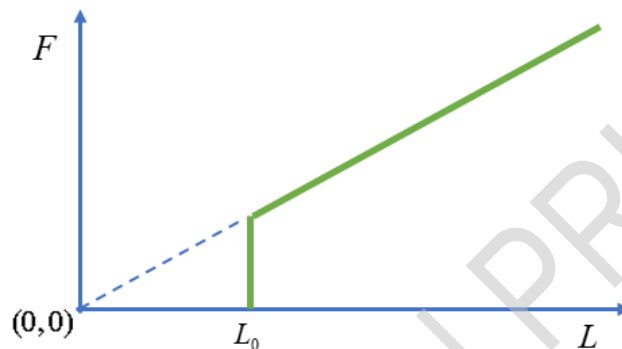


Опруга нулте дужине и федер играчка

Опруга нулте ефективне дужине (ОНД) је у ствари опруга код које је сила истегања пропорционална дужини опруге, $F = kL$ за $L > L_0$ гдје је L_0 минимална дужина опруге (када је она неистегнута). На слици 1 је приказана веза између силе F и дужине опруге L за ОНД, при чему је нагиб праве константа опруге k .



Слика 1. Веза између силе F и дужине опруге L .

ОНД је од користи у сеизмографији и омогућава веома прецизно мерење промена гравитационог убрзања g . Овде ћемо размотрити хомогену ОНД чија је тежина Mg већа од kL_0 . Дефинисаћемо бездимензионални однос, $\alpha = kL_0/Mg < 1$ који мери мекоћу опруге. Федер играчка, некима позната под називом "slinky", може се сматрати (али не обавезно) примером ОНД.

Део А: Статика (3.0 поена)

A.1 Размотрите један део неистегнуте ОНД опруге, који има дужину $\Delta\ell$, а затим га истегните силом F , при чему занемарите истегање под дејством тежине. Колико износи дужина Δy тог дела опруге у зависности од F , $\Delta\ell$ и параметара опруге? 0.5pt

A.2 За део опруге дужине $\Delta\ell$, израчунајте рад ΔW који је неопходно уложити да би тај део опруге истегнули од почетне дужине $\Delta\ell$ до коначне дужине Δy . 0.5pt

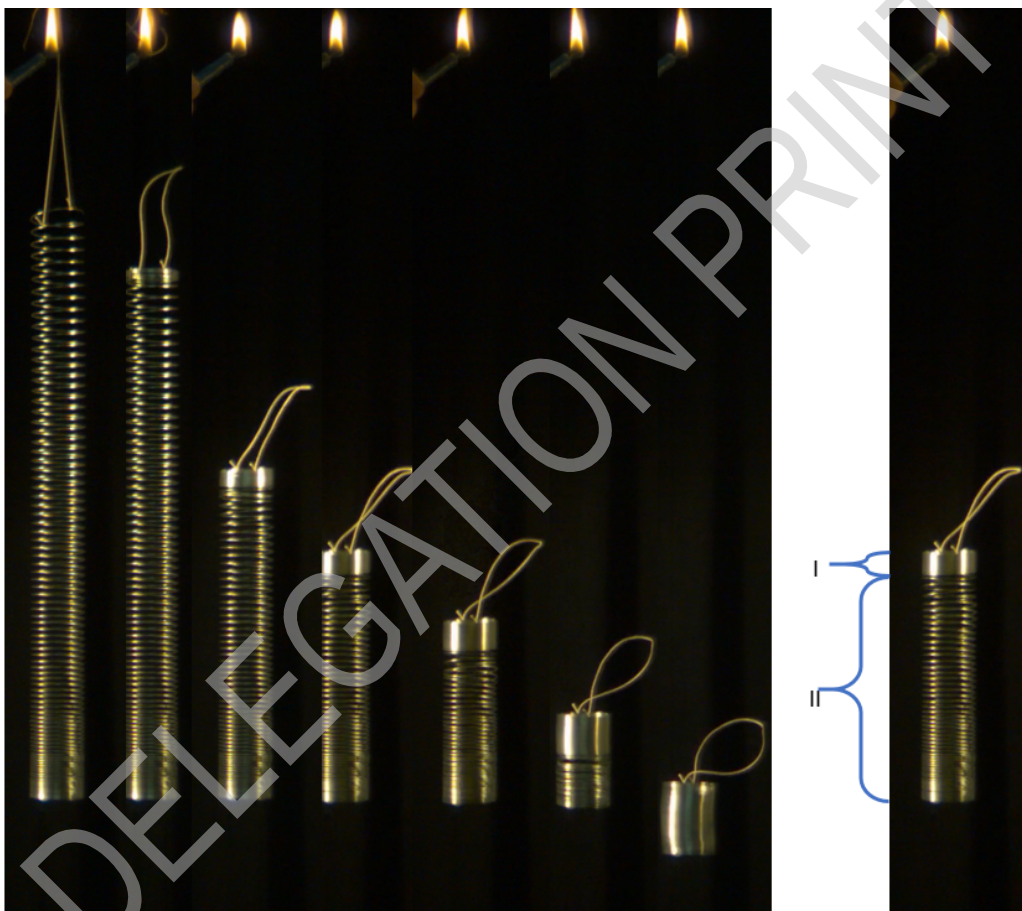
У овом задатку, сваку тачку опруге ћемо дефинисати преко њеног растојања $0 \leq \ell \leq L_0$ од подножја опруге у ситуацији када је опруга неистегнута. Како се опруга истеже наравно да се мења положај сваке тачке, али се њено ℓ не мења.

A.3 Претпоставимо да смо закачили врх опруге за плафон, тако да се опруга истегне под дејством сопствене тежине. Колика је укупна дужина H обешене опруге у стању равнотеже? Изразите одговор преко L_0 и α . 2.0pt

Део Б: Динамика (5.5 поена)

Експерименти показују да опруга, коју смо обесили и која мирује, након што се откачи од плафона, постепено се скраћује, али тако да се горњи део опруге спушта, док доњи део опруге мирује (види

Слику 2). Како време протиче, горњи део опруге, који се креће, током падања стално додаје на себе нове навоје опруге, и тај део се креће као целина. С друге стране дужина стационарног, непокретног дела опруге се током времена смањује. Свака тачка опруге почиње да се креће тек када до ње дође покретни део опруге. Доњи крај, односно доња тачка опруге почиње да се креће тек кад се комплетна опруга сабије до своје неистегнуте дужине L_0 . Након што се опруга комплетно сабије, она ће наставити да пада наниже под утицајем гравитације као круто тело, тј. више се не истеже и не мења своју дужину.



Слика 2. Лево: низ фотографија снимљених током слободног пада "slinky" опруге. Десно: покретни део I и стационарни део II током слободног пада опруге.

У преосталом делу питања од вас се очекује да дате решење засновано на горе описаном моделу. Можете занемарити отпор ваздуха, али није дозвољено да занемарите L_0 .

- B.1** Израчунајте време t_c које протекне од тренутка када се горњи део опруге пусти да пада, до тренутка када се комплетна опруга сабије до своје минималне дужине L_0 . Изразите ваш одговор преко L_0 , g и α . Израчунати нумеричку вредност t_c за опругу код које је $k = 1,02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0,055 \text{ m}$ и $M = 0,201 \text{ kg}$, при томе узимајући да g износи $9,80 \text{ m/s}^2$. 2.5pt



B.2 У овом питању ℓ нам означава границу између дела I (покретни део на слици 2) и дела II (стационарни део). У одређеном тренутку, док још увек постоји стационарни део опруге и чија маса износи $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0}M$, покретни део опруге се креће тренутном брзином $v_I(\ell)$. Показати да у том тренутку (док још увек постоји стационарни део) брзина покретног дела износи $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Изразите константе A и B преко L_0 , g и α . 2.5pt

B.3 Користећи резултат из B.2, наћи минималну брзину v_{\min} покретног дела опруге од почетка кретања па све док не падне на тло. Изразите ваш одговор преко L_0 , α , A и B . 0.5pt

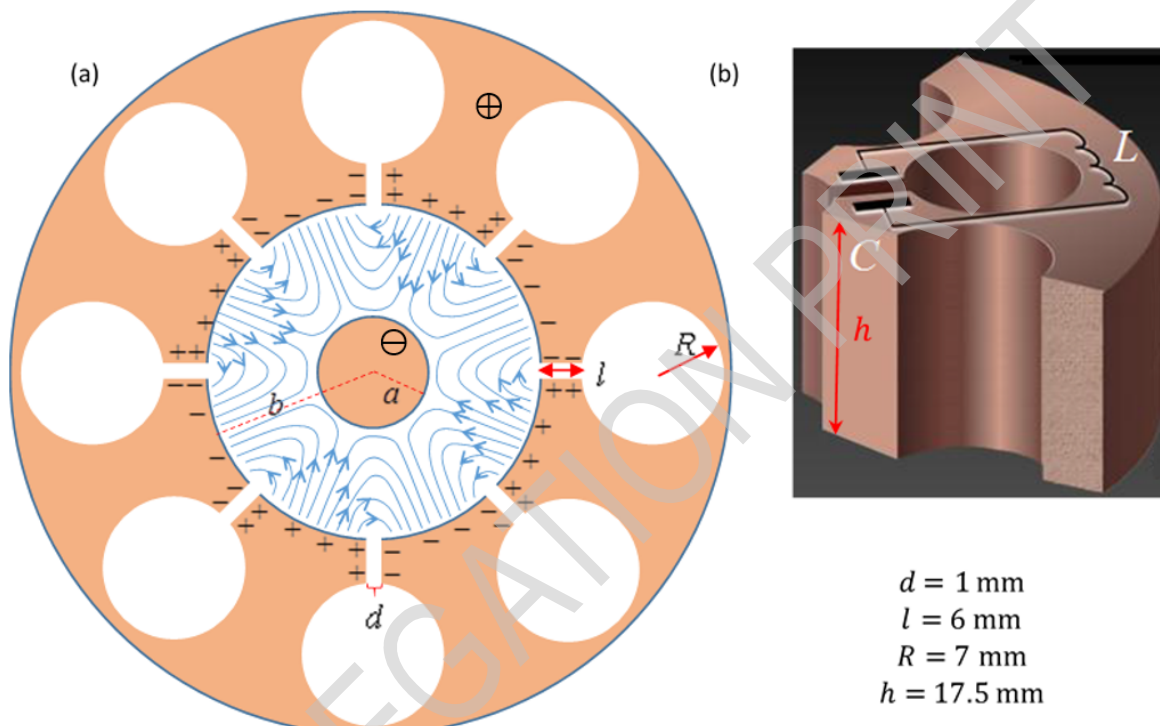
Део В: Губитак енергије(1.5 поена)

C.1 Израчунајте који део механичке енергије Q се изгубио, тј. претворио у топлоту, од тренутка када је опруга пуштена да пада до тренутка када падне на тло. Изразите ваш одговор преко L_0 , M , g и α . 1.5pt

DELEGATION PRINT

Физика микроталасне пећнице

У овом задатку се разматра стварање микроталасног зрачења у микроталасној пећници, и његово коришћење за загревање хране. Микроталасно зрачење се ствара у уређају који се назива "магнетрон". Део А је посвећен начину рада магнетрона, док се у делу В разматра апсорпција микроталасног зрачења у храни.



Слика 1

Део А: Структура и начин рада магнетрона (6.6 поена)

Магнетрон је уређај за стварање микроталасног зрачења, било импулсног (примењује се у радарима) или континуалног (у микроталасним пећницама). Магнетрон има режим самопојачавајућих осцилација. Прикључивањем магнетрона на статички (не-наизменични) напон брзо се побуђује овај режим. Микроталасно зрачење које се овако створи се преноси из магнетрона.

Стандардни магнетрон у микроталасној пећници се састоји од чврсте бакарне цилиндричне катоде (полупречника a) и аноде која окружује цилиндар (полупречника b). Анода има облик дебелог цилиндра у коме су избушене цилиндричне шупљине. Шупљине се називају "резонаторима". Један од резонатора је спојен са антеном која зрачи микроталасну енергију напоље; у даљем тексту ће антена бити занемарена. Сав унутрашњи део магнетрона је у вакууму. Разматраћемо стандардни магнетрон са осам резонатора, као што је приказано на слици 1(a). Тростандардни приказ структуре једног резонатора је дат на слици 1(b). Као што је означено на слици свака од осам шупљина се понаша као LC коло, са радном фреквенцијом $f = 2,45 \text{ GHz}$.

Магнетрон се налази у статичком униформном магнетном пољу дуж уздужне осе магнетрона, које извире из равни у којој је слика 1(a). Даље, између аноде (позитиван потенцијал) и катоде (негативан потенцијал) је константан напон. Електрони који се емитују са катоде долазе до аноде и



наелектришу је, тако што побуђују осцилаторни режим у коме је знак наелектрисања супротан у свака два суседна резонатора. Осцилације шупљина појачавају ове осцилације.

Овај процес ствара додатно наизменично електрично поље са већ наведеном фреквенцијом $f = 2,45$ GHz (плаве линије на слици 1(a); статичко поље није приказано) у простору између катоде и аноде, уз статичко поље изазвано констатним напоном. У стабилном стању, типична амплитуда наизменичног електричног поља између аноде и катоде је приближно $\frac{1}{3}$ статичког електричног поља. На кретање електрона у простору између катоде и аноде утичу и наизменично и статичко електрично поље. Ово за резултат има да електрони који стигну до аноде пренесу око 80% енергије које стекну у статичком пољу у наизменично поље. Мањи део избачених електрона се врати на катоду и ослободи додатне електроне, који додатно појачају наизменично поље.

Сваки резонатор се може замислити као паралелно повезана завојница и кондензатор, као што је приказано на слици 1(b). Капацитивност углавном долази од равних делова резонатора, док индуктивност потиче од цилиндричних делова. Претпоставите да струја у резонатору тече униформно врло близу површине цилиндричне шупљине, и да је јачина магнетног поља које она ствара једнака 60% вредности поља идеалног бесконачног солениода. Потребне дужине које одређују геометрију резонатора су дате на слици 1(б). Диелектрична пропустљивост и магнетна пермеабилност вакуума су $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$, респективно.

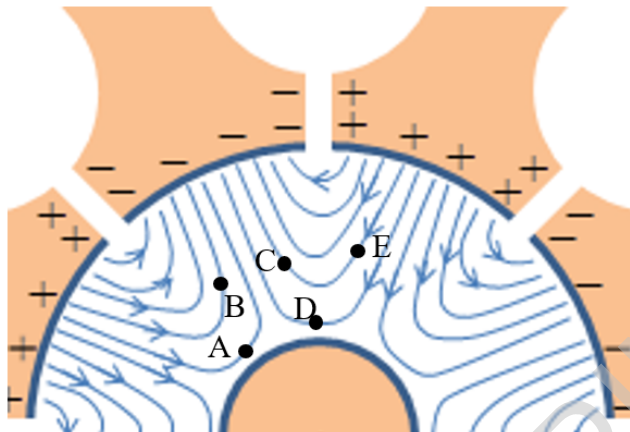
- A.1** Користећи дате податке одредите фреквенцију f_{est} појединачног резонатора. (Резултат се може разликовати од стварне вредности $f = 2,45$ GHz. Користите **стварну** вредност у осталим питањима.) 0.4pt

Задатак A.2 није о магнетрону, али помаже да се уведу неке релевантне ствари из физике. Нека се електрон креће под дејством униформног електричног поља усмереног дуж негативног смера y -осе, $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$, док је униформно магнетно поље усмерено дуж z -осе, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. (E_0 и B_0 су позитивни, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ су јединични вектори оријентисани на уобичајен начин). Нека је брзина електрона у тренутку t , $\vec{u}(t)$. Брзина дрифта електрона \vec{u}_D је дефинисана као његова средња брзина. Са m и $-e$ су означени маса и наелектрисање електрона, респективно.

- A.2** У следећа два случаја нађите \vec{u}_D . Нацртајте путању електрона (у лабораторијском систему референце) у временском интервалу $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ ако је:
- у тренутку $t = 0$ брзина електрона $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
 - у тренутку $t = 0$ брзина електрона $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.

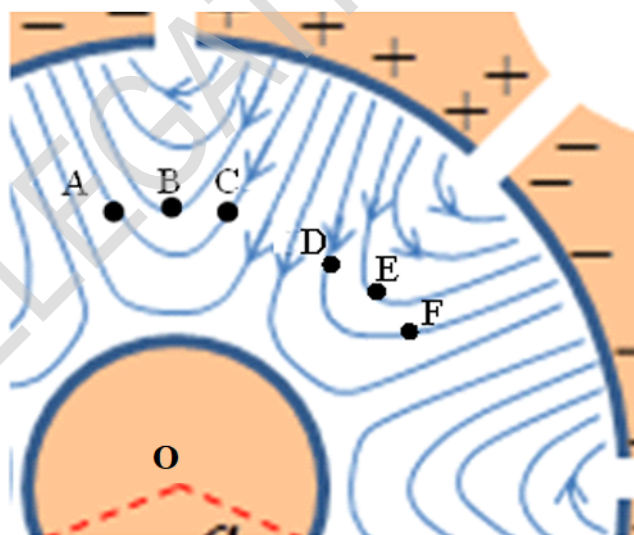
Наставићемо анализу рада магнетрона. Растојање између катоде и аноде је 15 mm. Претпоставићемо да услед раније поменутог губитка енергије на рачун наизменичног поља, максимална кинетичка енергија појединачних електрона не прелази $K_{\text{max}} = 800$ eV. Јачина статичког магнетног поља је $B_0 = 0,3$ T. Маса електрона и наелектрисање су $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg и $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, респективно.

- A.3** Дајте нумеричку процену максималног полупречника r путање електрона у систему референце у којем је кретање електрона приближно по кружници, претпостављајући да је овај систем приближно инерцијалан. 0.4pt



Слика 2

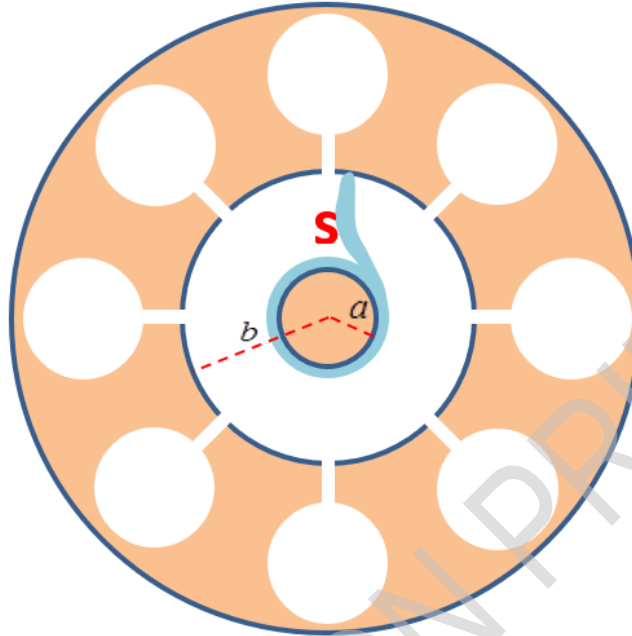
- A.4** На слици 2 су приказане линије силе наизменичног електричног поља између аноде и катоде у одређеном тренутку (статичко поље није приказано). Напишите на листу за одговоре који од електрона означених са А, В, С, D и Е ће дрифтовати ка аноди, који ка катоди а који ће дрифтовати у правцу који је нормалан на полупречник у том тренутку. 1.2pt



Слика 3

На слици 3 су приказане линије силе наизменичног електричног поља између аноде и катоде у одређеном тренутку (статичко поље није приказано). Положаји шест електрона у том тренутку су означени са А, В, С, D, Е и F. Сви електрони су на истом растојању од катоде.

- A.5** За сваки од шест парова електрона АВ, АС, ВС, DE, DF, EF, приказаних на слици 3, одредите да ли ће њихов дрифт да проузрокује повећање или смањење угла између њихових вектора положаја (мерено из центра катоде O), у том тренутку. 1.2pt



Слика 4

Ситуација описана у задатку А.5 представља механизам за фокусирање, концентрише електроне између катоде и аноде у танке снопове. Слика 4 приказује један такав снап, означен словом S.

- A.6** Скицирајте остале снопове у истом тренутку. Прикажите стрелицама смер ротације, и израчунајте средњу угаону брзину ω_s . 0.8pt

Апроксимирајте електрично поље тако да је укупно електрично поље на половини растојања између катоде и аноде једнако његовој средњој статичкој вредности, дуж линије од катоде до аноде, и да су снопови приближно радијални у тој области. Полупречници катоде и аноде су (a и b) дефинисани на слици 4.

- A.7** Нађите приближни израз за статички напон V_0 потребан да би магнетрон радио као што је описано. (Израз који ћете добити је апроксимација за минималну вредност напона потребну да би магнетрон радио; оптимална вредност напона је нешто већа.) 1.1pt

Део В: Интеракција микроталасног зрачења са молекулима воде (3.4 поена)

У овом делу се разматра употреба микроталасног зрачења (израченог помоћу антене магнетрона у комору за храну) за кување. Пример овога може да буде загревање лошег диелектричног материјала као што је вода, било чиста или слана (што је наш модел за супу).

Електрични дипол је конфигурација коју чине два супротно наелектрисана наелектрисања q и $-q$ која се налазе на малом растојању d једно од другог. Вектор електричног диполног момента је усмерен од негативног ка позитивном наелектрисању, и интензитет му је $p = qd$.

Временски зависно електрично поље $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ је примењено на један дипол $\vec{p}(t)$ константног интензитета $p_0 = |\vec{p}(t)|$. Угао између дипола и електричног поља је $\theta(t)$.

- B.1** Напишите изразе за момент силе $\tau(t)$ који потиче од електричног поља које делује на дипол, као и за снагу $H_i(t)$ коју поље предаје диполу, у зависности од p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ и њихових извода. 0.5pt

Молекули воде су поларни и потребно је да се разматрају као електрични диполи. Због јаких водоничних веза између молекула воде, они се не могу посматрати као скуп независних дипола. Уместо тога потребно је користити вектор поларизације $\vec{P}(t)$, што је вектор густине диполног момента (средњи диполни момент у јединици запремине). Поларизација је паралелна локалном наизменичном електричном пољу (пољу микроталасног зрачења), $\vec{E}(t)$, и осцилује током времена са амплитудом локалног наизменичног електричног поља, али са фазном разликом δ .

Локално наизменично електрично поље на одређеном месту у води је $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x}$, где $\omega = 2\pi f$. Ово наизменично електрично поље доводи до повећања поларизације $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta) \hat{x}$, где је β бездимензионална константа карактеристична за воду.

- B.2** Нађите израз за средњу вредност по времену, снаге $\langle H(t) \rangle$ по јединици запремине апсорбоване у води. Средња вредност временски зависне периодичне функције $f(t)$, за време једног периода, T , је дефинисана са: 0.5pt

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Размотримо простирање зрачења кроз воду. Релативна диелектрична пропустљивост воде (за одређену фреквенцију поља) је ϵ_r , а одговарајући индекс преламања воде је $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Тренутна густина енергије електричног поља је дата са $\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$. Средње густине енергија електричног и магнетног поља су једнаке.

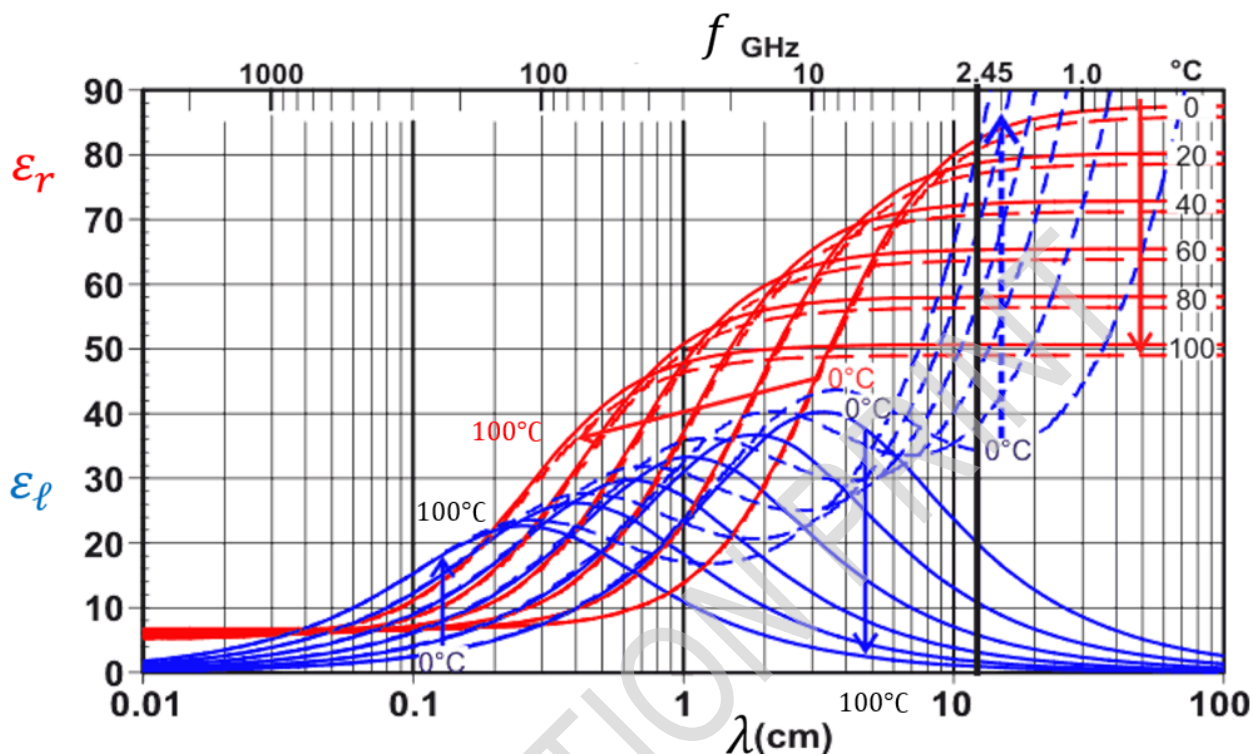
- B.3** Нека је средња густина флука израчене енергије $I(z)$ (средња израчена снага кроз јединичну површину). Овде је z дубина продирања поља у воду, и зрачење се простира дуж z осе. Нађите израз зависности густине флука $I(z)$ од z . Густина флука на површини воде, $I(0)$, се може појавити у вашем резултату. 1.1pt

Фазна разлика δ је резултат интеракције молекула воде. Она зависи од бездимензионалне величине ϵ_ℓ (диелектрични коефицијент губитка) и релативне диелектричне пропустљивости ϵ_r (обе величине зависе од фреквенције поља ω и температуре) као $\tan \delta = \epsilon_\ell / \epsilon_r$. Када је δ довољно мало, електрично поље на дубини z у води је дато са:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

где је $k_0 = \omega/c$ и $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ је брзина светлости у вакууму.

- B.4** Примените апроксимацију $\tan \delta \approx \sin \delta$ и нађите израз за коефицијент β дефинисан у делу B.2 у зависности од других параметара. 0.6pt



Слика 5. Стрелице показују промену са температуром за све криве од 0°C до 100°C

На слици 5 су приказани ϵ_r (црвено) и ϵ_l (плаво) везани за чисту воду (пуне линије) и слану воду (испрекидана линија) као функције таласне дужине или фреквенције, за неколико различитих температура. Угаона фреквенција $\omega = 2\pi \cdot 2,45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ је приказана дељом вертикалном линијом. Надаље ћемо се бавити микроталасним зрачењем само на овој фреквенцији.

B.5 На основу слике 5 одговорите на следећа питања:

0.7pt

1. За воду на 20°C , нађите дубину продирања $z_{1/2}$ за коју ће снага по јединици запремине опасти на половину вредности коју има за $z = 0$.
2. Одговорите у којим ће се случајевима дубина продирања микроталасног зрачења у води повећавати, смањивати остати иста са променом температуре.
3. Одговорите у којим ће се случајевима дубина продирања микроталасног зрачења у супи (сланој води) повећавати, смањивати остати иста са променом температуре.

Термоакустични мотор

Термоакустични мотор је уређај који конвертује топлоту у акустичну снагу, тј. звучне таласе (облик механичког рада). Као и многе друге топлотне машине, термоакустични мотор може радити у инверзном режиму, како би се користио као фрижидер (машина за хлађење), тако што користи звук како би пумпао топлоту из хладног у топли резервоар. Високе фреквенце на којима уређај ради смањују топлотно провођење (кондукцију) и елиминишу потребу за било којом додатном комором. За разлику од многих других типова мотора, термоакустични мотор нема делова који се померају (осим самог радног флуида).

Ефикасност термоакустичног мотора је обично мања од ефикасности осталих типова мотора, али њихова предност лежи у једноставном постављању и ниским трошковима одржавања. Ово отвара могућности за њихово коришћење у областима обновљивих енергија, као што су соларне термоелектране и поновно коришћење изгубљених енергија. Анализа у овом задатку ће бити усмерена на само стварање акустичне енергије унутар система, при чему се неће разматрати даље коришћење ове енергије за напајање спољашњих електричних уређаја.

Део А: Звучни талас унутар затворене посуде

Размотримо термално изоловану посуду дужине L и површине попречног пресека S , која је постављена тако да је дужа страна паралелна са x осом. Крајеви посуде се налазе у положајима $x = 0$ и $x = L$. Посуда (која је затворена са обе стране) је испуњена идеалним гасом, који се у стању равнотеже налази на температури T_0 , има притисак p_0 и масену густину ρ_0 . Претпоставити да се вискозност може занемарити, да се делићи гаса крећу само дуж x осе и да су особине гаса униформне дуж y и z оса.



