Funkcija prirodnog logaritma u termodinamici

Definicija

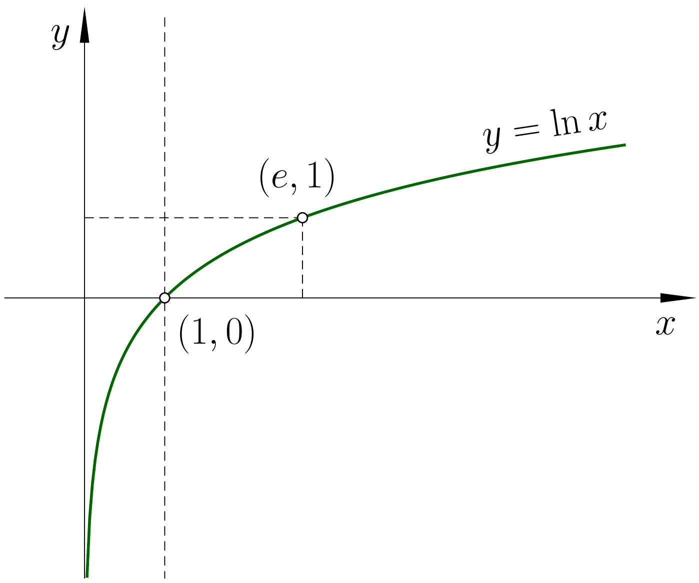
Funkcija prirodnog logaritma ili prosto prirodni logaritam [1] predstavlja logaritam sa osnovom Ojlerovog broja e, gde je e transcedentna iracionalna konstanta jednaka 2.71828... Reč je o funkciji strogo pozitivnog argumenta x, u zapisu $\ln x$, odnosno eksponentu kojim se stepenuje broj e kako bi se dobio taj broj x. U prevodu, $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$. Tako prirodni logaritam broja e iznosi 1, jer je $e^1 = e$, dok je prirodni logaritam broja 1 broj 0, jer je $e^0 = 1$. Logaritamska funkcija $y = \ln x$ je bijekcija iz skupa pozitivnih realnih brojeva ($x \in \mathbb{R}^+$) na skup svih realnih brojeva ($y \in \mathbb{R}$). Preciznije,

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

koja se može definisati i kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije e^x, što dovodi do identiteta:

$$e^{\ln x} \equiv x \text{ ili } \ln e^x \equiv x \quad \forall x > 0. \tag{2}$$

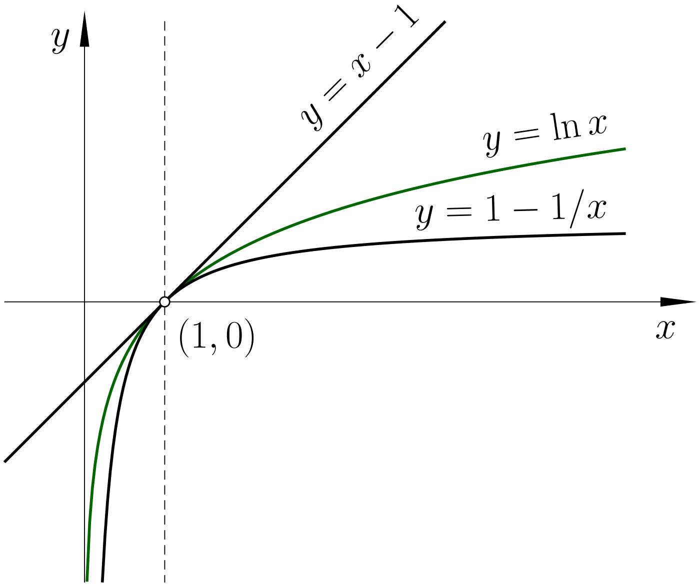
Primećujemo da $y = \ln x$ ima nulu $\boxed{y = 0 \text{ u } x = 1}$ i da je $\boxed{y < 0 \text{ za } 0 < x < 1}$, dok je $\boxed{y > 0 \text{ za } x > 1}$. Zapravo, kako je broj $e > 1$ onda svi pozitivni eksponenti ($y > 0$) broja e daju $e^y > 1$, a svi njegovi negativni eksponenti ($y < 0$) daju $e^y < 1$. Videti grafik funkcije $\ln x$ na slici 1.



Slika 1: Grafik zavisnosti $y = \ln x$ u xy-ravni.

