1. Посматрајмо идеалан гас водоника H_2 и идеалан гас његовог изотопа D_2, оба на собној температури и атмосферском притиску. Како су електронске конфигурације молекула водоника и деутеријума идентичне можемо сматрати да се димензије ових молекула не разликују. При датим условима, одредити који гас ће имати већи коефицијент дифузије и колико пута. (20 поена)

2. Дуги вертикални цилиндрични суд испуњен је идеалним гасом неона који је затворен одозго клипом масе m. На дну суда налази се грејач константне снаге P која се троши на загревање неона без губитака. Након укључења грејача клип почне полако да се пење константном брзином. Колико времена ће му требати да се премести навише за висину Δh током свог равномерног кретања? Атмосферски притисак и трење могу се занемарити. Клип и зидови суда су идеални топлотни изолатори без топлотног капацитета. Земљино гравитационо убрзање је g. (20 поена)

3. Гасна турбина је мотор који се користи између осталог у ракетама и у већини млазних авиона, а чији се рад може солидно представити Брајтоновим циклусом, са две адијабате и две изобаре (слика 1). Један циклус се састоји из: адијабатског сабијања ваздуха по усисавању у компресор ($1 \to 2$), сагоревања горива, што шири ваздух у компресору на константном притиску ($2 \to 3$), затим адијабатског ширења ваздуха ($3 \to 4$) у даљем проласку кроз турбину и изобарског сабијања ваздуха ($4 \to 1$) пре изласка из турбине, при чему извршени рад покреће вучну турбину. Експонент адијабате ваздуха као идеалног гаса је $\gamma = 7/5$. Реалне топлотне губитке услед трења, непотпуне изолације и лимитиране топлотне проводности, занемарити у потпуности.

   (а) Ако се процеси ($2 \to 3$) и ($4 \to 1$) одвијају на притисцима p_2 и p_1, одредити коефицијент корисног дејства.

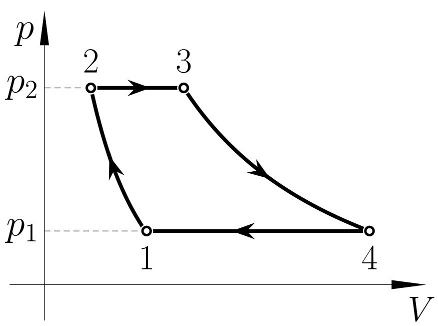
   (б) За авионски мотор АЛ-31Ф однос притисака p_2/p_1 је око 23. Проценити масу горива која се потроши за сат времена лета двомоторног авиона константне брзине $v = 1000$ km/h, ако један мотор развија вучну силу од $F = 74.5$ kN, а килограм горива сагоревањем ослобађа топлоту од $q = 18$ MJ.

   (в) У којим деловима циклуса се топлота прима, а у којима се отпушта од стране ваздуха? У којим деловима се ваздух хлади, а у којима се греје?

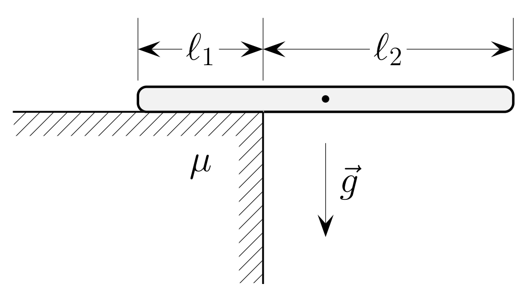
   (20 поена)

4. Израчунати средњу квадратну угаону брзину $\overline{\omega}$ молекула идеалног гаса водоника на температури $T = 6586$ K ако се зна да растојање између два тачкаста протона у молекулу износи $d = 0.074$ nm. Молекул H_2 посматрати као круто тело. За универзалну гасну константу узети $R = 8.314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$. (20 поена)

5. Танак хомогени штап се држи водоравно тако да се један његов део налази на храпавом столу. Видети слику 2. Однос слободног и дела штапа који лежи на столу је $\ell_2 : \ell_1 = 2 : 1$. У једном тренутку штап се пусти да слободно ротира у пољу Земљине теже око ивице стола која је нормална на раван цртежа. Одредити коефицијент трења клизања између стола и штапа, μ, ако је познато да је угао који штап заклапа са хоризонталом у тренутку проклизавања са ивице једнак 30°. (20 поена)



Слика 1



Слика 2

Задатке припремили: ***Др Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт Лоренц, Универзитет у Лајдену
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***Др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2018/19. ГОДИНА

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије

II разред **ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА** **ОПШТИНСКИ НИВО**
20.01.2019.