Слика 1.

- A.1** Када се стојећи звучни талас формира, делићи гаса ће осциловати дуж x осе са угаоном фреквенцом ω . Амплитуда осциловања сваког делића гаса ће зависити од његовог положаја x унутар суда. Елонгација (растојање тренутног од равнотежног положаја x дуж лонгитудиналног правца) сваког делића гаса је дата изразом:

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(u овде означава елонгацију (померај од равнотежног положаја) делића гаса)

где је $a \ll L$ позитивна константа, $k = 2\pi/\lambda$ је таласни број, а λ таласна дужина. Колика је максимална могућа таласна дужина λ_{\max} у овом систему?

У остатку задатка ћемо претпоставити да је задовољен услов $\lambda = \lambda_{\max}$.

Размотримо сада делић запремине гаса који се у стању мировања налази између x и $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). Као резултат померања таласа (део А.1), овај део запремине осцилује дуж x осе и трпи промену запремине и осталих термодинамичких величина.

У свим осталим деловима овог задатка претпоставити да су промене ових термодинамичких ве-

личина мале у односу на непертурбоване вредности.

- A.2** Делић запремине $V(x, t)$ осцилује око равнотежне вредности која износи $V_0 = S\Delta x$ и има облик: 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Наћи израз за $V_1(x)$ у функцији V_0 , a , k и x .

- A.3** Претпоставити да укупан притисак гаса у неком тренутку, као резултат звучног таласа, има облик: 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Користећи силе које делују на делић запремине гаса, израчунати амплитуду $p_1(x)$ осцилација притиска (при овом рачуну задржати само прву поправку при развоју у Тејлоров ред), у функцији положаја x , равнотежне густине ρ_0 , амплитудног растојања a и параметара таласа k и ω .

При акустичним фреквенцама, термално провођење гаса се може занемарити. Сматраћемо да је ширење и скупљање гаса адијабатско, тј. да задовољава једначину $pV^\gamma = \text{const}$, где је γ адијабатска константа.

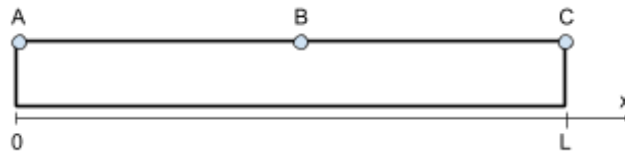
- A.4** Користећи раније дате изразе, као и решења ранијих делова задатка, одредити апроксимативну брзину (узети у обзир само први члан у развоју) звучних таласа $c = \omega/k$ унутар суда. Изразити одговор у функцији p_0 , ρ_0 и адијабатске константе γ . 0.3pt

- A.5** Промена температуре гаса због адијабатског ширења и скупљања, као последица звучног таласа, има облик: 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Израчунати амплитуду $T_1(x)$ температурних осцилација у функцији T_0 , γ , a , k и x .

- A.6** Само за овај део задатка, претпоставити слабу термалну интеракцију између суда и гаса. Као резултат овога, стојећи талас ће остати практично неизмењен, али гас може размењивати мале количине топлоте са судом. Загревање услед вискозности се може занемарити. За сваку од тачака на Слици 2 (А, С на крајевима суда, В на средини стране суда) назначити да ли ће се температура суда у овим тачкама повећати, смањити или остати иста након довољно дуго времена. 1.2pt

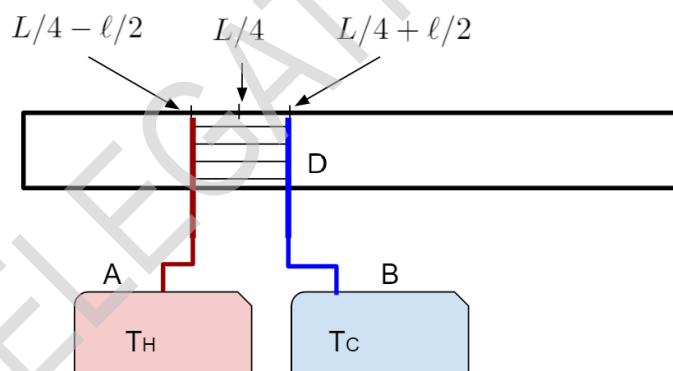


Слика 2

Део В: Појачање звучног таласа, индуковано спољашњим термалним контактом (6.3 поена)

Структура која се састоји од танких, међусобно раздвојених плоча је постављена унутар посуде. Ова структура је постављена тако да је раван плоча паралелна са осом посуде, тако да не омета проток гаса дуж посуде. Центар структуре је постављен у положај $x_0 = \frac{L}{4}$, и има дужину ℓ ($\ell \ll L$) дуж осе посуде, попуњавајући цео попречни пресек. Лева и десна ивица структуре са плочама се одржавају на константној температурној разлици која износи τ . Лева ивица ове структуре, која се налази у положају $x_H = x_0 - \ell/2$, се одржава на константној температури $T_H = T_0 + \tau/2$ помоћу спољашњег топлотног резервоара. У исто време, десна ивица, у положају $x_C = x_0 + \ell/2$, се одржава на температури $T_C = T_0 - \tau/2$.

Структура са плочама омогућава мали лонгитудинални проток топлоте, како би се одржавао константни температурни градијент између њених ивица, тако да важи $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$.



Слика 3. Скица система. (А) и (В) представљају топли и хладни резервоар, респективно. (D) представља структуру са плочама.

Како би размотрили ефекат термалног контакта између структуре са плочама и гаса на звучне таласе унутар посуде, претпоставити следеће:

- Као и у претходним деловима, све промене термодинамичких величина сматрати малим у односу на непертурбоване вредности.
- Систем се налази у основном моду стојећих таласа, тј. у случају када је таласна дужина таласа највећа могућа за дату дужину посуде. Систем је само мало модификован присуством структуре са плочама.
- Структура са плочама је много краћа од таласне дужине $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, и може се налазити довољно далеко и од чвора таласа и од чвора притиска, тако да се померај $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ и притисак $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ могу сматрати константним дуж целе дужине структуре са плочама.

- Могу се занемарити сви ефекти ивица, изазвани кретањем делића гаса у структуру са плочама и из ње.
- Разлика температура између крајева плоча, тј. између топлог и хладног резервоара је мала у поређењу са апсолутном температуром: $\tau \ll T_0$.
- Кондукција топлоте кроз структуру са плочама, кроз гас и дуж самог суда су занемарљиве. Једини значајан извор трансфера топлоте је конвекција услед кретања гаса и кондукција између гаса и структуре са плочама.

- B.1** Посматрати одређени делић гаса унутар структуре са плочама, који се у почетку налази између $x_0 = L/4$ и $x_0 + \Delta x$. Како се делић гаса креће унутар структуре, локална температура дела структуре са плочама непосредно поред њега се мења по следећој формули:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Изразити T_{st} у функцији a , τ и ℓ .

- B.2** Изнад које критичне температурне разлике τ_{cr} ће гас предавати топлоту са топлог на хладни резервоар? Изразити τ_{cr} у функцији T_0 , γ , k и ℓ . 1.0pt

- B.3** Наћи општи апроксимативни израз за проток топлоте $\frac{dQ}{dt}$ у делић гаса као линеарну функцију брзине промене запремине и притиска. Добијени израз записати као функцију брзине промене запремине $\frac{dV}{dt}$, брзине промене притиска $\frac{dp}{dt}$, величина које карактеришу гас у непертурбованом стању p_0 , V_0 и адијабатске константе γ . (Можете користити израз за моларни топлотни капацитет при константној запремини $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, где је R гасна константа.) 0.8pt

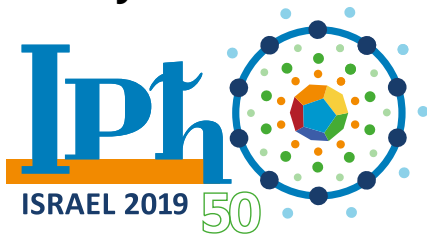
Ограничена брзина протока топлоте између делића гаса и структуре са плочама изазива одређену фазну разлику између осцилација у притиску и запремени делића гаса. У наставку ћемо видети како ова фазна разлика генерише рад.

Нека топлотни флуks у делић гаса из структуре са плочама буде пропорционалан температурној разлици између температуре делића гаса и суседног дела структуре са плочама, дат апроксимативним изразом $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Овде T_1 и T_{st} представљају амплитуде температурних осцилација делића гаса и дела суседне структуре (делови А.5 и В.1), респективно. β је константа за коју важи $\beta > 0$. Претпоставити да је промена температуре гаса као резултат овог протока топлоте занемарљива у односу на T_1 и T_{st} .

- B.4** Како би израчунали рад, размотримо промену запремине делића гаса који се креће, као резултат термалног контакта са структуром са плочама. Запишимо притисак и запремину делића гаса под утицајем структуре са плочама у облику:

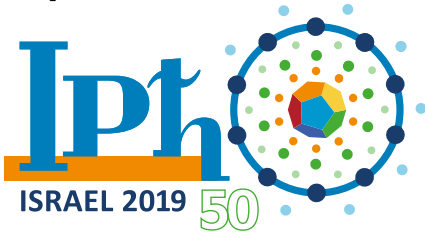
$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Уколико су дати p_a и p_b , наћи коефицијенте V_a и V_b . Одговор изразити у функцији p_a , p_b , p_0 , V_0 , γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a и ℓ .



- B.5** Проинтегралити по целој запремини структуре са плочама како би добили укупну снагу W_{tot} коју генерише гас. Изразити W_{tot} у функцији $\gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, k$ и S . 0.8pt
- B.6** Израчунати топлоту Q_{tot} транспортовану са леве стране равни $x = x_0$ на десну страну, током једног циклуса. Изразити одговор у функцији $\tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, S, \ell$. (Помоћ: можете користити формулу $j = Q \frac{du}{dt}$ за брзину конвекције.) 0.8pt
- B.7** Наћи ефикасност η термоакустичног мотора. Ефикасност је дефинисана као однос генерисаног акустичног рада и топлоте добијене од топлијег резервоара. Изразити одговор у функцији температурне разлике између тоглог и хладног резервоара τ , критичне температурне разлике τ_{cr} и Карнове ефикасности $\eta_c = 1 - T_C/T_H$. 0.6pt

DELEGATION PRINT



Оптичка мерења

У овом експерименту измерићемо оптичке карактеристике узорака са највећом могућом прецизношћу коју нам дозвољава расположива опрема.

Скрећемо вам пажњу да се испод стола налазе две велике боце воде које су вам неопходне за други експеримент - **зато немојте да пијете воду из њих** :).

У делу А користићемо два различита метода како би измерили индекс преламања провидног диска. Први метод је традиционалан, већ познат, док је други метод оригиналан и омогућава мерење са доста већом прецизношћу.

У делу В, мерићемо однос таласне дужине ласера λ и константе дифракционе решетке d , с намером да тај однос измеримо са највећим могућим нивоом тачности.

У делу С, мерићемо индекс преламања троугоане призме, поново - с намером да га измеримо са највећим могућим нивоом тачности.

За потребе рада на експерименту сала у којој се одвија такмичење ће бити замрачена укупно 100 минута, а замрачење ће наступити 20 минута од почетка теста (ако вам буде било потребно светло можете користити стону лампу). Много лакше ће вам бити да део А експеримента спроведете док је сала замрачена, али ћете ипак моћи да мерења спроведете и при упаљеном светлу.

Можете користити зидове ваше радне просторије као екран, а слободно можете лепити селотејп (лепљиву траку) по зидовима радне просторије у којој радите.

У овим експериментима се користи диодни ласер као извор светлости.

Упутство за безбедно коришћење ласера:

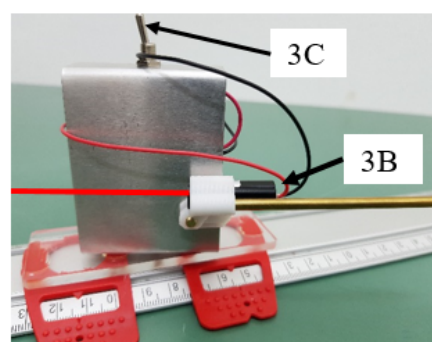
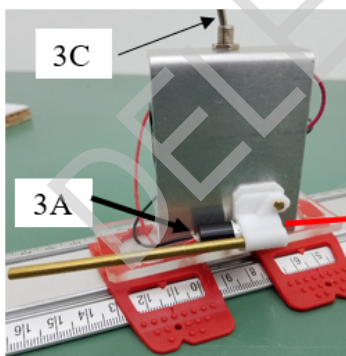
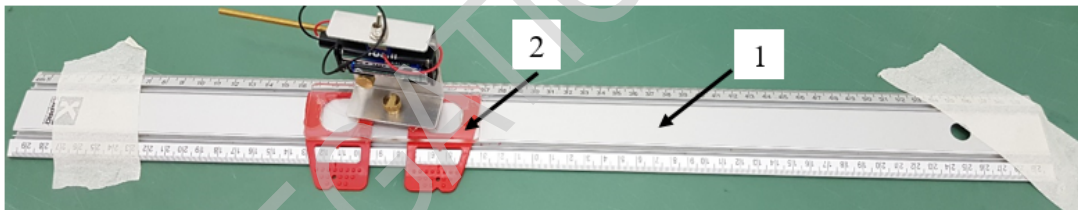
- **НИКАДА не гледајте директно у ласерски снап!**
- У свим експериментима ласерски снап је хоризонталан. Када хоћете да видите, измерите положај тачке на површи где је пао ласерски зрак **постарајте се да је ваша глава УВЕК изнад ласерског зрака.**
- Немојте да усмеравае ласерски зрак ка улазу ваше радне просторије.
- Када не вршите мерења онда искључите ласер користећи прекидач ласера.

Списак опреме

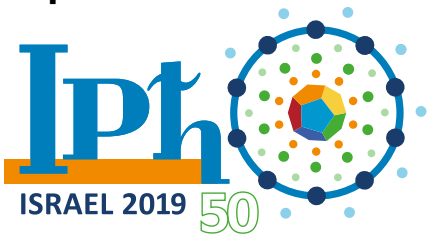
Делови опреме 1-9 се користе у свим деловима задатка, док се делови опреме 10-12 користе само у неким деловима задатка. Обратите пажњу да вам је дато више делова оптичке опреме - постарајте се да не додирујете директно рукама њихове бочне стране како не би запрљали површине.

1. Лењир дужине 60 cm
2. Клизач који може да се помера дуж лењира
3. Ласер који је постављен на клизач. Ласер може да се постави на две висине односно два нивоа: нижи ниво 3А који се користи у делу А задатка, и виши ниво 3В који се користи у деловима задатка В и С. Прекидач оп/off ласера је приказан на слици и означен је са 3С
4. Затегнутост шрафа 4А и шрафа 4В вам контролише ротацију ласера и на тај начин контролише стабилност апаратуре. Користите метални штапић 4С да мењате правац ласера. Окрените 4С штапић за 180 степени да бисте променили висину ласера. Немојте да ротирате ласер око правца који се поклапа са правцем ласерског снопа, зато што је поларизација ласерског снопа већ подешена.

5. Екран: као екран можете користити зидове просторије у којој радите експеримент. Можете претпоставити да су суседни зидови просторије постављени под правим углом, међусобно су нормални.
6. Ролна селотејп траке коју можете искористити да причврстите опрему за сто
7. Метар, односно метарска трака
8. Разни лењири
9. Стона лампа
10. Округли провидни диск пречника 20.00 cm, који је причвршћен за угломер, а све заједно је постављено на дрвену основу (користи се у делу А). Неопходно је да уклоните 4 мале дрвене коцкице које су прикачене за дрвену основу
11. Папир који вам може послужити као провидни екран који се привремено поставља (поставља се руком) на страну диска, што вам омогућава да измерите положај тачке где ласерски сноп излази из диска, а да не запрљате исполирану површ диска (део задатка А). Много прецизније ћете измерити положај излазне тачке ласерског снопа ако на папиру нацртате линију као што је приказано на слици.
12. Дрвена основа (12А) и држач цилиндра (12В) се могу окретати око вертикалне осе како би на њих могли да поставимо дифракциону решетку (12С) или троугаону призму (12D)

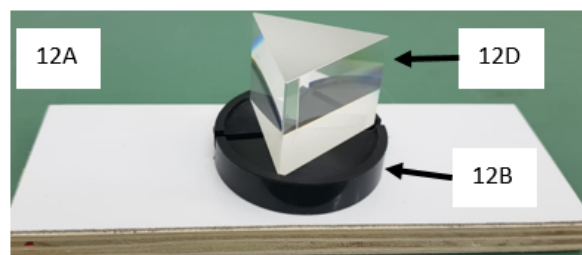
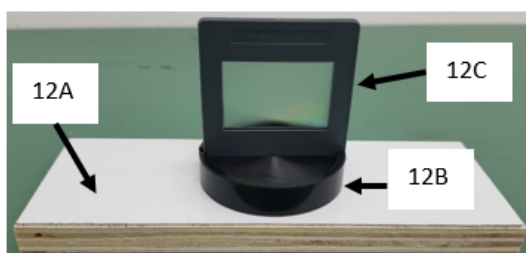
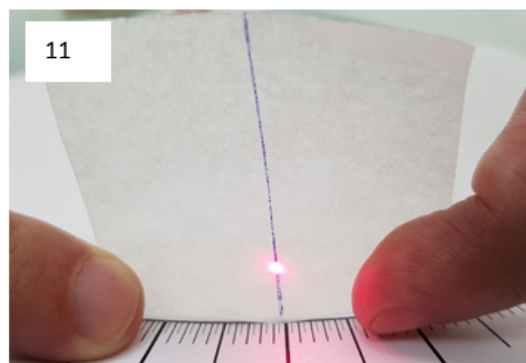
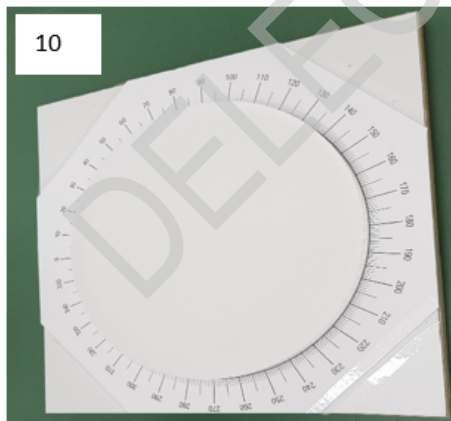
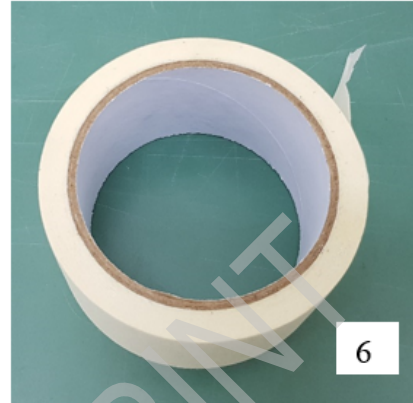
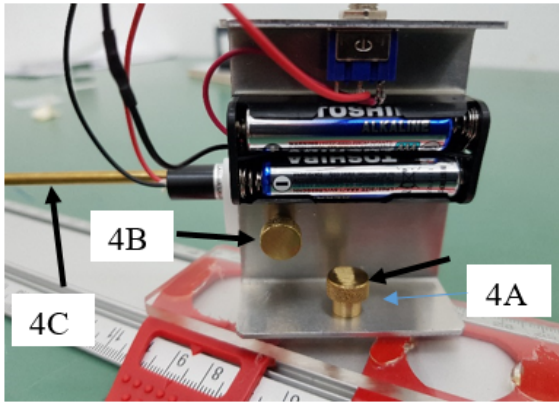


Experiment

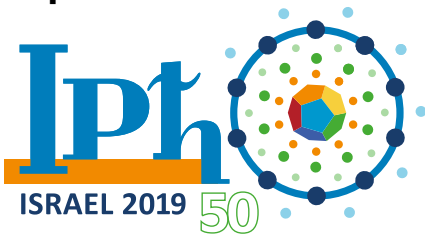


Q1-3

Serbian (Serbia)



Experiment

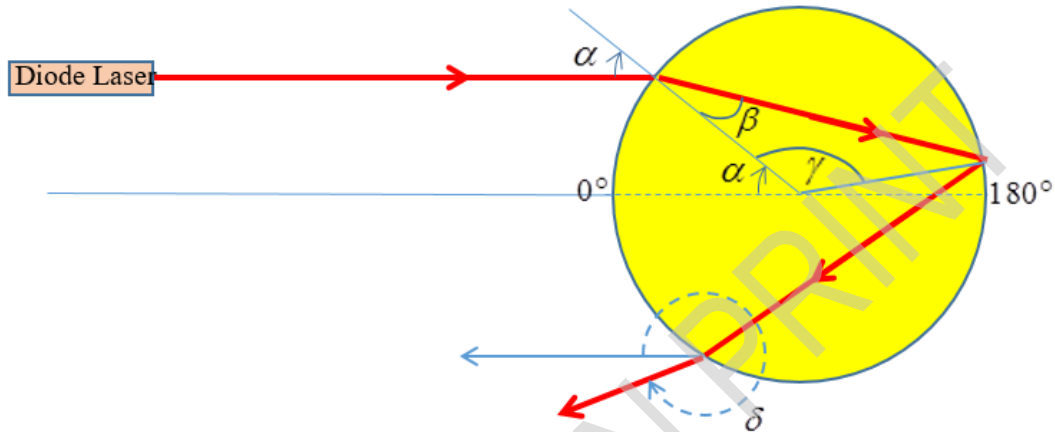


Q1-4

Serbian (Serbia)

Део А: Индекс преламања диска (5.5 поена)

У овом делу мерићемо индекс преламања провидног диска посматрајући путању ласерског снопа док се прелама при уласку и изласку из диска, као и док се одбија од унутрашње стране диска.



Схематски приказ експеримента

Дефиниције и ознаке:

α	Упадни угао између нормале на површину диска и упадног снопа ласерског зрака
$2\Delta\alpha$	Угаона ширина упадног угла, односно ширина интервала углова у коме се налази упадни угао α
β	Угао преламања унутар диска
γ	$= 180^\circ - 2\beta$
n	Индекс преламања материјала од којег је направљен диск
N	Број удара ласерског снопа о површину диска пре него што изађе из диска (на схематском приказу експеримента је приказана ситуација када је $N = 3$)
δ	Угао између упадног правца ласерског снопа и правца дуж којег ласерски снап излази из диска, мерено у смеру казаљке на сату (на схематском приказу експеримента приказан је угао δ за $N = 3$)
$2\Delta\delta$	Угаона ширина δ

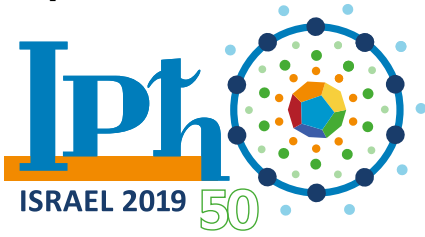
Могуће је показати да су углови α , β и δ повезани релацијом:

$$\delta = 2\alpha + (N - 1)(180^\circ - 2\beta). \quad (1)$$

Можете да користите ову једначину и не морате да је изводите.

Причврстите лењир за сто лепљивом траком, како бисте контролисали упадни угао ласерског снопа, и подесите положај ласера тако да можете лако да мерите упадни угао. Након тога причврстите

Experiment



Q1-5

Serbian (Serbia)

диск за сто тако што љепљивом траком за сто причврстите ћошкове дрвене основе. Подесите нагиб уз помоћ металне шипке 4C.

Ласер се може поставити на две различите висине: доњи ниво за део задатка А и горњи ниво за делове задатка В и С. Ласер је већ подешен тако да је упадни талас у такозваној S поларизацији (поларизација за коју је рефлексивна већа). **Немојте да мењате поларизацију** ласерског снопа (односно немојте да вртите ласер око правца који се поклапа са ласерским снопом)!

A.1 Нацртајте скицу система на којој ћете приказати лењир са клизачем, диск, и путању ласерског снопа. Означите упадни угао α . Извршите низ мерења у опсегу углова $15^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$, и запишите α , $\Delta\alpha$, δ , $\Delta\delta$ у Табели 1. Напомена: за мерење δ , много вам је подесније да измерите $\delta/2$ директно на диску. 1.0pt

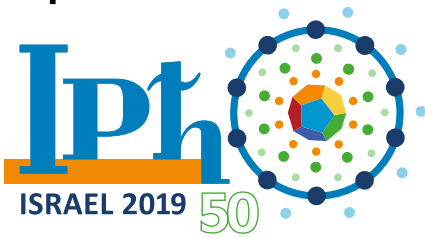
A.2 Користећи резултате претходног мерења нацртајте одговарајући график из којег ћете моћи да израчунате индекс преламања n и грешку Δn . Ако вам буде било потребно да израчунате и неке додатне величине онда вредности тих величина унесите у празне колоне у Табели 1. Израчунајте n и Δn . 1.0pt

A.3 На основу мерења спроведених у делу А1 нацртати график зависности δ од α . За сваку измерену тачку означите на графику грешке $\Delta\delta$ и $\Delta\alpha$. Извршите додатна мерења како бисте прецизно нашли минималну вредност δ , и том углу одговарајући α . Означите их са δ_{\min} и α_{\min} . Како бисте што прецизније идентификовали угао минималног скретања δ_{\min} можете користити зидове ваше радне просторије као екран за зрак који је изашао из диска. 0.5pt

Други метод за мерење индекса преламања

У овом делу, ви ћете развити алтернативни метод који ће вам омогућити да добијете тачније резултате. Без обзира што се од вас тражи да мерење извршите са највећом могућом тачношћу, **није потребно да рачунате грешку мерења**. Ипак од вас се очекује да детаљно прикажете једначине које сте користили да бисте добили ваш резултат. Напишите их у листовима намењеним за писање одговора.

A.4 Гледајући карактеристике графика који сте добили у делу А3, одаберите који је то угао који треба да мерите да бисте израчунали индекс преламања. Напишите једначину коју сте извели и коју ћете користити у овом методу, а која повезује индекс преламања и угао који ћете мерити. 0.7pt



- A.5** За $N = 3$, извршите потребна мерења како бисте израчунали индекс преламања са високом прецизношћу користећи израз који сте развили у A4 0.8pt
- Скицирајте дијаграм на коме су диск као и путању ласерског снопа, и назначите на дијаграму које сте величине мерили.
 - Запишите резултате мерења која сте спровели.
 - Направите анализу мерења и израчунајте индекс преламања n диска са највећом могућом прецизношћу. Ако вам је неопходно можете користити додатни милиметарски папир који вам је стављен на располагање.

- A.6** Поновите процедуру из претходног питања, али сада за $N = 4$ и $N = 5$ (не треба поново да цртате схему система и путању ласерског снопа). 1.5pt
- Запишите резултате мерења која сте спровели за $N = 4$.
 - Направите анализу мерења за $N = 4$, и израчунајте индекс преламања n са највећом могућом тачношћу коришћењем резултата ових мерења.
 - Запишите резултате мерења која сте спровели за $N = 5$.
 - Направите анализу мерења за $N = 5$, и израчунајте индекс преламања n са највећом могућом тачношћу коришћењем резултата ових мерења.
 - На основу резултата које сте добили за индекс преламања користећи мерења за $N = 3$, $N = 4$ и $N = 5$, израчунати средњу вредност $\langle n \rangle$ индекса преламања.

Део В: Параметри дифракционе решетке (2.5 поена)

У овом делу није потребно рачунати грешке.

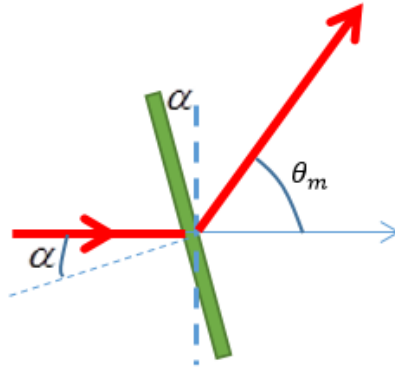
У овом делу потребно је наћи количник λ/d , где је λ таласна дужина ласера, а d је константа решетке (растојање између суседних отвора).

Када ласерски снап пролази кроз дифракциону решетку, угао θ_m између упадног снопа и правца дуж којег се добија m -ти дифракциони максимум, дат је са:

$$d \cdot (\sin \alpha + \sin(\theta_m - \alpha)) = m\lambda \quad (2)$$

где је:

m	ред дифракционог максимума
α	угао између упадног снопа и решетке
θ_m	угао између правца упадног снопа и правца дуж којег се добија m -ти дифракциони максимум
d	константа решетке - растојање између центара суседних отвора на решетци.



Дифракциони максимуми вишег реда омогућавају веће раздвајање таласних дужина. Тада, прецизно мерење које користи максимуме вишег реда смањује релативну грешку величине λ/d .

Одвијте шраф 4В, и промените висину на којој је ласер (вертикални ниво) тако што ћете га заротирати за 180 степени око хоризонталне осе нормалне на правац снопа (пазите на каблове) тако да буде у положају 3В приказаном на слици. Ово ће вам бити потребно у деловима В и С. Користите металну шипкицу 4С, за фино подешавање ласера тако да се поравна по висини са апаратуром за мерење коришћењем дифракционе решетке. Подесите ласерски снап тако да он буде нормалан на екран. Поставите дифракциону решетку у отвор на држачу 12В. Оријентација решетке је означена налепницом на једној страни решетке. Наместите решетку тако да налепница буде са стране на којој је ласер и да налепница буде на врху решетке. Свака решетка има јединствену шифру (ID), написану на њој. **Запишите шифру решетке у одговарајуће поље на листу за одговоре.**

Може вам бити од користи да овде искористите сличну идеју оној коју сте искористили у другом делу одељка А.