Svojstva

Svojstva funkcije $y = \ln x$ proishode iz osobina funkcije $x = e^y$. Naprimer, neka je $y_1 = \ln x_1$ i $y_2 = \ln x_2$, odnosno $x_1 = e^{y_1}$ i $x_2 = e^{y_2}$. Tada se množenjem dobija da je $x_1 x_2 = e^{y_1 + y_2}$ što dovodi do $y_1 + y_2 = \ln(x_1 x_2)$, pa je $\boxed{\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2}$. Analogno, da smo izvršili deljenje dobili bismo da je $\boxed{\ln(x_1/x_2) = \ln x_1 - \ln x_2}$. Kao posledica osobine logaritamske funkcije po kojoj je $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ lako se dobija da je $\ln(\underbrace{xx...x}_{n}) = \underbrace{\ln x + \ln x + ... + \ln x}_{n}$, te važi $\boxed{\ln x^n = n \ln x}$. U ovom slučaju n čak može biti bilo koji realan broj. Specijalno, za $n = 0$ važi $\boxed{\ln 1 = \ln x^0 = 0 \ln x = 0}$, dok za $n = -1$ važi $\boxed{\ln(1/x) = -\ln x}$, a za $x = e$ je $\boxed{\ln e^n = n \ln e = n}$.



Slika 2: Nejednakosti $1 - 1/x \leq \ln x \leq x - 1$ predstavljene grafički u xy-ravni.

Na slici 2 grafički su prikazane nejednakosti $\boxed{1 - 1/x \leq \ln x \leq x - 1}$, pri čemu jednakosti važe u slučaju $x = 1$, dok su nejednakosti stroge za $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Lako se uvidja da prva nejednakost $1 - 1/x \leq \ln x$ proizilazi iz druge $\ln x \leq x - 1$ uvodjenjem smene $x \to 1/x$ i korišćenjem osobine $\ln(1/x) = -\ln x$. Obe nejednakosti nalaze svoju primenu u odredjivanju stepena ireverzibilnosti, tj. povratnosti, kvazistatičkih termodinamičkih procesa na osnovu II principa termodinamike o čemu će biti reči kasnije.

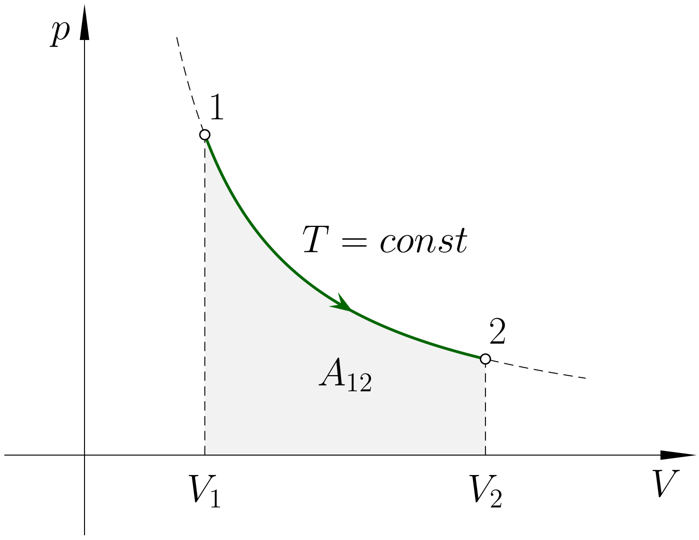
Analizirajmo kako se funkcija $\ln x$ ponaša u blizini tačke $x = 1$. Naime, za $x \approx 1$ funkcija $\ln x$ se može aproksimirati kao funkcija $x - 1$ ili $1 - 1/x$. Inače, za $x \approx 1$ važi da je $1 - 1/x = (x - 1)/x \approx x - 1$. Na taj način, $\boxed{\ln x \approx x - 1, \text{ za } x \approx 1}$. Sa ovom aproksimacijom se može otići još dalje, recimo smenom $1 \pm \epsilon = x$, gde je $0 < \epsilon \ll 1$. U tom slučaju je zaista $x \approx 1$. Ovo za posledicu ima da je $\boxed{\ln(1 \pm \epsilon) \approx \pm\epsilon, \text{ za } 0 < \epsilon \ll 1}$.

