачки А угао између упадног зрака и нормале на површину капи ОА је једнак α , па је из закона преламања светлости $\sin \alpha = n \sin \beta$, где је $\beta = \angle OAC$ (слика 3). Треугао АОС је једнакокраки, па је $\angle OCA = \angle OAC = \beta$. Из закона преламања у тачки D следи $n \sin \beta = \sin \angle C_1CC_3$, па је $\angle C_1CC_3 = \alpha$. Даље је $\angle C_1CC_2 = \angle COD = 180^\circ - \alpha - \angle AOC$ и $\angle AOC = 180^\circ - 2\beta$, па је $\angle C_1CC_2 = 2\beta - \alpha$. Одатле се добија $\theta_0 = \angle C_1CC_3 - \angle C_1CC_2 = 2\alpha - 2\beta = 2\alpha - 2 \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)$.



Слика 3: уз решење дела задатка (г).

График зависности θ_0 од α за зелену светлост ($n = 1,333$) је приказан на слици 4. Та зависност је монотono растућа јер је $\frac{d\theta_0}{d\alpha} = 2 - 2\frac{\cos \alpha}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}}$, одакле, коришћењем чињенице да за $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $n > 1$ важи $\frac{\cos \alpha}{n} < \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$, следи $\frac{d\theta_0}{d\alpha} > 0$. С обзиром да је добијена зависност монотона, за разлику од зависности са слике 2, не постоји карактеристичан правац којим се простире већина преломљених зракова. Зато овакви зраци не могу формирати дугу.



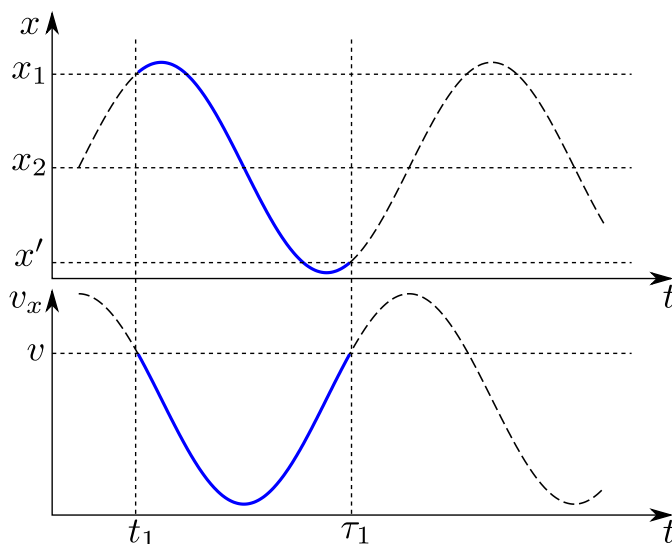
Слика 4: уз решење дела задатка (г).

Решење задатка 2

- (a) Једначина кретања тела је $ma_x = F_{\text{tr}} - kx$, где је F_{tr} сила трења између тела и плоче, x померај тела (у односу на положај у коме је опруга неистегнута), док је a_x убрзање тела. На почетку нема клизања између тела и плоче, тако да је убрзање тела једнако нули, одакле је $F_{\text{tr}} = kx$. Клизање између тела и плоче почиње у тренутку t_1 кад сила трења постане једнака максималној статичкој сили трења, тј. $\mu_{\text{st}}mg = kx_1$, где је x_1 померај тела у том тренутку, видети слику 5. Након тог тренутка, једначина кретања тела је $ma_x = \mu_{\text{dyn}}mg - kx$, са почетним условима $v_x(t_1) = v$ и $x(t_1) = x_1$. Ова једначина описује хармонијско осцилаторно кретање тела са кружном учестаношћу $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ при чему се равнотежни положај тела x_2 налази из услова $\mu_{\text{dyn}}mg = kx_2$, док се амплитуда A налази изједначавањем енергије у амплитудном положају тела и енергије у положају x_1 :

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (4)$$

У претходној једначини члан са леве стране представља енергију осцилатора у амплитудном положају, први члан са десне стране представља потенцијалну енергију кад је тело у положају x_1 и тиме је удаљено за $|x_1 - x_2|$ од равнотежног положаја, а други члан са десне стране представља кинетичку енергију у том положају. Клизање тела по плочи престаје у тренутку τ_1 кад брзина тела буде поново $v_x = v$, видети слику 5. То се дешава кад је тело на истом растојању од равнотежног положаја као и у тренутку кад почиње клизање, па се положај x' тела у том тренутку налази из услова $x' - x_2 = -(x_1 - x_2)$, одакле је $x' = 2x_2 - x_1$.