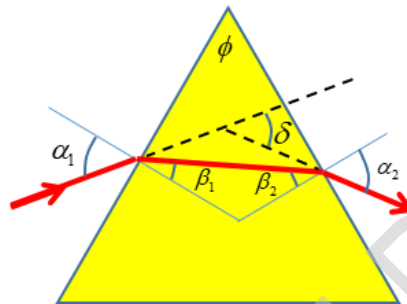
- | | | |
|------------|--|-------|
| B.1 | <ul style="list-style-type: none"> • Скицирајте поставку експеримента. На скици означите положај ласера, дифракционе решетке, путању ласерског снопа, места на којима снап погађа екран и величине које сте мерили. • Извршите мерење за $m = 1$. Запишите резултате мерења, Одредите λ/d. • Извршите мерење за $m = 2$. Запишите резултате мерења, Одредите λ/d. | 0.7pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| B.2 | <p>Одредите λ/d користећи више дифракционе максимуме ($m > 2$).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Скицирајте два дијаграма поставке мерења, за $m = 3$ и $m = 4$. Означите на дијаграму положај ласера, дифракционе решетке, путању снопа, места на којима снап пада на екран и величине које сте мерили. • Урадите мерење за редове $m = 3, 4$. Запишите измерене величине. За сваки ред одредите λ/d. | 1.8pt |
|------------|---|-------|

Део С: Индекс преламања троугаоне призме (2.0 поена)

У прибору имате троугаону призму. Све три стране призме су врло добро исполиране. Углови призме могу да одступају од 60° највише за 0.7° . Није потребно да мерите углове призме. У овом

делу је потребно одредити индекс преламања материјала од којег је призма направљена. Да би се смањила грешка мерења индекса преламања, могуће је, уз коришћење апроксимације малих углова ($\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$, за углове у радијанима) кориговати је за мала одступања у угловима призме. **У овом делу је потребно да рачунате грешке.** На сликама су приказани примери зрака који упадају у призму на једној страни и озлазе на другој.



Поставите лењир са клизачем на место на столу на којем ће вам ласер омогућити највећу прецизност мерења.

Поставите призму у предвиђени носач 12В.

C.1 У симетричном случају, $\alpha_1 = \alpha_2$, за једнакострану призму важи: $n = 0.4 \text{pt}$
 $2\sin(\delta_{\text{sym}}/2 + 30^\circ)$.

- Размислите о начину на који бисте одредили индекс преламања призме (и изведите одговарајућу једначину) са највећом тачношћу.
- Иведите формуле коју сте искористили за одређивање индекса преламања.

C.2 • Запишите величине које сте измерили (укључујући грешке). 1.6pt
 • Израчунајте индекс преламања призме за таласну дужину ласера и одговарајућу грешку.

Видеман-Францов (Wiedemann-Franz) закон

У металима, електрони доминатно преносе топлоту. Због тога су тремална и електрична проводност повезане. Ово је познато као Видеман-Францов закон.

У овом експерименту циљ је да се измере термалне и електричне особине неколико метала, са прилично високом тачношћу. У делу А, потребно је измерити електричну проводност бабра, месинга и алуминијума. У делу В, биће мерена топлотна проводност бабра. У делу С мериће се специфични топлотни капацитет бабра. У делу D, биће потребно да се измери топлотна проводност месинга и алуминијума. Коначно, у делу Е, биће проверена релација која повезује ове измерене физичке особине метала.

У овом експерименту не треба да рачунате експерименталне грешке.

Обратите пажњу да у деловима В и D имате време чекања од по **15 минута**. Испланирајте време рада према томе.

Безбедносна упутства

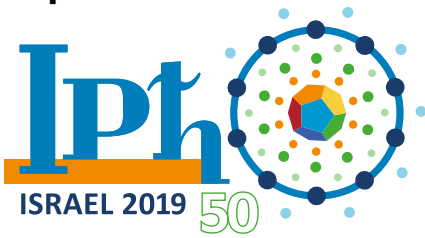
Не прикључујте каблове или за то непредвиђене инструменте директно струјну мрежу (220V/25A). Можете прикључити само приложене изворе, без икаквих модификација, на струјну мрежу.

Списак опреме

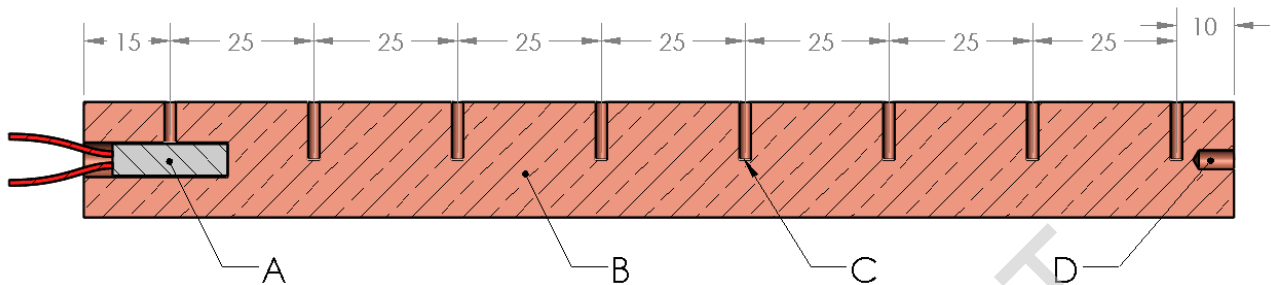


Слика 1

1. **Бабарни** шупљи цилиндар, дужине 200,0 mm, унутрашњег пречника 6,0 mm, спољашњег **20,0 mm**.
2. **Месингани** шупљи цилиндар, дужине 200,0 mm, унутрашњег пречника 6,0 mm, спољашњег **19,0 mm**.
3. **Алуминијумски** шупљи цилиндар, дужине 200,0 mm, унутрашњег пречника 6,0 mm, спољашњег **20,0 mm**.



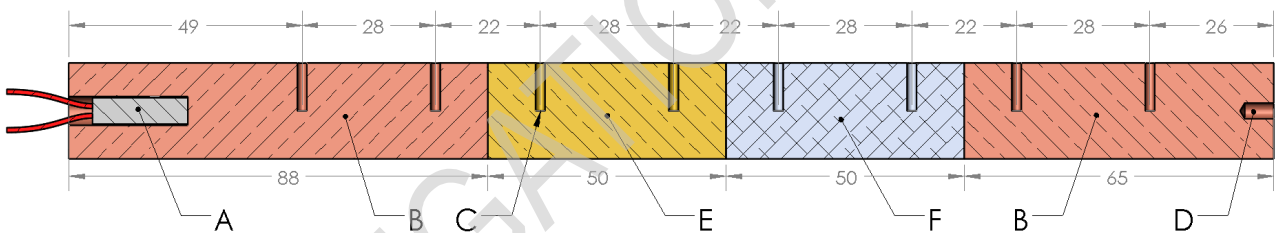
4. Мали стални магнет масе 1,2 g.
 5. Посуда за воду - специјално дизајнирана посуда оригинално намењена за припрему локалног јела које се зове "Jachnun", врсту израелског пецива. Поклопац посуде садржи размењивач топлоте унутра и шраф на врху. Приложена су и 4 литра воде (две боце по два литра) за пуњење посуде.
 6. Штап #1 - бакарни штап пречника 20,0 mm са температурским сензорима који су повезани за утичницу (socket) и уграђени грејач који је спојен са црвеним кабловима (слика 2.a). Црвени каблови су намењени за повезивање у коло са напајањем једносмерне струје (део 15 описан испод). Штап је увијен и црну термоизолаторску пену.
 7. Штап #2 - Композитни штап пречника 20,0 mm са температурским сензорима који су повезани за утичницу и уграђени грејач који је спојен са црвеним кабловима (слика 2.b). Црвени каблови су намењени за повезивање у коло са напајањем једносмерне струје (део 15 описан испод). Штап је увијен и црну термоизолаторску пену.
 8. Термоизолаторски поклопац.
 9. 12V DC напајање, за дигитални уређај за читавање.
 10. Дигитални уређај за читавање. Уређај приказује резултате осам термометара и време. Погледајте инструкције дате у даљем тексту. Овај уређај се такође користи и као хронометар.
 11. Термометарски кабл који повезује термометре на штаповима са дигиталним уређајем за читавање.
 12. Волтметар - Опсег волтметра треба да буде постављен на 20 V DC (слика 3).
 13. Амперметар - опсег амперметра треба да буде постављен на 10 A DC (слика 3).
 14. Каблови.
 15. 9V DC напајање за грејач, повезани са "банана" прикључцима.
- Упозорење:** 1. Само приложена напајања (са стандардним утикачем) смеју да буду прикључена на мрежно напајање. Прикључивање било каквих каблова или друге опреме у утичницу је строго забрањено и може изазвати озбиљне повреде.
2. Не потапајте штапове у воду.



Слика 2.a - Схема штапа #1.

Растојања су дата у милиметрима са тачношћу од 0,1 mm.

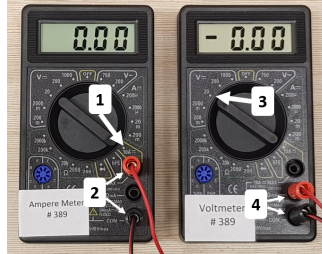
(A) Грејач повезан за црвене каблове. (B) бакарни штап. (C) Осам сензора за температуру. Сваки сензор је приказан резом на слици као онај означен словом C. (D) рупа са навојем за шраф на поклопцу резервоара за воду.



Слика 2.b - Схема штапа #2.

Растојања су дата у милиметрима са тачношћу од 0,1 mm.

(A) Грејач повезан за црвене каблове. (B) бакарни штап. (C) Осам сензора за температуру. Сваки сензор је приказан резом на слици као онај означен словом C. (D) рупа са навојем за шраф на поклопцу резервоара за воду. (E) месингани део штапа. (F) алуминијумски део штапа.



Слика 3 - Амперметар и волтметар

(1) - Положај преклопника за опсег при мерењу струје (10A). (2) - Прикључнице за амперметар. (3) - Положај преклопника за опсег при мерењу напона (20V). (4) - Прикључнице за волтметар.

Упутство за коришћење дигиталног уређаја за читавање

Повежите уређај на напајање 12V DC

Дигитални уређај за читавање има два мода. Може да се користи као хронометар и за читање измерене температуре. Када је кабл са сензора прикључен на уређај, он ће се аутоматски пребацити у мод за читање температуре. Када кабл са сензора није прикључен уређај ће аутоматски бити у моду хронометра, а на екрану ће бити исписано "Timer mode".

У температурском моду:

- Притисните и држите црвено дугме 3 секунде, да бисте ресетовали време.
- Кратким притиском на црвено дугме замрзавате приказан резултат док уређај и даље мери.
- Још једним притиском на црвено дугме уређај наставља да приказује тренутне вредности.

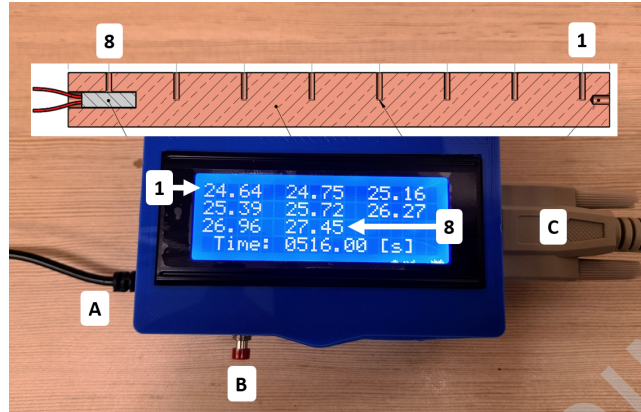
У хронометарском моду:

- Притиском на црвено дугме почињете мерење времена.
- Следећим притиском заустављате хронометар.
- Још једним притиском ресетујете хронометар.

Уређај за читавање мора бити калибрисан пре употребе за сваки штап. Термометри који се користе у експерименту нису сасвим идентични. Зато док је штап у термалној равнотежи, потребно је да калибришемо термометре да бисмо добили исте вредности на свим сензорима. Да бисмо то урадили, прво, прикључимо један крај кабла са термометара на штап. Затим, притисните и држите црвено дугме док док прикључујете други крај кабла на уређај за читавање. Искључивање уређаја са напајања или са сензора неће поништити ову калибрацију.

Упозорење: Калибришите термометре **пре** прикључивања штапа на посуду, или прикључивања грејача на напајање. Ово ће обезбедити да температура штапа буде униформна током калибрације.

Ако се појави било какав проблем са уређајем за читавање, може бити од користи да искључите уређај са напајања и поново га прикључите. Уређај ће запамтити последњу калибрацију.



Слика 4 - Уређај за очитавање.

(A) Кабл за напајање (12V DC). (B) Вишефункционално црвено дугме. (C) кабл за термометре. (1-8) Очитавање температура у степенима Целзијуса, приказаних у хоризонталном редоследу.

Део А: Електрична проводност бакра, алуминијума и месинга (1.5 поена)

Теоријски део

Када стални магнет пада кроз унутрашњост проводног шупљег цилиндра, на њега ће деловати дисипативна сила (сила отпора) као последица индукованих вртложних струја. Због деловања ове силе, брзина магнета ће се мењати тако да она досегне одређену терминалну брзину. За случај у овом задатку, ова терминална брзина има облик:

$$v_{terminal} = \frac{8\pi m g a^2}{\mu_0^2 (\pi r_m^2 M)^2 \sigma w f\left(\frac{d}{a}\right)} \quad (1)$$

У горњој формули m представља масу магнета, σ електричну проводност материјала од којег је направљена цев, a је унутрашњи полупречник цеви (полупречник шупљине у цеви), r_m и d су полупречник и висина магнета, респективно, M је магнетизација магнета, w је дебљина зида цеви, а $f\left(\frac{d}{a}\right)$ представља такозвану функцију скалирања. У нашем случају је $a \approx r_m$, $d = 2r_m \approx 2a$ и $f(2) \approx 1.75$. Одавде следи да се време које је потребно магнету да прође кроз цев, може апроксимирати изразом:

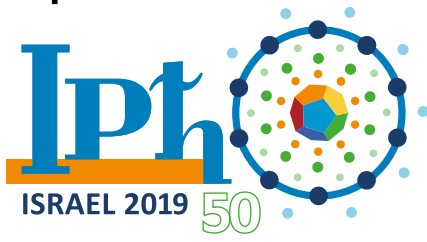
$$t = 0.22 \frac{\pi r_m^2 (\mu_0 M)^2 w L_0 \sigma}{m g} \quad (2)$$

Овде $L_0 = 0.2$ m представља дужину цеви. Такође, претпоставља се да магнет достиже терминалну брзину одмах након што је пуштен.

Вредности за цеви и магнет које су потребне за ова израчунавања су:

$\mu_0 M = 0.65$ T, $w_{Aluminum} = w_{Copper} = 7.0 \times 10^{-3}$ m, $w_{Brass} = 6.5 \times 10^{-3}$ m, $m = 1.2 \times 10^{-3}$ kg, $r_m = 3.0 \times 10^{-3}$ m, $g = 9.8$ m/s²

Experiment



Q2-6
Serbian (Serbia)

DELEGATION PRINT

Експеримент

A.1 Користећи дигитални уређај за читавање (уређај 10 са листе апаратуре) измерити време које је потребно магнету да прође кроз унутрашњост шипке направљене од алуминијума, бабра и месинга. Запишите ваша мерења у табелу A1. 1.0pt

A.2 Користећи једначину дату изнад, наћи електричне проводности σ_{Aluminum} , σ_{Copper} , σ_{Brass} за сваки од три дата материјала. 0.5pt

Део В: Топлотна проводност бабра (3.0 поена)

Циљ овог дела задатка је измерити топлотну проводност бабра.

Теоријски део

Топлотна проводност κ је дефинисана помоћу једначине $P(x) = -\kappa A \cdot \frac{\Delta T(x)}{\Delta x}$. Ова једначина описује линеарну везу између температурног градијента и протока снаге кроз попречни пресек материјала. Овде, $P(x)$ представља снагу која протиче кроз попречни пресек на месту x , A је површина попречног пресека штапа, а $\Delta T(x) / \Delta x$ је температурни градијент на месту x .

Експеримент

Укључити дигитални уређај за читавање и калибрисати Штап 1. Сипати 4 литра (2 флаше) воде у посуду, тако да се размењивач топлоте у потпуности потопи, и затворити поклопац.

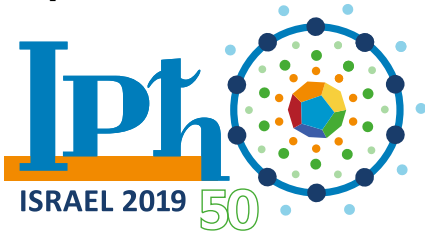
B.1 Написати почетну температуру штапа 1 (након калибрације), када се он постави на сто. 0.1pt

Извући кабл који спаја дигитални уређај за читавање и штап. Уклонити термоизолаторски поклопац и ушрафити штап 1 на поклопац суда. Поново спојити кабл са дигиталним уређајем за читавање, као што је приказано на слици 5. Будите пажљиви да не примените превише јаку силу при овоме.



Слика 5

Experiment



Q2-8

Serbian (Serbia)

- B.2** Нацртати струјно коло које омогућава напајање грејача струјом, као и мерење његове снаге (помоћу амперметра и волтметра). Коло треба да садржи следеће елементе: извор од 9V, грејач (већ је повезан за штап), волтметар, амперметар и жице. Можете користити жице као прекидач за отварање и затварање струјног кола. 0.5pt

Топлотна проводност ће бити мерена загревањем једног краја штапа, док се други крај штапа држи на скоро константној температури у резервоару са водом.

Циљ је достићи скоро стационарно стање за све термометре (достигнути такве температуре да се вредности које читавају различити термометри не мењају значајно са временом). Повезати делове апаратуре у коло које сте добили у делу B2 и укључити грејач.

- B.3** Извршити потребна мерења како би израчунали снагу грејача P , и записати њену вредност на листу за одговоре. 0.1pt

Сачекати 15 минута након укључивања грејача (можете искористити ово време за планирање експеримента).

- B.4** Написати у одговарајућу табелу, температуре свих осам термометара у временским тренуцима: 15 min, 17.5 min, 20 min. 0.5pt

- B.5** На милиметарском папиру, нацртати три графика (на истом листу) зависности температуре у функцији позиције (за дата три тренутка времена). Ови графици ће такође бити коришћени у делу D. 1.0pt

- B.6** Са графика одредити топлотну проводност бакра κ_0 , користећи податке са графика за тренутак времена 17.5 min. Занемарити топлотне губитке у овом делу. Проценити средњу брзину промене температуре штапа, $\frac{\Delta T}{\Delta t}$, за временски тренутак 17.5 min. 0.5pt

- B.7** Да ли очекујете вишу, нижу или исту вредност за κ_0 , у поређењу са реалном вредношћу κ ? 0.3pt

Део С: Процењивање топлотних губитака и топлотног капацитета бакра (4.0 поена)

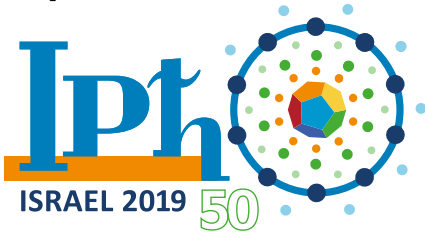
Теоријски део

Топлотни капацитет C се може дефинисати неком од следеће две једначине:

$$\Delta Q = C \Delta T, \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right). \quad (3)$$

$\Delta Q / \Delta t$ овде означава нето брзину преноса топлоте на материјал, а $\Delta T / \Delta t$ је брзина промене температуре. Специфична топлота c_p је топлотни капацитет по јединици масе. За масу бакреног штапа узети 0.58 kg.

Experiment



Q2-9

Serbian (Serbia)

Експеримент

Искључити грејач. Расклопити електрично коло, одшрафити штап 1 и ставити га на сто. Ставити термоизолаторски поклопац на штап, као што је и била на почетку експеримента. Поново повезати грејач у коло и повезати штап са дигиталним уређајем за читавање.

УПОЗОРЕЊЕ: Не остављати грејач укључен у овом делу на дужи време без мерења температуре.

Користећи циклус - хлађење-грејање-хлађење, можемо одредити и топлотне губитке и топлотни капацитет материјала. Временски интервал током којег се систем греје изаберите тако да се средња температура повећа за око 2.5°C . Како би ово постигли са потребном тачношћу, можете користити циклус хлађење-грејање-хлађење у укупном трајању од 10-15 минута.

У овом делу желимо да радимо близу средње температуре измерене близу стационарног стања у делу В.

Како би урачунали сву термалну енергију која се налази у штапу, желимо да пратимо његову средњу температуру. Температура на средини штапа је приближно једнака усредњеној вредности температуре дуж штапа.

C.1	Одрадити описану процедуру хлађења-грејања-хлађења и документовати мерења у табели C1, како би одредили средњу вредност температуре.	1.0pt
C.2	Нацртати на графику зависност средње температуре штапа од времена.	1.0pt
C.3	Користећи график, израчунати специфичну топлоту c_p и топлотне губитке по јединици времена P_{loss} око средње температуре у делу В. Описати метод који сте користили користећи одговарајуће дијаграме и једначине.	1.0pt

Постоје два главна механизма које треба узети у разматрање како би се повећала тачност топлотне проводности добијене у делу В.

- Топлотни губици се дешавају услед радијалног транспорта топлоте кроз изолацију.
- Систем још увек није достигао стационарно стање у тренутку када се почиње са мерењима.

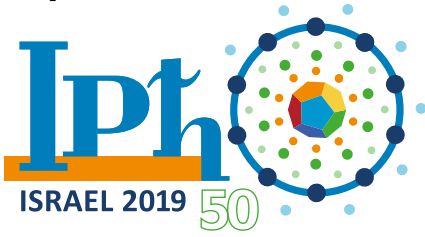
У првом реду апроксимација, можете претпоставити да је услед ових механизма, промена протока снаге по јединици дужине дуж штапа константна, тј. $\Delta P(x) / \Delta x = const.$

C.4	Наћи једначину која у првом реду апроксимације, поправља израз за топлотну проводност, која је нађена у делу В. Користити $\kappa_0, P, c_p, m, P_{loss}, \frac{\Delta T}{\Delta t}$ из делова В и С како би изразили поправљену вредност топлотне проводности, κ_{Copper} и наћи њену вредност.	1.0pt
------------	---	-------

Део D: Топлотна проводност месинга и алуминијума (1.0 поен)

Повезати изоловани штап 2 са дигиталним уређајем за читавање, и калибрисати термометре на овом штапу на исти начин као за претходни штап (инструкције се налазе на почетку дела В: док је црвено дугме притиснуто, повезати изоловани штап 2 са уређајем за читавање користећи кабл термометара, а затим пустити црвено дугме).

Experiment



Q2-10

Serbian (Serbia)

D.1 Записати почетну температуру штапа када се он налази на столу. 0.1pt

Искључити кабл и зашрафити штап 2 на поклопац суда са водом као што је приказано на слици 4. Поново повезати кабл са дигиталним уређајем за читавање.

Поновити процедуру коришћену у делу В како би се приближили стационарном стању током грејања.

Сачекати бар **15 минута** након укључивања грејача, а пре почетка мерења.

Можете претпоставити, за потребе тачности у овом делу, да је штап дошао до стационарног стања (тј. температура штапа се више не мења). Такође, можете претпоставити да је губитак топлоте по јединици дужине константна дуж штапа.

D.2 Очитати и записати температуре за свих осам термометара, штапа 2. Такође, израчунати и записати $\Delta T / \Delta x$ за сваки од делова композитног штапа. 0.2pt

У првом реду апроксимација, можете користити претпоставку као и у делу С.4, тј. да је $\Delta P(x) / \Delta x = \text{const.}$

D.3 Изразити κ_{Brass} и κ_{Aluminum} користећи претходна мерења и израчунати њихве бројне вредности. 0.7pt

Део Е: Видеман-Фрац-ов закон (0.5 поена)

По Видеман-Францов-ом закону, у металима где је доминантни механизам транспорта топлоте, онај помоћу проводних електрона, однос топлотне и електричне проводности ће зависити линеарно од апсолутне температуре. Такође, закон тврди да је коефицијент $L = \frac{\kappa}{\sigma T}$ (познат и као "Лоренцов број") ове зависности, исти за већину метала, и зависи једино од универзалних природних константи. У стварности, за метале на собној температури, овај закон важи са око 10% тачности.

E.1 Записати ваше измерене вредности за топлотну и електричну проводност (κ, σ) у табелу Е1. Израчунати вредност L за сваки материјал и записати их у исту табелу Е1. При овоме сматрати да топлотна проводност не зависи од температуре у првом реду апроксимације. 0.5pt

Zero-length springs and slinky coils

A zero effective length spring (ZLS) is a spring for which the force is proportional to the spring's length, $F = kL$ for $L > L_0$ where L_0 is the minimal length of the spring as well as its unstretched length. Figure 1 shows the relation between the force F and the spring length L for a ZLS, where the slope of the line is the spring constant k .

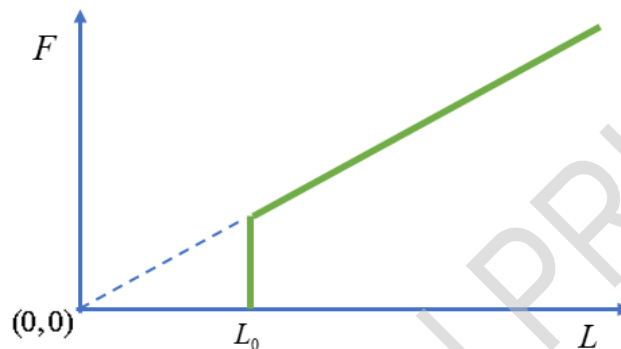


Figure 1: the relation between the force F and the spring length L

A ZLS is useful in seismography and allows very accurate measurement of changes in the gravitational acceleration g . Here, we shall consider a homogenous ZLS, whose weight Mg exceeds kL_0 . We define a corresponding dimensionless ratio, $\alpha = kL_0/Mg < 1$ to characterize the relative softness of the spring. The toy known as "slinky" may be (but not necessarily) such a ZLS.

Part A: Statics (3.0 points)

A.1 Consider a segment of length $\Delta\ell$ of the unstretched ZLS spring which is then stretched by a force F , under weightless conditions. What is the length Δy of this segment as a function of F , $\Delta\ell$ and the parameters of the spring? 0.5pt

A.2 For a segment of length $\Delta\ell$, calculate the work ΔW required to stretch it from its original length $\Delta\ell$ to a length Δy . 0.5pt

Throughout this question, we will denote a point on the spring by its distance $0 \leq \ell \leq L_0$ from the bottom of the spring when it is unstretched. In particular, for every point on the spring, ℓ remains unchanged as the spring stretches.

A.3 Suppose that we hang the spring by its top end, so that it stretches under its own weight. What is the total length H of the suspended spring in equilibrium? Express your answers in terms of L_0 and α . 2.0pt

Part B: Dynamics (5.5 points)

Experiments show that when the spring is hung at rest and then released, it gradually contracts from the top, while the lower part remains stationary (see Figure 2). As time advances, the contracting part moves as a solid chunk and accumulates additional turns of the spring, while the stationary part becomes shorter. Every point on the spring begins to move only when the moving part reaches it. The bottom end

of the spring starts moving only when the spring is fully collapsed and reaches its unstretched length L_0 . After that, the contracted spring continues falling straight downwards, without tumbling, as a rigid body under the influence of gravity.

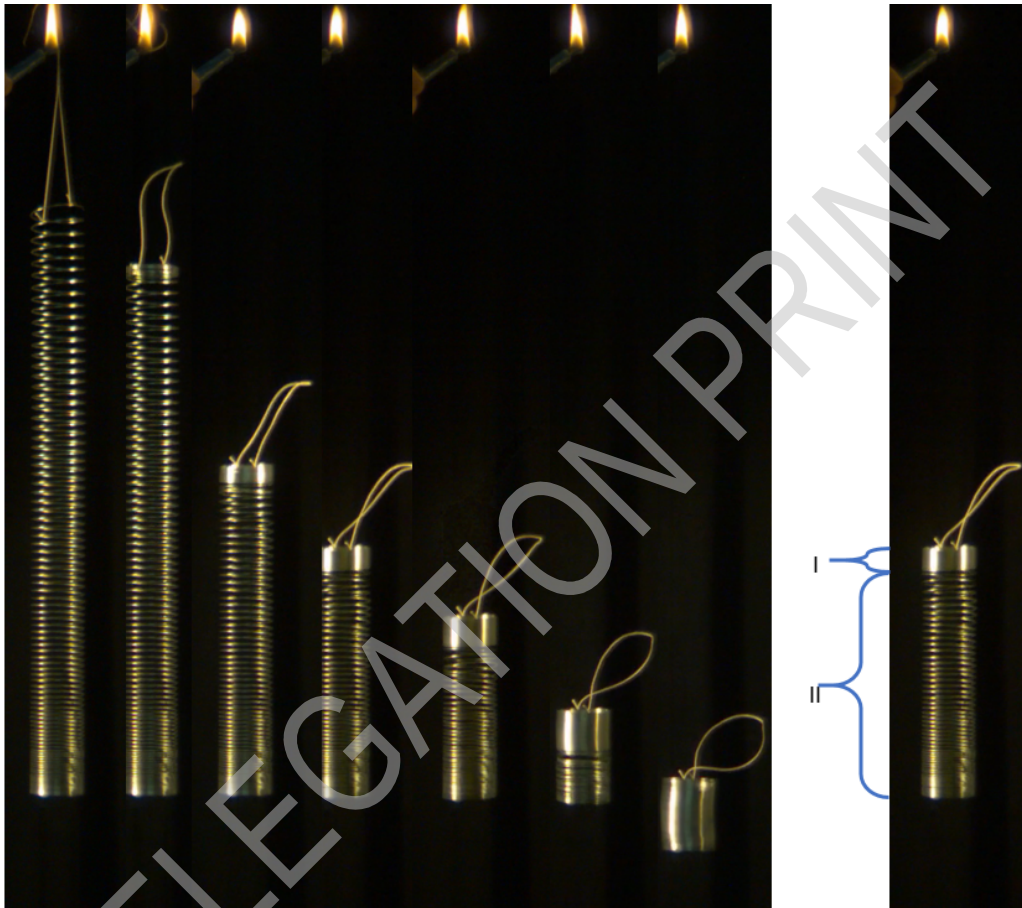


Figure 2: Left: a sequence of pictures taken during the free fall of slinky. Right: the moving part I and the stationary part II during the free fall of the spring.

