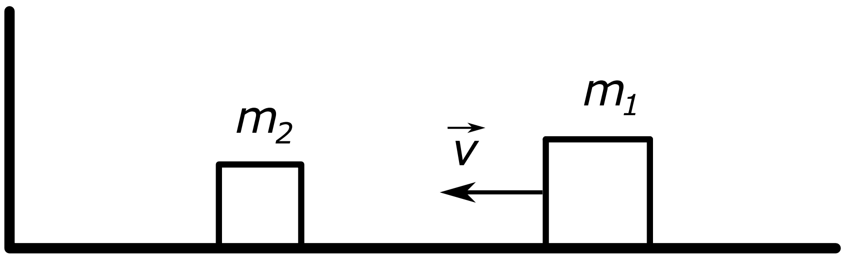
1. Два тега маса m_1 и m_2 се налазе на глаткој подлози као на слици. Десном тегу је саопштена нека почетна брзина у смеру ка левом тегу. Након судара два тега, леви тег ће наставити да се креће ка зиду, одбити се од њега и наставити са кретањем у десно до новог судара. Овај процес сударања се наставља докле год је то могуће и резултује коначним бројем судара. Уколико су масе тегова једнаке $m_1 = 100\,\mathrm{kg}$ и $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, колики ће бити укупан број судара у овом систему? (У број судара урачунати и сударе између два тега, као и сударе левог тега са зидом). Сударе сматрати еластичним, а клизање по подлози без трења.
Помоћ: Нацртати дијаграм на коме су вредности на x оси дате у јединицама $\sqrt{m_1}v_1$, а на y оси у јединицама $\sqrt{m_2}v_2$. На овом дијаграму нацртати криву која описује закон одржања енергије. Затим назначити тачку на дијаграму која описује систем у почетном тренутку. Која тачка на дијаграму описује систем након првог судара, а која након другог? **(20 поена)**



Слика уз задатак 1.

2. Термопар је уређај начињен од споја два различита материјала и одликује се особином да уколико постоји разлика температура на његовим крајевима, између њих је могуће измерити напон. За карактеризацију термопара је извршен следећи експеримент: један крај уређаја се греје применом једносмерне струје интензитета I кроз отпорник R_g који служи као грејач, а на крајевима термопара је измерен напон V_{DC}. Ако уместо једносмерне струје применимо на грејач наизменичну струју фреквенције f и исте ефективне снаге, одредити напон на крајевима термопара у функцији времена $V_{AC}(t)$. Уколико се под истим условима термопар веже редно са кондензатором капацитета C и отпорником отпорности R, колика треба да буде фреквенција струје кроз грејач тако да напон на кондензатору флуктуира за мање од $\pm 1\%$ (и тиме обезбеди поуздано мерење средње температуре)? Сматрати да се термопар тренутно термализује са грејачем и да $V \propto \delta T \propto P$, где је V напон на термопару, δT разлика температура на његовим крајевима, а P снага развијена на грејачу. **(20 поена)**

3. Акустична левитација је феномен у коме се лак објекат може заробити и левитирати помоћу два контрапропагирајућа акустична таласа. Услед захтева да димензија објекта буде упоредива са таласном дужином таласа најчешће се за ту сврху користе ултразвучни сигнали. У овом задатку посматраћемо две различите поставке које могу довести до оваквог ефекта. У првој ултразвични таласи се емитују из извора који је испод левитираног објекта и одбијају се о плочу која је постављена на 5 cm изнад њега. При којој фреквенцији извора ће постојати 10 стабилних положаја левитираног објекта (сматрати да је куглица заробљена у тачки минималног притиска стојећег таласа)? Сматрати да је на плочи, од које се талас рефлектује, трбух притиска, а на извору чвор притиска. У другој поставци се горња плочица замени другим извором (усмереним на доле). Колика треба да буде фреквенција горњег извора тако да би се левитирани објекат кретао брзином од $v = 1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ на горе? Сматрати да је фреквенција доњег извора као у првом делу и да, због материјала од кога су извори начињени, нема рефлексија таласа. Амплитуде оба извора су једнаке. Брзина ултразвука у ваздуху износи $c = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. **(20 поена)**

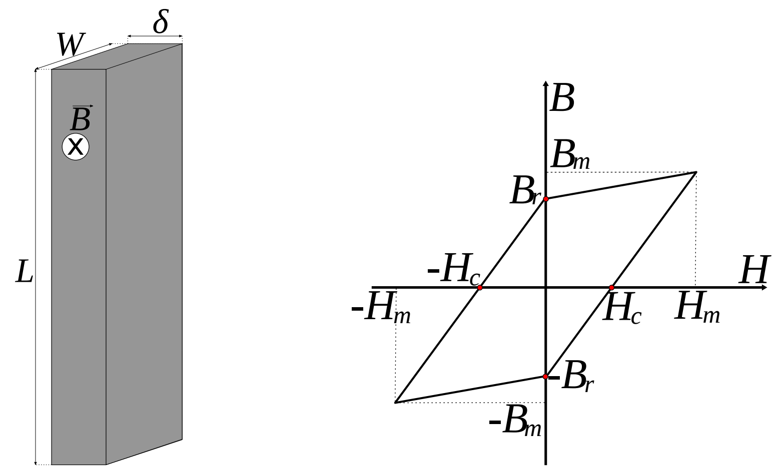
4. а) Посматрајмо електрично проводни, танак лим од алуминијума, специфичне проводности σ, дужине L, ширине W и дебљине $\delta \ll L$. Ако у његовој унутрашњости постоји хомогено магнетно поље чија је индукција у смеру приказаном на слици простопериодична функција времена $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$, одредити средњу снагу Џулових губитака у овом комаду лима.
Помоћ: Промењиво магнетно поље индуковаће вртложно електрично поље, услед чега ће се појавити вртложне струје. Поделити танак лим на одговарајуће проводнике дуж којих теку вртложне струје и наћи снагу Џулових губитака за сваки од ових делова. Затим просумирати по свим деловима за укупну снагу.
б) У случају да је електрично проводни лим, уместо од алуминијума, направљен од магнетно нелинеарног материјала, чија је $B-H$ карактеристика приказана на слици, одредити израз за магнетну енергију која се у једном циклусу претвори у топлоту. Величине означене на слици сматрати познатим.