Слика 5: Графици зависности $x(t)$ и $v_x(t)$ у временском интервалу од t_1 до τ_1 су приказани пуном линијом. Испрекидане линије служе за оријентацију на сликама.

Да бисмо нашли временски интервал Δt_a током кога је присутан режим при коме се тело клиза по подлози, поћи ћемо од једначине кретања $x(t) = x_2 + A \sin(\omega t + \phi)$, одакле је зависност брзине тела од времена дата са $v_x(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$. Тренуци t_n и τ_n у којима је $v_x(t) = v$ одређени су из $\omega t_n + \phi = \arccos\left(\frac{v}{A\omega}\right) + 2n\pi$ и $\omega \tau_n + \phi = 2\pi - \arccos\left(\frac{v}{A\omega}\right) + 2n\pi$. У тренуцима t_n је $x > x_2$, а у тренуцима τ_n је $x < x_2$, па је $\Delta t_a = \tau_n - t_n = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega} \arccos\left(\frac{v}{A\omega}\right)$. Графици зависности $x(t)$ и $v_x(t)$ су приказани на слици 5.

Након што тело дође у положај x' тело се креће константном брзином v док не дође опет у положај x_1 . Временски интервал између та два тренутка је $\Delta t_b = \frac{x_1 - x'}{v}$. Након тога тело опет почиње да клизи по плочи док не дође у положај x' и цео циклус кретања се понавља. Период оваквог кретања је $T = \Delta t_a + \Delta t_b = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \left(\pi - \arccos\left(\frac{v}{A\omega}\right)\right) + \frac{2(\mu_{\text{st}} - \mu_{\text{dyn}})mg}{kv}$, где је $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, док се A добија из једначине (4) и износи $A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 (\mu_{\text{st}} - \mu_{\text{dyn}})^2 + \frac{mv^2}{k}}$.

РЕШЕЊА

- (б) У временском интервалу од $t = t_1$ до $t = \tau_1$ кад тело клизи по плочи, рад силе трења која делује на тело масе m је $A_1 = \int_{t_1}^{\tau_1} \mu_{\text{dyn}} mg \cdot dx$, одакле је $A_1 = \mu_{\text{dyn}} mg [x(\tau_1) - x(t_1)]$, односно $A_1 = -2\mu_{\text{dyn}} mg (x_1 - x_2) = -2\mu_{\text{dyn}} (\mu_{\text{st}} - \mu_{\text{dyn}}) \frac{m^2 g^2}{k}$. Над доњом плочом сила трења за то време изврши рад $A_2 = -\mu_{\text{dyn}} mg \cdot v \Delta t_a$. Количина топлоте која се ослободи за то време је тако једнака

$$Q = -(A_1 + A_2) = 2\mu_{\text{dyn}} (\mu_{\text{st}} - \mu_{\text{dyn}}) \frac{m^2 g^2}{k} + \mu_{\text{dyn}} mg \cdot v \Delta t_a. \quad (5)$$

То је уједно и укупна количина топлоте која се ослободи за један период јер је у временском интервалу кад нема клизања између плоча количина топлоте која се ослобађа услед трења једнака нули.

- (в) Коришћењем датих бројних вредности је $T = 101$ ур, $\Delta t_a = 2,76$ s, $Q = 1,18 \cdot 10^{11}$ J. Из добијеног резултата видимо да је трајање земљотреса много креће него време између два земљотреса, како се и дешава у природи. Из једначине $Q = mc\Delta t$, следи да ће температура тела порасти за $\Delta t = \frac{Q}{mc} = 1,48 \cdot 10^{-2}$ °C.