In the remaining parts of the question, you are asked to base your solution on this described model. You may neglect air resistance, but you are not allowed to neglect L_0 .

- B.1** Calculate the time t_c it takes from the moment the spring is released, until it fully collapses back to its minimal length L_0 . Express your answer in terms of L_0 , g and α . 2.5pt
 Compute the numerical value of t_c for a spring with $k = 1.02$ N/m, $L_0 = 0.055$ m and $M = 0.201$ kg, while taking g to be 9.80 m/s².



B.2 In this task ℓ is used to denote the coordinate of the boundary between parts I (in figure 2, the moving part) and II (the stationary part). At a certain moment, while a stationary part still exists its mass is $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0}M$, and the moving part moves with uniform instantaneous velocity $v_I(\ell)$. Show that at this moment (while there exists a stationary part) the velocity of the moving part is $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Express the constants A and B in terms of L_0 , g and α . 2.5pt

B.3 Based on B.2, find the minimum speed v_{\min} of the moving part of the spring in the course of its motion, after its release and before it hits the ground. Express your answer in terms of L_0 , α , A and B . 0.5pt

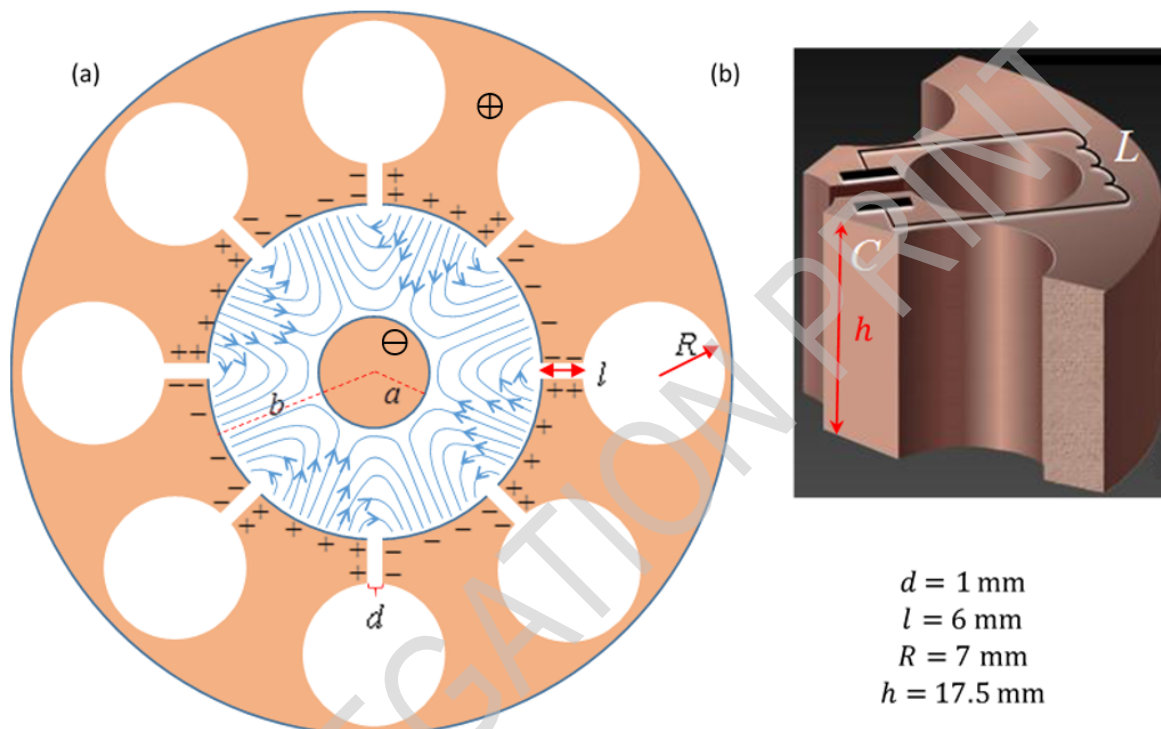
Part C: Energetics (1.5 points)

C.1 Calculate the amount of mechanical energy Q that was lost by generating heat, from the moment the spring is released until just before the spring hits the ground. Express your answer in terms of L_0 , M , g and α . 1.5pt

DELEGATION PRINT

The Physics of a Microwave Oven

This question discusses the generation of microwave radiation in a microwave oven, and its use to heat up food. The microwave radiation is generated in a device called “magnetron”. Part A concerns the operation of the magnetron, while part B deals with the absorption of microwave radiation in food.



Part A: The structure and operation of a magnetron (6.6 points)

A magnetron is a device for the generation of microwave radiation, either in pulses (for radar applications), or continuously (e.g., in a microwave oven). The magnetron has a mode of self-amplifying oscillations. Supplying the magnetron with static (non-alternating) voltage quickly excites this mode. The microwave radiation thus created is transmitted out of the magnetron.

A typical microwave oven magnetron consists of a solid copper cylindrical cathode (with radius a) and a surrounding anode (with radius b). The latter has the shape of a thick cylindrical shell into which cylindrical cavities are drilled. These cavities are known as “resonators”. One of the resonators is coupled to an antenna which will transmit the microwave energy out; we will ignore the antenna in the following. All internal spaces are in vacuum. We will consider a typical magnetron with eight resonators, as depicted in Figure 1(a). The three-dimensional structure of a single resonator is shown in Figure 1(b). As indicated there, each of the eight cavities behaves as an inductor-capacitor (LC) resonator, with operating frequency $f = 2.45 \text{ GHz}$.

A static uniform magnetic field is applied along the magnetron's longitudinal axis, pointing out of the page in Figure 1(a). In addition, a constant voltage is applied between the anode (positive potential) and the cathode (negative potential). Electrons emitted from the cathode reach the anode and charge it, such that they excite an oscillation mode in which the sign of the charge is opposite between every two



adjacent resonators. The oscillation of the cavities amplify these oscillations.

The process described above creates an alternating electric field with the aforementioned frequency $f = 2.45$ GHz (blue lines in Figure 1(a); the static field is not plotted) in the space between the cathode and the anode, in addition to the static field caused by the applied constant voltage. In the steady state, the typical amplitude of the alternating electric field between the anode and the cathode is approximately $\frac{1}{3}$ of the static electric field there. The electron motion in the space between the cathode and the anode is affected by both the static and the alternating parts of the field. This causes electrons that reach the anode to transfer about 80% of the energy they acquire from the static field into the alternating field. A minority of the ejected electrons returns to the cathode and releases additional electrons, further amplifying the alternating field.

Each resonator can be thought of as a capacitor and an inductor, see Figure 1(b). The capacitance mainly arises from the planar parts of the resonator surface, while the inductance stems from the cylindrical part. Assume that the current in the resonator flows uniformly very close to the surface of its cylindrical cavity, and that the strength of the magnetic field generated by this current is 0.6 times that of an ideal infinite solenoid. The various lengths defining the resonator geometry are given in Figure 1(b). The vacuum permittivity and permeability are $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ and $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$, respectively.

- A.1** Use the above data to estimate the frequency f_{est} of a single resonator. (Your result may differ from the actual value, $f = 2.45$ GHz. Use the **actual** value in the remainder of the question.) 0.4pt

Task A.2 below does not deal with the magnetron itself, but helps to introduce some of the relevant physics. Consider an electron moving in free space under the influence of a uniform electric field directed along the negative y axis, $\vec{E} = -E_0\hat{y}$, and a uniform magnetic field directed along the positive z axis, $\vec{B} = B_0\hat{z}$ (E_0 and B_0 are positive; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ are unit vectors oriented in the conventional manner). Let us denote the electron velocity at time t by $\vec{u}(t)$. The drift velocity \vec{u}_D of the electron is defined as its average velocity. We denote by m and $-e$ the mass and charge of the electron, respectively.

- A.2** In each of the following two cases, find \vec{u}_D . In addition, draw in the Answer Sheet the electron's trajectory (in the lab frame) during the time interval $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ if:
- at $t = 0$ the electron velocity is $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
 - at $t = 0$ the electron velocity is $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.

We now resume our discussion of the magnetron. The distance between the cathode and the anode is 15 mm. Assume that, due to the aforementioned energy loss to the alternating fields, the maximal kinetic energy of each electron does not exceed $K_{\text{max}} = 800$ eV. The static magnetic field strength is $B_0 = 0.3$ T. The electron mass and charge are $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg and $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, respectively.

- A.3** Numerically estimate the maximal radius r of the electron motion trajectory in the reference frame in which this motion is approximately circular, considering this reference frame as approximately inertial. 0.4pt

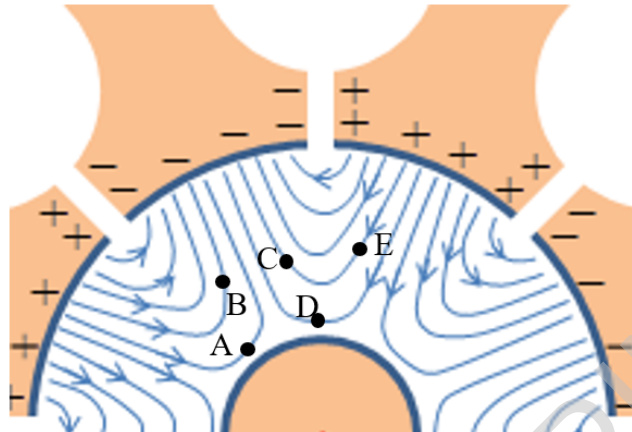


Figure 2

- A.4** Figure 2 depicts the alternating electric field lines between the anode and the cathode at a given moment in time (the static field is not plotted). Indicate in the Answer Sheet which of the electrons positioned at A,B,C,D and E will drift towards the anode, which will drift towards the cathode and which will drift at a direction perpendicular to the radius at that moment. 1.2pt

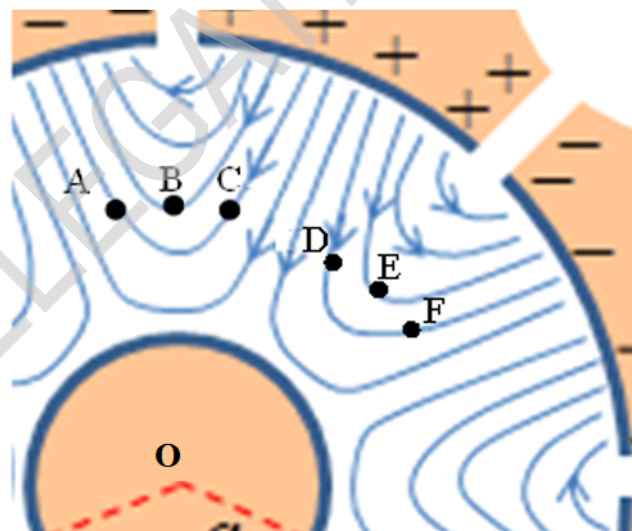


Figure 3

Figure 3 depicts the alternating electric field lines between the anode and the cathode (the static field is not plotted) at a given moment in time. The positions of six electrons at that moment are denoted by A, B, C, D, E and F. All electrons are at the same distance from the cathode.

- A.5** Consider the situation shown in Figure 3. For each of the six electron pairs AB, AC, BC, DE, DF, EF, indicate in the Answer Sheet whether their drift will cause the angle between their position vectors (measured from the cathode's center O) to increase or decrease at that moment. 1.2pt

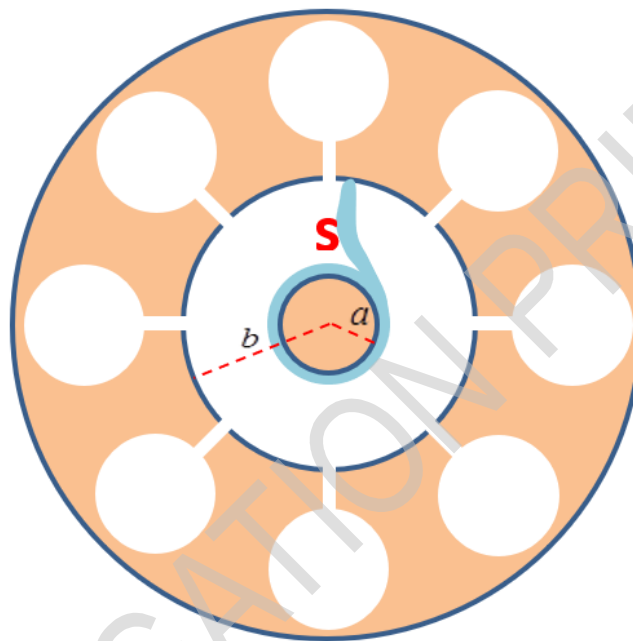


Figure 4

The pattern you have discovered in Task A.5 acts as a focusing mechanism, concentrating the electrons in the space between the cathode and anode into spokes. Figure 4 depicts one such spoke, denoted by S.

- A.6** Depict in the Answer Sheet the other spokes at that moment. Indicate by arrows their direction of rotation, and calculate their average angular velocity ω_s . 0.8pt

Make the approximation that the total electric field half-way between the cathode and the anode is equal to its average static value along a radial line from the cathode to the anode, and that the spokes are approximately radial in that region. The cathode and anode radii (a and b , respectively) are defined in Figure 4.

- A.7** Find an approximate expression for the static voltage V_0 required for operating the magnetron in the manner described. (The expression you will find gives an approximation for the minimal value required for the magnetron operation; the optimal voltage is somewhat higher.) 1.1pt

Part B: The interaction of microwave radiation with water molecules (3.4 points)

This part deals with the usage of microwave radiation (radiated by the magnetron antenna into the food chamber) for cooking, that is, heating up a lossy dielectric material such as water, either pure or salty

Theory



Q2-5

English (Official)

(which is our model for, say, soup).

An electric dipole is a configuration of two equal and opposite electric charges q and $-q$ a small distance d apart. The electric dipole vector points from the negative to the positive charge, and its magnitude is $p = qd$.

A time-dependent electric field $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ is applied on a single dipole of moment $\vec{p}(t)$ with constant magnitude $p_0 = |\vec{p}(t)|$. The angle between the dipole and the electric field is $\theta(t)$.

- B.1** Write expressions for both the magnitude of the torque $\tau(t)$ applied by the electric field on the dipole and the power $H_i(t)$ delivered by the field to the dipole, in terms of p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ and their derivatives. 0.5pt

Water molecules are polar, hence can be treated as electric dipoles. Due to the strong hydrogen bonds between water molecules in liquid water, one cannot treat them as independent dipoles. Rather, one should refer to the polarization vector $\vec{P}(t)$, which is the dipole moment density (average dipole moment per unit volume of an ensemble of water molecules). The polarization $\vec{P}(t)$ is parallel to the local applied alternating electric field (of the microwave radiation), $\vec{E}(t)$, and oscillates in time with an amplitude that is proportional to the amplitude of the local alternating electric field, but with a phase lag δ .

The local alternating electric field at a given location inside the water is $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$, where $\omega = 2\pi f$, giving rise to polarization $\vec{P}(t) = \beta \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$, where the dimensionless constant β is a property of water.

- B.2** Find an expression for the time-averaged power $\langle H(t) \rangle$ per unit volume absorbed by the water. 0.5pt
The time-average for a time dependent periodic variable $f(t)$ over its period T is defined as:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Let us now consider the propagation of the radiation through the water. The relative dielectric constant of water (at the electromagnetic field frequency) is ε_r , and the corresponding index of refraction of water is $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. The momentary energy density of the electric field is given by $\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2$. The time-averaged energy density of the electric and magnetic fields are equal.

- B.3** Let us denote the time-averaged radiation energy flux density by $I(z)$ (average radiation power flow per unit area). Here z is the depth of penetration into the water, and the radiation propagates in the z direction. Find an expression for the dependence of the flux density $I(z)$ on z . The flux density at the water surface, $I(0)$, may appear in your result. 1.1pt

The phase lag δ is the result of the interaction between the water molecules. It depends on the dimensionless dielectric loss coefficient ε_l and the relative dielectric constant ε_r (both of which depend on the radiation angular frequency ω and the temperature) via the relation $\tan \delta = \varepsilon_l/\varepsilon_r$. When δ is small enough, the electric field at penetration depth z into the water is given by:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2}nk_0 z \tan \delta} \sin(nk_0 z - \omega t) \quad (2)$$

where $k_0 = \omega/c$ and $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ is the speed of light in vacuum.

- B.4** Employ the approximation $\tan \delta \approx \sin \delta$ and find an expression for the coefficient β defined in Task B.2 in terms of the other parameters. 0.6pt

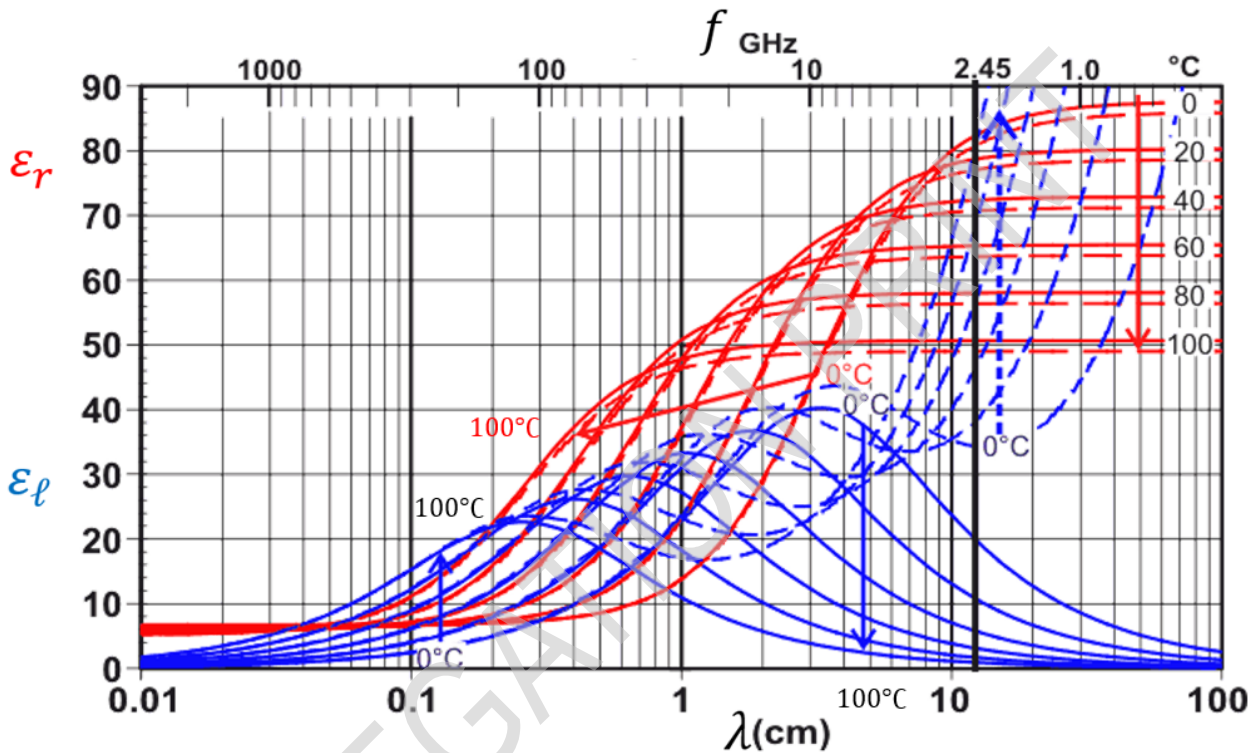


Figure 5. The arrows indicate the variation with temperature across the curves from 0°C to 100°C.

Figure 5 depicts ϵ_l (blue) and ϵ_r (red) for both pure water (solid lines) and a dilute solution of salt in water (dashed lines) as functions of wavelength or frequency, at several different temperatures. The angular frequency $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ is indicated by a bold vertical line. Below we will consider microwave radiation at this frequency only.

- B.5** Use Figure 5 to address the following questions: 0.7pt
1. For water at 20°C, find the penetration depth $z_{1/2}$ at which the power per unit volume is reduced to half of its value at $z = 0$.
 2. Indicate in the Answer Sheet whether the penetration depth of the microwave radiation into water increases, decreases or remains the same with temperature.
 3. Indicate in the Answer Sheet whether the penetration depth of the microwave radiation into soup (dilute salt solution) increases, decreases or remains the same with temperature.

Thermoacoustic Engine

A thermoacoustic engine is a device that converts heat into acoustic power, or sound waves - a form of mechanical work. Like many other heat machines, it can be operated in reverse to become a refrigerator, using sound to pump heat from a cold to a hot reservoir. The high operating frequencies reduce heat conduction and eliminate the need for any working chamber confinement. Unlike many other engine types, the thermoacoustic engine has no moving parts except the working fluid itself.

The efficiencies of thermoacoustic machines are typically lower than other engine types, but they have advantages in set up and maintenance costs. This creates opportunities for renewable energy applications, such as solar-thermal power plants and utilization of waste heat. Our analysis will focus on the creation of acoustic energy within the system, ignoring the extraction or conversion for powering external devices.

Part A: Sound wave in a closed tube (3.7 points)

Consider a thermally insulating tube of length L and cross-sectional area S , whose axis lies along the x direction. The two ends of the tube are located at $x = 0$ and $x = L$. The tube is filled with an ideal gas and is sealed on both ends. At equilibrium, the gas has temperature T_0 , pressure p_0 and mass density ρ_0 . Assume that viscosity can be ignored and that the gas motion is only in the x direction. The gas properties are uniform in the perpendicular y and z directions.



Figure 1

- A.1** When a standing sound wave forms, the gas elements oscillate in the x direction with angular frequency ω . The amplitude of the oscillations depends on each element's equilibrium position x along the tube. The longitudinal displacement of each gas element from its equilibrium position x is given by 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(please note the u here describes the displacement of a gas element)

where $a \ll L$ is a positive constant, $k = 2\pi/\lambda$ is the wavenumber and λ is the wavelength. What is the maximum possible wavelength λ_{\max} in this system?

We will assume throughout the question an oscillation mode of $\lambda = \lambda_{\max}$.

Now, consider a narrow parcel of gas, located at rest between x and $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). As a result of the displacement wave of Task A.1, the parcel oscillates along the x axis and undergoes a change in volume and other thermodynamic properties.

Throughout the following tasks assume all these changes to the thermodynamic properties to be small compared to the unperturbed values.

- A.2** The parcel volume $V(x, t)$ oscillates around the equilibrium value of $V_0 = S\Delta x$ and has the form 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Obtain an expression for $V_1(x)$ in terms of V_0 , a , k and x .

- A.3** Assume that the total pressure of the gas, as a result of the sound wave, takes the approximate form 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Considering the forces acting on the parcel of gas, compute the amplitude $p_1(x)$ of the pressure oscillation to leading order, in terms of the position x , the equilibrium density ρ_0 , the displacement amplitude a and the wave parameters k and ω .

At acoustic frequencies, the thermal conductivity of the gas can be neglected. We will treat the expansion and contraction of gas parcels as purely adiabatic, satisfying the relation $pV^\gamma = \text{const}$, where γ is the adiabatic constant.

- A.4** Use the relation above and the results of the previous tasks to obtain an expression for the speed of sound waves $c = \omega/k$ in the tube, to first order. Express your answer in terms of p_0 , ρ_0 and the adiabatic constant γ . 0.3pt

- A.5** The change in the gas temperature due to the adiabatic expansion and contraction, as a result of the sound wave, takes the form: 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Compute the amplitude $T_1(x)$ of the temperature oscillations in terms of T_0 , γ , a , k and x .

- A.6** For the purpose of this task only, we assume a weak thermal interaction between the tube and the gas. As a result, the standing sound wave remains almost unchanged, but the gas can exchange a small amount of heat with the tube. The heating due to viscosity can be neglected. For each of the points in Figure 2 (A, C at the edges of the tube, B at the center) state whether the temperature of the tube at that point will increase, decrease or remain the same over a long time. 1.2pt

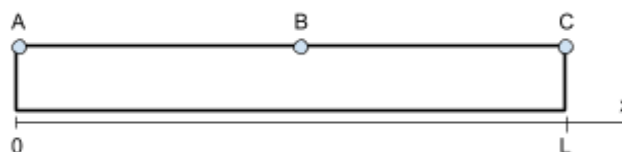


Figure 2

Part B: Sound wave amplification induced by external thermal contact (6.3 points)

A stack of thin well-spaced solid plates is placed inside the tube. The plates of the stack are aligned in parallel to the tube axis, so as not to obstruct the flow of gas along the tube. The center of the stack is positioned at $x_0 = L/4$, and spans a width of $\ell \ll L$ along the tube axis, filling its entire cross section. The right and left edges of the stack are held at temperature difference τ . The left edge of the stack, at $x_H = x_0 - \ell/2$, is held by an external thermal reservoir at temperature $T_H = T_0 + \tau/2$, and at the same time, its right edge, at $x_C = x_0 + \ell/2$, is held at a temperature $T_C = T_0 - \tau/2$.

The plate stack allows a slight longitudinal heat flow to maintain a constant temperature gradient between its edges, such that $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell} \tau$.

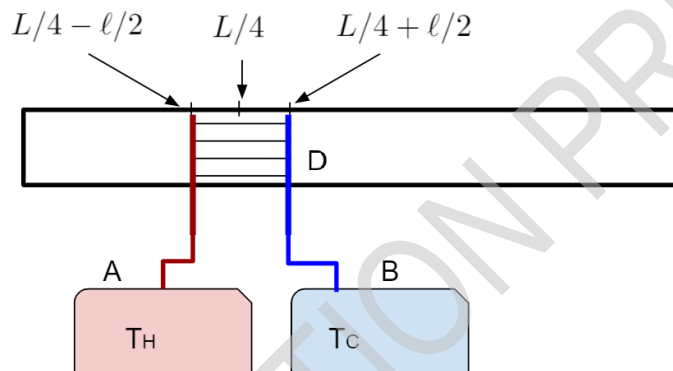
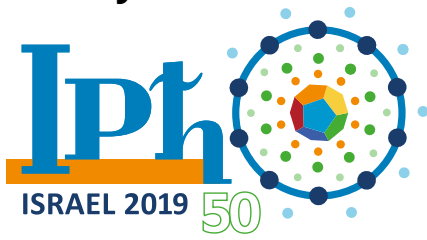


Figure 3. A sketch of the system. (A) and (B) denote the hot and cold heat reservoirs respectively. (D) denotes the stack.

To analyze the effect of the thermal contact between the plate stack and the gas on the sound waves in the tube, make the following assumptions:

- As in the previous part, all changes to the thermodynamic properties are small compared to the unperturbed values.
- The system operates in the fundamental standing-wave mode of the longest possible wavelength. It is only slightly modified by the presence of the plate stack.
- The stack is much shorter than the wavelength $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, and can be positioned far enough from both displacement and pressure nodes, so that the displacement $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ and the pressure $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ may be considered uniform over the entire length of the stack.
- We may neglect any edge effects, caused by the parcels moving in and out of the stack.
- The temperature difference between the ends of the plate stack, i.e. between the hot and the cold reservoirs, is small compared to the absolute temperature: $\tau \ll T_0$.
- Heat conduction through the stack, through the gas, and along the tube are all negligible. The only significant sources of heat transfer are convection due to the motion of the gas and conduction between the gas and the stack.

Theory



Q3-4

English (Official)

- B.1** Consider a specific parcel of gas in the region of the stack, originally at $x_0 = L/4$. As the parcel moves within the stack, the local temperature of the nearby part of the stack changes as follows: 0.4pt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Express T_{st} in terms of a , τ and ℓ .

- B.2** Above which critical temperature difference τ_{cr} will the gas be conveying heat from the hot reservoir to the cold one? Express τ_{cr} in terms of T_0 , γ , k and ℓ . 1.0pt

- B.3** Obtain the general approximate expression for the heat flow $\frac{dQ}{dt}$ into a small parcel of gas as a linear function of its volume and pressure change rates. Express your answer in terms of the rate of volume change $\frac{dV}{dt}$, the rate of pressure change $\frac{dp}{dt}$, the unperturbed equilibrium values of parcel pressure and volume p_0, V_0 and the adiabatic index γ . (You may use the expression for the molar heat capacity at constant volume $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, where R is the gas constant.) 0.8pt

The limited heat flow rate between the parcel and the stack causes a phase difference between the pressure and volume oscillations of the parcel. We will see how this generates work.