1. Непомични вертикални цилиндрични суд заробљава $n_m = 1\ \mu\mathrm{mol}$ идеалног гаса и налази се у гравитационом пољу Земље убрзања $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. Дно суда попуњава уметнута дигитална вага која херметички затвара гас у суду одоздо тако да честице гаса не дифундују испод горње статичне површине ваге осетљиве на притисак, а у сврху мерења масе. Видети слику 1. Осетљива површ ваге је у савршеном механичком и термодинамичком контакту са гасом. Висина гаса мерена од ове површине па све до врха суда износи $h = 166.28$ cm. У почетном тренутку гас се налази на температури $t_1 = 21\,^\circ\mathrm{C}$. Гас се затим загреје до температуре $t_2 = 40.62\,^\circ\mathrm{C}$, те се маса коју вага очитава промени за Δm. Одредити ову промену масе коју вага очитава уколико нема никаквог механичког контакта између осетљиве површине ваге и зидова суда. За гасну константу узети $R = 8.314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$. (20 поена)

2. Дуги вертикални цилиндрични суд испуњен је идеалним гасом неона који је затворен одозго клипом масе m. На дну суда налази се грејач константне снаге P која се троши на загревање неона без губитака. Након укључења грејача клип почне полако да се пење константном брзином. Колико времена ће му требати да се премести навише за висину Δh током свог равномерног кретања? Атмосферски притисак и трење могу се занемарити. Клип и зидови суда су идеални топлотни изолатори без топлотног капацитета. Земљино гравитационо убрзање је g. (20 поена)

3. Гасна турбина је мотор који се користи између осталог у ракетама и у већини млазних авиона, а чији се рад може солидно представити Брајтоновим циклусом, са две адијабате и две изобаре (слика 2). Један циклус се састоји из: адијабатског сабијања ваздуха по усисавању у компресор $(1 \to 2)$, сагоревања горива, што шири ваздух у компресору на константном притиску $(2 \to 3)$, затим адијабатског ширења ваздуха $(3 \to 4)$ у даљем проласку кроз турбину и изобарског сабијања ваздуха $(4 \to 1)$ пре изласка из турбине, при чему извршени рад покреће вучну турбину. Експонент адијабате ваздуха као идеалног гаса је $\gamma = 7/5$. Реалне топлотне губитке услед трења, непотпуне изолације и лимитиране топлотне проводности, занемарити у потпуности.

   (а) Ако се процеси $(2 \to 3)$ и $(4 \to 1)$ одвијају на притисцима p_2 и p_1, одредити коефицијент корисног дејства.

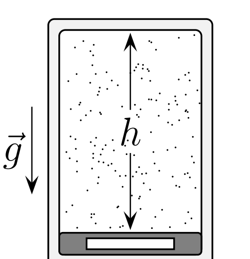
   (б) За авионски мотор АЛ-31Ф однос притисака p_2/p_1 је око 23. Проценити масу горива која се потроши за сат времена лета двомоторног авиона константне брзине $v = 1000$ km/h, ако један мотор развија вучну силу од $F = 74.5$ kN, а килограм горива сагоревањем ослобађа топлоту од $q = 18$ MJ.

   (в) Наћи максимални могући рад по циклусу у функцији моларне масе ваздуха, n_m, универзалне гасне константе, R, и температура T_1 и T_3, тј. јединих фиксних термодинамичких параметара гасне турбине. Прва је температура околног ваздуха (стање 1), а друга је одређена температуром сагоревања горива (стање 3).