Primena

Posmatrajmo jedan izotermski proces idealnog gasa količine n_m koji se širi od početne zapremine V_1 do krajnje V_2 na temperaturi $T = const$. Videti sliku 3. Rad ovog gasa A_{12} pri izotermskom širenju ($V_2 > V_1$) se dobija kao

$$\boxed{A_{12} = n_m RT \ln(V_2/V_1),} \tag{3}$$

gde je R univerzalna gasna konstanta. A_{12} predstavlja površinu oblasti ispod izoterme ograničene izohorama V_1 i V_2. Vidimo da A_{12} uzima strogo pozitivnu vrednost na osnovu osobine funkcije prirodnog logaritma po kojoj je $\ln x > 0$ za $x > 1$. Specijalno, za $V_1 = V_2$ rada nema što je u skladu sa činjenicom da je $\ln x = 0$ za $x = 1$. Formula data u (3) se izvodi na višem kursu matematičke analize, a može se primeniti i pri izotermskom sabijanju gasa kao i pri sukcesivnom širenju u koracima, jer je rad kao skalarna veličina aditivan. Dakle, ukoliko bi se gas sabijao od V_2 do V_1 na istoj temperaturi onda bi se rad dobio kao $A_{21} = n_m RT \ln(V_1/V_2)$. Vidimo da A_{21} uzima strogo negativnu vrednost jer je $\ln x < 0$ za $0 < x < 1$, što fizički znači da je nad gasom izvršen rad. Inače, kako je $\ln(1/x) = -\ln x$ dolazimo do $\ln(V_1/V_2) = -\ln(V_2/V_1)$, pa je $A_{21} = -A_{12}$. Drugim rečima, rad idealnog gasa pri izotermskom širenju je po apsolutnoj vrednosti jednak radu tog istog gasa u obrnutom redosledu evolucije spoljašnjih termodinamičkih parametara na $T = const$. Rad je aditivna fizička veličina i ova osobina rada nije u koliziji sa izrazom za rad datim u (3). Naprimer, ako bi se gas prvo širio od zapremine V_1 do V_2, a



Slika 3: Rad A_{12} kod izotermskog procesa ($T = const$) kao površina ispod izoterme $1 \to 2$.

zatim, od V_2 do V_3 ($V_1 < V_2 < V_3$) na istoj temperaturi, tada je ukupan rad $A_{13} = A_{12} + A_{23}$. Prema tome, $A_{13} = n_m RT \ln(V_2/V_1) + n_m RT \ln(V_3/V_2)$. Koristeći osobinu po kojoj je $\ln x_1 + \ln x_2 = \ln(x_1 x_2)$ nalazimo da je $A_{13} = n_m RT \ln(V_2 V_3/V_1 V_2) = n_m RT \ln(V_3/V_1)$, te rad idealnog gasa pri izotermskom širenju zavisi od odnosa krajnje i početne zapremine.

Primeri

Primer 1. *Funkcija prirodnog logaritma je našla svoju primenu u odredjivanju koeficijenta korisnog dejstva (KKD) η_C toplotne mašine sa idealnim radnim gas koji izvodi Karnoov cklus kako je prikazano na slici 4. Toplotni rezervoari ove mašine su termostati: grejač T_1 i hladnjak T_2 ($T_1 > T_2$). Gas u izotermskim procesima razmenjuje toplote sa rezervoarima, dok adijabatskim putanjama zatvara ciklus ostvarajući $\eta_C = 1 - T_2/T_1$. Na ovom mestu ćemo izvesti ovaj izraz prevashodno bez pozivanja na entropiju koja je kao koncept hronološki proistekla iz onogo što je Karno originalno predložio [2].*