Let the heat flux into the parcel from the stack be proportional to the temperature difference between the parcel and the neighboring element of the stack, given approximately by $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Here T_1 and T_{st} are the temperature oscillation amplitudes of the gas parcel and the neighbouring stack from Tasks A.5 and B.1, respectively, and $\beta > 0$ is a constant. Assume that at the machine's operating frequencies, the change in gas temperature as a result of this heat flow is insignificant compared to both T_1 and T_{st} .

- B.4** In order to calculate work, we will consider a change to the volume of the moving parcel as a result of the thermal contact with the stack. Let us write the pressure and the volume of the parcel under the stack's influence in the form: 1.9pt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Given p_a and p_b , find the coefficients V_a and V_b . Express your answer in terms of $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a$ and ℓ .

- B.5** Obtain an approximate expression for the acoustic work per unit volume w produced by the gas parcel over one cycle. Integrate over the volume of the stack to obtain the total work W_{tot} generated by the gas over one cycle. Express W_{tot} in terms of $\gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, k$ and S . 0.8pt



B.6 Obtain an approximate expression for the heat Q_{tot} transported from the left side of the plane $x = x_0$ to the right, over a cycle. Express your answer in terms of τ , τ_{cr} , β , ω , a , S , ℓ . (Hint: you may use the formula $j = Q \frac{du}{dt}$ for the heat current due convection.) 0.8pt

B.7 Find the efficiency η of the thermoacoustic engine. The efficiency is defined as the ratio of the generated acoustic work to the heat drawn from the hot reservoir. Express your answer in terms of the temperature difference τ between the hot and the cold reservoir, the critical temperature difference τ_{cr} and the Carnot efficiency $\eta_c = 1 - T_C/T_H$. 0.6pt

DELEGATION PRIM

Experiment



Q1-1

English (Official)

Optical Measurements

In this experiment, we will measure the optical properties of samples at the highest achievable accuracy using the available equipment.

Note: under your table you can find 2 big water bottles that you need to use for the second experiment - **do not drink them**.

In part A, we will use two different methods to measure the refractive index of a transparent disk. The first method is traditional, while the second one is original and enables a higher level of accuracy.

In part B, we will measure the ratio between the laser wavelength λ and the lattice constant of a diffraction grating d , aiming at achieving the highest possible level of accuracy.

In part C, we will measure the refractive index of a triangular prism, again – attempting to reach the highest level of accuracy.

For the experiments, the exam hall will be darkened for 100 minutes, starting 20 minutes after the exam begins (you may use a table lamp when needed). It is more convenient to perform the measurements of part A in the dark, but it is still possible to perform most of them in light as well.

You may use the walls of your cubicle as a screen, and apply adhesive tapes to the cubicle walls.

In these experiments, you are using a diode laser as a light source.

Laser safety instructions:

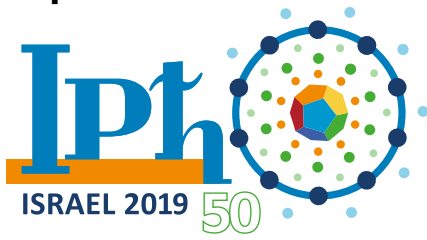
- **NEVER look directly into the laser beam!**
- In all experiments, the laser beam is horizontal. When measuring the position of the laser beam on a surface **make sure your head is ALWAYS above the level of the beam**.
- Do not aim the laser beam toward the opening of the experimental cubicle.
- Turn the laser off using the designated switch whenever you are not performing measurements.

Equipment list

Pieces of equipment 1-9 are used in all parts of the question, and pieces of equipment 10-12 are used in separate parts of the questions. Note that you are given multiple pieces of optical equipment - make sure not to touch their vertical sides directly, to avoid fouling their surfaces.

1. Ruler, 60 cm long
2. Slider that can move along the ruler
3. Laser source, mounted on the slider. The laser can be set at two heights, or levels: low level 3A for part A and high level 3B for parts B and C. The on/off switch of the laser is shown in the figure as 3C
4. The tension of screws 4A and 4B controls the resistance to rotation and therefore the stability of the apparatus. Use the small metal bar 4C to change the direction of the laser. Rotate 4C by 180 degrees to change the height of the laser. Do not rotate the laser around the beam axis, since the beam polarisation is pre-tuned.
5. Screen: you may use the cubicle walls; you may assume the walls are perpendicular to each other
6. A roll of adhesive tape which may be used to affix equipment to the table
7. Flexible measuring tape
8. A variety of rulers
9. Table lamp

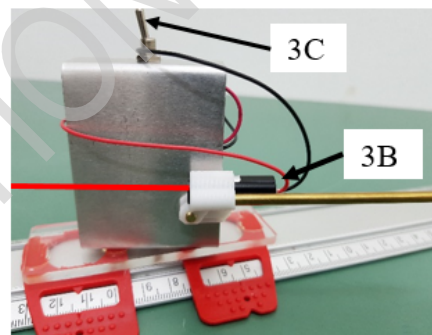
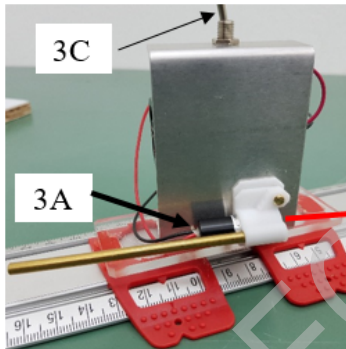
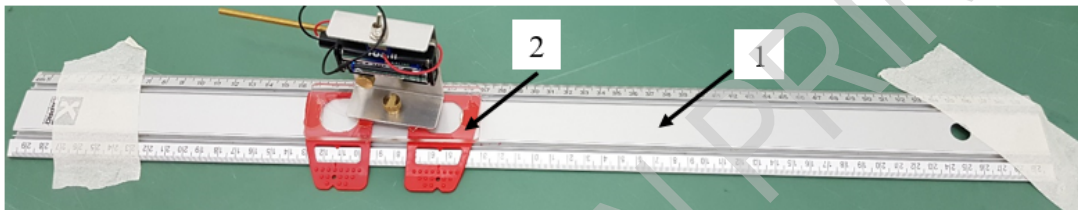
Experiment



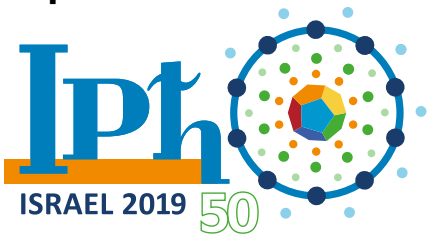
Q1-2

English (Official)

10. Round transparent disk with a diameter of 20.00 cm, fixed on a protractor, which is glued to a wooden base (for part A). You should remove the 4 small wooden cubes attached to the wooden base
11. Parchment paper that can be used as a transparent screen to be temporarily attached (by hand) to the side of the disk, allowing measuring the exit point without fouling the polished disk surface (for part A). It is more accurate to measure the beam exit point if you draw a line on the paper as shown in the figure.
12. A wooden piece (12A) and a cylinder holder (12B) capable of rotating along its vertical axis, for mounting the diffraction grating (12C) or the triangular prism (12D)

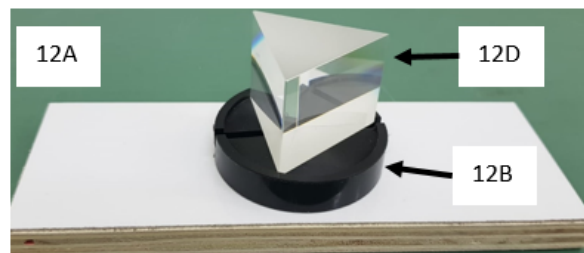
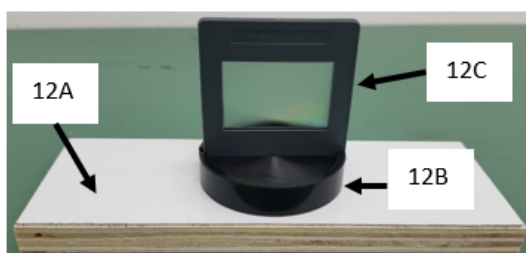
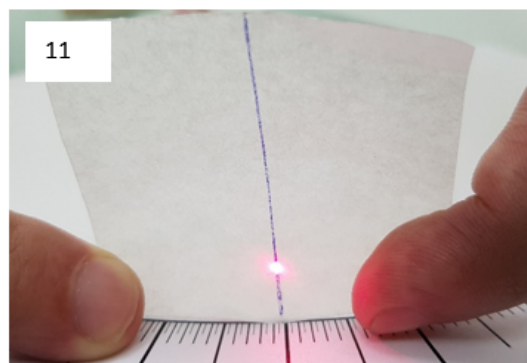
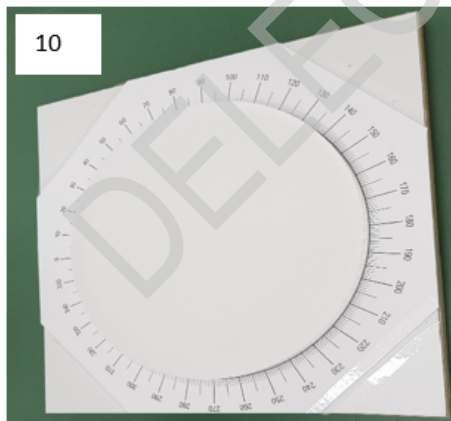
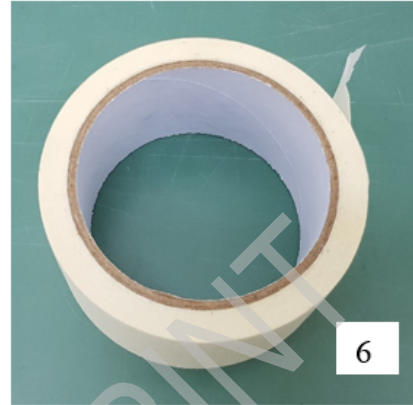
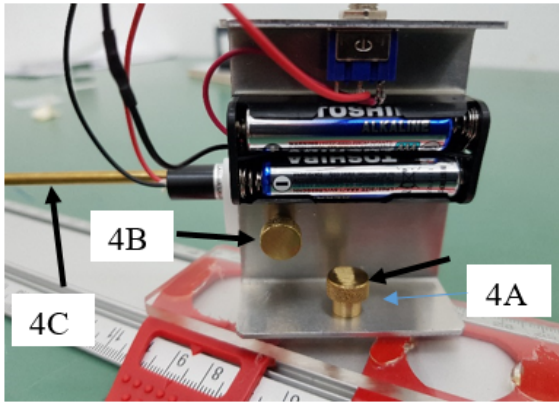


Experiment

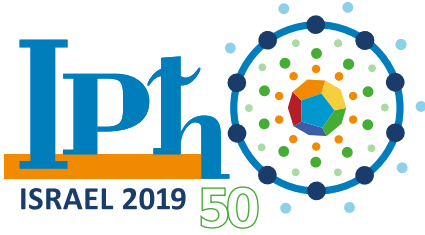


Q1-3

English (Official)



Experiment

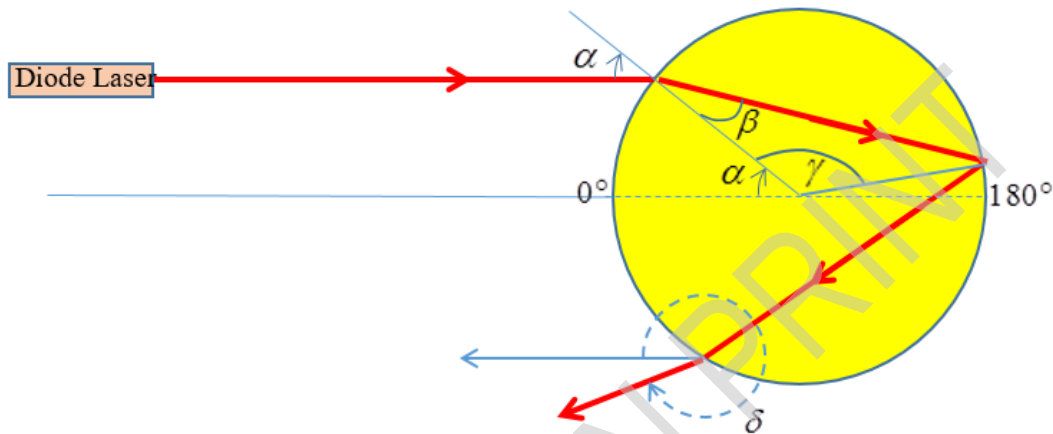


Q1-4

English (Official)

Part A: The refractive index of a disk (5.5 points)

In this part, we will measure the refractive index of a transparent disk by observing the path taken by a beam of light as it is refracted and reflected inside the disk.



A schematic view of the experiment

Definitions and symbols:

α	The incident angle between the disk and the incoming beam
$2\Delta\alpha$	The angular spread of the incident angle, i.e. the size of the range of values of the incident angle α
β	The refraction angle inside the disk
γ	$= 180^\circ - 2\beta$
n	The refractive index of the disk material
N	The number of times the beam hits the disk's boundary before emerging from the disk into the air (in the sketch, $N = 3$)
δ	The angle between the direction opposite to that of the incoming beam and the direction of the outgoing beam, measured clockwise (the sketch shows the angle δ for $N = 3$)
$2\Delta\delta$	The angular spread of δ

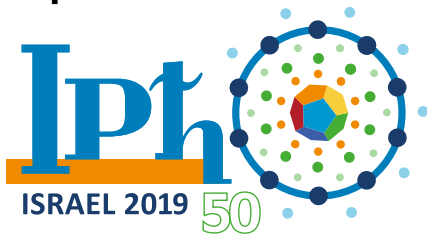
It is possible to show that the angles α , β and δ are related by:

$$\delta = 2\alpha + (N - 1)(180^\circ - 2\beta). \quad (1)$$

You may use this equation without deriving it.

Affix the ruler to the table in order to control the incident angle of the laser beam, using the adhesive tape, and adjust the laser in a way that will allow you to easily measure the incident angle. Then, affix the disk to the table by attaching the adhesive tape to the corners of the exposed wooden base and the table. Adjust inclination with the metal bar 4C. The laser may be set to two different heights: the low

Experiment



Q1-5

English (Official)

level for part A and the high level for parts B and C. The laser was tuned in advance so that the incident beam will be in the S polarization (a polarization in which the reflection is higher). **Do not change the polarization** of the incident beam (do not rotate the laser around the beam axis)!

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.1 | Draw a sketch of the system showing the ruler with the slider, the disk, and the path taken by the laser beam. Indicate the incident angle α .
Perform a series of measurements between the angles $15^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$, and write down $\alpha, \Delta\alpha, \delta, \Delta\delta$ in Table 1.
Note: for measuring δ , it is more convenient to measure $\delta/2$ directly on the disk. | 1.0pt |
| A.2 | Using the measurement from the previous step, draw the appropriate graph, from which you can extract the refractive index n and the error Δn . Should you need to calculate additional quantities, fill the calculated numbers in the empty columns of Table 1. Find n and Δn . | 1.0pt |
| A.3 | For the measurements performed in A1, draw a graph of δ as a function of α . Mark on each measured point the values of $\Delta\delta$ and $\Delta\alpha$ using bars. Make an additional measurement to accurately find the minimal δ , and the corresponding α . Denote them by δ_{\min} and α_{\min} .
In order to identify the minimum point most accurately, you may use the walls of your cubicle as a screen for the outgoing beam. | 0.5pt |

A second method to measure the refractive index

In this section, you will develop an alternative method that will allow you to get very accurate results. Even though you are required to measure at the highest achievable accuracy, **you are not required to perform error calculations**. Nevertheless, you are required to detail the equations you use to obtain your results. Write them in the answer sheets.

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.4 | Based on the behavior of the graph you got in A3, make a choice of the optimal angle to perform the measurements to find the refractive index. Write down the equation which one could use to obtain the refractive index using the developed method. | 0.7pt |
| A.5 | For $N = 3$, perform the necessary measurements to calculate the refractive index at high accuracy, using the method developed in A4 <ul style="list-style-type: none">• Draw a diagram of the disk and the beam path, and indicate on the diagram the quantities you have measured.• Document the measurements you have performed.• Perform an analysis of the measurements and calculate the refractive index n of the disk, at the highest achievable accuracy. You may use the additional supplied graph pages if needed. | 0.8pt |

- A.6** Repeat the process you performed in the previous task, for $N = 4$ and $N = 5$ (no need to draw the system and beam path). 1.5pt
- Document the measurements you have performed at $N = 4$.
 - Perform an analysis of the measurements at $N = 4$, and calculate the refractive index n using these measurements at the highest achievable accuracy.
 - Document the measurements you have performed at $N = 5$.
 - Perform an analysis of the measurements at $N = 5$, and calculate the refractive index n using these measurements at the highest achievable accuracy.
 - From the results you obtained of the value of the refractive index using the measurements at $N = 3$, $N = 4$ and $N = 5$, calculate the average value $\langle n \rangle$ of the refractive index.

Part B: The parameters of a diffraction grating (2.5 points)

In this part you are not required to perform error calculations.

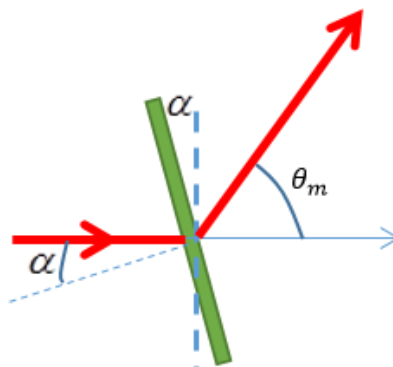
In this part we will find the ratio λ/d , where λ is the wavelength of the laser and d is the grating constant (distance between adjacent slits).

When a laser beam passes through a diffraction grating, the angle θ_m between the incident direction of the beam and the direction in which a maximal intensity (of order m) is obtained, is given by:

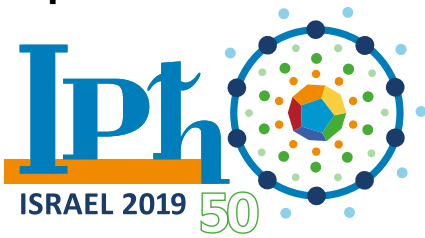
$$d \cdot (\sin \alpha + \sin(\theta_m - \alpha)) = m\lambda \quad (2)$$

where

m	the diffraction order
α	the incident angle between the beam and the grating
θ_m	the angle between the original direction of the beam and the direction in which a maximum of order m is obtained
d	the grating constant – the distance between the centers of adjacent slits in the grating



Experiment



Q1-7

English (Official)

High diffraction orders allow a better separation between wavelengths. Therefore, an accurate measurement using a high diffraction order reduces the relative error in the value of λ/d .

Release the screw 4B and change the height (vertical level) of the laser, rotating the laser by 180 degrees about the horizontal axis perpendicular to the beam direction (be careful with the wires) to the state shown in 3B. This action will enable you to perform parts B and C. Use the metal bar 4C, for fine adjustment of the laser so that it will align with the height of the apparatus for measurements using a diffraction grating. Align the laser beam so that it will be perpendicular to the screen. Place the diffraction grating in the slot in the designated holder 12B. The orientation of the diffraction grating is denoted by a sticker attached to one side of the grating. Make sure that the side of the grating with the sticker is facing the laser and that the sticker is at the top of the grating. Each grating has a unique ID, written on the sticker. **Write the ID of your grating in the corresponding box in the answer sheets.**

Throughout this part, you may find it useful to use an idea similar to the one you have used in the second section of part A.

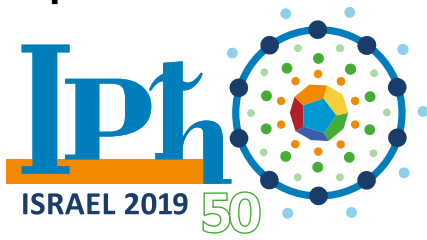
- | | | |
|------------|--|-------|
| B.1 | <ul style="list-style-type: none">• Draw on the answer sheet a diagram of the setup. In the diagram, indicate the laser on the table, the diffraction grating, the trace of the laser beam, the points it hits the screen and the quantities you measured.• Perform measurements for $m = 1$. Write down the values you measured. Extract the ratio λ/d.• Perform measurements for $m = 2$. Write down the values you measured. Extract the ratio λ/d. | 0.7pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| B.2 | <p>Obtain the ratio λ/d using higher diffraction orders ($m > 2$).</p> <ul style="list-style-type: none">• Draw on the answer sheet two diagrams of the setup, for $m = 3$ and for $m = 4$. Indicate in the diagram the laser, the diffraction grating, the trace of the laser beam, the points it hits the screen and the quantities you measured.• Perform measurements for each of the orders $m = 3, 4$. Write down the values you measured. For each m, extract the measured ratio λ/d. | 1.8pt |
|------------|---|-------|

Part C: The refractive index of a triangular prism (2.0 points)

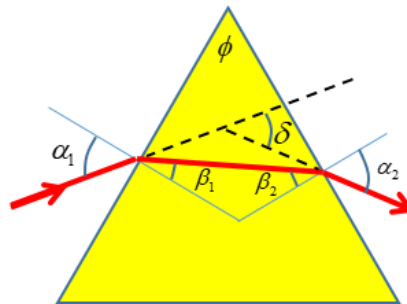
You are given an approximately equilateral, triangular prism. The three faces of the prism are planar and highly polished. The angles of the prism might deviate from 60° but by no more than 0.7° . You don't need to measure the angles of the prism. The goal of this section is to measure the refractive index of the material the prism is made of. To reduce the error in the refractive index, it is possible, by using the small angle approximation ($\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ when x is measured in radians) to correct for the small deviations in the prism's angles. In this section **you are required to make error calculations**. The figures shows an example of a ray entering the prism through one face and exiting through the next one.

Experiment



Q1-8

English (Official)



Place the slide ruler at a suitable place on the table so that the laser will allow you to achieve the highest accuracy in the measurements.

Place the prism in the designated holder 12B.

- C.1** In the symmetric case, $\alpha_1 = \alpha_2$, the following relation holds for an equilateral prism: $n = 2\sin(\delta_{\text{sym}}/2 + 30^\circ)$. 0.4pt
- Develop a method that would allow you to find the prism's refractive index with the highest accuracy.
 - Detail in the answer sheets the formulas you are using to find the refractive index.

- C.2** 1.6pt
- Record in the answer sheets the quantities you have measured and their values (including errors).
 - Calculate the refractive index of the prism for the wavelength of the laser, and the error in that value.

Experiment



Q2-1

English (Official)

Wiedemann-Franz Law

In metals, heat is conducted primarily by electrons. For this reason, thermal and electric conductivities are related. This is known as the Wiedemann-Franz law.

In this experiment, our goal is to measure the thermal and electric properties of several metals with a reasonably high accuracy. In part A, we will measure the electric conductivity of copper, brass and aluminum. In part B, we will measure the heat conductivity of copper. In part C, we will measure the specific heat capacity of copper. In part D, we will measure the heat conductivity of brass and aluminum. Finally, in part E, we will verify the universal relation between these physical properties for the metals we studied.

In this experiment, you are not required to perform any error calculations.

Note that in part B and D there is a wait time of **15 minutes**. Plan your time accordingly.

Safety instructions

Do not connect any wires or unauthorized instruments directly to the 220V/25A external power outlets. You may connect only the supplied power sources, with no modifications, to the external power outlet.

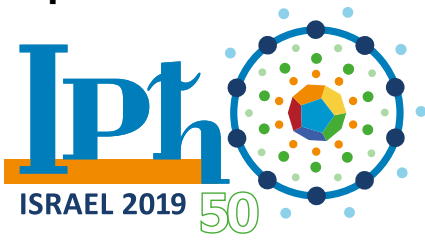
Equipment list



Figure 1

1. **Copper** hollow cylindrical tube, 200.0 mm in length, with an inner hole of diameter 6.0 mm, and an outside diameter of **20.0 mm**
2. **Brass** hollow cylindrical tube, 200.0 mm in length, with an inner hole of diameter 6.0 mm, and an outside diameter of **19.0 mm**
3. **Aluminum** hollow cylindrical tube, 200.0 mm in length, with an inner hole of diameter 6.0 mm, and an outside diameter of **20.0 mm**

Experiment



Q2-2

English (Official)

4. A small permanent magnet of mass 1.2 gram.
5. Water reservoir - a specially designed pot originally intended for making a local dish called "Jachnun", a kind of Israeli pastry. The cover of the pot includes a heat exchanger inside and a screw on top. Supplied are 4 liters of still water (2X2 liter bottles) to fill the reservoir.
6. Rod #1 - a Copper rod of diameter 20.0 mm with temperature sensors connected to the cable socket and a built-in heater connected to the red wires (figure 2.a). The red wires are intended to be connected to the DC power supply (item 15 below) through a circuit. The rod is covered with black thermally insulating foam.
7. Rod #2 - Composite rod of diameter 20.0 mm, with temperature sensors connected to the cable socket and a built-in heater connected to the red wires (figure 2.b). The red wires are intended to be connected to the DC power supply (item 15 below) through a circuit. The rod is covered with black thermal insulating foam.
8. Thermally insulating termination cap.
9. 12V DC power supply for the digital readout box.
10. Digital readout box. This box displays the readings of the eight thermometers and the time, see instructions below. This box is also used as a stopwatch.
11. Thermometer cable that connects the rod's thermometers to the digital readout box.
12. Voltmeter - the voltmeter function selector should be set to 20 Volts DC (Figure 3).
13. Ammeter - The ammeter function selector should be set to 10 Amperes DC (Figure 3).
14. Electrical wires.
15. 9V DC power supply for the heater connected to banana plugs.

WARNINGS: 1. Only the supplied power sources (with standard AC plugs) should be connected to the external power outlet. Connecting isolated wires or other equipment to the outlet is strictly forbidden and may cause serious injury.

2. Do not immerse the rods in the water.

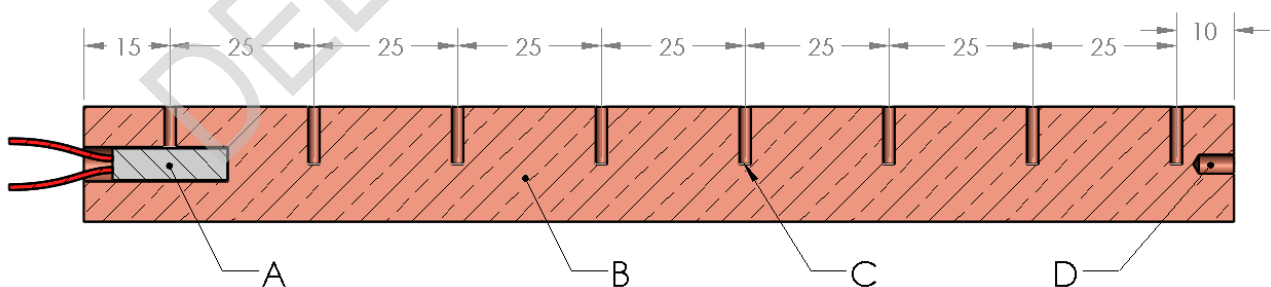


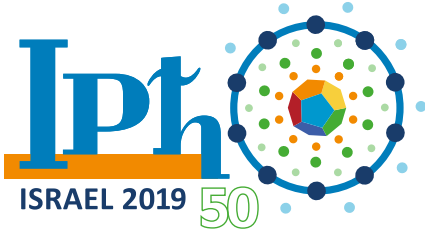
Figure 2.a - The schematics of Rod #1.

The distances are given in mm with an accuracy of 0.1mm.

(A) Heater connected to the red wires. (B) Copper rod. (C) Eight temperature sensors, each represented by a notch such as the one pointed to by the arrow.

(D) Threaded hole for the screw on the cover of the water reservoir

Experiment



Q2-3

English (Official)

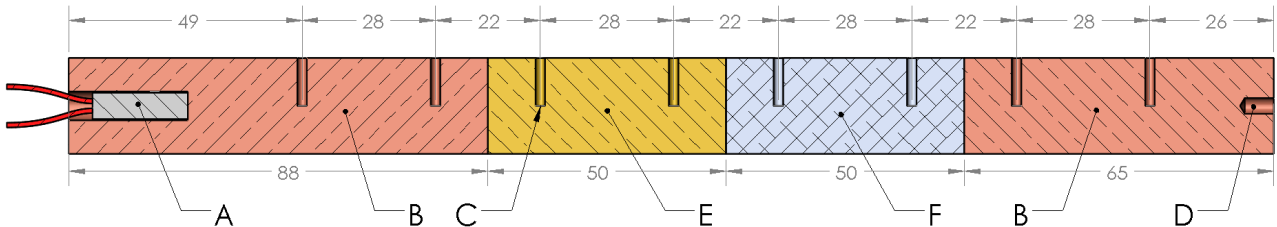


Figure 2.b - The schematics of Rod #2.

The distances are given in mm with an accuracy of 0.1 mm.

- (A) Heater connected to the red wires. (B) Copper rod. (C) Eight temperature sensors, each represented by a notch such as the one pointed to by the arrow.
(D) Threaded hole for the screw on the cover of the water reservoir
(E) Brass rod. (F) Aluminum rod.

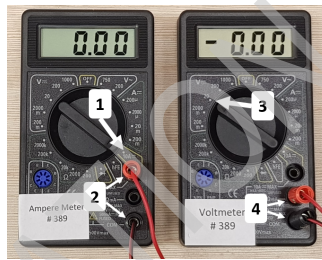


Figure 3 – Ammeter and Voltmeter

- (1) – Position of the knob selector for 10A as used in the experiment. (2) Input terminals used in Ammeter.
(3) – Position of the knob selector for 20V as used in the experiment. (4) Input terminals used in Voltmeter.