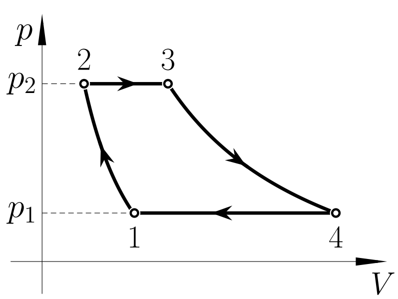
   (20 поена)

4. Изразити средњу квадратну угаону брзину $\overline{\omega}$ двоатомског молекула идеалног гаса на температури на којој је његова средња квадратна брзина $\overline{v}$ и ако се зна да је растојање између два атома у молекулу d. Молекул посматрати као круто тело сачињено од хетерогених тачкастих атома чије је однос маса χ. За које χ ће $\overline{\omega}$ узети најмању могућу вредност и колико та вредност износи при датом $\overline{v}$ и d? (20 поена)

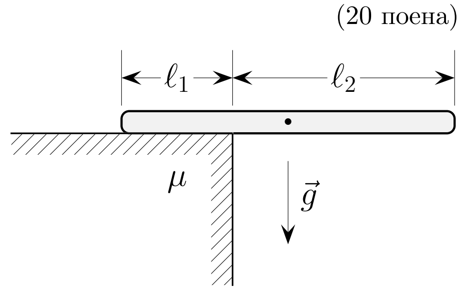
5. Танак хомогени штап се држи водоравно тако да се један његов део налази на храпавом столу. Видети слику 3. Коефицијент трења клизања између стола и штапа износи $\mu = 2\sqrt{3}/3$. Однос слободног и дела штапа који лежи на столу је $\ell_2 : \ell_1 = 2 : 1$. У једном тренутку штап се пусти да слободно ротира у пољу Земљине теже око ивице стола која је нормална на раван цртежа. Одредите угао који штап заклапа са хоризонталом у тренутку проклизавања са ивице? (20 поена)



Слика 1



Слика 2



Слика 3

Задатке припремили: ***Др Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Александар Буква, Институт Лоренц, Универзитет у Лајдену
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***Др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

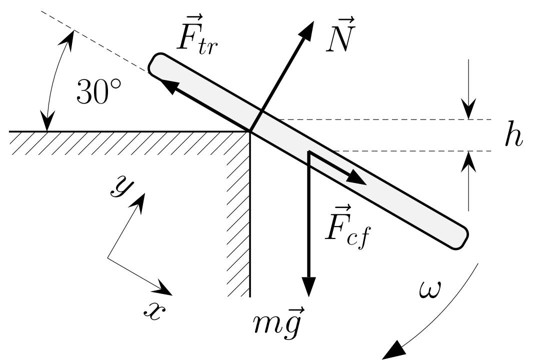
1. Гасови се налазе на истом притиску (p) и температури (T), те су им концентрације n исте, јер је $p = nk_BT$ (k_B Болцманова константа) $\boxed{\textbf{3 п}}$. Коефицијент дифузије идеалног гаса се записује као $D = \frac{1}{3}\bar{\lambda}v_s$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, где је $\bar{\lambda}$ средњи слободни пут молекула, а v_s средња аритметичка брзина. Средњи слободни пут молекула ефикасног пресека судара σ у гасу концентрације n износи $\bar{\lambda} = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Средња аритметичка брзина гаса је $v_s = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$, где је m маса молекула $\boxed{\textbf{3 п}}$. Како су ефикасни пресеци судара молекула исти због димензија видимо да је $D \sim v_s \sim 1/\sqrt{m}$ $\boxed{\textbf{4 п}}$, тако да молекул гаса веће масе има мањи коефицијент дифузије. У нашем случају то значи $D_{H_2} > D_{D_2}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, док је $D_{H_2} : D_{D_2} = \sqrt{2} : 1$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.
Напомена: дати исти број поена ако је такмичар користио формуле са моларном масом уместо масе молекула.