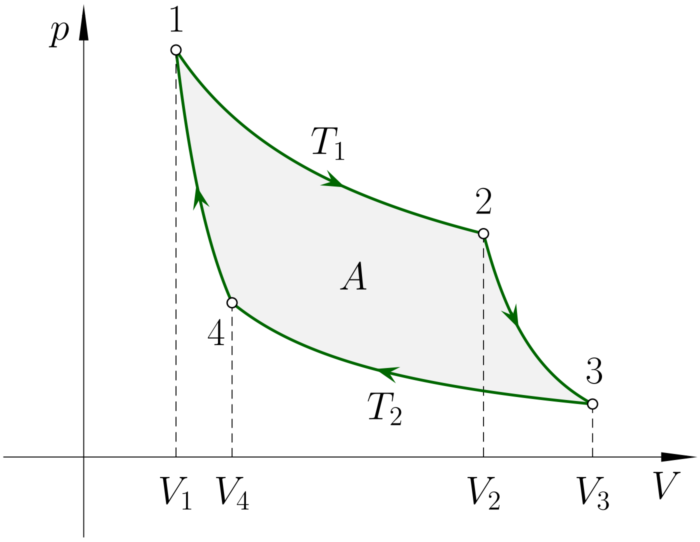
Rešenje. Da bismo odredili η_C pre svega je neophodno razumeti koji su energijski parametri ulazni, a koji korisni. U slučaju toplotnih motora grejač T_1 je taj koji osigurava rad toplotne mašine i od opšteg je interesa napraviti uredjaj kod kojeg je toplota primljena od grejača (Q_1) što manja moguća, a rad gasa po jednom ciklusu (A) kao izlazni energijski p arametar što veći. Zakon održanja energije nam ne zabranjuje da KKD (A/Q_1) bude 100%. Medjutim, vojni francuski inženjer Sadi Karno je prve polovine XIX veka primetio da je ovo neizvodivo, jer se izvesna količina toplote mora predati hladnjaku u formi $Q_2 = Q_1 - A > 0$, čak i u slučaju idealne toplotne mašine bez realnih toplotnih gubitaka, koju je on predložio. Svaka druga toplotna mašina bi bila osudjena na slabiju efikasnost. U tom smislu imamo da je

$$\eta_C = 1 - Q_2/Q_1 < 1, \text{ jer je } Q_2 > 0. \tag{4}$$

Količine toplota Q_1 i Q_2 izračunavamo sa ciklusa (slika 4). Vidimo da je $Q_1 = +Q_{12}$, dok je $Q_2 = -Q_{34}$, gde su Q_{12} i Q_{34} količine toplota koje gas redom apsorbuje u procesima $1 \to 2$ i $3 \to 4$. Vidimo da predznak $-$ ispred Q_{34} stoji upravo zbog toga što je defakto reč o količini toplote $Q_2 > 0$ koju gas otpusti pri izotermskom sabijanju. Pri tom, prema formuli (3) dobijamo da je $Q_{12} = A_{12} = n_m RT_1 \ln(V_2/V_1)$ i $Q_{34} = A_{34} = n_m RT_2 \ln(V_4/V_3) = -n_m RT_2 \ln(V_3/V_4)$ koristeći osobinu $\ln(1/x) = -\ln x$. n_m je broj molova gasa, a R univerzalna gasna konstanta. Procesi $2 \to 3$ i $4 \to 1$ su adijabatski, pa važi da je $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ i $T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$, gde je γ konstanta adijabate. Množenjem relacija se nalazi da je $V_2V_4 = V_1V_3$, odnosno $V_2/V_1 = V_3/V_4$. Tako je

$$\eta_C = 1 - \frac{n_m RT_2 \ln{(V_3/V_4)}}{n_m RT_1 \ln{(V_2/V_1)}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{5}$$

Nešto kraće od pola veka kasnije je Rudolf Klauzijus sa oduševljenjem gledao na ovaj rezultat. On



Slika 4: Karnoov ciklus: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ sačinjen od dve izoterme: $1 \to 2$ na $T_1 = const$ i $3 \to 4$ na $T_2 = const$, i dve adijabate: $2 \to 3$ i $4 \to 1$.