в) Ако овај електрично проводни, магнетно нелинеарни лим сместимо унутар соленоида чија је струја простопериодична функција времена са учестаношћу 50 Hz, лим се за 1 min загреје за 5°C. Ако је учестаност струје 100 Hz, лим се за 1 min загреје за 14°C. За колико степени би се загрејао лим за 1 min при учестаности струје 60 Hz? Занемарити размену топлоте лима са околним ваздухом. Амплитуда струје је константна и износи $I_0 = \frac{H_m}{n}$, где је n број навојака по јединици дужине соленоида. **(20 поена)**

5. Даброви, као и већина сисара, користе мирис за обележавање територије као и обзнањење њиховог присуства. Оба пола даброва имају посебну подрепну жлезду која лучи тзв. кастореум - супстанцу жуте боје која по мирису врло подсећа на ванилу, те је неретко коришћена у производњи парфема па чак и ароме за храну и пића. Услед прекомерне експлоатације, што због кастореума, што због крзна, популација даброва је драстично смањена, те је Дуле Дабар остао прилично усамљен. Из тог разлога је почео, врло студиозно, да води дневник у коме бележи интензитет мириса који осећа у зависности од времена. Једног дана је забележио врло занимљив сигнал који је дат у приложеној табели и састоји се од низа времена и интензитета мириса (који је пропорционалан броју молекула) у тим тренуцима. Како тог дана није било ветра транспорт мириса је био искључиво дифузијом: ако се молекули ослободе у тренутку t_0 број њих по јединици запремине који стигну до Дулета на растојању L у функцији времена t $(t > t_0)$ једнак је $N(t) = N_0\left(\frac{1}{4\pi D(t-t_0)}\right)^{3/2} e^{-\frac{L^2}{4D(t-t_0)}}$. При томе је D дифузона константа коју Дуле процењује на $D = 2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$, а N_0 константа која зависи од укупног броја отпуштених молекула као и ефикасности Дулетовог носа. Ако је Дуле проценио да је $t_0 = (0 \pm 0{,}02)$ s, помозимо му да одреди на ком растојању L треба да трага за потенцијалним другом. *Помоћ:* Линеаризацију извршити тако да једна оса графика зависи само од времена. Није неопходно употребити све експерименталне тачке које нам је Дуле доставио, употребити 5 тачака које ће довести до што поузданијег резултата. *Напомена:* Услед сукоба са човечанством друштво физичара даброва није прихватило SI систем, те њихове дефиниције метра и секунда не одговарају уобичајеним. **(20 поена)**

t[s]	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
N[m^{-3}]	5,980	4,098	2,780	2,014	1,541	1,2240	1,020	0,843	0,718

Табела уз експериментални задатак.



Слика уз задатак 4а (лево) и 4б (десно).

Математички подсетник:

- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- За неодређеност (грешку) следећих функција важи: $\Delta\ln(x) = \frac{\Delta x}{x}$ и $\Delta x^n = |nx^{n-1}|\Delta x$.

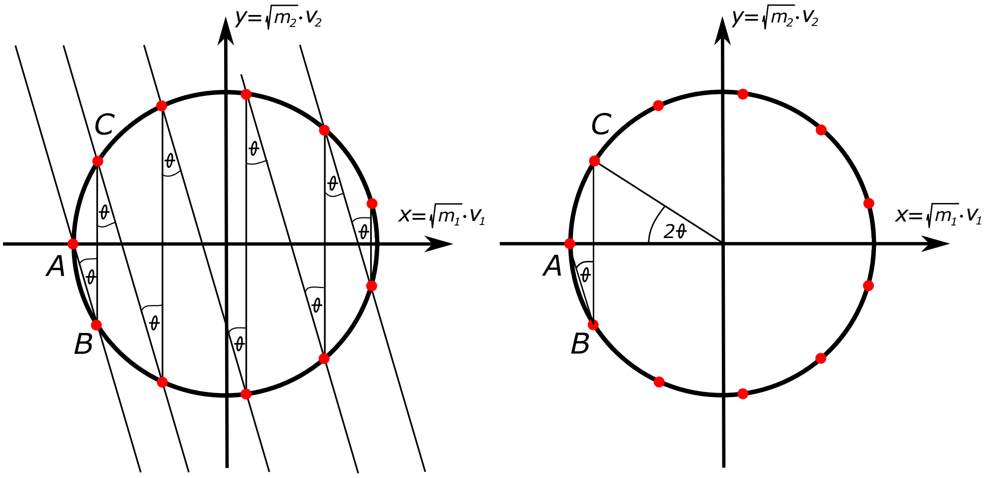
Задатке припремили: *Марко Кузмановић*, Universite Paris-Sud, Француска
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија
Рецензент: *др Владан Павловић*, Приородно-математички факултет, Ниш
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2018/19. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА

III разред **ДРЖАВНИ НИВО**
22.03.2019.

1. По упутству из текста задатка, на фазном дијаграму (на коме су вредности на x оси дате у јединицама $\sqrt{m_1}v_1$, а на y оси у јединицама $\sqrt{m_2}v_2$), закон одржања енергије $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = const$ има облик круга $\boxed{\textbf{2п}}$. У почетном тренутку, стање система је описано тачком A (слика) $\boxed{\textbf{1п}}$. Тачка која описује систем у било ком следећем тренутку је такође на кругу, јер ће увек важити закон одржања енергије. Да би се одредила следећа тачка на фазном дијаграму која описије стање система, потребно је применити и закон одржања импулса $m_1v_1 + m_2v_2 = const$, који у овом случају има једначину праве $\sqrt{m_1}x + \sqrt{m_2}y = const$ $\boxed{\textbf{1п}}$ са коефицијентом правца $k = -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Након првог судара два тега, систем је описан тачком која се налази у пресеку линија које описују закон одржања енергије (круг) и закон одржања импулса (права), и за први судар то је тачка B $\boxed{\textbf{2п}}$. Након судара са зидом, први тег ће само променити смер, тј. тачка која описује ово стање се налази вертикално изнад - тачка C $\boxed{\textbf{2п}}$. Свака следећа права која описује закон одржања импулса ће имати исти коефицијент правца. Пошто су ове праве паралелне, сви периферијски углови ће бити исти, а тиме и сви централни углови (однос централног и периферијског угла је приказан на десној слици) $\boxed{\textbf{2п}}$. Са слике је јасно да су све дужине кружних лукова исте (јер одговарају централном углу 2θ). Тангенс овог угла, је са друге стране једнак негативном коефицијенту правца $\text{tg}\theta = -\frac{1}{k}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Број судара се даље директно рачуна као цео део броја $\frac{2\pi}{2\theta}$ $\boxed{\textbf{3п}}$, односно за податке дате у задатку $N = 31$ $\boxed{\textbf{3п}}$.