2. Током пењања клипа грејач преда гасу укупну количину топлоту $P\Delta t$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, која се по I закону термодинамике распоређује на промену унутрашње енергије и вршење рада при изобарском ширење гаса ($p \propto mg = const$): $P\Delta t = 3n_mR\Delta T/2 + p\Delta V$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, где је n_m број молова неона, а R универзална гасна константа (искористили смо да је неон једноатомски гас, па је $c_V = 3R/2$). Са друге стране, једначине стања за (T,V) и $(T + \Delta T, V + \Delta V)$ дају: $pV = n_mRT$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $pV + p\Delta V = n_mRT + n_mR\Delta T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, тј. $p\Delta V = n_mR\Delta T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Одатле можемо заменити у прву једначину и добити $P\Delta t = 5p\Delta V/2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Пошто се клип пење полако и без убрзања, сав рад који врши гас иде на пораст потенцијалне енергије клипа, отуда $p\Delta V = mg\Delta h$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Заменом у претходну једначину имамо најзад $\Delta t = 5mg\Delta h/2P$ $\boxed{\textbf{4 п}}$.

3.
   - Коефицијент корисног дејства је по дефиницији једнак $\eta = A/Q_{23}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, где је Q_{23} количина топлоте која се ваздуху преда и то на делу $2 \to 3$, а A извршен рад на једном циклусу $\boxed{\textbf{1 п}}$. Рад рачунамо као разлику примљене (Q_{23}) и отпуштене количине топлоте (Q_{41} на процесу $4 \to 1$): $A = Q_{23} - Q_{41}$, па је $\eta = 1 - Q_{41}/Q_{23}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Пошто су процеси $2 \to 3$ и $4 \to 1$ изобарски, важи да је $Q_{23} = n_mc_p(T_3 - T_2)$ и $Q_{41} = n_mc_p(T_4 - T_1)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, дакле $\eta = 1 - (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. За адијабате $1 \to 2$ и $3 \to 4$ важи $p_1^{(1-\gamma)/\gamma}T_1 = p_2^{(1-\gamma)/\gamma}T_2$ и $p_1^{(1-\gamma)/\gamma}T_4 = p_2^{(1-\gamma)/\gamma}T_3$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, па је $\eta = 1 - (p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1 - (p_1/p_2)^{2/7}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Означили смо моларни изобарски топлотни капацитет са c_p, а број молова ваздуха са n_m.
   - При брзини v и вучној сили F у току времена t два мотора развију рад једнак $A = 2Fvt$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, а са друге стране за то је потребно m масе горива која загрева ваздух изобарски, па је $Q_{23} = mq$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Дакле, $m = 2Fvt/\eta q$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, односно $m \approx 13990$ kg $\boxed{\textbf{1 п}}$.
   - Ваздух прима топлоту на делу $2 \to 3$, а одаје на делу $4 \to 1$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. На деловима $3 \to 4 \to 1$ гас се хлади, а на деловима $1 \to 2 \to 3$ се греје $\boxed{\textbf{2 п}}$.

4. На датој температури H_2 молекул ротира око свог центра масе (средишта), јер су централне силе које изазивају ротацију протона једнаке по III Њутновом закону, па су због једнаких маса једнаки и полупречници кружних путања протона ($m\omega^2r_1 = m\omega^2r_2$). Укупан момент инерције за осу x, која је нормална на осу везе z, је $I_{xx} = 2m(d/2)^2$, где је m маса протона $\boxed{\textbf{6 п}}$. Такође, постоји и ротација молекула око друге осе y која пролази кроз центар масе и ортогонална је на x и z, тј. $I_{yy} = 2m(d/2)^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. На основу закона о једнакој расподели средње енергије $k_BT/2$ по сваком степену слободе (k_B Болцманова константа) добија се да је $I_{xx}\overline{\omega}_x^2/2 + I_{yy}\overline{\omega}_y^2/2 = 2 \times k_BT/2$ $\boxed{\textbf{8 п}}$. Како је $\overline{\omega}_x^2 + \overline{\omega}_y^2 = \overline{\omega}^2$ следи да је $\overline{\omega} = \sqrt{\frac{4k_BT}{md^2}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{RT}{M}}$, где је M моларна маса атома H $\boxed{\textbf{3 п}}$. Након замене долази се до $\overline{\omega} = 2 \times 10^{14}$ rad/s $\boxed{\textbf{1 п}}$.
Напомена: дати исти број поена ако је такмичар користио формулу за унутрашњу енергију $U(T) = 5/2n_mRT$ идеалног двоатомског гаса моларне масе n_m на температури T од које је одузео унутрашњу енергију $U(T) = 3/2n_mRT$ идеалног једноатомског гаса исте моларне масе и температуре. Разлика n_mRT управо одговара ротационом доприносу унутрашњој енергији двоатомског гаса.