Using the digital readout box

Connect the digital readout box to its 12V DC power supply.

The digital readout box has two operation modes, as a stopwatch and as a temperature readout. When the cable from the sensors is connected to the box, the box will switch to temperature readout mode automatically. When the sensor cable is disconnected, the box will change to stopwatch mode automatically, and the screen will show the words "Timer mode".

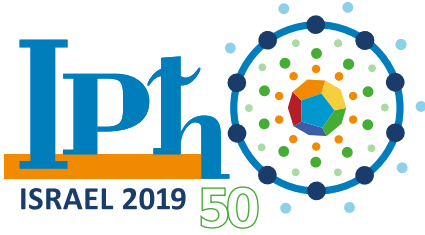
In temperature mode :

- Press and hold the red button for 3 seconds to reset the time
- Pressing briefly the red button will hold the reading display (while the box is still counting the time from the last reset but does not display it)
- Pressing again the red button resumes the live temperature and time display.

In stopwatch mode:

- Pressing of the red button starts the stopwatch.
- Pressing again stops the stopwatch.

Experiment



Q2-4

English (Official)

- Pressing an additional time resets the stopwatch back to zero.

The readout box must be calibrated for each rod before first use. The thermometers used in the experiment are not precisely identical. Therefore, while the rod is in thermal equilibrium, we would want to calibrate to get the same reading from all sensors. To do so, first, connect one end of the thermometers cable to the rod. Then, press and hold the red button while connecting the other end of the thermometers cable to the box. Disconnecting the box from both the power or sensors cables will not erase the calibration.

WARNING: Perform calibration **before** connecting the rod to the reservoir, or connecting its heater to the power supply. This will guarantee that the temperature of the rod is uniform during the calibration.

If you encounter any problems with the readout box, you may find it useful to unplug the readout box from its power supply and then plug it in again. The box will remember its last calibration.

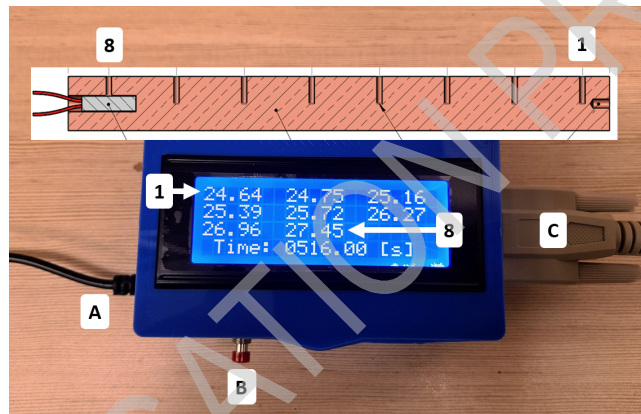


Figure 4 - the readout box
(A) 12V DC power supply cable. (B) Multifunctional red button.
(C) Thermometers cable. (1-8) Row by row thermometers readout in Celsius, shown in horizontal order.

Part A: Electric conductivity of copper, aluminum and brass (1.5 points)

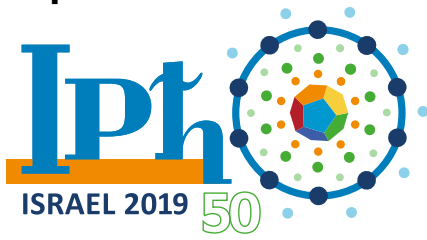
Theory

When a permanent magnet falls inside a hollow cylindrical conductive tube, it experiences a dissipative force due to induced eddy currents. Therefore, the magnet reaches a terminal velocity. For this geometry the terminal velocity can be expressed as:

$$v_{terminal} = \frac{8\pi m g a^2}{\mu_0^2 (\pi r_m^2 M)^2 \sigma w f\left(\frac{d}{a}\right)}. \quad (1)$$

Here m is the mass of the magnet, σ is the electrical conductivity of the material of the tube, a is the inner radius of the tube, r_m and d are the radius and the height of the magnet, respectively, M is the remanent magnetization of the magnet, w is the thickness of the tube wall and $f\left(\frac{d}{a}\right)$ is a scaling function. In our case, $a \approx r_m$, $d = 2r_m \approx 2a$ and $f(2) \approx 1.75$. Therefore, the time it takes for the magnet to fall through

Experiment



Q2-5

English (Official)

the tube can be approximated by:

$$t = 0.22 \frac{\pi r_m^2 (\mu_0 M)^2 w L_0}{mg} \sigma. \quad (2)$$

Here $L_0 = 0.2$ m is the length of the tube and we assume that the magnet reaches terminal velocity immediately upon its release.

The characteristics of the tube and the magnet which are needed for the calculation are:

$$\mu_0 M = 0.65 \text{ T}, w_{\text{Aluminum}} = w_{\text{Copper}} = 7.0 \times 10^{-3} \text{ m}, w_{\text{Brass}} = 6.5 \times 10^{-3} \text{ m}, m = 1.2 \times 10^{-3} \text{ kg}, r_m = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

DELEGATION PRINT

Experiment



Q2-6

English (Official)

Experiment

A.1 Using the digital readout box in stopwatch mode, measure the time it takes the magnet to fall through the hollow tubes made of aluminum, copper and brass. Write down your measurements in table A1. 1.0pt

A.2 Using the equation above, find the electrical conductivities σ_{Aluminum} , σ_{Copper} , σ_{Brass} for each of the three materials. 0.5pt

Part B: Thermal conductivity of copper (3.0 points)

The goal of this section is to measure the heat conductivity of copper close to the steady state.

Theory

The thermal conductivity κ is defined by the equation $P(x) = -\kappa A \cdot \frac{\Delta T(x)}{\Delta x}$. This equation describes a linear relation between the local temperature gradient and the local power flowing through a cross section of the material. Here, $P(x)$ is the power flowing through a cross-section at location x , A is the cross-sectional area of the rod and $\Delta T(x)/\Delta x$ is the temperature gradient at position x .

Experiment

Connect the digital readout box to the external outlet and calibrate Rod #1. Pour 4 liters (2 bottles) of water into the pot to fully immerse the heat exchanger and close the lid.

B.1 Write down the initial temperature of rod #1 when placed on the table. 0.1pt

Disconnect the readout cable from the rod. Remove the insulating cap and screw rod #1 onto the cover of the pot. Reconnect the cable to the readout box, as shown in figure 5. Be careful not to apply too much torque.



Figure 5

Experiment



Q2-7

English (Official)

- B.2** Draw a circuit that will allow you to supply power to the heater and to measure that power. Your circuit should contain the following: 9V power source, heater (already connected to the rod), the voltmeter, the ammeter and wires. You may use the wires as a switch to open and close the circuit. 0.5pt

The heat conductivity will be measured by applying heat power to one side of the rod while keeping the other side of the rod at the almost constant temperature of the water reservoir.

We aim to get close to a steady state for all thermometers. Connect the circuit from section B2 and apply power to the heater.

- B.3** Perform appropriate measurements to compute the applied power P to the heater, and write it down in the answer sheet. 0.1pt

Wait for 15 minutes while applying power (you can use this time to plan your experiments).

- B.4** Write down in the supplied table the temperatures of all eight thermometers at approximate times: 15 min, 17.5 min, 20 min. 0.5pt

- B.5** On one graph paper, draw three graphs of the temperature as a function of position for each of the measured times. These graphs will also be used in Part D. 1.0pt

- B.6** Use the graph to extract the thermal conductivity of copper, κ_0 , using your data from time approximately 17.5 min. Disregard any heat loss in this part. Estimate the average rate of temperature change of the rod, $\frac{\Delta T}{\Delta t}$, at time approximately 17.5 min. 0.5pt

- B.7** Do you expect a higher / lower / the same value of κ_0 , compared to the real value of κ ? 0.3pt

Part C: Estimating the heat loss and the heat capacity of copper (4.0 points)

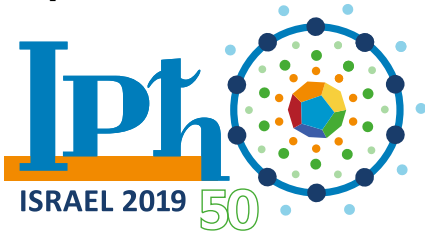
Theory

The heat capacity C is defined by either of the following equations:

$$\Delta Q = C\Delta T, \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right). \quad (3)$$

Here, $\Delta Q/\Delta t$ is the net heat rate transfer to the material and $\Delta T/\Delta t$ is the temperature change rate. The specific heat c_p is the heat capacity per unit mass. The mass of the copper rod should be taken as 0.58 kg.

Experiment



Q2-8

English (Official)

Experiment

Turn off the heater power supply. Disconnect the circuit, unscrew and place rod #1 on the table. Place the insulating termination cap onto the rod, as you found it at the beginning of the experiment. Reconnect the heater circuit and reconnect the rod to the digital readout box.

WARNING: Do not leave the heater on in this part for long periods of time without monitoring the temperature.

Using a sequence of cooling, heating, and cooling again, we can extract both the heat loss and the heat capacity of the material. The heating step should change the average temperature by approximately 2.5°C . The necessary accuracy in this step can be achieved by a cooling-heating-cooling sequence of a total length of 10-15 minutes.

Here we aim to work near the average temperature measured close to the steady state of Part B.

In order to account for all the thermal energy stored in the rod, we would want to track its average temperature. The temperature at the center of the rod is a good approximate measure of the average temperature.

C.1	Perform a cooling-heating-cooling sequence and record your measurements in table C1, to obtain the average temperature.	1.0pt
------------	---	-------

C.2	Plot on a graph paper the average temperature versus time.	1.0pt
------------	--	-------

C.3	Using the graph, calculate the specific heat c_p and the heat loss per unit time P_{loss} around the average temperature of Part B. Describe your method using diagrams and equations.	1.0pt
------------	---	-------

There are two main mechanisms which should be taken into account in order to improve the accuracy of the heat conductivity extracted in part B.

- There is heat loss due to radial heat transfer through the insulation.
- The system did not reach steady-state at the time of the measurement

To first order approximation, you may assume that due to these mechanisms the change per unit length of power flow along the rod, $\Delta P(x)/\Delta x$, is constant.

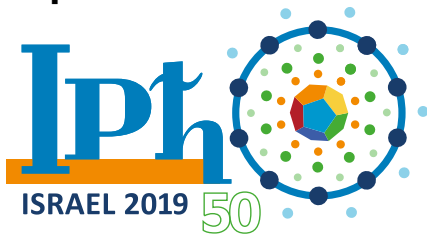
C.4	Write down an equation correcting to first order the thermal conductivity found in part B while taking into account both mechanisms. Use $\kappa_0, P, c_p, m, P_{\text{loss}}, \frac{\Delta T}{\Delta t}$ from parts B,C to express the corrected value of the thermal conductivity, κ_{Copper} and calculate its value.	1.0pt
------------	---	-------

Part D: Thermal conductivity of brass and aluminum (1.0 points)

Connect the insulated rod #2 to the digital readout box, and calibrate the thermometers of this rod as instructed at the beginning of Part B (while the red button is pressed, connect the insulated rod #2 to the readout box using the thermometers cable).

D.1	Write down the initial temperature of the rod when placed on the table.	0.1pt
------------	---	-------

Experiment



Q2-9

English (Official)

Disconnect the cable and screw rod #2 onto the pot's cover as shown in figure 4. Reconnect the cable to the readout box.

Repeat the procedure used in part B to get close to the steady state while heating.

Supply power to the heater for at least **15 minutes** before making measurements.

You may assume, for the accuracy required in this part, that the rod is in steady state. In addition, you may assume that the heat loss per unit length is constant along the rod.

D.2 Write down the temperature readings from all eight thermometers of rod #2 and write down $\Delta T/\Delta x$ for each of its sections. 0.2pt

To first order approximation, you may use the same assumption as in task C.4, namely, that $\Delta P(x)/\Delta x$ is constant.

D.3 Express κ_{Brass} and κ_{Aluminum} using your previous measurements and evaluate their numerical values. 0.7pt

Part E: The Wiedemann-Franz law (0.5 points)

The Wiedemann-Franz law states that, in metals where heat transport is dominated by conduction electrons, the ratio of thermal and electrical conductivities depends linearly on the absolute temperature. Moreover, the law states that the slope $L = \frac{\kappa}{\sigma T}$ (known as the "Lorenz number") of this dependence is the same for most metals, and depends only on universal constants of nature. In reality, for metals at room temperature, this law holds with about 10% accuracy.

E.1 Write down your findings for thermal and electrical conductivities (κ, σ) in table E1. Calculate the value of L for each material and display it in the same table E1, while assuming that the thermal conductivity does not depend on temperature to first order. 0.5pt

Zero-length springs and slinky coils – Solution

Part A: Statics

A.1 The force F causes the spring to change its length from L_0 to L . Since equal parts of the spring are extended to equal lengths, we get: $\frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{L}{L_0} \rightarrow \Delta y = \frac{L}{L_0} \Delta l$.

Since $L = \max\left\{\frac{F}{k}, L_0\right\}$, we get $\Delta y = \max\left\{\frac{F}{kL_0} \Delta l, \Delta l\right\}$. From this result we see that any piece of length Δl the spring behaves as a ZLS with spring constant $k^* = k \frac{L_0}{\Delta l}$.

A.2 Let us compute the work of the force. From Task A.1: $dW = F(x)dx = \frac{kL_0}{\Delta l} x dx$.

Hence, $\Delta W = \int_{\Delta l}^{\Delta y} \frac{kL_0}{\Delta l} x dx = \frac{kL_0}{\Delta l} \frac{x^2}{2} \Big|_{\Delta l}^{\Delta y} = \frac{kL_0}{2\Delta l} (\Delta y^2 - \Delta l^2)$.

A.3. At every point along the statically hanging spring the weight of the mass below is balanced by the tension from above. This implies that at the bottom of the spring there is a section of length l_0 whose turns are still touching each other, as their weight is insufficient to exceed the threshold force kL_0 to pull them apart. The length l_0 can be derived from the equation:

$$\frac{l_0}{L_0} Mg = kL_0, \text{ hence } l_0 = \frac{kL_0^2}{Mg} = \alpha L_0.$$

For $l > l_0$, a segment of the unstretched spring between l and $l + dl$ feels a weight of $\frac{l}{L_0} Mg$ from beneath, which causes its length to stretch from dl to $dy = \frac{F}{kL_0} dl = \frac{l}{L_0} Mg \frac{dl}{kL_0} = \frac{Mg}{kL_0^2} l dl = \frac{l}{l_0} dl$.

Integration of the last expression over the stretched region, up to the point L_0 , gives its height when the spring is stretched

$$H = l_0 + \int_{l_0}^{L_0} \frac{l}{l_0} dl = l_0 + \frac{l^2}{2l_0} \Big|_{l_0}^{L_0} = l_0 + \frac{1}{2l_0} (L_0^2 - l_0^2) = \frac{L_0^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} = \frac{L_0}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$

Part B: Dynamics

B.1. From Task A.3 we have $H(l) = \frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2}$. We now calculate the position of the center of mass of the suspended spring. The contribution of the unstretched section of height l_0 at the bottom, having a mass of $\frac{l_0}{L_0}M = \alpha M$, is $\alpha M \frac{l_0}{2}$. The position of the center of mass is obtained by summing the contributions of its elements:

$$\begin{aligned}
 H_{cm} &= \frac{1}{M} \left[\frac{l_0}{2} \alpha M + \int_{l_0}^{L_0} H(l) dm \right] = \frac{1}{M} \left[\frac{\alpha L_0}{2} \alpha M + \int_{l_0}^{L_0} \left(\frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} \right) \frac{M dl}{L_0} \right] \\
 &= \frac{\alpha^2 L_0}{2} + \frac{1}{L_0} \left[\frac{l^3}{6l_0} + \frac{l_0}{2} l \right]_{l_0}^{L_0} = \frac{\alpha^2 L_0}{2} + \frac{1}{L_0} \left[\frac{L_0^3 - l_0^3}{6l_0} + \frac{l_0}{2} (L_0 - l_0) \right]
 \end{aligned}$$

Where we have used $dm = \frac{dl}{L_0} M$. Substituting $l_0 = \alpha L_0$ yields

$$H_{cm} = L_0 \left[\frac{1}{6\alpha} - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha}{2} \right]$$

When the spring is contracted to its free length L_0 , its center of mass is located at $\frac{L_0}{2}$. From the falling of the center of mass at acceleration g we get:

$$\frac{g}{2} t_c^2 = H_{cm} - \frac{L_0}{2} = L_0 \left[\frac{1}{6\alpha} - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3$$

Hence, $t_c = \sqrt{\frac{L_0}{3g\alpha} (1 - \alpha)^3}$.

For $k = 1.02$ N/m, $L_0 = 0.055$ m, $M = 0.201$ kg, and $g = 9.80$ m/s², we have $\alpha = 0.0285$, and $t_c = 0.245$ s.

B.2. The moving top section of the spring is pulled down by its own weight, $m_{top}g = Mg \frac{(L_0 - l)}{L_0}$ and also by the tension in the spring below, which is equal to the weight Mgl/L_0 of the stationary section of the spring. Thus, the moving top section experiences a constant force $F = Mg$ throughout its whole fall. Another way to see that, is that a total force of Mg is exerted on the spring, but only the moving part experiences it. Let's calculate the position of the center of mass at equilibrium of the upper part, i.e., all points with $l' > l$ for some $l > l_0$. From part A,

the position of a small portion $\Delta l'$ with coordinate l' is: $H(l') = \frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2}$ and the center of mass of this part is:

$$\begin{aligned} H_{cm-upper-i} &= \frac{L_0}{M(L_0 - l)} \int_l^{L_0} H(l') dm = \frac{L_0}{M(L_0 - l)} \int_l^{L_0} \left(\frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} \right) dm \\ &= \frac{L_0}{M(L_0 - l)} \int_l^{L_0} \left(\frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} \right) \frac{M dl'}{L_0} = \frac{1}{(L_0 - l)} \int_l^{L_0} \left(\frac{l'^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} \right) dl' \\ &= \frac{1}{(L_0 - l)} \left[\frac{l'^3}{6l_0} + \frac{l_0 l'}{2} \right]_l^{L_0} = \frac{L_0^2 + L_0 l + l^2}{6l_0} + \frac{l_0}{2} \end{aligned}$$

The position of the upper part of CM when it contracts to a length $L_0 - l$ is $H_{cm-upper-f} = \frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} + \frac{1}{2}(L_0 - l)$. The change in the CM during the contraction process is: $\Delta H_{cm-upper} = H_{cm-upper-i} - H_{cm-upper-f} = \frac{L_0^2 + L_0 l - 2l^2}{6l_0} - \frac{1}{2}(L_0 - l) = \frac{(L_0 - l)(L_0 + 2l)}{6l_0} - \frac{1}{2}(L_0 - l)$.

The acceleration of the CM of the upper part is $a_{CM} = \frac{FL_0}{M(L_0 - l)} = \frac{gL_0}{L_0 - l}$.

From the work energy theorem we get the equation $v_{upper-f}^2 = 2a_{CM}\Delta H_{cm-upper}$, hence

$$\begin{aligned} v_{upper-f}^2 &= 2 \frac{gL_0}{L_0 - l} \left[\frac{(L_0 - l)(L_0 + 2l)}{6\alpha L_0} - \frac{1}{2}(L_0 - l) \right] = 2g \left[\frac{L_0 + 2l}{6\alpha} - \frac{1}{2}L_0 \right] \\ &= \frac{2g}{3\alpha} l + \left(\frac{1}{3\alpha} - 1 \right) gL_0 \end{aligned}$$

Therefore, $A = \frac{2g}{3\alpha}$ and $B = \left(\frac{1}{3\alpha} - 1 \right) gL_0$.

Note that for $l = L_0$, we have $v_{upper-f}^2 = L_0 g \frac{1-\alpha}{\alpha}$ and for $l = l_0 = \alpha L_0$, we get $v_{upper-f}^2 = L_0 g \frac{1-\alpha}{3\alpha}$, hence, the moment we release the spring its velocity is finite (not zero, the meaning is that it accumulate this velocity in time that is much shorter than the contracting time t_c) and it decreases to $\frac{1}{\sqrt{3}}$ of the initial value when $l = l_0$.

B.3. Note that even though the center of mass of the spring accelerates downwards constantly, the moving top section actually decelerates, while the position of the center of mass moves down the spring. The speed of the top section $v(l)$, calculated in Task B2, decreases and

approaches the value $\sqrt{A\alpha L_0 + B}$ immediately before it attaches to the bottom section of height $l_0 = \alpha L_0$, which was unstretched and at rest. Once the moving top section attaches to the resting bottom section, its momentum is shared between both sections, so the speed further decreases just before the whole spring starts accelerating downwards as a single mass. Thus, the minimum speed is that of the whole spring immediately after its full collapse. From momentum conservation, we have

$$Mv_{min} = m_{top}v(l_0) = M\left(1 - \frac{l_0}{L_0}\right)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

$$v_{min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

Part C: Energetics

C.1. From the moment the spring is released, the acceleration of its center of mass is governed by the external force Mg and therefore the gravitational potential energy of the spring is fully converted into the kinetic energy of the center of mass of the spring, which just before hitting the ground is equal to the kinetic energy of the spring.

All that is left is the elastic energy stored in the spring, which is converted into heat, sound, etc. To calculate it, we consider the elastic energy stored in a segment dh of the stretched spring, which when unstretched lies between l and $l + dl$, using the result of Task A.2, $\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta l}(\Delta l_2^2 - \Delta l^2)$, by choosing $\Delta l = dl$ and $\Delta l_2 = dy$, and using $dy = \frac{l}{l_0}dl$ (which was obtained in Task A.3), we get:

$dW = \frac{kL_0}{2}\left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1\right)dl$. Integrating from l_0 to L_0 we find

$$\begin{aligned} W &= \int_{l_0}^{L_0} \frac{kL_0}{2}\left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1\right)dl = \frac{kL_0}{2}\left[\frac{l^3}{3l_0^2} - l\right]_{l_0}^{L_0} = \frac{kL_0}{2}\left(\frac{L_0^3 - l_0^3}{3l_0^2} - (L_0 - l_0)\right) \\ &= \frac{kL_0^2}{2}\left(\frac{1 - \alpha^3}{3\alpha^2} - (1 - \alpha)\right) = \frac{kL_0^2}{6\alpha^2}(1 - \alpha)^2(2\alpha + 1) \\ &= MgL_0\frac{(1 - \alpha)^2(2\alpha + 1)}{6\alpha} \end{aligned}$$

The Physics of a Microwave Oven – Solution

Part A: The structure and operation of a magnetron

A.1. The frequency of an LC circuit is $f = \omega/2\pi = 1/(2\pi\sqrt{LC})$. If the total electric current flowing along the boundary of the cavity is I , it generates a magnetic field whose magnitude (by the assumptions of the question) is $0.6\mu_0 I/h$, and a total magnetic flux equal to $\pi R^2 \times 0.6\mu_0 I/h$, hence the inductance of the resonator is $L = 0.6\pi\mu_0 R^2/h$. Approximating the capacitor as a plate capacitor, its capacitance is $C = \epsilon_0 lh/d$. Putting everything together, we find

$$f_{est} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{0.6\pi R^2 \mu_0} \frac{d}{\epsilon_0 l h}} = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{R} \sqrt{\frac{d}{0.6\pi l}} = \frac{1}{2\pi} \frac{3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{1}{3.6\pi}} = 2.0 \cdot 10^9$$

Hz

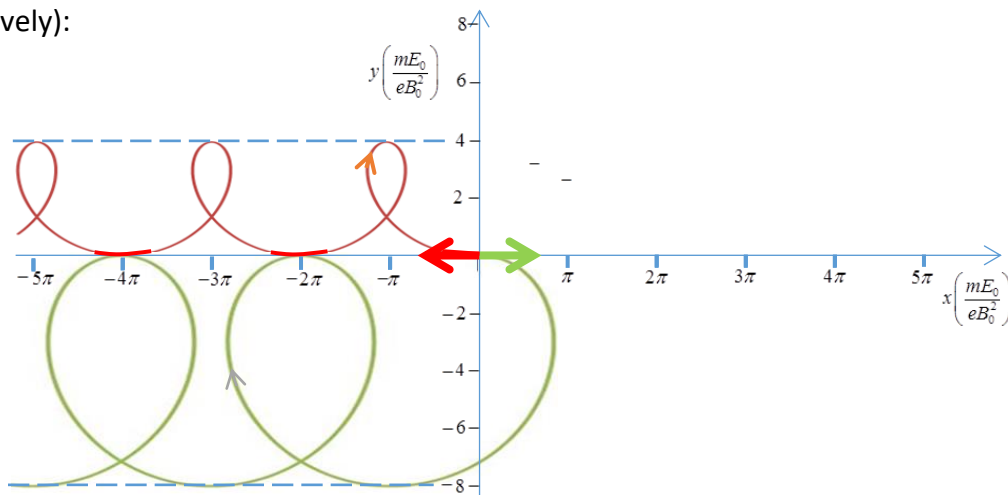
A.2. Denoting the electron velocity by $\vec{u}(t)$, in this case the total force applied on it is

$$\vec{F} = -e(-E_0 \hat{y} + \vec{u}(t) \times B_0 \hat{z}).$$

Let us write $\vec{u}(t) = \vec{u}_D + \vec{u}'(t)$, with $\vec{u}_D = (-E_0/B_0)\hat{x}$ being the drift velocity of a charged particle in the crossed electric and magnetic fields (the velocity at which the electric and magnetic forces cancel each other exactly). Then $\vec{F} = -e\vec{u}'(t) \times B_0 \hat{z}$. Thus, in a frame moving at the drift velocity \vec{u}_D , the electron trajectory is a circle with constant-magnitude velocity $u' = |\vec{u}'(t)|$, and radius $r = mu'/eB_0$. In the lab frame this circular motion is superimposed upon the drift at the constant velocity \vec{u}_D . Hence:

1. For $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$ we find $u' = 4E_0/B_0$ and $r = 4mE_0/eB_0^2$.
2. For $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$ we find $u' = 2E_0/B_0$ and $r = 2mE_0/eB_0^2$.

This information, together with the independence of the period of the circular motion on u' allows us to plot the electron trajectory in both cases (green and red, for cases 1 and 2, respectively):



A.3. The velocity of the electron in a frame of reference where the motion is approximately circular is u' . From A.2 we get that $u_D + u' = v_{\max}$ and $u_D - u' = v_{\min}$, hence

$$u' = (v_{\max} - v_{\min}) / 2 < v_{\max}.$$

The radius of the circular motion of the electron in this frame is $r = mu' / eB_0 < mv_{\max} / eB_0$. The maximal velocity is that corresponding to a kinetic energy, $K_{\max} = mv_{\max}^2 / 2$, of 800 eV.

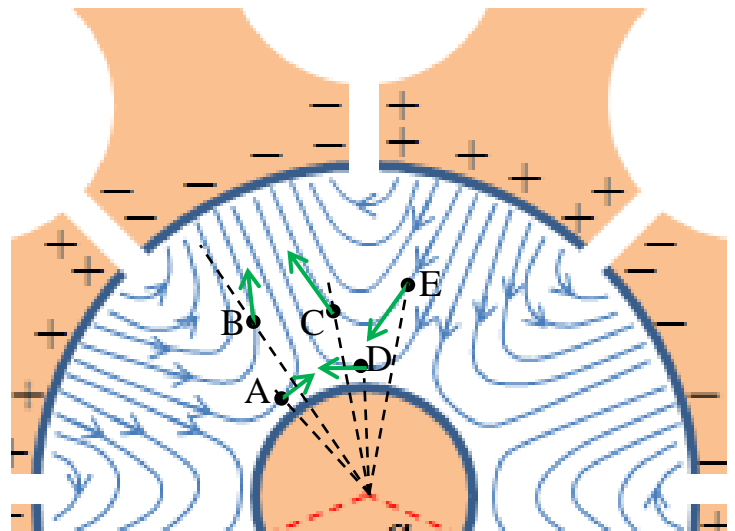
Substituting we find $r < \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{e}} = \frac{1}{0.3} \sqrt{\frac{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 800}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 3.18 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 0.3 \text{ mm}.$

Since this maximal radius is much smaller than the distance between the anode and the cathode, we may ignore the circular component of the electronic motion, and approximate it as pure drift.

A.4. As just explained, we may approximate the electron motion as pure drift. In task A.2 we have found that the direction of the drift

velocity \vec{u}_D is in the direction of the vector $\vec{E} \times \vec{B}$. Since we are interested in radial component of the drift velocity, the only contribution is from the azimuthal component of the electric field.

The static electric field has no azimuthal component, hence the drift in the radial direction results solely from the azimuthal component of the alternating electric field. What we have to check is if the azimuthal component points clockwise or counterclockwise. From the direction of the field lines it is easy to see (attached figure) that in points A and B the azimuthal component pointing clockwise therefore the electrons there drift towards the cathode, while for points C, D and E the azimuthal component points counterclockwise and the electrons there drift toward the anode.



Point	toward the anode	toward the cathode	perpendicular to the radius
A		X	
B		X	

C	X		
D	X		
E	X		

A.5. In this task we need to consider the azimuthal component of the drift velocity, which results from the radial component of the electric field. Since all points are at the same distance from the anode, all electrons experience the same static electric field. Hence only the radial component of the alternating field determines whether the angle between the electrons' position vectors would increase or decrease: If the radial component of the alternating field points inwards (towards the cathode), the azimuthal drift velocity will be positive (counterclockwise) and vice versa. Hence the electrons at A, B and C drift closer to each other in terms of angles, while those at D, E and F drift away from each other.