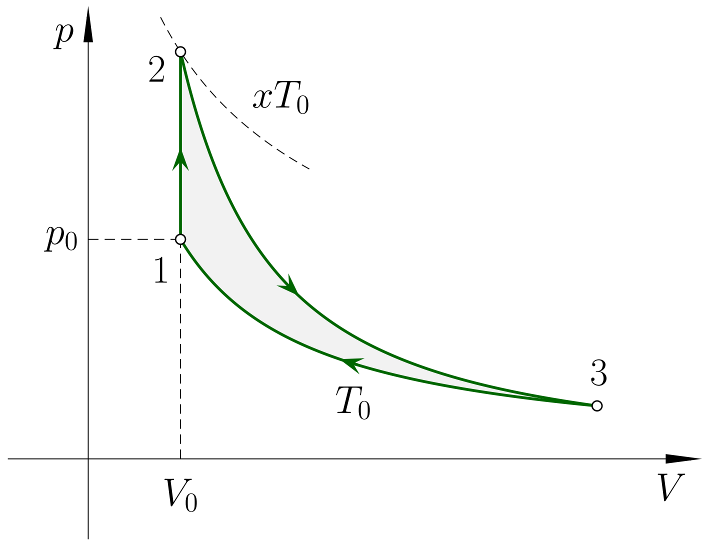
je uveo *entropiju* kao novu termodinamičku veličinu, tj. kao novu termodinamičku funkciju stanja kvazistatičkih procesa, i označio je sa S u čast Sadija Karnoa. Po Klauzijusu se morao uvesti još jedan termodinamički postulat (II) po kojem je priraštaj entropije izolovanog termodinamičkog sistema uvek nenegativan, tj. $\Delta S \geq 0$. Jednakost $\Delta S = 0$ važi za procese i cikluse koji su reverzibilni (povratni), odnosno kod kojih se ukupna entropija sistema ne menja u vremenu ($S = const$). Karnoova toplotna mašina je upravo takva, bez priraštaja ukupne entropije i sa maksimalnim učinkom. No, uprkos činjenici da se entropija održava njen $\eta_C < 1$. Toplotne mašine koje ne rade po Karnoovom ciklusu su ireverzibilne (nepovratne) i kod njih je strogo $\Delta S > 0$. U prevodu, što je ΔS dalje od nule to je KKD te toplotne mašine manji od η_C, jer je veći gubitak kroz toplotu koji je po II zakonu termodinamike dostupan za prevodjenje u koristan rad. Dakle, u slučaju toplotne mašine čiji se radni idealni gas podvrgava Karnoovom ciklusu ukupna promena entropije izolovanog sistema: gas + rezervoari, $\Delta S = \Delta S^{(in)} + \Delta S^{(ext)} = 0$, gde je $\Delta S^{(in)}$ priraštaj entropije gasa na jednom ciklusu, a $\Delta S^{(ext)}$ promena entropije po ciklusu toplotnih rezervoara. $\Delta S^{(in)} = 0$, jer je entropija termodinamička funkcija stanja. $\Delta S^{(ext)}$ se lako izračunava znajući da oba rezervoara vrše transfer toplote pri svojim konstantnim temperaturama, tj. $\Delta S^{(ext)} = -Q_1/T_1 + Q_2/T_2$, jer grejač predaje gasu količinu toplote Q_1 na $T_1 = const$, dok hladnjak apsorbuje Q_2 na $T_2 = const$. Ovde smo imali sreće da priraštaj entropije termostata napišemo u trivijalnoj formi kao količnik toplote i apsolutne temperature, jer su procesi predaje/primanja toplote izotermski sa stanovišta oba toplotna rezervoara. Generalno, izraz za priraštaj entropije je daleko komplikovaniji kada se T rezervoara menja u procesu. Na kraju imamo,

$$Q_1/T_1 = Q_2/T_2. \tag{6}$$

Ovo je uslov koji je uvek ispunjen u Karnoovom ciklusu, a ovde izveden na dva načina: (i) prevashodno preko izotermskog rada u vidu prirodnog logaritma i (ii) uvodjenjem entropijske formulacije II zakona termodinamike kao hronološkg sleda (i). Uslov (6) mora da važi i u slučaju uredjaja koji vrše rad nad idealnim gasom po Karnoovom ciklusu u inverznom (obrnutom) režimu[1], poput rashladnih uredjaja i toplotnih pumpi. U ovim slučajevima treba voditi računa kao se definiše učinak ovakvih uredjaja koji se maksimizuje primenom uslova (6)..□

Primer 2. *Posmatrajmo ciklus idealnog gasa adijabatske konstante γ: $1 \to 2 \to 3 \to 1$ koji operiše izmedju dva toplotna rezervoara: grejača i hladnjaka. Početno stanje 1 gasa je odredjeno pritiskom p_0, zapreminom V_0, i temperaturom T_0. U procesu $1 \to 2$ gas se izohorski zagreje do pritiska koji je x puta veći od početnog ($x > 1$), a zatim se duž $2 \to 3$ adijabatski širi do prvobitne temperature T_0 vrativši se u početno stanje izotermskim sabijanjem $3 \to 1$. Pod pretpostavkom da toplotna mašina, koja se oslanja na ciklus ovog gasa, maksimizuje svoju efikasnost minimizirajući sve realne toplotne gubitke usled trenja i ograničene toplotne provodnosti izmedju gasa i rezervoara, odrediti KKD ovog toplotnog motora (η) i pokazati da je $\eta < \eta_c$ za $\forall x > 1$, gde je η_C KKD Karnoove toplotne mašine koja bi hipotetički radila izmedju istih toplotnih rezervoara. Pokazati da je priraštaj entropije ove toplotne mašine ($1 \to 2 \to 3 \to 1$) strogo pozitvan za $\forall x > 1$, tj. da je ona ireverzibilnu u smislu II zakona termodinamike.*