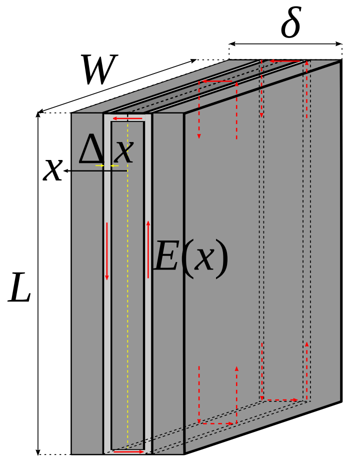
Слика уз задатак 1.

2. У случају да се примени струја фреквенције f и исте ефективне снаге зависност струје од времена гласи $i(t) = \sqrt{2}I\sin(2\pi ft)$ $(\psi = 0)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. По Џуловом закону је онда снага развијена на грејачу једнака $P(t) = 2I^2R_g\sin^2(2\pi ft) = I^2R_g(1-\cos(4\pi ft))$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Ако је за константну снагу од $P = R_gI^2$ напон на термопару износио V_{DC}, уз услов да је $V \propto P$, онда је напон на термопару у случају наизменичне струје једнак $V_{AC}(t) = V_{DC}(1-\cos(4\pi ft))$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Када се редно RC коло користи као пропусник ниских фреквенција (мерењем напона на кондензатору) однос комплексних напона на некој учестаности ω на улазу и излазу износи $\underline{V}_{out} = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{V}_{in}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Однос амплитуда једнак је модулу $\left|\frac{\underline{V}_{out}}{\underline{V}_{in}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Напон на термопару се може разложити на једносмерни напон V_{DC} $(\omega = 0)$ и наизменични напон амплитуде V_{DC} и угаоне фреквенције $\omega = 4\pi f$. Тренутна вредност укупног напон на кондензатору је облика $V_C(t) = V_{DC}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos(\omega t-\varphi)\right)$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Да би услов за амплитуду флуктуација из услова задатка био испуњен мора вредети $\frac{1}{100} > \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, те за f имамо $(RC\cdot 4\pi f)^2 > 9999$, односно $f > \frac{\sqrt{9999}}{4\pi RC}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. У решењу задатка је изабрана почетна фаза струје $\psi = 0$, али је решење еквивалентно (до на фазни фактор) и за било који други избор.

3. У првом случају је физичка ситуација идентична формирању стојећег таласа у цеви затвореној на једном крају - резонантни услов је $L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Како се захтева да постоји 10 стабилних положаја и они се налазе на сваких $\lambda/2$, те је укупна дужина једнака $L = \frac{21}{4}\lambda$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Стога је $f = \frac{c}{\lambda} = 35700$ Hz $\boxed{\textbf{2п}}$. У другом случају је резултујући талас суперпозиција првобитног таласа који пропагира нагоре $p_1 = A\sin(2\pi x\frac{f}{c} - 2\pi ft)$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и контрапропагирајућег таласа $p_2 = A\sin(-2\pi x\frac{f+\delta f}{c} - 2\pi(f+\delta f)t)$ $\boxed{\textbf{1п}}$ са фреквенцијом $f+\delta f$. Сумирањем ова два и применом познатог

идентитета $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ добија се $p = A'\sin(\frac{\pi x\delta f}{c} + \pi t(2f+\delta f))\cos(\frac{\pi x(\delta f+2f)}{c} + \pi t\delta f)$ $\boxed{\textbf{5п}}$. У случају да је $\delta f = 0$ израз се редукује на $p = A'\sin(2\pi t f)\cos(\frac{2\pi x f}{c})$ те члан $\sin(\ldots)$ представља високофреквентну компоненту сигнала, који не утиче на кретање кулице, док члан $\cos(\ldots)$ је нискофреквентан и има утицај на кретање исте. Куглица ће пратити споро померајући минимум притиска (тзв чвор таласа), који се простире фазном брзином $v_p = -c\frac{\delta f}{2f+\delta f} \approx -c\frac{\delta f}{2f}$ $\boxed{\textbf{4п}}$. Да би она износила $v = 1\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, δf мора бити $\delta f = -2f\frac{v}{c} = -2{,}1\,\text{Hz}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, па је фреквенција другог извора $f + \delta f = 35700\,\text{Hz} - 2{,}1\,\text{Hz} = 35697{,}9\,\text{Hz}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. *Напомена*: Знак δf одређује смер кретања куглице. У случају да је решење добро по апсолутној вредности, а не по знаку одузети 2 поена.

4. а) Променљиво магнетно поље индуковаће вртложно електрично поље, услед чега ће се појавити вртложне струје, па ће се комад метала загревати. Посматрајмо тренутну алгебарску вредност индуковане електромоторне силе у једној од контура означених на слици (на слици је $E(x)$ вртложно електрично поље у датој контури, за сваки пресек нормалан на $\vec{B}$ је иста ситуација) $\varepsilon(t) = -\frac{\Delta B(t) S}{\Delta t}$, где је Δt бесконачно мали временски интервал $\boxed{\textbf{1п}}$. Површина обухваћена контуром је $S = 2xL$ $\boxed{\textbf{1п}}$, па је $\varepsilon(t) = -2xL\frac{B_0\cos(\omega(t+\Delta t)) - B_0\cos(\omega t)}{\Delta t} = 2B_0 Lx\frac{2\sin(\omega(t+\Delta t/2))\sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t}$, што након занемаривања Δt даје $\varepsilon(t) \approx 2\omega B_0 Lx\frac{\sin(\omega t)\sin(\omega\Delta t/2)}{\omega\Delta t/2}$. Коришћењем апроксимације $\sin(\omega\Delta t/2) \approx \omega\Delta t/2$, када је Δt мало, добијамо $\varepsilon(t) = 2\omega B_0 Lx\sin(\omega t)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Снага Џулових губитака у делу проводника дужине $2L + 4x \approx 2L$ ($x < \delta \ll L$) је $\Delta P(t) = \frac{\sigma W\Delta x}{2L}\varepsilon^2(t)$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Сабирањем за све танке проводнике дебљине Δx на позицијама од $x = 0$ до $x = \delta/2$ добија се укупна тренутна снага Џулових губитака $P_J(t) = \sum\limits_{x=0}^{\delta/2} 2\sigma\omega^2 B_0^2\sin^2(\omega t)LWx^2\Delta x = 2\sigma\omega^2 B_0^2\sin^2(\omega t)LW\cdot\sum\limits_{x=0}^{\delta/2} x^2\Delta x$, што након израчунавања суме постаје $P_J(t) = 2\sigma\omega^2 B_0^2\sin^2(\omega t)LW\frac{\delta^3}{24}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Средња вредност функције $\sin^2(\omega t) = \frac{1-\cos(\omega t)}{2}$ на једном периоду $T = \frac{2\pi}{\omega}$ једнака је $\frac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, па је коначно тражена средња снага Џулових губитака услед вихорних струја једнака $P_J = \frac{1}{24}\sigma LWB_0^2\delta^3\omega^2$ $\boxed{\textbf{1п}}$.