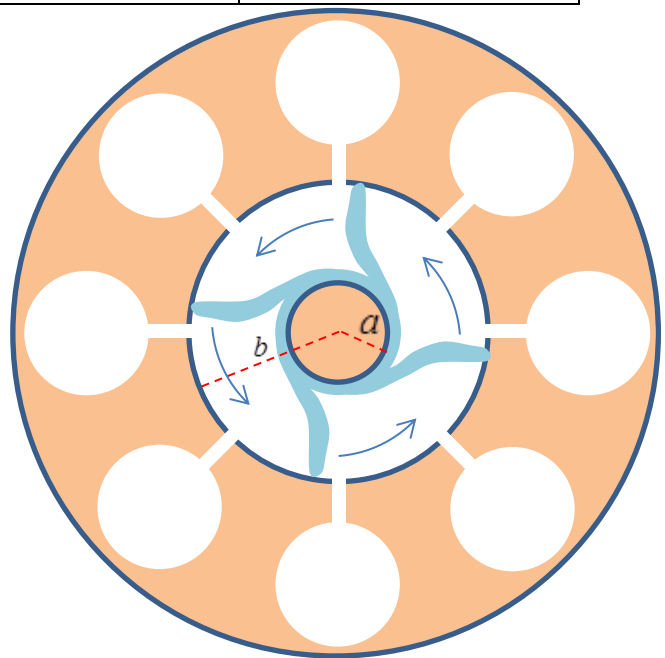
points	angle decreases	angle increases	indeterminate
AB	X		
BC	X		
CA	X		
DE		X	
EF		X	
DF		X	

A.6. Spokes will be created only in the regions where focusing occurs. By the result of the previous task, there are four spokes, as indicated in the attached Figure.

The electron drift sets the spokes in a counterclockwise rotation. The frequency of the alternating field is $f = 2.45$ GHz. By the time the alternating field flipped its sign (half a period), each spoke moves to the next cavity, corresponding to an angle of $\pi/4$. Therefore, the angular velocity of each spoke is

$$\omega = \frac{\pi}{4} / \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} f = 8.348 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

Each spoke performs a full rotation around the magnetron after four periods of the alternating field.



A.7. The magnitude of the electric field in the region considered, $r = (b + a)/2$, is the magnitude of the static field, that is, $E = V_0/(b - a)$, giving rise to an azimuthal drift velocity of magnitude $u_D = E/B_0 = V_0/[B_0(b - a)]$. Equating u_D/r with the angular velocity found in the previous task we find $V_0 = \pi f B_0 (b^2 - a^2) / 4$

Part B: The interaction of microwave radiation with water molecules

B.1. The torque at time t is given by $\tau(t) = -qds\sin[\theta(t)]E(t) = -p_0\sin[\theta(t)]E(t)$, hence the instantaneous power delivered to the dipole by the electric field is

$$H_i(t) = \tau(t)\dot{\theta}(t) = -p_0E(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) = E(t)\frac{d}{dt}(p_0\cos\theta(t)) = E(t)\frac{dp_x(t)}{dt}$$

B.2. Since the average dipole density (hence the average of each molecular dipole) is parallel to the field, the absorbed power density is (angular brackets, $\langle \dots \rangle$, denote average over time)

$$\begin{aligned} \langle H(t) \rangle &= \left\langle E_0 \sin(\omega_f t) \frac{dP_x}{dt} \right\rangle = \left\langle E_0 \sin(\omega_f t) \frac{d}{dt} (\beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega_f t - \delta)) \right\rangle = \\ &E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \langle \sin(\omega_f t) \cos(\omega_f t - \delta) \rangle = 0.5 E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \langle \sin \delta + \sin(2\omega_f t - \delta) \rangle = 0.5 E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \sin \delta \end{aligned}$$

B.3. The energy density of the electromagnetic field at penetration depth z , which is twice the electric energy density, is $2 \times \epsilon_r \epsilon_0 \langle E^2(z, t) \rangle / 2 = \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2(z) \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2(z) / 2$.

Therefore, the time-averaged flux density at depth z is:

$$I(z) = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2(z) \times \frac{c}{n} = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0} c E_0^2(z),$$

where c is the speed of light in vacuum. I decreases with z due to the absorbed power calculated in the previous task we find

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{1}{2} \beta \epsilon_0 \omega E_0^2(z) \sin \delta = -\frac{\beta \omega \sin \delta}{c \sqrt{\epsilon_r}} I(z),$$

hence $I(z) = I(0) \exp[-z\beta\omega\sin\delta/(c\sqrt{\epsilon_r})]$.

B.4. Similarly to the previous task, the energy flux corresponding to the given field is

$$I(z) = \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0} c \langle E^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0} c E_0^2 e^{-z\omega\sqrt{\epsilon_r} \tan \delta / c}.$$

Equating the argument of the exponent in the last expression with the result of the previous task, and using the given approximation $\tan \delta \approx \sin \delta$ leads to $\beta = \epsilon_r$.

B.5.

1. Using previous results, the radiation power per unit area is reduced to half of its $z = 0$ value at $z_{1/2} = c \ln 2 / (\omega \sqrt{\epsilon_r} \tan \delta) = c \sqrt{\epsilon_r} \ln 2 / (\omega \epsilon_l)$. From the given graph, at the given frequency $\epsilon_r \approx 78$ and $\epsilon_l \approx 10$, hence $z_{1/2} \approx 12$ mm.

We have just found that the penetration depth is proportional to $\sqrt{\epsilon_r} / \epsilon_l$. From the given graph we thus find that:

2. Heating up pure water (continuous lines) decreases ϵ_l much more significantly than the corresponding decrease of $\sqrt{\epsilon_r}$ at the given frequency. Thus, the penetration depth of pure water increases with temperature, allowing deeper penetration of the microwave radiation and heating up the water inner regions.

3. On the contrary, for a soup (dilute salt solution, dashed lines) ϵ_l at the given frequency increases with temperature while ϵ_r decreases. Thus, the absorption rate increases with temperature, the penetration depth decreases, and less microwave radiation reaches its inner regions.

material	$z_{1/2}$ increases with temp.	$z_{1/2}$ decreases with temp.	$z_{1/2}$ remains the same
water	X		
soup		X	

Thermoacoustic engine – Solution

Part A: Sound wave in a closed tube

A.1. The boundary conditions are: $u(0, t) = u(L, t) = 0$. As a result, $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$, so we get $\lambda_{\max} = 2L$.

A.2. We get

$$V(x, t) = S \cdot (\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) = S\Delta x \cdot (1 + u') = V_0 + V_0 u'.$$

Thus,

$$V(x, t) = V_0 + akV_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad V_1(x) = akV_0 \cos(kx).$$

A.3. We use Newton's Second Law $\rho_0 \ddot{u} = -p'$ to deduce $p' = -\rho_0 \ddot{u} = \rho_0 a \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t)$, so that

$$p(x, t) = p_0 - a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad p_1(x) = a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos(kx).$$

A.4. Using $a \ll L$, we obtain $\frac{p_1(x)}{p_0} = \gamma \frac{V_1(x)}{V_0}$. As a result, $\frac{\rho_0 \omega^2}{p_0 k} = \gamma \cdot k$, and $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$.

A.5. The relative change in $T(x, t)$ is the sum of the relative changes in $V(x, t)$ and $p(x, t)$. As a result,

$$T_1(x) = \frac{T_0}{p_0} p_1(x) - \frac{T_0}{V_0} V_1(x) = (\gamma - 1) \frac{T_0}{V_0} V_1(x) = ak(\gamma - 1)T_0 \cos(kx).$$

A.6. The movement of the gas parcels inside the tube conveys heat along its boundary. To determine the direction of the convection, we combine the result of Task A.5 and the expression (1) for $u(x, t)$. We see that when $0 < x < \frac{L}{2}$, the gas is colder when the displacement $u(x, t)$ is positive. Likewise, when $\frac{L}{2} < x < L$, the gas is colder when the displacement $u(x, t)$ is negative. Hence, heat flows into the gas near the point B, cooling it down, and out of the gas near the points A and C, heating them up.

Part B: Sound wave amplification induced by external thermal contact

B.1. We get

$$T_{\text{env}}(t) = T_{\text{plate}}(x_0 + u(x_0, t)) = T_0 - \frac{\tau}{\ell} \cdot u(x_0, t),$$

so that:

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\ell} \sin(kx_0) = \frac{a\tau}{\ell\sqrt{2}}.$$

B.2. The gas will convey heat from the hot reservoir to the cold one if the parcels are colder than the environment when $u(x_0, t) < 0$, and hotter when $u(x_0, t) > 0$. This occurs precisely if

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

Plugging in the results of Tasks A.5 and B.1, we get

$$\frac{a\tau_{\text{cr}}}{\ell} \sin(kx_0) = ak(\gamma - 1)T_0 \cos(kx_0) \Rightarrow \tau_{\text{cr}} = k\ell(\gamma - 1)T_0.$$

B.3. Using the first law of thermodynamics, we get

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt}.$$

Plugging in the relation $E = \frac{1}{\gamma-1}pV$, we see that:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt}(pV) + p \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\gamma-1} V \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \frac{dV}{dt} \approx \frac{1}{\gamma-1} V_0 \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \frac{dV}{dt}.$$

B.4. We plug the expression for $\frac{dQ}{dt}$ into the result of Task B.3. This gives:

$$\frac{1}{\gamma-1} V_0 \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \frac{dV}{dt} = \beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cdot \cos(\omega t).$$

We now plug in the data given in equation (6), and get (by considering terms with $\cos(\omega t)$ and $\sin(\omega t)$ separately):

$$\frac{1}{\gamma-1} V_0 p_a \omega + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_a \omega = \beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} V_0 p_b \omega - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_b \omega = 0$$

and thus, we can already express V_b as

$$V_b = \frac{1}{\gamma} p_b \cdot \frac{V_0}{p_0}.$$

For V_a , we plug in the results of Tasks B.1 and B.2,

$$T_{\text{st}} - T_1 = \frac{a}{\ell\sqrt{2}} (\tau - \tau_{\text{cr}}),$$

giving:

$$V_a = \left(-\frac{1}{\gamma} p_a - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\beta}{\omega} \frac{a}{\ell\sqrt{2}} (\tau - \tau_{cr}) \right) \cdot \frac{V_0}{p_0}.$$

B.5. We want to integrate the mechanical work generated, $\int p dV$, and averaging the result over a long time. To do this, we substitute our expressions (6) for the perturbed p and V . Since the average of $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ is 0, and that of $\sin^2(\omega t)$ and $\cos^2(\omega t)$ is $\frac{1}{2}$, we get:

$$\frac{V_0}{S\ell} W_{tot} = -\pi \cdot (p_a V_b + p_b V_a).$$

Using the result of B.4, we get

$$\frac{V_0}{S\ell} W_{tot} = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta \frac{a}{\ell\sqrt{2}} (\tau - \tau_{cr}) \cdot V_0 \frac{p_b}{p_0}.$$

To leading order, p_b is the unperturbed wave $p_b \approx p_1(x_0) = a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos(kx_0) = ak\gamma p_0 \frac{1}{\sqrt{2}}$. Simplifying, we get

$$W_{tot} = \frac{\pi}{\omega} S \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta \frac{a}{\sqrt{2}} (\tau - \tau_{cr}) \cdot \frac{p_b}{p_0} = \frac{\pi}{2\omega} (\gamma - 1) \beta (\tau - \tau_{cr}) k a^2 S.$$

B.6. We want to compute the amount of heat convection over one cycle. This means that we need to take the amount of heat moving in or out of the parcel, and weigh it by the position of the parcel at that time. Thus, the total heat conveyed by the parcel, integrated along a cycle, is:

$$Q_{tot} = \frac{1}{\Delta x} \int \frac{dQ}{dt} u \cdot dt.$$

This expression can be computed to leading order using $\frac{dQ}{dt} = \beta V_0 (T_{st} - T_1) \cdot \cos(\omega t)$ and the unperturbed displacement $u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t)$. This gives

$$Q_{tot} = \frac{\pi}{\omega} \beta V_0 (T_{st} - T_1) \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\omega} \beta V_0 \cdot \frac{a}{\ell\sqrt{2}} (\tau - \tau_{cr}) \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\omega} \beta (\tau - \tau_{cr}) \frac{a^2 S}{\ell}.$$

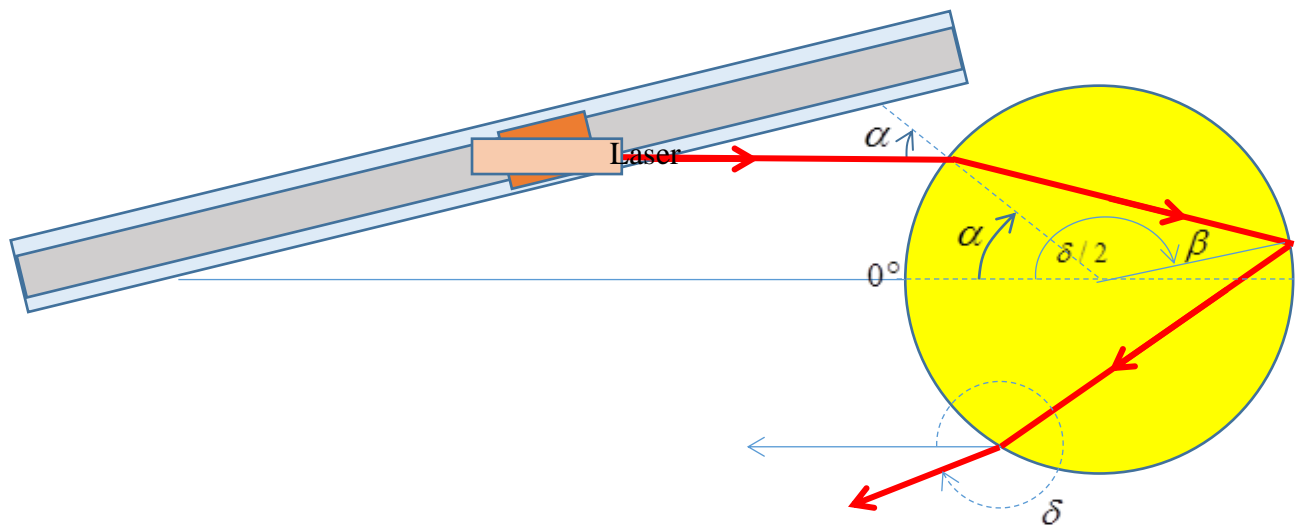
B.7. Dividing the results of Tasks B.5 and B.6, we obtain the expression:

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{tot}} = (\gamma - 1) k \ell = \frac{\tau_{cr}}{T_0} = \frac{\tau_{cr}}{\tau} \cdot \frac{\tau}{T_0} = \frac{\tau_{cr}}{\tau} \cdot \eta_c.$$

Optical Measurements – Solution

Part A: The refractive index of a disk

A.1: A sketch of the experimental setup for $N = 3$

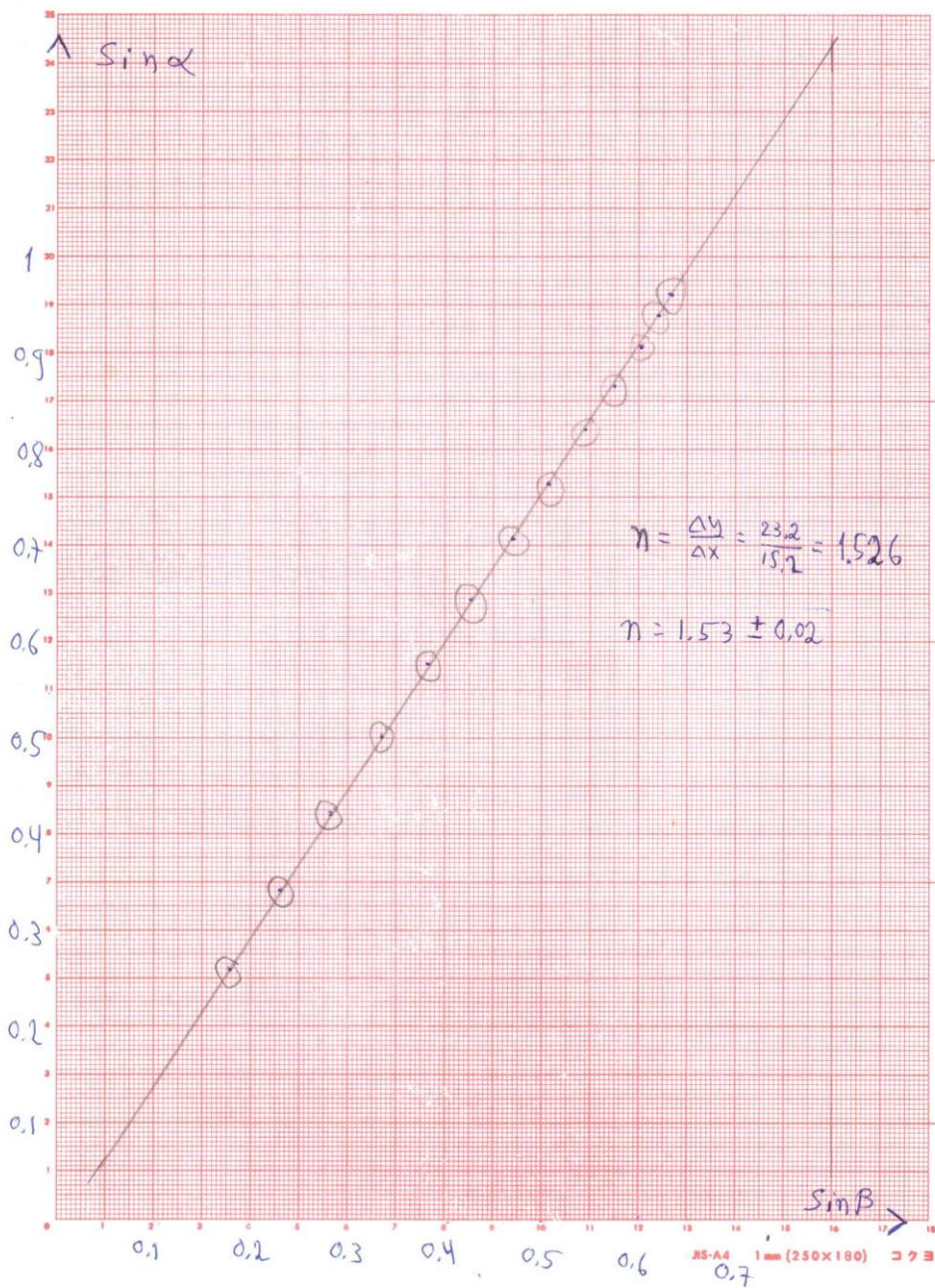


A.1: table of measured and calculated values

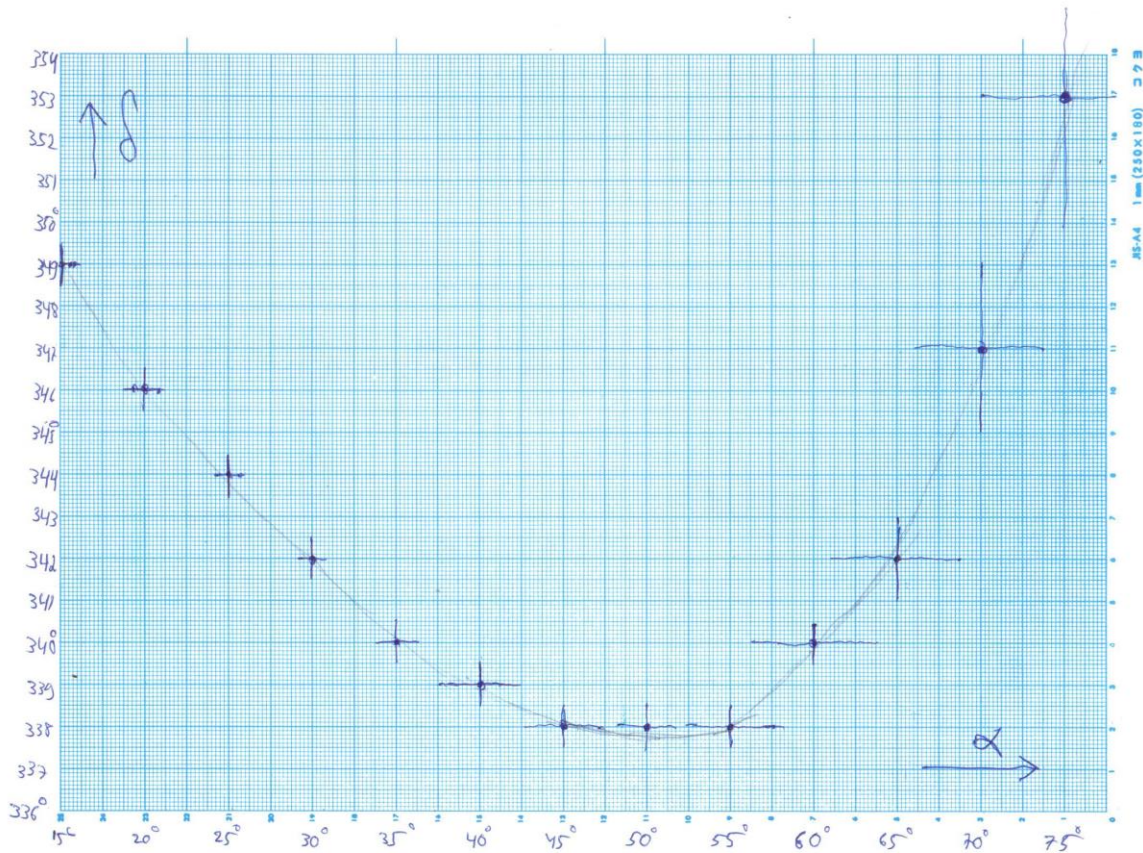
$\alpha(^{\circ})$	$\Delta\alpha(^{\circ})$	$\delta/2(^{\circ})$	$\Delta\delta/2(^{\circ})$	$\delta(^{\circ})$	$\Delta\delta(^{\circ})$	$\beta(^{\circ})$	$\sin \alpha$	$\sin \beta$
15	0.25	174.5	0.25	349	0.5	10.25	0.259	0.178
20	0.25	173	0.25	346	0.5	13.5	0.342	0.233
25	0.25	172	0.25	344	0.5	16.5	0.423	0.284
30	0.25	171	0.25	342	0.5	19.5	0.500	0.334
35	0.5	170	0.25	340	0.5	22.5	0.574	0.383
40	1	169.5	0.25	339	0.5	25.25	0.643	0.427
45	1	169	0.25	338	0.5	28	0.707	0.469
50	1	169	0.25	338	0.5	30.5	0.766	0.508
55	1	169	0.25	338	0.5	33	0.819	0.545
60	1.5	170	0.25	340	0.5	35	0.866	0.574
65	1.5	171	0.5	342	1	37	0.906	0.602
70	1.5	173.5	1	347	2	38.25	0.940	0.619
75	2	176.5	1.5	353	3	39.25	0.966	0.633



A.2:



A.3:



By observing the remote screen, it is possible to identify the point in which δ is minimal at the highest accuracy.

The values we find are

$$\alpha = 49^\circ \pm 0.25^\circ \quad \text{and} \quad \delta = 338^\circ \pm 0.5^\circ$$

A.4:

When δ is minimal, $\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$.

Differentiating the relation $\delta = 2\alpha + (N - 1)(180^\circ - 2\beta)$ by α we get:

$$2 - 2(N - 1)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad \text{and therefore} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{N - 1}.$$

By differentiating Snell's law $\sin \alpha = n \sin \beta$ we get $\cos \alpha = n \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{n \cos \beta}{N-1}$

Squaring this result, as well as Snell's law and summing the expressions we get:

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = n^2 \sin^2 \beta + \frac{n^2 \cos^2 \beta}{(N-1)^2}$$

Hence: $\frac{1}{n^2} = \sin^2 \beta + \frac{\cos^2 \beta}{(N-1)^2}$

We got an explicit relation between the refraction angle β and the refraction index of the material. Due to the multiple reflections inside the disk it is possible, by following all the point in which the beam hits the disk-air interface, to measure the angle β at very high accuracy.

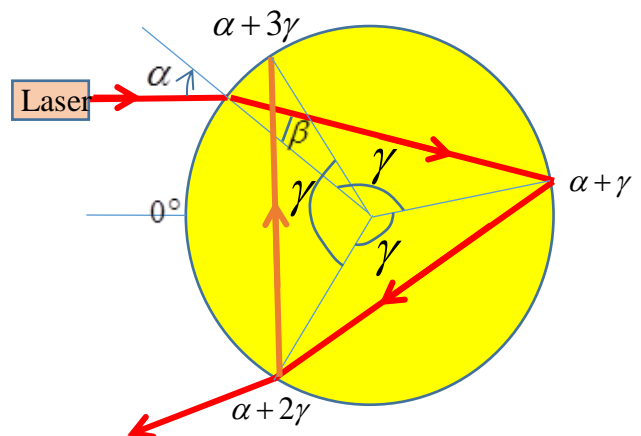
A.5: a sketch showing all the measured quantities:

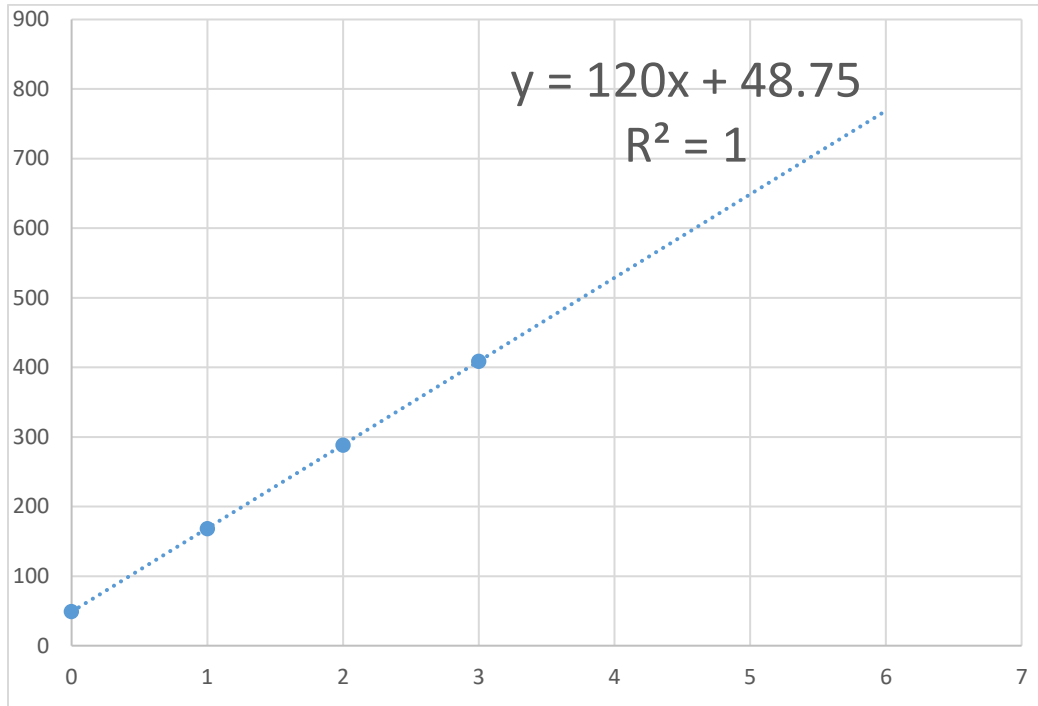
Define the angle $\gamma = 180^\circ - 2\beta$, as shown in the sketch. In fact, after two reflections inside the disk the beam exits at a point very close to the entering point. We will measure the angular location of the points where the beam hits the interface after k reflection, for as many values of k as we can:

k	$\alpha + k\gamma$
0	49
1	168.5
2	288.5
3	409

Note: for the case of $N = 3$ it is not possible to measure for $k > 3$ as in this case, starting from $k = 3$ the impact points co-inside with previous points.