Rešenje. Jednačina stanja idealnog gasa u stanju 1 glasi $p_0V_0 = n_mRT_0$ (R je univerzalna gasna konstanta), odakle je broj molova gasa $n_m = p_0V_0/RT_0$. Kako se u procesu $1 \to 2$ gas izohorski zagreva od pritiska p_0 do xp_0, dobijamo da temperatura u stanju 2 iznosi xT_0 (slika 5). Dalje se gas adijabat-



Slika 5: Gasni ciklus: $1 \to 2 \to 3 \to 1$ sačinjen od izohore: $1 \to 2$ na $V_0 = const$ početnog pritiska p_0 i krajnje temperature koja je x puta veća od prvobitne ($x > 1$), zatim adijabate: $2 \to 3$, i izoterme: $3 \to 1$ na $T_0 = const$.

ski hladi na procesu $2 \to 3$ od xT_0 do T_0, te za zapreminu V_3 u stanju 3 važi $(xT_0)V_0^{\gamma-1} = T_0V_3^{\gamma-1}$, tj. $V_3 = x^{1/(\gamma-1)} \times V_0$. Gas apsorbuje toplotu od grejača u procesu $1 \to 2$ i to $Q_1 = +Q_{12} = n_mc_V(xT_0 - T_0) = \dfrac{p_0V_0}{\gamma - 1}(x - 1)$, gde je $c_V = R/(\gamma - 1)$ izohorski molarni toplotni kapacitet. Gas predaje toplotu Q_2 hladnjaku na procesu $3 \to 1$ koja iznosi $Q_2 = -Q_{31} = -A_{31} = +A_{13}$. Oslanjajući se na izraz (3) imamo da je $A_{13} = n_mRT_0 \ln{(V_3/V_0)} = p_0V_0 \ln x^{1/(\gamma-1)} = \dfrac{p_0V_0}{\gamma - 1} \ln x$, gde smo koristili $\ln x^n = n \ln x$. Kako je $\eta \overset{def}{=} 1 - Q_2/Q_1$, sledi da je

$$\eta = 1 - \frac{\ln x}{x - 1}. \tag{7}$$

[1]Obavezno razlikovati od termina reverzibilni (povratni) proces koji podrazumeva spontanu evoluciju stanja u obrnutom smeru.

Naš slučaj se tiče situacije u kojoj je $x \neq 1$. Ovo osigurava nejednakost $\ln x < x - 1$, pa je $\eta > 1 - (x-1)/(x-1) = 0$, što ukazuje da je račun smislen. Dalje, nejednakost $\ln x > 1 - 1/x$ dovodi do $\eta < 1 - (1-1/x)/(x-1)$, odnosno za $\forall x > 1$ važi

$$0 < \eta < 1 - \frac{1}{x}. \tag{8}$$

S druge strane, otkrivamo da su temperature hladnjaka i grejača redom T_0 i xT_0, jer su to dve ekstremalne temperature koje gas na ovom ciklusu doseže kako bi maksimizovao svoj rad. Realne situacije su ipak kompleksnije, jer se toplotne mašine optimizuju tako da maksimizuju svoju snagu, pa je u interesu da radni ciklusi traju što kraće kao kod *endoreverzibilnih toplotnih motora* [3], a to se teško ostvaruje ako je temperatura gasa jednaka temperaturi toplotnog rezervoara kada transfer toplote može trajati beskonačno dugo. No, držimo se standardnog kursa u kojem se optimizacija svodi na maksimizaciju korisnog rada po ciklusu. Stoga je, $\eta_C = 1 - 1/x$. Drugim rečima, $\eta < \eta_C$ za $\forall x \neq 1$ na osnovu (8).