Решење задатка 3

(а) У овом делу задатка заправо је потребно извести израз за вектор магнетне индукције на z -оси кружне контуре кроз коју тече стална струја јачине I (слика 6). У том циљу, на елемент контуре dl примењујемо Био-Саваров закон:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}, \quad (6)$$

где је r најкраће растојање између елемента контуре dl и тачке у којој се рачуна магнетна индукција. Према правилу десног завртња, вектор $d\vec{B}$ има смер као на слици 6.

Ако се замисли други елемент контуре dl_1 , симетричан елементу dl у односу на тачку O (центар контуре), уочава се да он даје магнетну индукцију на растојању z од равни контуре ($d\vec{B}_1$) чија се хоризонтална компонента поништава са хоризонталном компонентом вектора $d\vec{B}$. Наравно, за сваки елемент контуре, може се уочити њему симетричан елемент, тако да се за сваки такав пар хоризонталне компоненте вектора магнетне индукције поништавају. Према томе, резултујући вектор магнетне индукције на z -оси имаће само z -компоненту, dB_z . Јасно је да важи

$$dB_z = dB \cos \alpha = dB \sin \beta = dB \frac{a}{r}. \quad (7)$$

Са друге стране је

$$r = \sqrt{z^2 + a^2}, \quad (8)$$

па се заменом (1) и (3) у (2) добија

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a dl}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (9)$$

Сада овај израз треба просумирати по целој контури. Пошто су све величине које стоје испред dl у једначини (4) константне, може се писати:

$$B_z = \oint_l dB_z = \oint_l \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a dl}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \oint_l dl. \quad (10)$$

Последњи интеграл на десној страни једначине (5) очигледно је једнак обиму круга: $\oint_l dl = 2\pi a$, одакле следи:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Ово је егзактан израз за вектор магнетне индукције на z -оси струјне контуре. Уколико се уведе магнетни момент (чији је смер одређен правилем десне руке у односу на смер струје у контури, а интензитет је $m = IS = Ia^2\pi$), последња једначина постаје

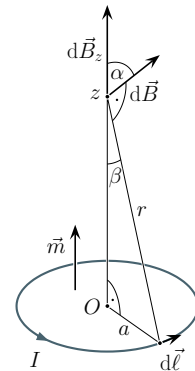
$$B_z = \frac{\mu_0 m}{2\pi (a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (12)$$

У тачкама на z -оси које су далеко од равни контуре у поређењу са њеним полупречником, члан a^2 у имениоцу може да се занемари, те се добија израз из текста задатка:

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}. \quad (13)$$

(б) Израз за магнетну индукцију овде претпостављамо у општијем облику:

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi} z^k. \quad (14)$$



Слика 6: Магнетна индукција на z -оси кружне контуре.

РЕШЕЊА

Познато је да се степена функција линеаризује логаритмовањем (за произвољну основу, овде је узет природни логаритам):

$$\ln\left(\frac{B}{1 \mu\text{T}}\right) = \ln\left(\frac{(\mu_0 m / 2\pi)}{1 (\mu\text{T}/\text{cm}^k)}\right) + k \ln\left(\frac{z}{1 \text{cm}}\right). \quad (15)$$

Да би важила једначина (8), потребно је да експериментална зависност $\ln\left(\frac{B}{1 \mu\text{T}}\right)$ од $\ln\left(\frac{z}{1 \text{cm}}\right)$ буде линеарна, и да коефицијент правца буде близак -3.

У табелама 1 и 2 приказани су измерени резултати, из текста задатка, као и рачунате величине потребне за даљу анализу и цртање графика.