Слика уз задатак 4.

б) Запреминска густина енергије магнетног поља која пређе у топлоту у једном циклусу једнака је површини обухваћеној хистерезисном кривом (конкретно паралелограмом у овом поједностављеном моделу) $w_m = 2B_r H_m$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Запремина лима је $V = LW\delta$. У једном циклусу, услед хистерезисних ефеката ослободи се количина топлоте $W_m = w_m V = 2B_r H_m LW\delta$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

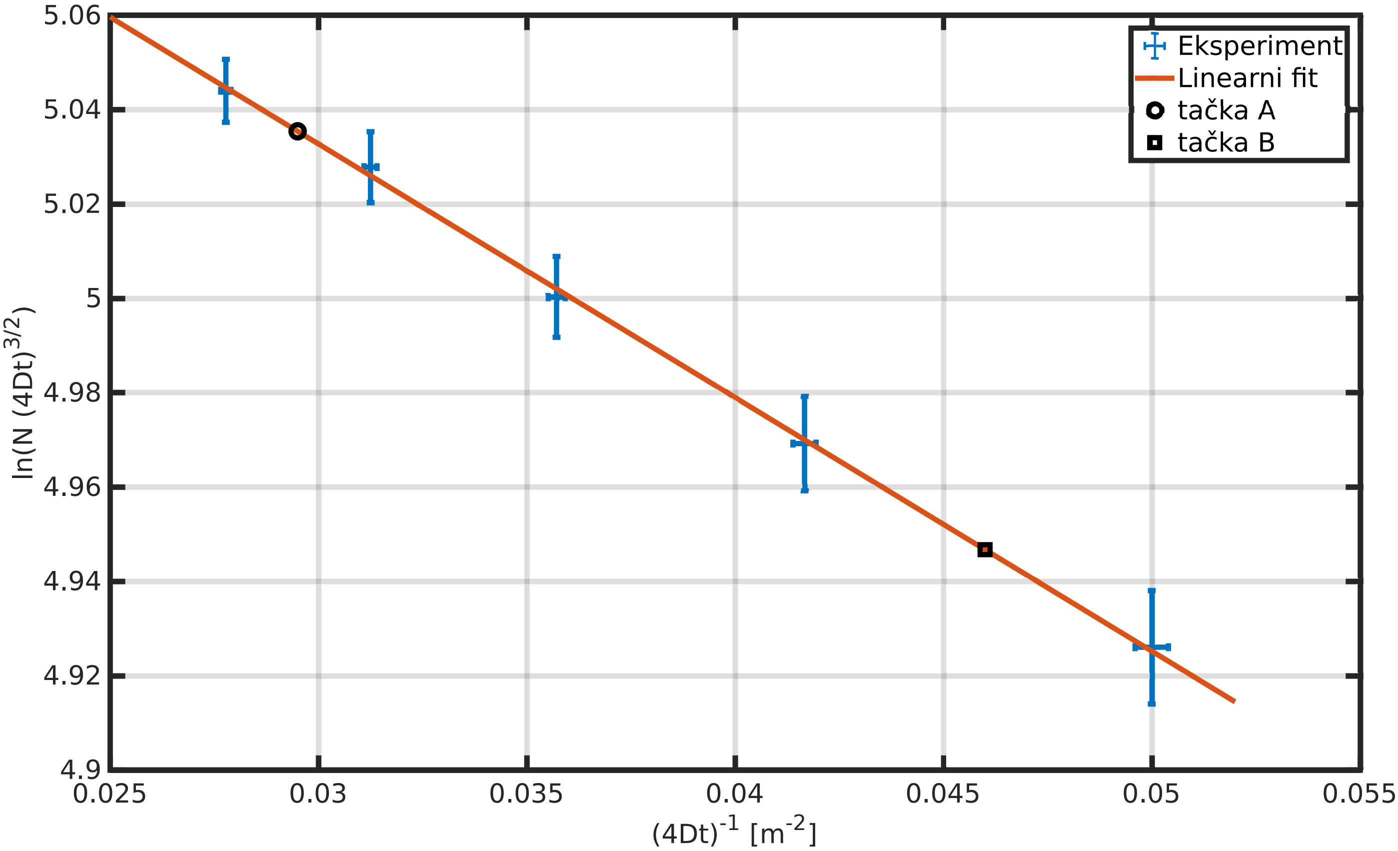
в) Количина топлоте предата лиму у јединици времена (топлотна снага) једнака је збиру снаге Џулових губитака услед вихорних струја и снаге губитака енергије магнетног поља услед хистерезиса $P = P_v + P_h$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Из претходних делова следи $P_v = af^2$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $P_h = bf$ $\boxed{\textbf{1п}}$, где су a и b неке константе, а f учестаност. Како је $Q_i = mc\Delta T_i$, однос прираштаја температура током једнаких временских интервала биће једнак односу снага $\frac{\Delta T_i}{\Delta T_j} = \frac{P_i}{P_j}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Ако уведемо однос $\eta = \frac{5}{14}$, можемо писати: $P_1/P_2 = \eta$, $P_1 = af^2 + bf$, $P_2 = a\cdot(2f)^2 + b\cdot(2f)$. Решавањем овог система по a и b добијамо $a = \frac{P_2}{2f^2}(1-2\eta)$, $b = \frac{P_2}{2f}(4\eta - 1)$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Једначина за $P_3 = a\cdot(\frac{6}{5}f)^2 + b\cdot(\frac{6}{5}f)$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Заменом a и b и коришћењем релације $\frac{P_3}{P_2} = \frac{\Delta T_3}{\Delta T_2}$, након краћег рачуна добија се $\Delta T_3 = \frac{3}{25}\Delta T_2(8\eta + 1) = 6{,}48^\circ\text{C}$ $\boxed{\textbf{1п}}$.