5. На слици 1 је представљен тренутак када штап почиње да проклизава. Нека је угаона брзина штапа у том тренутку ω. Силе које делују на штап су: mg сила Земљине теже која делује из средишта на растојању $(\ell_2 - \ell_1)/2$ од ивице, сила нормалне реакције ивице стола N, сила трења F_{tr} која је у тренутку проклизавња максимална и једнака сили трења клизања $F_{tr} = \mu N$, и центрифугална сила у ротирајућем систему $F_{cf} = m\omega^2((\ell_2 - \ell_1)/2)$ делујући на центар масе $\boxed{\textbf{4 п}}$. Пошто је $\ell_1 + \ell_2 = \ell$, где је ℓ дужина штапа, онда је $(\ell_2 - \ell_1)/2 = \ell/6$, па се центар масе штапа спустио за $h = \ell/12$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. По Штајнеровој теореми момент инерције штапа око осе која пролази кроз ивицу стола је $I = m\ell^2/12 + m(\ell/6)^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Према закону одржања енергије, целокупна потенцијална енергија штапа mgh се претвори у његову кинетичку $I\omega^2/2$, па је $\omega^2\ell = 3g/2$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Како непосредно пре проклизавања нема кретања дуж x-осе онда је $F_{tr} = mg/2 + F_{cf}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Дуж y-осе центар масе штапа има тренутно убрзање a у смеру ротације око ивице, па је по II Њутновом закону $ma = mg\sqrt{3}/2 - N$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Ако је тренутно угаоно убрзање штапа око ивице стола α, где је $a = \alpha\ell/6$, онда важи да је $I\alpha = mg\sqrt{3}/2 \times \ell/6$ (резултујући тренутни момент сила око ивице стола) $\boxed{\textbf{3 п}}$. Након краћих трансформација и елиминација се добија да је $\mu\sqrt{3} = 2$, те је $\mu = 2\sqrt{3}/3$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.



Слика 1

Задатке припремили: ***Александар Буква***, Институт Лоренц, Универзитет у Лајдену
Др Михаило Чубровић, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

1. Вага је направљена тако да се на екрану очитава однос F/g, где је $F = pS$ сила којом гас притиска (p притисак гаса) осетљиву површ ваге површине S. Промена масе коју вага очитава не настаје услед промене стварне масе гаса, него услед промене притиска гаса на површину ваге при изохорском загревању ($V = hS = const$) $\boxed{\textbf{8 п}}$. Из једначине стања идеалног гаса видимо да притисак линеарно зависи од температуре T као $p = n_m RT/V$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Након загревања гаса долази до промене притиска који се региструје на површини ваге, $\Delta p = n_m R(t_2 - t_1)/V$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Када промену притиска изједначимо са променом силе гаса на осетљиву површину ваге, тј. $\Delta F = \Delta pS$, долазимо до крајњег резултата $\Delta m = \Delta F/g = n_m R(t_2 - t_1)/(gh)$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Уврштавањем бројних вредности добијамо да је промена масе коју очитава вага $\Delta m = 10$ mg $\boxed{\textbf{3 п}}$.

2. Током пењања клипа грејач преда гасу укупну количину топлоту $P\Delta t$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, која се по I закону термодинамике распоређује на промену унутрашње енергије и вршење рада при изобарском ширење гаса ($p \propto mg = const$): $P\Delta t = 3n_m R\Delta T/2 + p\Delta V$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, где је n_m број молова неона, а R универзална гасна константа (искористили смо да је неон једноатомски гас, па је $c_V = 3R/2$). Са друге стране, једначине стања за (T, V) и $(T + \Delta T, V + \Delta V)$ дају: $pV = n_m RT$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $pV + p\Delta V = n_m RT + n_m R\Delta T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, тј. $p\Delta V = n_m R\Delta T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Одатле можемо заменити у прву једначину и добити $P\Delta t = 5p\Delta V/2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Пошто се клип пење полако и без убрзања, сав рад који врши гас иде на пораст потенцијалне енергије клипа, отуда $p\Delta V = mg\Delta h$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Заменом у претходну једначину имамо најзад $\Delta t = 5mg\Delta h/2P$ $\boxed{\textbf{4 п}}$.