$z(\text{cm})$	2	4	6	8	10	12	14	16
$B(\mu\text{T})$	107,2	16,6	5,6	2,4	1,2	0,7	0,4	0,3
$\Delta B(\mu\text{T})$	1,07	0,166	0,056	0,024	0,012	0,007	0,004	0,003
$\ln(z/1 \text{cm})$	0,69	1,39	1,79	2,08	2,30	2,48	2,64	2,77
$\ln(B/1 \mu\text{T})$	4,67	2,81	1,73	0,88	0,18	-0,36	-0,92	-1,20
$\Delta \ln(B/1 \text{cm})$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Табела 1: Подаци за први магнет.

С обзиром на чињеницу да је у тексту задатка напоменуто да се грешка мерења растојања занемари, једина грешка потиче од мерења магнетне индукције, тј. од апликације. Према услову задатка, $\Delta B = 0,01B$. Даље можемо писати

$$\Delta \ln\left(\frac{B}{1 \mu\text{T}}\right) = \frac{\Delta B}{B}, \quad (16)$$

одакле следе вредности приказане у последњем реду табела 1 и 2.

$z(\text{cm})$	2	4	6	8	10	12	14	16
$B(\mu\text{T})$	1502,0	246,3	93,8	33,6	17,8	10,5	7,4	5,3
$\Delta B(\mu\text{T})$	15,02	2,463	0,938	0,336	0,178	0,0105	0,074	0,053
$\ln(z/1 \text{cm})$	0,69	1,39	1,79	2,08	2,30	2,48	2,64	2,77
$\ln(B/1 \mu\text{T})$	7,31	5,51	4,54	3,51	2,88	2,35	2,00	1,67
$\Delta \ln(B/1 \text{cm})$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Табела 2: Подаци за други магнет.

На основу ових података, могу се скицирати одговарајући линеаризовани графици, заједно са грешкама.

Са слика 7 и 8 види се да је зависност линеарна, што је потребан услов да би се показало да и за сталне магнете важи једначина (8). Такође, очигледно је да се боља линеарна апроксимација добија када се одбаце прве две тачке (тј. тачке на најмањим растојањима од магнета). То је у складу са учињеном апроксимацијом (видети једначине (7) и (8)): на мањим растојањима од магнета до изражаја долази утицај занемареног члана a^2 у имениоцу, и тако је урађено за оба магнета.

Коефицијент правца оптималне праве одређује се избором две тачке са праве: једне између прве две експерименталне тачке, а друге између последње две експерименталне тачке, и рачуна према формули:

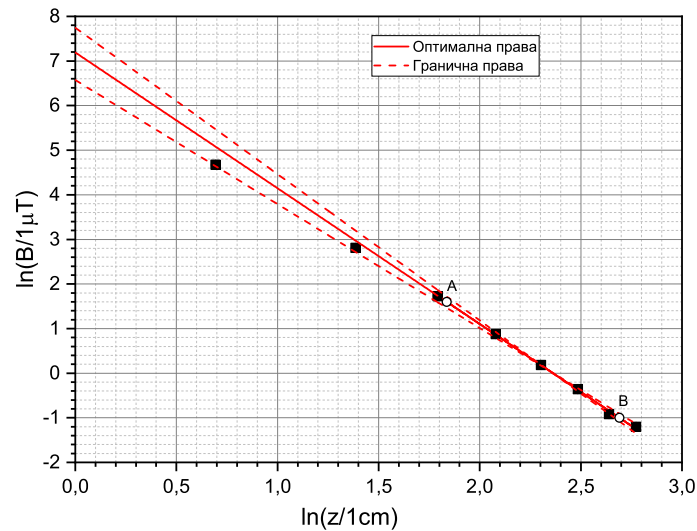
$$k = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}, \quad (17)$$

при чему се за први магнет добија:

$$k^I = \frac{1,6 - (-1)}{1,84 - 2,69} = \frac{2,6}{-0,85} \approx -3,059, \quad (18)$$