5. Дата зависност се може преписати као $N = A\left(\frac{1}{\tau}\right)^{3/2} e^{-\frac{L^2}{\tau}}$, где је $A = \frac{N_0}{\pi^{3/2}}$ а $\tau = 4D(t-t_0)$ и има димензије $[\mathrm{m}^2]$. Даље, множењем обе стране са $\tau^{3/2}$ добија се $N\tau^{3/2} = Ae^{-\frac{L^2}{\tau}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Линеаризације се може извршити логаритмовањем: $\ln(N\tau^{3/2}) = \ln(A) - \frac{L^2}{\tau}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, па се цртањем $y = \ln(N\tau^{3/2})$ у функцији $x = \frac{1}{\tau}$ може одредити L^2 преко коефицијента правца. Грешка Δy се може наћи на основу дате математичке помоћи и износи $\Delta y = \frac{3\Delta\tau}{2\tau} = \frac{3\Delta t}{2t}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, док грешка за x износи $\Delta x = \frac{\Delta\tau}{\tau^2} = \frac{\Delta t}{4Dt^2}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, па су тачке са већим t поузданије за одређивање коефицијента правца. Цртањем графика са последњих 5 тачака из табеле добија се график из прилога $\boxed{\textbf{4п}}$. Повлачењем неексперименталне праве и бирањем 2 тачке на њој: $A = (0{,}0295\,\mathrm{m}^{-2}; 5{,}0354)$ и $B = (0{,}0460\,\mathrm{m}^{-2}; 4{,}9467)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ може се одредити коефицијент правца као $k = \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = -5{,}3758\,\mathrm{m}^2 = -L^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Стога се као решење добија $L = 2{,}3186\,\mathrm{m}$. За грешку k, применом уобичајених правила, добијамо: $\Delta k = \frac{\Delta B_y + \Delta A_y}{B_x - A_x} + \frac{|B_y - A_y|}{(B_x - A_x)^2}(\Delta B_x + \Delta A_x)$ $\boxed{\textbf{2п}}$, где су грешке за A и B једнаке $\Delta A = (0{,}00016\,\mathrm{m}^{-2}; 0{,}0075)$ и $\Delta B = (0{,}00040\,\mathrm{m}^{-2}; 0{,}0120)$ као веће грешке суседа. За нумеричку вредност се добија $\Delta k = 1{,}4\,\mathrm{m}^2$. Грешка ΔL је онда $\Delta L = \frac{\Delta k}{2\sqrt{-k}} = 0{,}3\,\mathrm{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Коначно решење онда износи $L = (2{,}3 \pm 0{,}3)\,\mathrm{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.
Напомена прегледачу: Задатак се може нумерички исправно урадити линеаризацијом која подразумева логаритмовање димензионе величине; у том случају умањити број освоених поена за петину. Уколико се график нацрта помоћу свих тачака доделити све поене, а уколико се нацрта помоћу тачака са већим грешкама одузети до 3 поена.

t[s]	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$N[\mathrm{m}^{-3}]$	5,980	4,098	2,780	2,014	1,541	1,2240	1,020	0,843	0,718
$x[\mathrm{m}^{-2}]$	0,2500	0,1250	0,0833	0,06250	0,05000	0,04167	0,03571	0,03125	0,02778
$\Delta x[\mathrm{m}^{-2}]$	0,0100	0,0025	0,0011	0,00063	0,00040	0,00028	0,00021	0,00016	0,00013
y	3,8679	4,5297	4,7498	4,8590	4,9260	4,9692	5,0003	5,0278	5,0440
Δy	0,0600	0,0300	0,0200	0,0150	0,0120	0,0100	0,0086	0,0075	0,0067

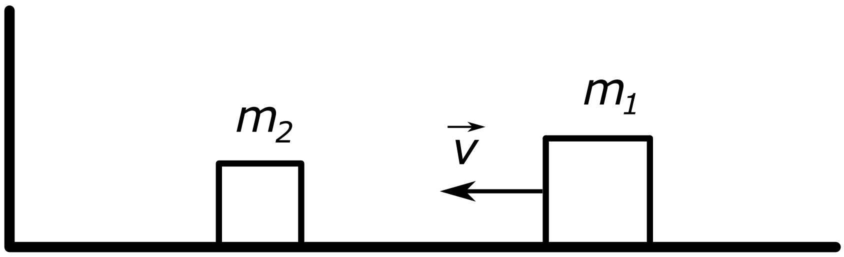
Табела уз решење 5. задатка.

Задатке припремили: *Марко Кузмановић*, Universite Paris-Sud, Француска
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија
Рецензент: *др Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд



Слика уз решење 5. задатка.

1. Два тега маса m_1 и m_2 се налазе на глаткој подлози као на слици. Десном тегу је саопштена нека почетна брзина у смеру ка левом тегу. Након судара два тега, леви тег ће наставити да се креће ка зиду, одбити се од њега и наставити са кретањем у десно до новог судара. Овај процес сударања се наставља докле год је то могуће и резултује коначним бројем судара. Уколико су масе тегова једнаке $m_1 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$ и $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, колики ће бити укупан број судара у овом систему? (У број судара урачунати и сударе између два тега, као и сударе левог тега са зидом). Сударе сматрати еластичним, а клизање по подлози без трења. **(20 поена)**



Слика уз задатак 1.

2. Термопар је уређај начињен од споја два различита материјала и одликује се особином да уколико постоји разлика температура на његовим крајевима, између њих је могуће измерити напон. За карактеризацију термопара је извршен следећи експеримент: један крај уређаја се греје применом једносмерне струје интензитета I кроз отпорник R који служи као грејач, а на крајевима термопара је измерен напон V_{DC}. Ако уместо једносмерне струје применимо на грејач наизменичну струју фреквенције f и исте ефективне снаге, одредити напон на крајевима термопара у функцији времена $V_{AC}(t)$. Сматрати да се термопар тренутно термализује са грејачем и да $V \propto \delta T \propto P$, где је V напон на термопару, δT разлика температура на његовим крајевима, а P снага развијена на грејачу. **(20 поена)**