Next we draw a graph of $y = \alpha + k\gamma$ vs. k and find the linear regression slope, γ :



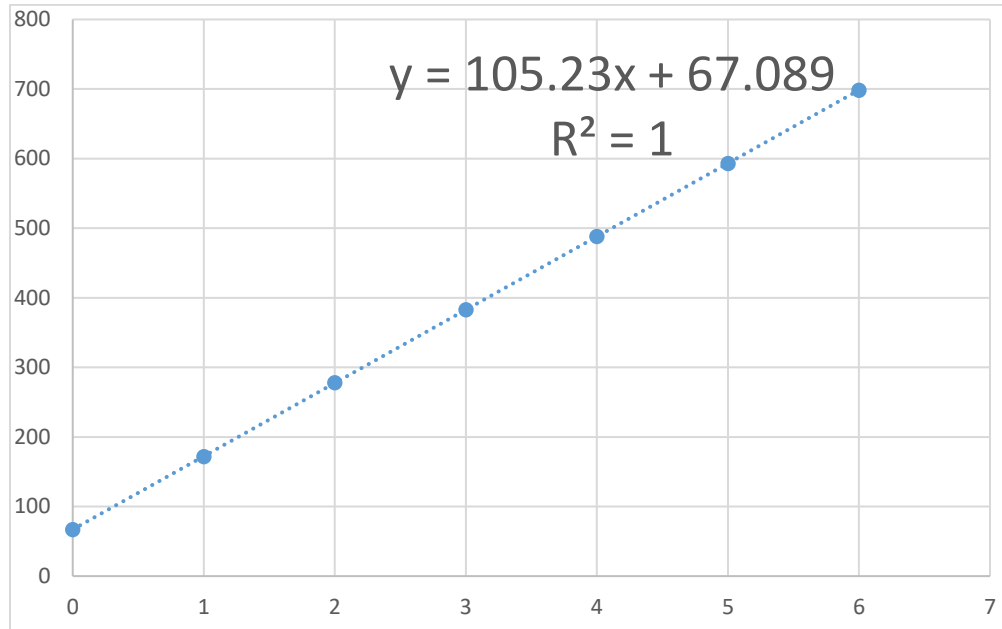


From $\gamma = 120^\circ$ we get $\beta = 30^\circ$, and using the equation we derived in A.4 we get:

$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 / (N - 1)^2}} = 1.512$$

A.6: We will identify the beam exiting the disk after 4 refractions/reflections ($N = 4$) and we will change the incident angle until we get δ_{min} for $N = 4$. We will measure $\alpha + k\gamma$ as a function of the number of times the beams hits the disk-air interface, k :

k	$\alpha + k\gamma$
0	67
1	172
2	278
3	383
4	488
5	593
6	698.5

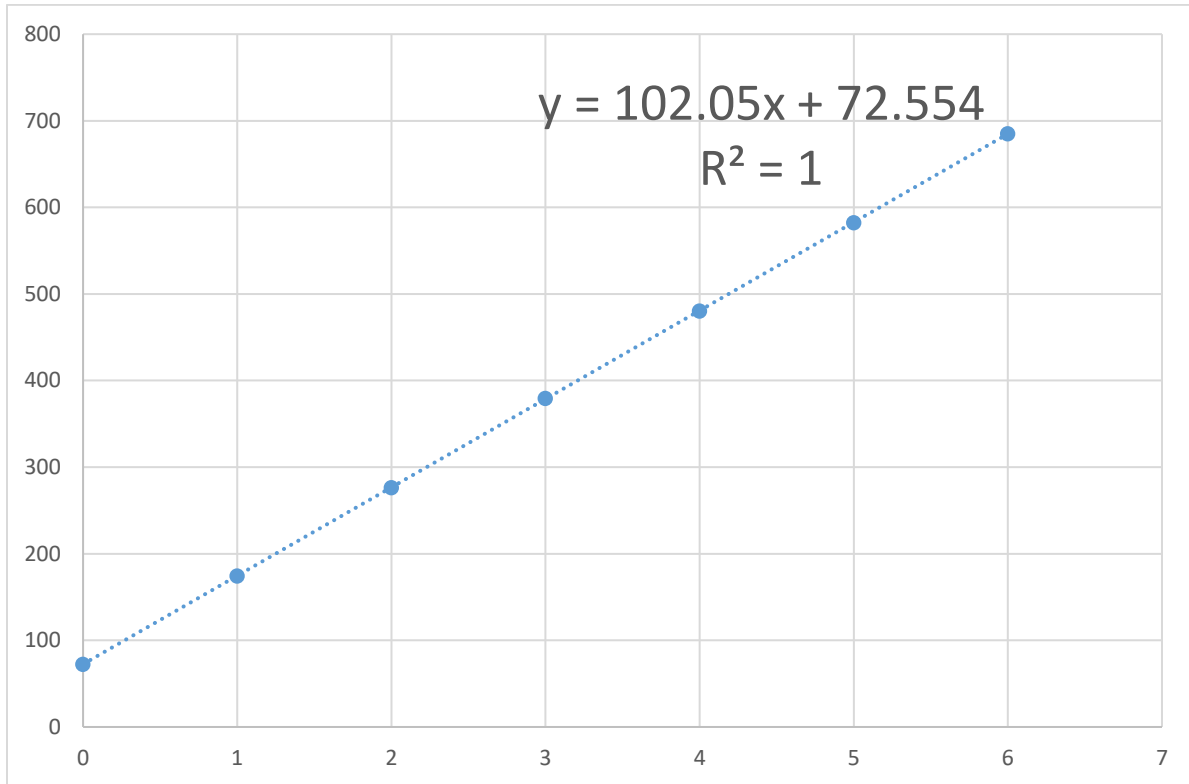


$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 / (N - 1)^2}} = 1.511$$

We'll repeat this process for $N = 5$:

We will identify the beam exiting the disk after hitting the disk-air interface 5 times ($N = 5$) and measure $\alpha + k\gamma$ as a function of the number of hits, k :

k	$\alpha + k\gamma$
0	72.5
1	174.5
2	276.5
3	379.5
4	480.5
5	582.5
6	685



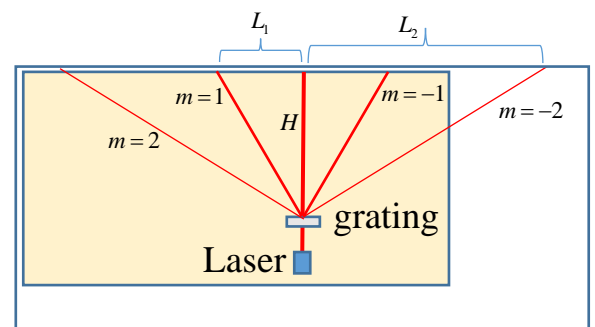
$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 / (N - 1)^2}} = 1.519$$

Averaging the three results we get: $n = \frac{1.519 + 1.511 + 1.512}{3} = 1.514 \pm 0.004$

Section B – parameters of a diffraction grating

B.1: We will mark on the table a point Q, at a distance of about $H = 70\text{cm}$ from the screen – the wall of the experimental chamber - and at an equal distance from the chamber's side walls.

Using the given measuring tape we will mark on the screen two points P_1 and P_2 , at an equal distance of about 100cm from the left and from the right of the marked point Q. On the screen, we will mark a point P, placed in the middle of the interval P_1P_2 . Then, we will aim a laser to go through the points QP. This beam will be perpendicular to the wall that will be used as a screen.





Standard method:

We will place the grating such that the beam passes through it. By gently rotating the grating we will make sure that diffraction ordered 1 and -1 as well as 2 and -2 will appear in symmetrically around the zero order point. Note that the position of the zero order on the screen does not depend on the angle α . In this situation it ok to assume that the incident angle of the beam on the grating is $\alpha = 0$.

As in the sketch, we will measure H, L_1 and L_2 and use the relation $d \sin \theta_m = m\lambda$.

The measured values are $2L_1 = 53.3\text{cm}$, $2L_2 = 163.5\text{cm}$ and $H = 60.8\text{cm}$.

For the first order we get $\frac{\lambda}{d} = 0.4015$. For the second order we get $\frac{\lambda}{d} = 0.4012$.

B.2: A second method

Getting higher orders is not possible at an incident angle of $\alpha = 0$. Thus we will change α and as a result the angle θ_m will change. There is an angle in which θ_m is minimal. By differentiating

the relation $d(\sin \alpha + \sin(\theta_m - \alpha)) = m\lambda$ by α we get that at the minimum ($\frac{d\theta_m}{d\alpha} = 0$) one

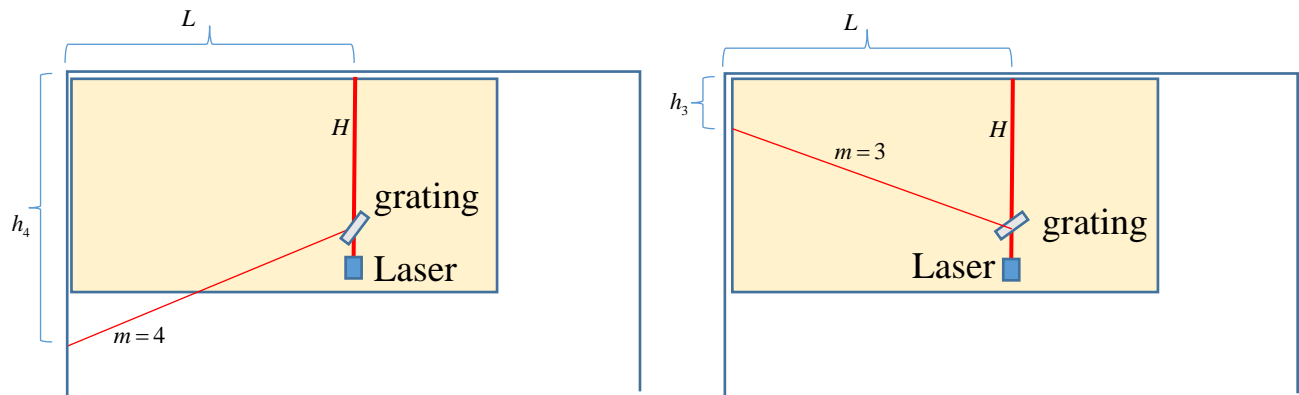
gets $\cos \alpha - \cos(\theta_m - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta_m}{2}$. From this we get $2d \sin(\frac{\theta_m}{2}) = m\lambda$.

Note that there is no need to measure the angle α , but rather to identify, by changing α , the minimum of θ_m .

Using this method it is possible to measure also ordered $m = 1$ and $m = 2$. For $m = 2$ and $m = -2$ we can verify that the beam is perpendicular to the screen by making sure the distance of these two ordered from the zero order is identical.

For $m = 3$, we will change α to get θ_{3min} and measure the distances L and h_3 .

The measured values, as shown in the sketch below, are $H = 67.0\text{cm}$, $L = 100.2\text{cm}$, $h_3 = 37.8\text{cm}$.



We get $\tan \theta_{3\min} = \frac{L}{H - h_3} = \frac{100.2}{67.0 - 37.8} = 3.432$ and hence $\theta_{3\min} = 73.75^\circ$

Therefore: $\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{3} \sin \frac{\theta_{3\min}}{2} = \frac{2}{3} \sin \frac{73.75^\circ}{2} = 0.400$

For $m = 4$ we will change α to get $\theta_{4\min}$ and measure the distance h_4 .

The measured values are $H = 67.0\text{cm}$, $L = 100.2\text{cm}$, $h_4 = 96.3\text{cm}$.

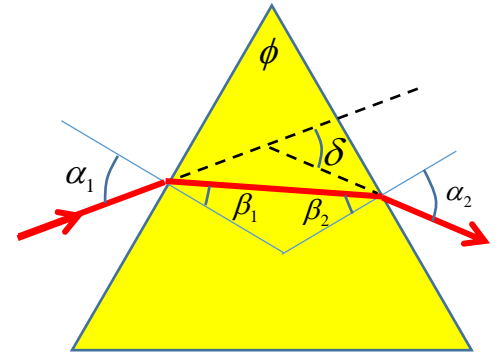
From the sketch we get $\tan(\theta_{4\min} - 90^\circ) = \frac{h_4 - H}{L} = \frac{96.3 - 67.0}{100.2} = 0.2924$

Hence $\theta_{4\min} = 106.3^\circ$, therefore $\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{4} \sin \frac{\theta_{4\min}}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{106.3^\circ}{2} = 0.400$

Section C – the refraction index of a triangular prism

C.1: From the sketch showing the path of the laser beam and from the principle the beam path reversal we get that the deflection angle δ from the direction of in the incoming beam will not change if we switch the angles α_1 and α_2 . Thus we get that δ achieves an extremum value (in fact, a minimal value) when the situation is perfectly symmetric, that is when $\alpha_1 = \alpha_2$. In this case,

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\phi}{2}.$$



For the symmetric case, the incident angle α holds the relation $\alpha = \frac{\delta}{2} + \frac{\phi}{2}$ and from Snell's

law we get $\sin\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\phi}{2}\right) = n \sin \frac{\phi}{2}$.

If the prism is not exactly equilateral, we will mark the angles of the prism by $\phi_i = 60^\circ + 2\varepsilon_i$. From the sum of angles in a triangle we get $\sum \varepsilon_i = 0$. Additionally $\beta_i = 30^\circ + \varepsilon_i$. In this case $\delta_{\min} = \delta_0 + 2\Delta_i$ where δ_0 is the minimal δ when $\phi = 60^\circ$.

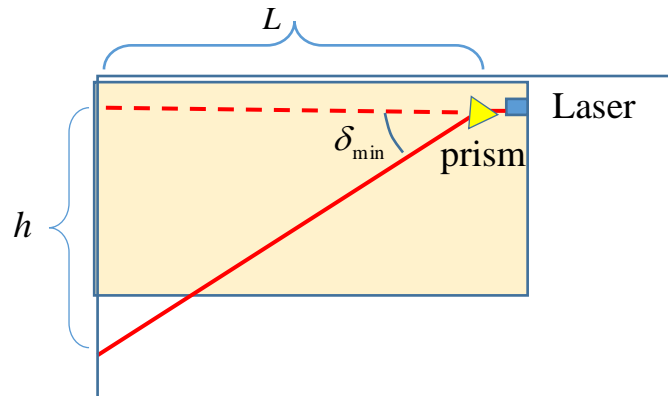
From Snell's law we get $\sin\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ + \Delta_i + \varepsilon_i\right) = n \sin(30^\circ + \varepsilon_i)$. Making the small angle

approximation: $\sin\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right) + \cos\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right)(\Delta_i + \varepsilon_i) = n \sin 30^\circ + n \cos 30^\circ \cdot \varepsilon_i$

From the equation that holds for 60° prism we get $\cos\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right)(\Delta_i + \varepsilon_i) = n \cos 30^\circ \cdot \varepsilon_i$

Averaging for all three angles we get $\langle \Delta_i \rangle = 0$, and therefore $n = 2 \sin\left(\frac{\langle \delta_{\min} \rangle}{2} + 30^\circ\right)$

C.2. We will use the full length of the table to magnify the distances as much as possible. We will build the setup, as described in the sketch, so that in the absence of the prism, the laser beam will hit the screen (the chamber's wall) perpendicularly. We will attach the prism holder base to the table using the adhesive tape. On it we will place the prism holder and the prism itself. We will rotate the prism to find the minimal deflection angle δ_{min} . We will then repeat the measurement of δ_{min} for each corner of the prism.



The measured values are given in the table:

Corner No.	L	h	δ_{min}
1	141.6 ± 0.2 cm	175.2 ± 0.3 cm	$51.05^\circ \pm 0.1^\circ$
2	141.0 ± 0.2 cm	167.1 ± 0.3 cm	$49.84^\circ \pm 0.1^\circ$
3	140.7 ± 0.2 cm	171.4 ± 0.3 cm	$50.62^\circ \pm 0.1^\circ$

Calculation of the error in δ_{min} :

$$\tan \delta_{min} = \frac{h}{L} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \delta_{min}} \Delta \delta_{min} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2 + \left(\frac{h \Delta L}{L^2}\right)^2}$$

$$\text{Therefore, } \Delta \delta_{min} = \cos^2 \delta_{min} \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2 + \left(\frac{h \Delta L}{L^2}\right)^2}$$

Substituting the measured values we get

$$\Delta \delta_{min} = \cos^2 51.05^\circ \sqrt{\left(\frac{0.3}{141.6}\right)^2 + \left(\frac{175.2 \cdot 0.2}{141.6^2}\right)^2} = 0.0017 \text{ rad} = 0.1^\circ$$

The error in the average value of the two angles is

$$\Delta \langle \delta_{min} \rangle = \frac{0.1^\circ}{\sqrt{3}} = 0.06^\circ = 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$



From the table we get that the average value of δ_{\min} is $\langle \delta_{\min} \rangle = 50.50^\circ$

Therefore the refraction index of the prism is

$$n = 2 \sin \left(\frac{\langle \delta_{\min} \rangle}{2} + 30^\circ \right) = 2 \sin \left(\frac{50.50^\circ}{2} + 30^\circ \right) = 2 \sin 55.25^\circ = 1.6433$$

And the error in n : $\Delta n = 2 \cos 55.25^\circ \cdot 0.5 \Delta \langle \delta_{\min} \rangle = \cos 55.25^\circ \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-4}$

Thus: $n = 1.6433 \pm 0.0006$

As the laser wavelength may vary between lasers up to a standard deviation of ± 10 nm, the value found in the literature is $n(\lambda \pm \Delta\lambda) = 1.6425 \pm 0.0007$.



Wiedemann-Franz Law – Solution

Part A: Electrical conductivity of metals (1.5 points)

A.1 (1.0 points)

Magnet descend time:

Number	Copper [s]	Aluminum[s]	Brass [s]
1	17.77	9.23	6.1
2	17.96	9.39	5.83
3	18.16	9.22	6.04
4	18.15	9.37	5.86
5	17.76	9.36	6.16
6	18.2	9.44	5.92
7	17.67	9.65	5.9
8	17.9	9.18	6.08
9	17.67	9.41	5.86
10	18.36	8.96	5.99
Average	17.96	9.32	5.97

A.2 (0.5 points)

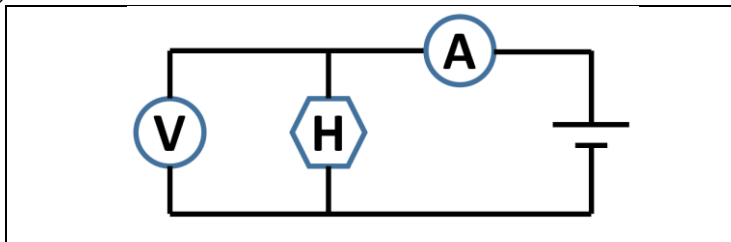
	Copper	Aluminum	Brass
Electrical conductivity $\left[\frac{1}{\Omega m} \right]$	5.97×10^7	2.98×10^7	1.60×10^7

Part B: Thermal conductivity of copper (3.0 points)

B.1 (0.1 points)

Rod 1 temperature : **22.76 [C]**

B.2 (0.5 points)



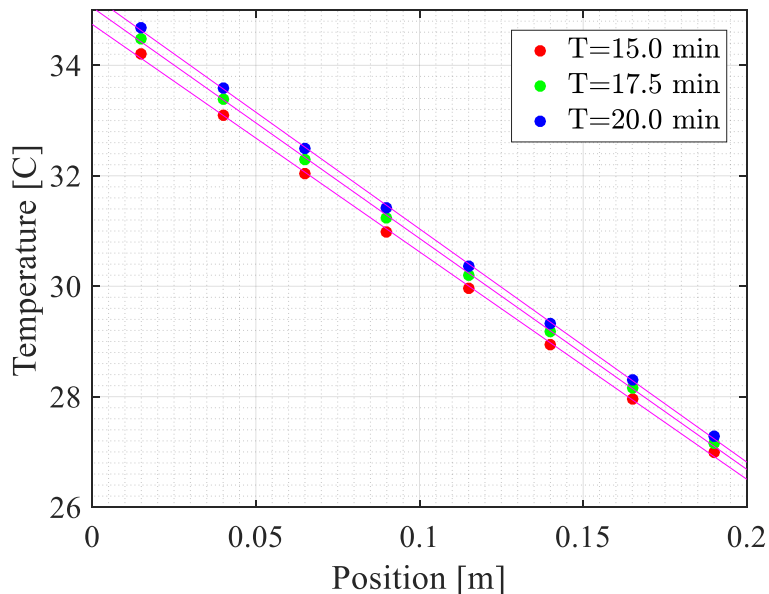
B.3 (0.1 points)

$$P = I \cdot V = 5.51 [W]$$

B.4 (0.5 points)

Time [S]	T1 [C]	T2 [C]	T3 [C]	T4 [C]	T5 [C]	T6 [C]	T7 [C]	T8 [C]
900	26.98	27.96	28.95	29.96	30.98	32.03	33.10	34.20
1050	27.16	28.16	29.17	30.20	31.240	32.30	33.38	34.48
1200	27.29	28.30	29.33	30.37	31.42	32.49	33.58	34.68

B.5 (1.0 points)





B.6 (0.5 points)

$$\kappa_0 = -\frac{P}{A \frac{\Delta T}{\Delta x}} = -\frac{5.51[W]}{\pi \cdot (10^{-2}[m])^2 \cdot \left(-41.8 \left[\frac{K}{m}\right]\right)} = 420 \left[\frac{W}{mK}\right]$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{31.04[C] - 30.62[C]}{5 \cdot 60[s]} = 1.4 \cdot 10^{-3} \left[\frac{K}{s}\right]$$

B.7 (0.3 points)

higher value

We expect a **higher value** of κ_0 compared with the real κ_{cu} because of 2 reasons:

1. A part of the supplied heat power is lost through the side walls. Therefore, the heat transfer through the cross-section of the rod is smaller.
2. Since the system is not in a steady state ($\frac{\Delta T}{\Delta t} \neq 0$), the corresponding power involved should be subtracted from the power supplied by the heater.

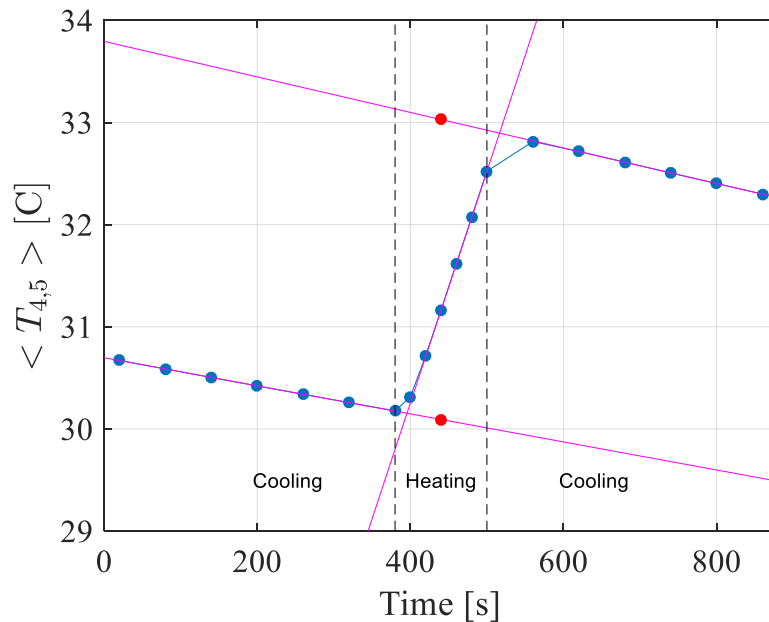


Part C: Heat loss and heat capacity of copper (4.0 points)

C.1 (1.0 points)

<i>Time</i> [s]	T_1 [C]	T_2 [C]	T_3 [C]	T_4 [C]	T_5 [C]	T_6 [C]	T_7 [C]	T_8 [C]	T_{av} [C]
20				30.67	30.67				30.67
80				30.59	30.59				30.59
140				30.50	30.50				30.50
200				30.42	30.42				30.42
260				30.34	30.34				30.34
320				30.26	30.26				30.26
380				30.18	30.18				30.18
400				30.38	30.25				30.31
420				30.87	30.56				30.72
440				31.37	30.96				31.16
460				31.85	31.38				31.61
480				32.32	31.82				32.07
500				32.78	32.26				32.52
560				32.88	32.75				32.81
620				32.73	32.70				32.72
680				32.61	32.61				32.61
740				32.51	32.51				32.51
800				32.40	32.40				32.40
860				32.30	32.30				32.30

C.2 (1.0 points)



C.3 (1.0 points)

The purpose of this part is to correct to first order the result in part B. Hence, every solution within 10% accuracy is accepted (see marking scheme).

Solution 1 (using slopes):

$$P_{loss} = c_p \cdot m \cdot \left. \frac{\partial T_{av}}{\partial t} \right|_{Cooling}$$

$$P_{in} = c_p \cdot m \cdot \left(\left. \frac{\partial T_{av}}{\partial t} \right|_{Heating} - \left. \frac{\partial T_{av}}{\partial t} \right|_{Cooling} \right)$$

Where $\left. \frac{\partial T_{av}}{\partial t} \right|_{Cooling}$ is the average of both cooling slopes.

$$c_p \cdot m = \frac{5.5 [W]}{\left(2.27 \cdot 10^{-2} \left[\frac{K}{s} \right] + 1.6 \cdot 10^{-3} \left[\frac{K}{s} \right] \right)}$$

Solution 2 (using jump):

$$P_{loss} = c_p \cdot m \cdot \left. \frac{\partial T_{av}}{\partial t} \right|_{Cooling}$$

$$P_{in} \cdot \Delta t = c_p \cdot m \cdot \Delta T$$

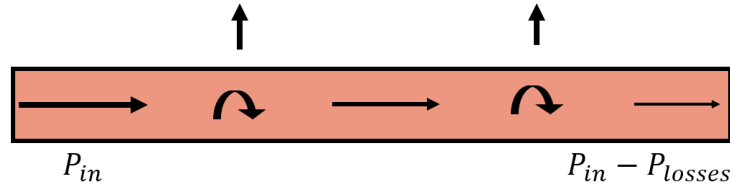
Where $\left. \frac{\partial T_{av}}{\partial t} \right|_{Cooling}$ is the average of the two cooling slopes, and ΔT is the extrapolated jump in temperature half way through the heating time interval.

$$c_p \cdot m = \frac{P_{in} \cdot \Delta t}{\Delta T} = \frac{5.5 [W] \cdot 120 [s]}{2.94 [K]} = 224 \left[\frac{J}{K} \right]$$

$c_p \cdot m = 226 \left[\frac{J}{K} \right] \Rightarrow c_p = 390 \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$ <p>Which is 1% off the correct value.</p> $P_{loss} = 226 \left[\frac{J}{K} \right] \cdot 1.4 \cdot 10^{-3} \left[\frac{K}{s} \right] = 0.32 [W]$	$c_p = 386 \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$ which is the correct value. $P_{loss} = 224 \left[\frac{J}{K} \right] \cdot 1.4 \cdot 10^{-3} \left[\frac{K}{s} \right] = 0.31 [W]$
--	---

C.4 (1.0 points)

The temperature gradient is proportional to the local heat flow.



To first order, the average temperature gradient will be proportional to the average heat flow. Therefore, the temperature gradient will be proportional to

$$P_{in} - \frac{1}{2} P_{losses} :$$

$$\kappa = \frac{P_{in} - \frac{1}{2} P_{absorb} - \frac{1}{2} P_{loss}}{A \cdot (\Delta T / \Delta x)} = \frac{P_{in} - \frac{1}{2} c_p \cdot m \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} - \frac{1}{2} \dot{Q}_{loss}}{A \cdot \Delta T / \Delta x} = \kappa_0 \cdot \frac{P_{in} - \frac{1}{2} c_p \cdot m \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} - \frac{1}{2} \dot{Q}_{loss}}{P}$$

$$\kappa = 420 \left[\frac{W}{mK} \right] \cdot \frac{5.51 [W] - \frac{1}{2} \cdot 226 \left[\frac{J}{K} \right] \cdot 1.4 \cdot 10^{-3} \left[\frac{K}{s} \right] - \frac{1}{2} \cdot 0.32 [W]}{5.51 [W]} = 396 \left[\frac{W}{mK} \right]$$

Which gives an error of 2.5% error compared to expected $385 \left[\frac{W}{mK} \right]$. We expect a 1% systematic error (see appendix).

Part D: Thermal conductivity of multiple metals (1.0 points)

D.1 (0.1 points)

$$T = 22.65[C]$$

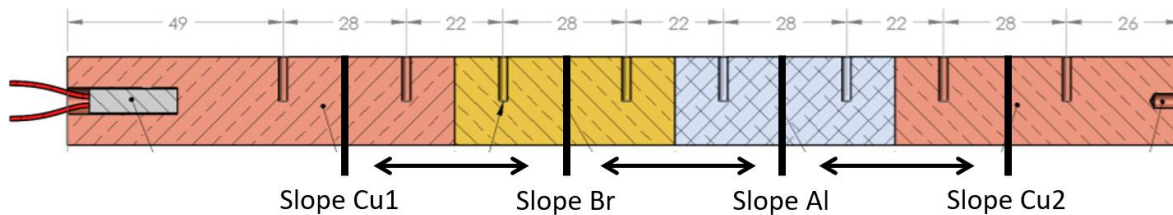
D.2 (0.2 points)

Time of measurement: 1041[s]

$T_1[C]$	$T_2[C]$	$T_3[C]$	$T_4[C]$	$T_5[C]$	$T_6[C]$	$T_7[C]$	$T_8[C]$
41.68	40.51	38.51	34.65	32.47	30.71	29.63	28.62

$\Delta T_{cu1} / \Delta x$	$\Delta T_{Br} / \Delta x$	$\Delta T_{Al} / \Delta x$	$\Delta T_{cu2} / \Delta x$
$41.79 \left[\frac{K}{m} \right]$	$137.86 \left[\frac{K}{m} \right]$	$62.86 \left[\frac{K}{m} \right]$	$36.07 \left[\frac{K}{m} \right]$

D.3 (0.7 points)



$$\kappa_{Brass} = \kappa_{Copper} \cdot \frac{\frac{2}{3}(\Delta T_{cu1}/\Delta x) + \frac{1}{3}(\Delta T_{cu2}/\Delta x)}{\Delta T_{Br}/\Delta x} = 115 \left[\frac{W}{mK} \right]$$

$$\kappa_{Aluminum} = \kappa_{Copper} \cdot \frac{\frac{1}{3}(\Delta T_{cu1}/\Delta x) + \frac{2}{3}(\Delta T_{cu2}/\Delta x)}{\Delta T_{Al}/\Delta x} = 239 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$$



Part E: The Wiedemann-Franz law (0.5 points)

E.1 (0.5 points)

	Copper	Aluminum	Brass
σ [$\Omega^{-1}m^{-1}$] Electric conductivity	5.97×10^7	2.98×10^7	1.60×10^7
κ [$\frac{W}{Km}$] Heat conductivity	396	239	115
L [$\frac{W\Omega}{K^2}$] Lorenz coefficient	2.21×10^{-8}	2.67×10^{-8}	2.40×10^{-8}