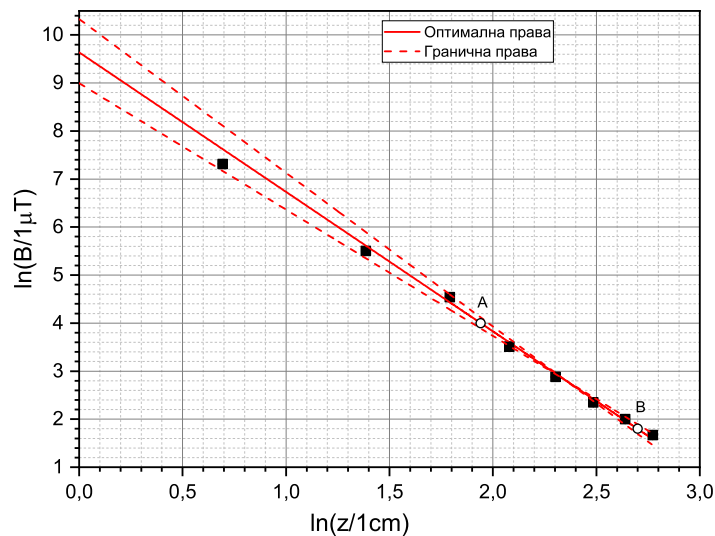
а за други

РЕШЕЊА



Слика 7: Линеаризована зависност магнетне индукције на z -оси контуре од растојања у односу на раван контуре, за први магнет.

$$k^{\text{II}} = \frac{4 - 1,8}{1,94 - 2,7} = \frac{2,2}{-0,76} \approx -2,895. \quad (19)$$



Слика 8: Линеаризована зависност магнетне индукције на z -оси контуре од растојања у односу на раван контуре, за други магнет.

Грешка коефицијента правца може се одредити повлачењем још две праве које солидно описују првих пет експерименталних тачака, једне са максималним, а друге са минималним коефицијентом правца (по апсолутној вредности), што за први магнет даје

$$k_{\text{max}}^{\text{I}} = -3,28, \quad k_{\text{min}}^{\text{I}} = -2,78, \quad (20)$$

а за други

$$k_{\text{max}}^{\text{II}} = -3,19, \quad k_{\text{min}}^{\text{II}} = -2,63, \quad (21)$$

ЗАДАЦИ

па су грешке коефицијената правца за два магнета

$$(\Delta k)^I = 0,279, \quad (\Delta k)^{II} = 0,295. \quad (22)$$

Дакле,

$$k^I = (-3,1 \pm 0,3), \quad k^{II} = (-2,9 \pm 0,3). \quad (23)$$

Закључујемо да је у оба случаја оправдано користити израз (8) за опис магнетне индукције сталних магнета. Када се не би занемариле пре две тачке, коефицијенти правца би се нешто више разликовали од -3, али би и тада резултати били прихватљиви.

(в) Пошто је утврђено да је модел предложен у тексту задатка одговарајући, магнетни момент магнета може се срачунати на основу одсечка на y -оси линеаризованог графика. Наиме, тај одсечак је, према једначини (10)

$$n = \ln \left(\frac{(\mu_0 m / 2\pi)}{1 (\mu T / \text{cm}^{-3})} \right). \quad (24)$$

Одавде следи

$$m = \frac{2\pi}{\mu_0} \cdot 10^{-12} \cdot e^n = 0,5 \cdot 10^{-5} e^n, \quad (25)$$

односно, читавањем са приложених графика,

$$m^I \approx 669,715 \cdot 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{m}^2, \quad m^{II} \approx 7382,39 \cdot 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{m}^2. \quad (26)$$

Грешка одређивања магнетног момента рачуна се по формули

$$\Delta m = \frac{2\pi}{\mu_0} \cdot 10^{-12} e^n \Delta n = m \cdot \Delta n, \quad (27)$$

где је за грешку одсечка Δn узета половина разлике одсечека одговарајућих граничних правих ($\Delta n^I \approx 0,7$, $\Delta n^{II} \approx 0,6$):

$$\Delta m^I \approx 468,80 \cdot 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{m}^2, \quad \Delta m^{II} \approx 4429,43 \cdot 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{m}^2. \quad (28)$$

Коначно, магнетни моменти два анализирана магнета износе:

$$m^I = (7 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{m}^2, \quad m^{II} = (7 \pm 5) \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2. \quad (29)$$