3. Акустична левитација је феномен у коме се лак објекат може заробити и левитирати помоћу два контрапропагирајућа акустична таласа. Услед захтева да димензија објекта буде упоредива са таласном дужином таласа најчешће се за ту сврху користе ултразвучни сигнали. У овом задатку посматраћемо две различите поставке које могу довести до оваквог ефекта. У првој ултразвични таласи се емитују из извора који је испод левитираног објекта и одбијају се о плочу која је постављена на $5\,\mathrm{cm}$ изнад њега. При којој фреквенцији извора ће постојати 10 стабилних положаја левитираног објекта (сматрати да је куглица заробљена у тачки минималног притиска стојећег таласа)? Сматрати да је на плочи, од које се талас рефлектује, трбух притиска, а на извору чвор притиска. У другој поставци се горња плочица замени другим извором (усмереним на доле). Колика треба да буде фреквенција горњег извора тако да би се левитирани објекат кретао брзином од $v = 1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ на горе? Сматрати да је фреквенција доњег извора као у првом делу и да, због материјала од кога су извори начињени, нема рефлексија таласа. Амплитуде оба извора су једнаке. Брзина ултразвука у ваздуху износи $c = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. **(20 поена)**

4. Две паралелно постављене металне плоче правоугаоног пресека површине S, кратко су спојене. Растојање између плоча је $d \ll \sqrt{S}$. Као последица случајног догађаја, негативно тачкасто наелектрисање апсолутне вредности q напушта једну плочу и почиње да се креће према другој, неком почетном брзином. Одредити укупне количине наелектрисања на горњој и доњој плочи (Q_1 и Q_2, респективно), у функцији растојања наелектрисања $-q$ од горње плоче. Ако је време потребно наелектрисању да пређе растојање између плоча T, одредити средњу вредност струје кратког споја која се јавља услед овог кретања. Сматрати да су плоче на почетку биле електронеутралне. Такође, сматрати да се равнотежна расподела наелектрисања на плочама формира тренутно, тј. одмах након што наелектрисање $-q$ напусти горњу плочу. **(20 поена)**

5. Даброви, као и већина сисара, користе мирис за обележавање територије као и обзнањење њиховог присуства. Оба пола даброва имају посебну подрепну жлезду која лучи тзв. кастореум - супстанцу жуте боје која по мирису врло подсећа на ванилу, те је неретко коришћена у производњи парфема па чак и ароме за храну и пића. Услед прекомерне експлоатације, што због кастореума, што због крзна, популација даброва је драстично смањена, те је Дуле Дабар остао прилично усамљен. Из тог разлога је почео, врло студиозно, да води дневник у коме бележи интензитет мириса који осећа у зависности од времена. Једног дана је забележио врло занимљив сигнал који је дат у приложеној табели и састоји се од низа времена и интензитета мириса (који је пропорционалан броју молекула) у тим тренуцима. Како тог дана није било ветра транспорт мириса је био искључиво дифузијом: ако се молекули ослободе у тренутку t_0 број њих по јединици запремине који стигну до Дулета на растојању L у функцији времена

t ($t > t_0$) једнак је $N(t) = N_0\left(\frac{1}{4\pi D(t-t_0)}\right)^{3/2} e^{-\frac{L^2}{4D(t-t_0)}}$. При томе је D дифузона константа коју Дуле процењује на $D = 2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$, а N_0 константа која зависи од укупног броја отпуштених молекула као и ефикасности Дулетовог носа. Ако је Дуле проценио да је $t_0 = (0 \pm 0{,}02)$ s, помозимо му да одреди на ком растојању L треба да трага за потенцијалним другом. *Помоћ:* Линеаризацију извршити тако да једна оса графика зависи само од времена. Није неопходно употребити све експерименталне тачке које нам је Дуле доставио, употребити 5 тачака које ће довести до што поузданијег резултата. *Напомена:* Услед сукоба са човечанством друштво физичара даброва није прихватило SI систем, те њихове дефиниције метра и секунда не одговарају уобичајеним. **(20 поена)**

t[s]	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
N[m^{-3}]	5,980	4,098	2,780	2,014	1,541	1,224	1,020	0,843	0,718

Табела уз експериментални задатак.

Математички подсетник:

- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- За неодређеност (грешку) следећих функција важи: $\Delta\ln(x) = \frac{\Delta x}{x}$ и $\Delta x^n = |nx^{n-1}|\Delta x$.

Задатке припремили: *Марко Кузмановић*, Universite Paris-Sud, Француска
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија
Рецензент: *др Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