Priraštaj entropije ΔS ove toplotne mašine se svodi na izračunavanje promene entropije rezervoara, jer nema priraštaja entropije gasa na jednom ciklusu (zatvoren proces). Napomenimo da se posmatra izolovani sistem: gas + rezervoari. Odnosno, $\Delta S = -Q_1/(xT_0) + Q_2/T_0$, tj.

$$\Delta S = \frac{p_0 V_0}{(\gamma - 1)T_0}\left(\ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) > 0, \tag{9}$$

što neposredno sledi iz nejednakosti $\ln x > 1 - 1/x$ za $x \neq 1$. Dakle, ova toplotna mašina je ireverzibilna u smislu entropijski formulisanog II principa termodinamike − što će reći, ne tako efikasna kao Karnoova.

Generalno, za bilo koju toplotnu mašinu čiji KKD iznosi η, a koja se oslanja na dva toplotna rezervoara, $T_1 > T_2$, i po ciklusu primi količinu toplote Q_1 od grejača, važi da je

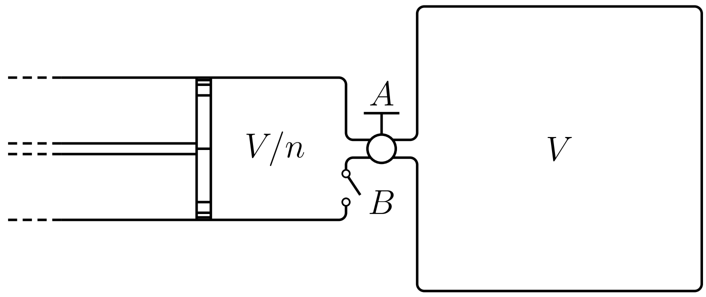
$$\boxed{\Delta A = (\eta_C - \eta)Q_1 = \Delta S T_2,} \tag{10}$$

gde je $\Delta A = A_C - A$ razlika rada koji bi po ciklusu dala Karnoova toplotna mašina izmedju ova dva termostata ($A_C = Q_1 - Q_2$) čiji KKD iznosi $\eta_C = 1 - T_2/T_1$ i rada koji po ciklusu daje ova toplotna mašina ($A = Q_1 - Q_2^*$) ukupnog priraštaja entropije $\Delta S = Q_2^*/T_2 - Q_1/T_1$; naravno, sve pri identičnim energijskim ulozima koje omogućuje grejač ($Q_1 = Q_1^*$). Odmah vidimo da se razlika ΔA može smanjiti dovodjenjem ΔS na nulu što automatski dovodi do slučaja Karnoovog ciklusa, ili pak kada $T_2 \to 0$ što nas dovodi na teren III zakona termodinamike. Popularno govoreći, ΔA je "dostupan rad" koji se nije iskoristio, a koji je kroz toplotu predat hladnjaku otišavši u *nepovrat*. .... □

Primer 3. *Razmotrimo sud zapremine V koji je preko kratke cevčice spojen sa dugom horizontalnom cevi čiji se volumen kontroliše pokretnim klipom. Videti sliku 6. U početku klip se nalazi na krajnjem desnom delu cevi, ventil A na cevčici je otvoren, a u sudu se nalazi idealan gas pritiska p_0, dok je ventil B zatvoren. Gas se polako raširi povlačenjem klipa nalevo u cevi tako da mu konačna zapremina postane $V + V/n$ (sud + cev). Zatim se ventil A zatvori, ventil B otvori, a klip pomeri nadesno dok se sav gas iz cevi ne istisne. Potom se ventil B zatvori, a ventil A otvori i kao s početka sve ponovi n puta, gde je $n \in \mathbb{N}$. Na kraju n-te repeticije pritisak gasa u sudu opadne na p_n. Naći kako funkcija $f_n \equiv p_n/p_0$ zavisi od prirodnog broja n. Zidovi suda i cevi su idealni toplotni provodnici, pa se svi sukcesivni procesi mogu smatrati izotermskim [4].*

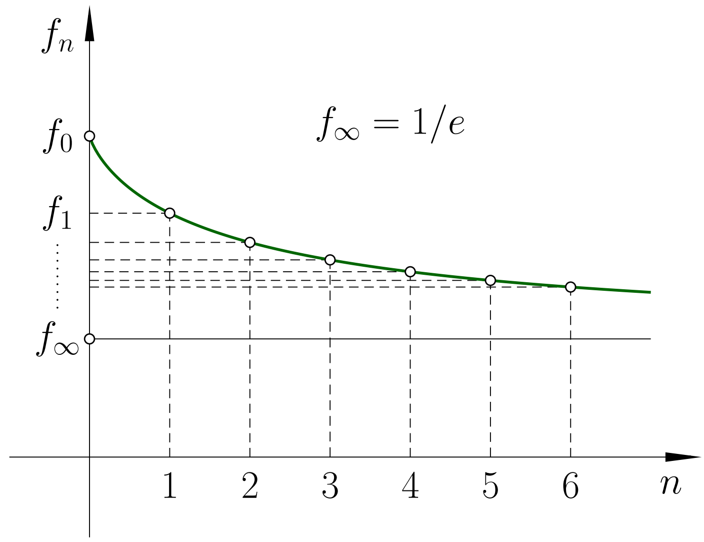
Rešenje. Neka je pritisak gasa u sudu nakon prvog širenja p_1, drugog p_2, i tako redom. Tada je

$$\begin{aligned} p_1(V + V/n) &= p_0 V, \\ p_2(V + V/n) &= p_1 V, \\ &\vdots \\ p_n(V + V/n) &= p_{n-1} V, \end{aligned} \tag{11}$$



Slika 6: Sud zapremine V spojen sa cevi kliznog volumena koji se kontroliše pomeranjem klipa.

odakle dobijamo da je $p_n = \dfrac{p_0}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$, odnosno $f_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$. Grafik zavisnosti f_n od n je dat na slici 7, gde je $f_0 = 1, f_1 = 1/2, f_2 = 4/9, f_3 = 27/64, ...$ Kada se n približava beskonačnosti, vrednost funkcije f_n teži realnom broju $f_\infty = 1/e \approx 0.36787...$, gde je broj $e = 2.71828...$ Reč je o iracionalnom



Slika 7: Grafik zavisnosti f_n od n čija je skala neuniformna duž ordinate.

broju koji nije rešenje nijedne algebarske jednačine (transcedentan broj), poput broja π. Ovaj primer u zvesnoj meri ilustruje pojavljivanje broja e u jednom fizičkom procesu, što opravdava upotrebu epiteta "prirodni" u nazivu logaritma sa osnovom e. Svakako, ovakvih primera ima jako velik broj u prirodi iz kojih bi se konstanta e mogla izračunati do zahtevane tačnosti. Na ovom mestu, ako bi se recimo uzelo da je $n = 10^k$, gde je k prirodan broj, $k = 1, 2, 3, ...$, dobilo bi se da je

$$
\begin{aligned}
(1+10^{-1})^{10^1} &= \boxed{2}.593742...\\
(1+10^{-2})^{10^2} &= \boxed{2.7}04813...\\
(1+10^{-3})^{10^3} &= \boxed{2.71}6923...\\
(1+10^{-4})^{10^4} &= \boxed{2.718}145...\\
(1+10^{-5})^{10^5} &= \boxed{2.7182}68...\\
(1+10^{-6})^{10^6} &= \boxed{2.71828}1...\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Zapažamo da smo utoliko bliži broju e ukoliko je k veće, a samim tim i ukoliko je n veće. Prema jednačini (12), broj cifara koji je u isto vreme sadržan u broju e i u vrednosti izraza $(1+10^{-k})^{10^k}$ iznosi tačno k. Ovo je solidan algoritam kojim se uz zadatu tačnost može numerički proceniti vrednost broja e. Naposletku, broj e je više od proste neempirijske, iracionalne, transcedentne matematičke konstante. Broj e je produkt traganja, odnosno empirije, skriven iza brojnih procesa u prirodi. . . . . $\square$

Literatura

[1] Z. Kadelburg, V. Mićić, i S. Ognjanović, *Analiza sa algebrom 2 – Udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred Matematičke gimnazije.* KRUG Beograd, (2014).

[2] J. Wang and B. Ricardo, *Competitive Physics – Thermodynamics, Electromagnetism, and Relativity by Physics Olympiad Medalists and Trainers.* World Scientific Singapore, (2019).

[3] Zadatak 3. Razred II, *Državno takmičenje iz fizike učenika srednjih škola školske 2010/2011.* Institut za fiziku Beograd, (2011).

[4] Е. И. Бутиков, А. А. Быков, и А. С. Кондратьев, *Физика в примерах и задачах.* Петроглиф Москва, (2015).