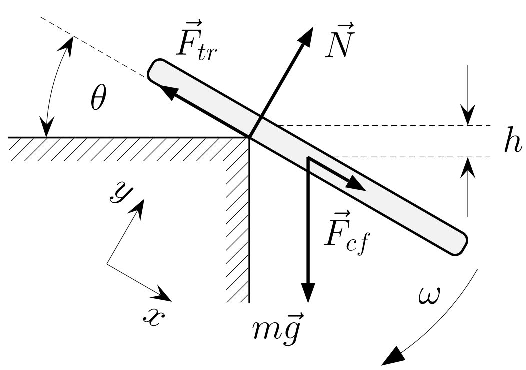
3.
   - Коефицијент корисног дејства је по дефиницији једнак $\eta = A/Q_{23}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, где је Q_{23} количина топлоте која се ваздуху преда и то на делу $2 \to 3$, а A извршен рад на једном циклусу $\boxed{\textbf{1 п}}$. Рад рачунамо као разлику примљене (Q_{23}) и отпуштене количине топлоте (Q_{41} на процесу $4 \to 1$): $A = Q_{23} - Q_{41}$, па је $\eta = 1 - Q_{41}/Q_{23}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Пошто су процеси $2 \to 3$ и $4 \to 1$ изобарски, важи да је $Q_{23} = n_m c_p(T_3 - T_2)$ и $Q_{41} = n_m c_p(T_4 - T_1)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, дакле $\eta = 1 - (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2)$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. За адијабате $1 \to 2$ и $3 \to 4$ важи $p_1^{(1-\gamma)/\gamma} T_1 = p_2^{(1-\gamma)/\gamma} T_2$ и $p_1^{(1-\gamma)/\gamma} T_4 = p_2^{(1-\gamma)/\gamma} T_3$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, па је $\eta = 1 - (p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1 - (p_1/p_2)^{2/7}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Означили смо моларни изобарски топлотни капацитет са c_p ($c_p = 7R/2$), а број молова ваздуха са n_m.
   - При брзини v и вучној сили F у току времена t два мотора развију рад једнак $A = 2Fvt$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, а са друге стране за то је потребно m масе горива која загрева ваздух изобарски, па је $Q_{23} = mq$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Дакле, $m = 2Fvt/\eta q$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, односно $m \approx 13990$ kg $\boxed{\textbf{1 п}}$.
   - Као што смо већ нашли, рад износи $A = n_m c_p(T_3 - T_2 - (T_4 - T_1)) = n_m c_p(T_1 + T_3 - T_2 - T_4)$, па имајући у виду да је $T_4/T_3 = T_1/T_2$, налазимо $A/(n_m c_p) = T_1 + T_3 - (T_2 + T_1 T_3/T_2)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Максимум овог израза кад T_2 варира налазимо на следећи начин. Члан $T_1 + T_3$ је константан и не зависи од T_2, њега дакле можемо игнорисати. Члан $T_2 + T_1 T_3/T_2$ се одузима, дакле хоћемо да га минимизујемо да цео израз буде максималан. По неједнакости аритметичке и геометријске средине, збир $T_2 + T_1 T_3/T_2$ (двострука аритметичка средина T_2 и $T_1 T_3/T_2$) достиже минимум и једнак двоструком корену производа сабирака $2\sqrt{T_1 T_3}$ (тј. њиховој двострукој геометријској средини), када су сабирци једнаки, тј. $T_1 T_3/T_2 = T_2$. Према томе, температура која даје максимални рад је $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, те је $A = 7n_m R(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3})/2 = 7n_m R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2/2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.
   Напомена: признати и друге начине доказивања да је $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$ температура која одговара максимуму.

4. На извесној температури T молекул ротира око свог центра масе јер су централне силе које изазивају ротацију атома једнаке по III Њутновом закону па је $m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2$. Овде су m_1 и m_2, односно r_1 і r_2, редом појединачне масе атома, односно њихова растојања од центра масе $\boxed{\textbf{4 п}}$. Како је $r_1 + r_2 = d$ и $m_1/m_2 \equiv \chi$ добија се да је $r_1 = d/(1+\chi)$ и $r_2 = d\chi/(1+\chi)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Укупан момент инерције око осе x, која је нормална на осу везе z, атома као материјалних тачака је $I_{xx} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Такође, постоји и ротација молекула око друге осе y која пролази кроз центар масе и ортогонална је на x и z, тј. $I_{yy} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. На основу закона о једнакој расподели средње енергије $k_B T/2$ по сваком степену слободе (k_B Болцманова константа) добија се да је кинетичка енергија ротације $I_{xx}\overline{\omega}_x^2/2 + I_{yy}\overline{\omega}_y^2/2 = 2 \times k_B T/2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Средња квадратна брзина молекула је $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{3k_B T}{m_1 + m_2}}$, те је

тако $k_B T = (m_1+m_2)\overline{v}^2/3$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Како је $\overline{\omega}_x^2 + \overline{\omega}_y^2 = \overline{\omega}^2$ следи да је $\overline{\omega} = \frac{\overline{v}}{d}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\chi} + \frac{1}{\sqrt{\chi}}\right)\frac{\overline{v}}{d}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Функција $f(\chi) = \sqrt{\chi} + \frac{1}{\sqrt{\chi}}$ досеже свој минимум у $\chi = 1$ узимајући вредност $f(1) = 2$. На тај начин, средња квадратна угаона брзина узима минималну вредност у случају истородних атома ($\chi = 1$) и износи $\overline{\omega}_{min} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{2\overline{v}}{d} = 2\overline{v}\sqrt{6}/3d$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

Напомена: дати исти број поена ако је такмичар користио формулу за унутрашњу енергију $U(T) = 5/2 n_m RT$ идеалног двоатомског гаса моларне масе n_m на температури T од које је одузео унутрашњу енергију $U(T) = 3/2 n_m RT$ идеалног једноатомског гаса исте моларне масе и температуре. Разлика $n_m RT$ управо одговара ротационом доприносу унутрашњој енергији двоатомског гаса.

5. На слици 1 је представљен тренутак када штап почиње да проклизава. Нека је угаона брзина штапа у том тренутку ω. Силе које делују на штап су: mg сила Земљине теже која делује из средишта на растојању $(\ell_2 - \ell_1)/2$ од ивице, сила нормалне реакције ивице стола N, сила трења F_{tr} која је у тренутку проклизавња максимална и једнака сили трења клизања $F_{tr} = \mu N$, и центрифугална сила у ротирајућем систему $F_{cf} = m\omega^2((\ell_2 - \ell_1)/2)$ делујући на центар масе $\boxed{\textbf{4 п}}$. Пошто је $\ell_1 + \ell_2 = \ell$, где је ℓ дужина штапа, онда је $(\ell_2 - \ell_1)/2 = \ell/6$, па се центар масе штапа спустио за $h = (\ell \sin\theta)/6$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. По Штајнеровој теореми момент инерције штапа око осе која пролази кроз ивицу стола је $I = m\ell^2/12 + m(\ell/6)^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Према закону одржања енергије, целокупна потенцијална енергија штапа mgh се претвори у његову кинетичку $I\omega^2/2$, па је $\omega^2\ell = 3g\sin\theta$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Како непосредно пре проклизавања нема кретања дуж x-осе онда је $F_{tr} = mg\sin\theta + F_{cf}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Дуж y-осе центар масе штапа има тренутно убрзање a у смеру ротације око ивице, па је по II Њутновом закону $ma = mg\cos\theta - N$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Ако је тренутно угаоно убрзање штапа око ивице стола α, где је $a = \alpha\ell/6$, онда важи да је $I\alpha = mg\cos\theta \times \ell/6$ (резултујући тренутни момент сила око ивице стола) $\boxed{\textbf{3 п}}$. Након краћих трансформација и елиминација се добија да је $\tan\theta = \mu/2 = \sqrt{3}/3$, те је $\theta = 30°$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.



Слика 1

Задатке припремили: ***Александар Буква***, Институт Лоренц, Универзитет у Лајдену
Др Михаило Чубровић, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***Божидар Николић***, Физички факултет, Београд