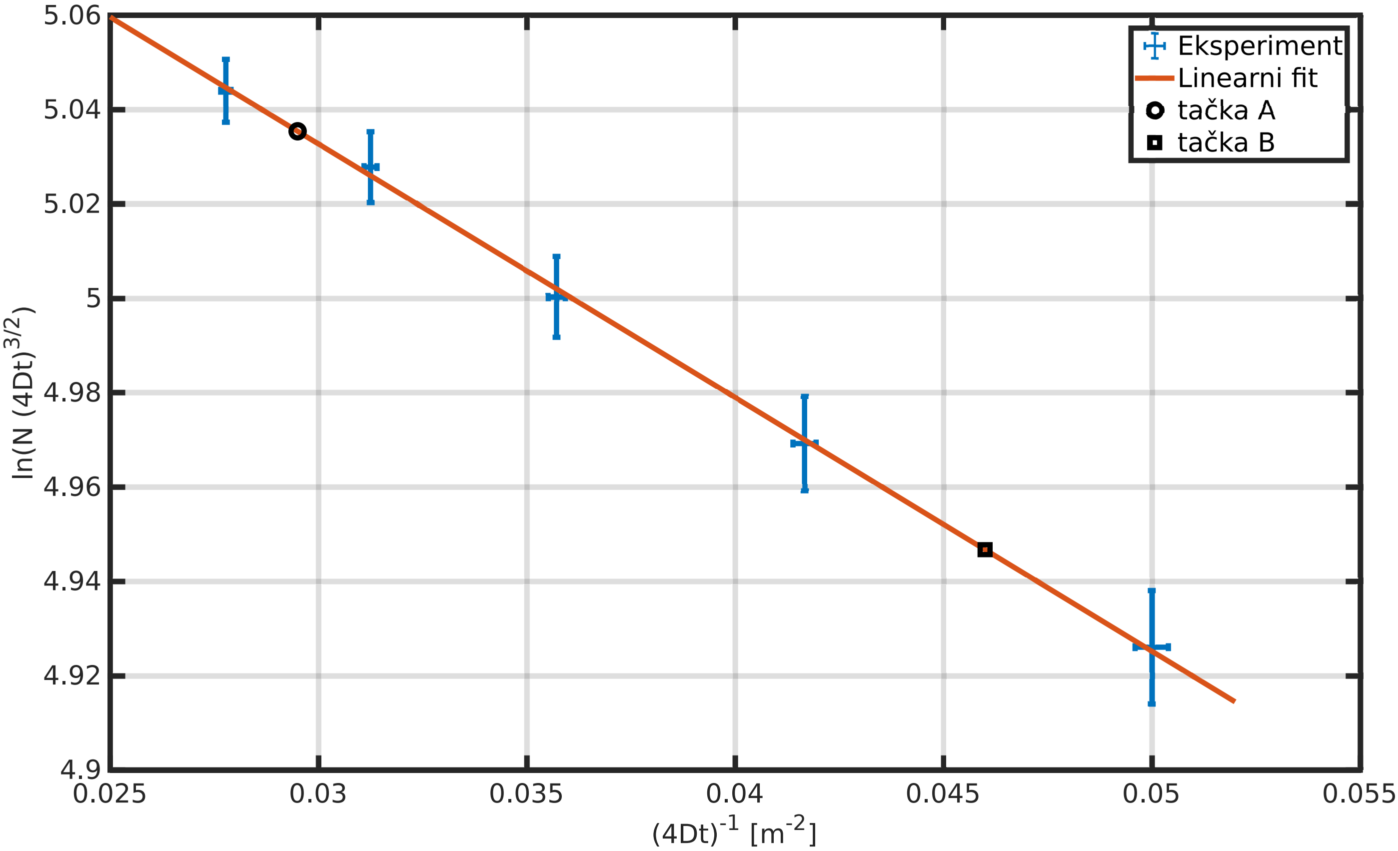
1. Пошто су судари еластични, важиће закон одржања енергије $\frac{m_1v^2}{2} = \frac{m_2v_{21}^2}{2} + \frac{m_1v_{11}^2}{2}$ $\boxed{\text{2п}}$ и закон одржања импулса $m_1v = m_2v_{21} + m_1v_{11}$ $\boxed{\text{2п}}$. Након првог судара два тега, њихове брзине ће бити $v_{21} = \frac{6}{5}v$ $\boxed{\text{2п}}$ и $v_{11} = \frac{v}{5}$ $\boxed{\text{2п}}$. Лакши тег се затим еластично одбија о зид (други судар), задржавајући интензитет брзине, али мењајући смер кретања. Након још једног судара међу теговима (трећи судар укупно) из закона одржања $\frac{m_1v^2}{2} = \frac{m_2v_{22}^2}{2} + \frac{m_1v_{12}^2}{2}$ $\boxed{\text{2п}}$ и $m_1\frac{v}{5} - m_2\frac{6}{5}v = m_1v_{12} + m_2v_{22}$ $\boxed{\text{2п}}$ се добијају брзине $v_{22} = \frac{12}{25}v$ $\boxed{\text{3п}}$ и $v_{12} = -\frac{23}{25}v$ $\boxed{\text{3п}}$. Из овога следи да ће лакши тег ићи ка зиду, али да након одбијања од њега (четврти судар укупно) више неће моћи да сустигне тежи тег $\boxed{\text{2п}}$.

2. У случају да се примени струја фреквенције f и исте ефективне снаге, по Џуловом закону је тренутна снага развијена на грејачу једнака $P(t) = 2I^2R\sin^2(2\pi ft) = I^2R(1-\cos(4\pi ft))$ $\boxed{\text{8п}}$. Ако је за константну снагу од $P = RI^2$ $\boxed{\text{4п}}$ напон на термопару износио V_{DC}, уз услов да је $V \propto P$, онда је напон на термопару у случају наизменичне струје једнак $V_{AC}(t) = V_{DC}(1-\cos(4\pi ft))$ $\boxed{\text{8п}}$. У решењу задатка је изабрана почетна фаза струје $\varphi = 0$, али је решење еквивалентно (до на фазни фактор) и за било који други избор.

3. У првом случају је физичка ситуација идентична формирању стојећег таласа у цеви затвореној на једном крају - резонантни услов је $L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ $\boxed{\text{2п}}$. Како се захтева да постоји 10 стабилних положаја и они се налазе на сваких $\lambda/2$, те је укупна дужина једнака $L = \frac{21}{4}\lambda$ $\boxed{\text{2п}}$. Стога је $f = \frac{c}{\lambda} = 35700\,\mathrm{Hz}$ $\boxed{\text{2п}}$. У другом случају је резултујући талас суперпозиција првобитног таласа који пропагира нагоре $p_1 = A\sin(2\pi x\frac{f}{c} - 2\pi ft)$ $\boxed{\text{1п}}$ и контрапропагирајућег таласа $p_2 = A\sin(-2\pi x\frac{f+\delta f}{c} - 2\pi(f+\delta f)t)$ $\boxed{\text{1п}}$ са фреквенцијом $f + \delta f$. Сумирањем ова два и применом познатог идентитета $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ добија се $p = A'\sin(\frac{\pi x\delta f}{c} + \pi t(2f+\delta f))\cos(\frac{\pi x(\delta f + 2f)}{c} + \pi t\delta f)$ $\boxed{\text{5п}}$. У случају да је $\delta f = 0$ израз се редукује на $p = A'\sin(2\pi tf)\cos(\frac{2\pi xf}{c})$ те члан $\sin(\ldots)$ представља високофреквентну компоненту сигнала, који не утиче на кретање кулице, док члан $\cos(\ldots)$ је нискофреквентан и има утицај на кретање исте. Куглица ће пратити споро померајући минимум притиска (тзв чвор таласа), који се простире фазном брзином $v_p = -c\frac{\delta f}{2f+\delta f} \approx -c\frac{\delta f}{2f}$ $\boxed{\text{4п}}$. Да би она износила $v = 1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, δf мора бити $\delta f = -2f\frac{v}{c} = -2{,}1\,\mathrm{Hz}$ $\boxed{\text{2п}}$, па је фреквенција другог извора $f + \delta f = 35700\,\mathrm{Hz} - 2{,}1\,\mathrm{Hz} = 35697{,}9\,\mathrm{Hz}$ $\boxed{\text{2п}}$. *Напомена*: Знак δf одређује смер кретања куглице. У случају да је решење добро по апсолутној вредности, а не по знаку одузети 2 поена.

4. Како задатак решавамо у квазистатичком режиму, то можемо сматрати да се у сваком тренутку систем налази у равнотежном положају за наелектрисање $-q$ на растојању x и $d-x$ од плоча, па је довољно наћи решење електростатичког проблема са наелектрисањем $-q$ у датом положају. Како су плоче проводне и у равнотежној ситуацији нема струја кроз површине истих плоче морају бити на истом електростатичком потенцијалу (што се обезбеђује прерасподелом наелектрисања по површини плоче). На основу метода ликова за тачкасто наелектрисање изнад проводне плоче, може се закључити да укупно индуковано наелектрисање на плочи по интензитету зависи линеарно од количина тачкастих наелектрисања изнад плоче (принцип суперпозиције) $\boxed{\text{2п}}$. Тако можемо наелектрисање $-q$ поделити на два наелектрисања $-\frac{q}{2}$ на истом растојању од плоча и укупно индуковано наелектрисање на свакој плочи остаће исто. Овај принцип можемо примењивати даље и делити наелектрисање $-q$ све док га не прерасподелимо у равномерно наелектрисану танку плочу (паралелну са плочама кондензатора) са густином наелектрисања $\sigma_q = -\frac{q}{S}$. $\boxed{\text{2п}}$ Нека је у таквој ситуацији површинска густина наелектрисања прве плоче σ_1, а друге σ_2. Услов једнакости потенцијала прве и друге плоче гласи $(E_1 + E_q - E_2)x + (E_1 - E_q - E_2)(d-x) = 0$ $\boxed{\text{3п}}$, где је $E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$ $\boxed{\text{1п}}$, $E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$ $\boxed{\text{1п}}$ и $E_q = -\frac{\sigma_q}{2\varepsilon_0}$ $\boxed{\text{1п}}$. Одавде следи $(\sigma_1 - \sigma_2)d = -\sigma_q(d-2x)$, односно, пошто су површине по којима су равномерно распоређена наелектрисања једнаке, $Q_1 - Q_2 = q\frac{d-2x}{d}$ $\boxed{\text{2п}}$, где су Q_1 и Q_2 тренутне количине наелектрисања на првој и другој плочи. Како су оне на почетку електронеутралне, у сваком тренутку мора да важи $Q_1 + Q_2 = q$ $\boxed{\text{2п}}$. Решавањем система добија се $Q_1 = q\frac{d-x}{d}$ $\boxed{\text{1п}}$ и $Q_2 = q\frac{x}{d}$ $\boxed{\text{1п}}$. Струја која тече у смеру од прве плоче према другој једнака је $i(t) = -\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = q\frac{v(t)}{d}$ $\boxed{\text{2п}}$, где је $v(t)$ тренутна брзина тачкастог наелектрисања. Средња вредност струје I може се изразити преко средње вредности брзине v_s као $I = q\frac{v_s}{d}$, а како је $v_s = \frac{d}{T}$, то је и $I = \frac{q}{T}$ у смеру од прве према другој плочи $\boxed{\text{2п}}$.

5. Дата зависност се може преписати као $N = A\left(\frac{1}{\tau}\right)^{3/2}e^{-\frac{L^2}{\tau}}$, где је $A = \frac{N_0}{\pi^{3/2}}$ а $\tau = 4D(t-t_0)$ и има димензије $[\mathrm{m}^2]$. Даље, множењем обе стране са $\tau^{3/2}$ добија се $N\tau^{3/2} = Ae^{-\frac{L^2}{\tau}}$ $\boxed{\text{2п}}$. Линеаризације се може извршити логаритмовањем: $\ln(N\tau^{3/2}) = \ln(A) - \frac{L^2}{\tau}$ $\boxed{\text{2п}}$, па се цртањем $y = \ln(N\tau^{3/2})$ у функцији $x = \frac{1}{\tau}$ може одредити L^2 преко коефицијента правца. Грешка Δy се може наћи на основу дате математичке помоћи и износи $\Delta y = \frac{3\Delta\tau}{2\tau} = \frac{3\Delta t}{2t}$ $\boxed{\text{1п}}$, док грешка



Слика уз решење 5. задатка.

за x износи $\Delta x = \frac{\Delta\tau}{\tau^2} = \frac{\Delta t}{4Dt^2}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, па су тачке са већим t поузданије за одређивање коефицијента правца. Цртањем графика са последњих 5 тачака из табеле добија се график из прилога $\boxed{\mathbf{4п}}$. Повлачењем неекспериментале праве и бирањем 2 тачке на њој: $A = (0{,}0295\,\mathrm{m}^{-2}; 5{,}0354)$ и $B = (0{,}0460\,\mathrm{m}^{-2}; 4{,}9467)$ $\boxed{\mathbf{2п}}$ може се одредити коефицијент правца као $k = \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = -5{,}3758\,\mathrm{m}^2 = -L^2$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Стога се као решење добија $L = 2{,}3186\,\mathrm{m}$. За грешку k, применом уобичајених правила, добијамо: $\Delta k = \frac{\Delta B_y + \Delta A_y}{B_x - A_x} + \frac{|B_y - A_y|}{(B_x - A_x)^2}(\Delta B_x + \Delta A_x)$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, где су грешке за A и B једнаке $\Delta A = (0{,}00016\,\mathrm{m}^{-2}; 0{,}0075)$ и $\Delta B = (0{,}00040\,\mathrm{m}^{-2}; 0{,}0120)$ као веће грешке суседа. За нумеричку вредност се добија $\Delta k = 1{,}4\,\mathrm{m}^2$. Грешка ΔL је онда $\Delta L = \frac{\Delta k}{2\sqrt{-k}} = 0{,}3\,\mathrm{m}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Коначно решење онда износи $L = (2{,}3 \pm 0{,}3)\,\mathrm{m}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.
Напомена прегледачу: Задатак се може нумерички исправно урадити линеаризацијом која подразумева логаритмовање димензионе величине; у том случају умањити број освоених поена за петину. Уколико се график нацрта помоћу свих тачака доделити све поене, а уколико се нацрта помоћу тачака са већим грешкама одузети до 3 поена.

t[s]	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
N[m^{-3}]	5,980	4,098	2,780	2,014	1,541	1,2240	1,020	0,843	0,718
x[m^{-2}]	0,2500	0,1250	0,0833	0,0625	0,0500	0,0417	0,0357	0,0312	0,0278
Δx[m^{-2}]	0,0100	0,0025	0,0011	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001
y	3,8679	4,5297	4,7498	4,8590	4,9260	4,9692	5,0003	5,0278	5,0440
Δy	0,0600	0,0300	0,0200	0,0150	0,0120	0,0100	0,0086	0,0075	0,0067

Табела уз решење 5. задатка.

Задатке припремили: *Марко Кузмановић*, Universite Paris-Sud, Француска
Стефан Шушњар, Politecnico di Milano, Италија
Рецензент: *др Владан Павловић*, Природно-математички факултет, Ниш
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд