

Теоријски тест (30 поена)

Теоријски тест траје 5 сати и вреди укупно 30 поена.

Пре теста

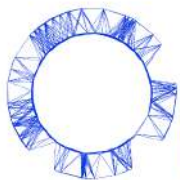
- Не смете отворати коверте са задацима пре звучног сигнала који означава почетак такмичења.
- Почетак и крај теста ће бити најављени звучним сигналом. На сваких сат времена, као и петнаест минута пре краја теста (пре последњег звучног сигнала), бићете обавештени о времену преосталом за рад.

Током теста

- Своје одговоре треба да уписујете на за то предвиђене листове за одговоре. Резултате својих проучавања уносите у одговарајуће табеле, поља или графике на одговарајућем листу за одговоре (који је означен словом A). За сваки задатак обезбеђени су додатни празни листови (означени словом W) за детаљнији рад. Водите рачуна да увек користите листове за детаљнији рад који припадају задатку који радите (број задатка је дат у заглављу листа). Уколико сте на било ком листу написали нешто што не желите да буде прегледано, прецртајте то. Користите само предњу страну сваког листа.
- Трудите се да budete што је могуће сажетији у својим одговорима; где год је то могуће, користите једначине, логичке операције и скице да представите своја размишљања. Избегавајте употребу дугих реченица.
- Бројне вредности треба да буду наведене са прихватљивим бројем значајних цифара.
- Често би требало да сте у стању да решите касније делове задатка иако претходни делови нису решени.
- Листа физичких константи је дата на следећој страни.
- Не смете напуштати место за рад без дозволе. Ако вам је потребна било каква помоћ (допуњавање боце са водом, покварени калкулатор, потреба за тоалетом итд.), привуците пажњу водича тима подизањем одговарајуће заставице: "H₂O" ако желите допуну боце са водом, "WC" ако имате потребу за тоалетом или "Help!" у свим осталим случајевима. Уколико су вам потребни додатни листови за детаљнији рад или листови за цртање графика, подигните заставицу "Help!".

На крају теста

- На крају теста морате да престанете са писањем.
- За сваки задатак, сложите одговарајуће листове у следећем редоследу: омот (C), питања (Q), листови за одговоре (A), листови за детаљнији рад (W).
- Све листове везане за један задатак ставите у исти коверат. Општа упутства (G) ставите у преостали посебан коверат. Предајте све празне листове. Није дозвољено изнети било који лист са теста.
- Останите на свом месту за рад током прикупљања коверата. Када сви коверти буду прикупљени, водич ће вас извести из сале за тест. Са собом понесите прибор за писање (једну хемијску оловку, једну графитну оловку, један лењир, једну гумицу/резач), као и калкулатор и боцу са водом.



LIGO-GW150914 (10 поена)

Опсерваторија за гравитационе таласе LIGO је 2015. године први пут детектовала пролазак гравитационих таласа (ГТ) кроз Земљу. Овај догађај, назван GW150914, је изазван таласима које су направиле две црне рупе које су кружиле једна око друге, по квази-кружним орбитама. У овом задатку ћете моћи да одредите неке физичке параметре система, из параметара детектованог сигнала.

Део А: Њутновске (конзервативне) орбите (3.0 поена)

- A.1** Посматрајмо систем од две звезде са масама M_1, M_2 , у тачкама \vec{r}_1, \vec{r}_2 , респективно. У систему центра масе је: 1.0pt

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

Нека су звезде изоловане од остатка универзума и нека се крећу нерелативистичким брзинама. На основу Њутнових закона вектор убрзања звезде масе M_1 се може написати као:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

где су $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. Наћи $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$, ако је G гравитациона константа [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$].

- A.2** Укупна енергија система од два тела, која се крећу по кружним орбитама може да се напише: 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

где су

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

редукована маса и укупна маса система,

Ω је угаона брзина сваке звезде, и L растојање једне звезде од друге $L = r_1 + r_2$. Одредите експлицитан облик члана $A(\mu, \Omega, L)$.

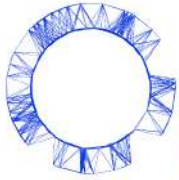
- A.3** Једначина 3 се може поједноставити до облика $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$. Одредите број β . 1.0pt

Део Б: Укључивање релативистичких губитака енергије (7.0 поена)

Тачна теорија гравитације, Општа теорија релативности, коју је формулисао Ајнштајн 1915. године, предвиђа да се гравитациона интеракција преноси брзином светлости. Преносиоци гравитационе интеракције су гравитациони таласи (ГТ). Они се емитују кад год се масе крећу убрзано, што за последицу има да систем маса губи енергију.

Нека је систем од два тачкаста тела изолован од остатка универзума. Ајнштајн је показао да при малим брзинама тела гравитациони таласи: 1) имају фреквенцу која је два пута већа од угаоне фреквенције; 2) могу се описати луминозношћу, односно, емитованом снагом \mathcal{P} , која је дата Ајн-

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-2

српски (Serbia)

штановом квадруполном формулом.

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Где је c брзина светлости $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. За систем од два тачкаста тела која се крећу у $x - y$ равни, компоненте Q_{ij} су дате у следећем изразу (i, j означавају врсту и колону)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

док је $Q_{ij} = 0$ за остале компоненте. Даље, (x_A, y_A) су координате тела A у систему центра масе.

- B.1** За кружне орбите описане у А.2 компоненте Q_{ij} се могу изразити као функције времена t : 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij}^{i \neq j} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Одредите k у зависности од Ω и нумеричке вредности константи a_i, b_i, c_{ij} .

- B.2** Покажите да је снага \mathcal{P} гравитационих таласа за овај систем, облика: 1.0pt

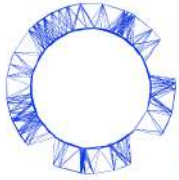
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

Колико је ξ ? [Ако нисте израчунали ξ , у даљем раду користите $\xi = 6.4$.]

- B.3** У случају у ком нема емисије гравитационих таласа два тела ће се кретати по фиксираним кружним орбитама бесконачно дуго. Са друге стране, емисија гравитационих таласа изазива губитак енергије, и путање током времена постају све мање. Покажите да је брзина промене кружне фреквенције $\frac{d\Omega}{dt}$ облика: 1.0pt

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

где је M_c такозвана *цвркутава маса*. Одредите M_c у зависности од M и μ . Ова маса показује повећање фреквенције током смањења кружне путање. [Термин "цвркутава" је инспирисан високим тоновима које производе мале птице.]



- B.4** Користећи горе наведене информације, нађите везу између угаоне брзине Ω и фреквенције гравитационих таласа f_{GW} . Знајући да је за сваку глатку функцију $F(t)$ и $a \neq 1$, 2.0pt

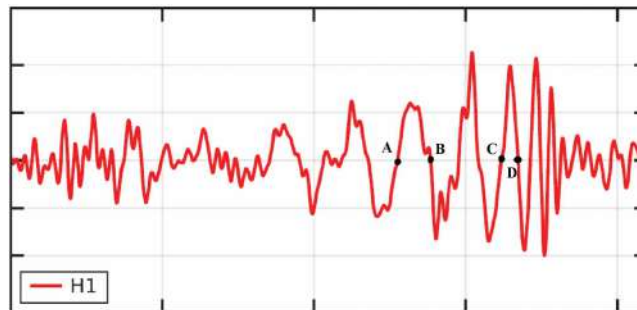
$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

где је χ константа а t_0 интеграциона константа, покажите да из једначине (10) следи да је фреквенција гравитационих таласа

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

и одредите параметар p .

Године 2015., 14 септембра LIGO детектор је регистровао GW150914. Детектор чине два крака која образују слово L, сваки по 4 km дугачак. Релативна промена дужине крака је приказана на слици 1. Краци детектора дају линеаран одговор на гравитационе таласе, и одговор имитира таласе. Овај сигнал потиче од две црне рупе које се крећу по квази-кружним путањама, док губитак енергије услед гравитационог зрачења изазива скупљање путање, и црне рупе ће се коначно и сударити. Тачка судара одговара, грубо, пику у сигналу после тачке D, на слици 1.



Слика 1. Релативна промена величине сваког крака LIGO детектора H1. На хоризонталној оси је време, док тачке A, B, C, D одговарају временима $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ у секундама, респективно.

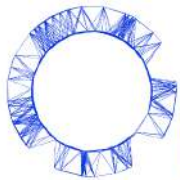
- B.5** Одредите $f_{\text{GW}}(t)$ са слике у тренуцима: 1.0pt

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{and} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

Претпоставите да једначина (12) важи до судара (што строго гледано није тачно) и да су масе два тела једнаке, одредите цвркућућу масу система, M_c , у јединицама масе Сунца, $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

- B.6** Одредите најмање растојање између два тела у тренутку $t_{\overline{CD}}$. Такође, одредите максималну величину сваког тела, R_{max} . Одредите R_\odot/R_{max} да бисте упоредили величину тела са полупречником Сунца, $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km. Одредите брзину тела у истом тренутку, v_{col} , и упоредите је са брзином светлости, v_{col}/c . 1.0pt

Theory

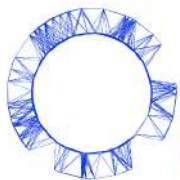


IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-4

српски (Serbia)

На основу добијених резултата закључите да су ово врло брза и врло компактна тела!



Где је неутрино? (10 поена)

Када се два протона веома великих енергија међусобно сударе у Великом хадронском сударачу (Large Hadron Collider (LHC)), као резултат судара може доћи до стварања неколико других честица, као што су електрони, миони, неутрина, кваркови, као и њихове одговарајуће анти-честице. Највећи део ових честица је могуће детектовати уз помоћ детектора честица који окружује место судара. На пример, створени кваркови учествују у процесу који се назива *хадронизација* током којег се од њих ствара сноп (пљусак) субатомских честица, који се назива "jet". Поред тога, јако магнетно поље које се налази унутар детектора доводи до тога да се путања наелектрисаних честица закриви, чак и оних честица које су веома брзе, односно имају велику енергију, па на основу закривљености путање можемо да им одредимо импулс. Такозвани ATLAS детектор у свом раду користи суперпроводне соленоиде који су у стању да произведу стационарно и хомогено магнетно поље индукције 2.00 Т у унутрашњем делу детектора унутар којег долази до судара честица. За наелектрисане честице чији импулс је мали, односно импулс им је испод одређене вредности, путања ће бити толико закривљена да ће се оне у магнетном пољу у ствари кретати по спирали, што значи да неће доћи до детектора, па детектор те честице чији импулс не прелази одређену вредност неће моћи детектовати. Осим тога детектор није у стању да детектује ниједан неутрино, али из потпуно других разлога, због саме природе неутрина који може да прође кроз детектор и уопште не интерагује са њим.

Подаци: маса мировања електрона, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; елементарно наелектрисуње, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

брзина светлости, $c = 3.00 \times 10^8$ m s⁻¹; диелектрична константа вакуума, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m⁻¹.

Део А. Физика ATLAS детектора (4.0 поена)

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.1 | Изведите израз за циклотронски радијус, r , кружне путање електрона на којег делује магнетно поље силом која је нормална на правац брзине електрона, и изразите тај радијус преко кинетичке енергије електрона, K , његовог наелектрисуња (по апсолутној вредности), e , масе, m , и магнетне индукције, B . Приликом извођења претпоставити да се електрон понаша као нерелативистичка класична честица. | 0.5pt |
|------------|---|-------|

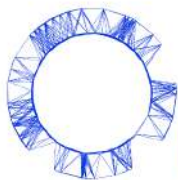
Електрони који настају у сударима унутар ATLAS детектора се морају третирати релативистички. Међутим добијени израз за циклотронски радијус важи и за релативистичко кретање када се узме у обзир релативистички импулс.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.2 | Израчунајте минималну вредност импулса електрона при којој ће он моћи да изађе из унутрашњег дела детектора у радијалном правцу. Унутрашњи део детектора има облик цилиндра чији је радијус 1.1 метра, а електрон настаје у судару који се збио тачно у центру тог цилиндра. Изразите ваш резултат у јединицама MeV/c. | 0.5pt |
|------------|--|-------|

Када релативистичка честица наелектрисуња e и масе мировања m има радијално (нормално на брзину) убрзање онда она око себе емитује електромагнетно зрачење које се назива синхротронско зрачење. Снага емитованог зрачења је дата са:

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

где је a убрзање и $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.



- A.3** Честица је ултарелативистичка ако се креће брзином која је блиска брзини светлости. Снага коју емитује ултарелативистичка честица се може изразити као: 1.0pt

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

где је ξ реалан број, n, k су природни бројеви, E је енергија наелектрисане честице, а B је магнетна индукција. Израчунати ξ, n и k .

- A.4** У ултарелативистичком лимиту енергија електрона као функција времена је дата са : 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

где је E_0 почетна енергија електрона. Израчунајте α и изразите га преко e, c, B, ϵ_0 и m .

- A.5** Размотрите електрон који је настао у судару у центру детектора, и од тачке судара се креће дуж радијуса унутрашњег дела детектора, при чему му је почетна енергија 100 GeV. Одредите колико ће енергије електрон изгубити услед синхротронског зрачења до тренутка када напусти унутрашњи део детектора? Резултат изразите у MeV. 0.5pt

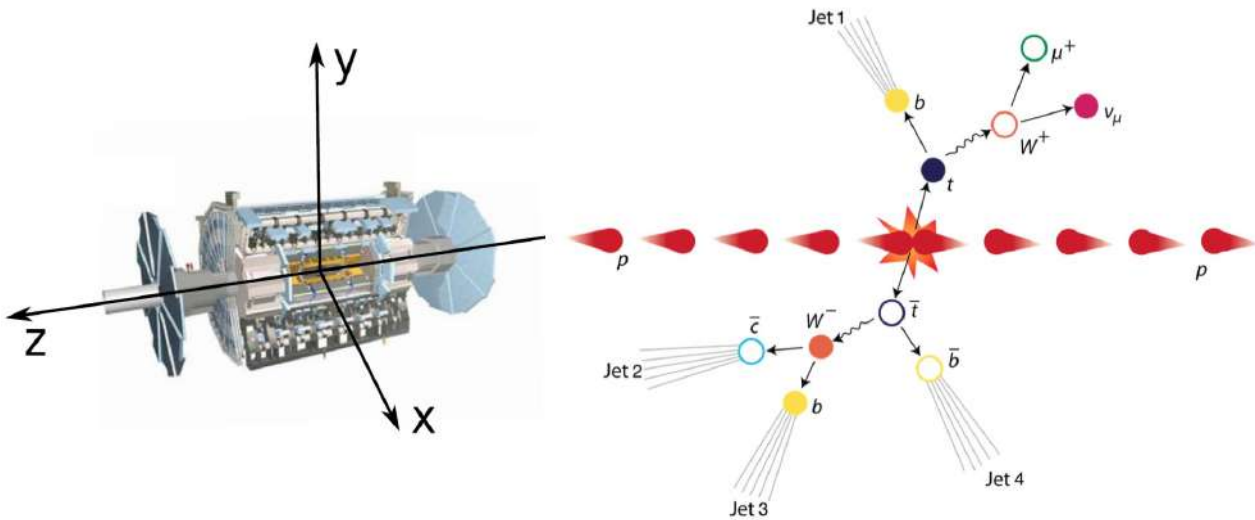
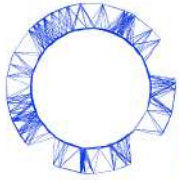
- A.6** Изведите израз за циклотронску фреквенцију електрона као функцију времена у ултарелативистичком лимиту. 0.5pt

Део Б. Проналажење неутрина (6.0 поена)

Судар два протона приказан на слици 1 доводи до стварања "top" кварка (t) и "anti-top" кварка (\bar{t}), најтежих до сада детектованих елементарних честица. "Top" кварк се распада на две честице и то W^+ бозон и "bottom" кварк (b), док се "anti-top" распада такође на две честице и то W^- бозон и "anti-bottom" кварк (\bar{b}). У ситуацији приказаној на слици 1, W^+ бозон се затим распада на анти-мион (μ^+) и неутрино (ν), док се W^- бозон распада на један кварк и један анти-кварк. У овом задатку је неопходно да утврдимо укупан импулс неутрина уз помоћ импулса оних честица које смо успели детектором да детектујемо. **Ради једноставности, сматрајте да су све честице и плускови у овом задатку безмасене (немају масу) изузев "top" кварка и W^\pm бозона.**

Импулси честица које настају у при распаду топ кварка могу бити одређени у експерименту (види табелу), изузев z-компоненте импулса неутрина. Укупни импулс у коначном стању честица ухваћених детектором је нула само у трансверзалној равни (xy -равни). Због тога, можете да израчунате трансверзалну компоненту импулса неутрина, тако што саберете све трансверзалне компоненте импулса детектованих честица и видите колико недостаје до нуле.

Дана 4. јуна 2015, у ATLAS експерименту кој се реализовао LHC детектован је протон-протон судар у 00:21:24 GMT+1 сличан оном који је приказан на Слици 1.



Слика 1. Схематски приказ координатног система у детектору ATLAS (лево) и протон-протон судара (десно).

Импулси последње насталих честица при распаду "top" кварка, укључујући и неутрино, је приказан у табели за сваку од компоненти импулса.

Честица	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
анти-мион (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
jet 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
неутрино (ν)	-104.1	+5.3	—

- B.1** Извести једначину која даје везу између квадрата масе W^+ бозона, $m_{W^+}^2$, и компоненти импулса неутрина и анти-миона које су приказане у горњој табели. Једначину треба изразити преко следећих трансверзалних компоненти импулса неутрина и анти-миона

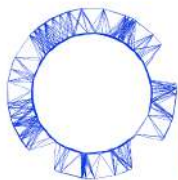
$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j} \quad \text{и} \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$

као и преко њихових z -компоненти импулса, $p_z^{(\mu)}$ и $p_z^{(\nu)}$.

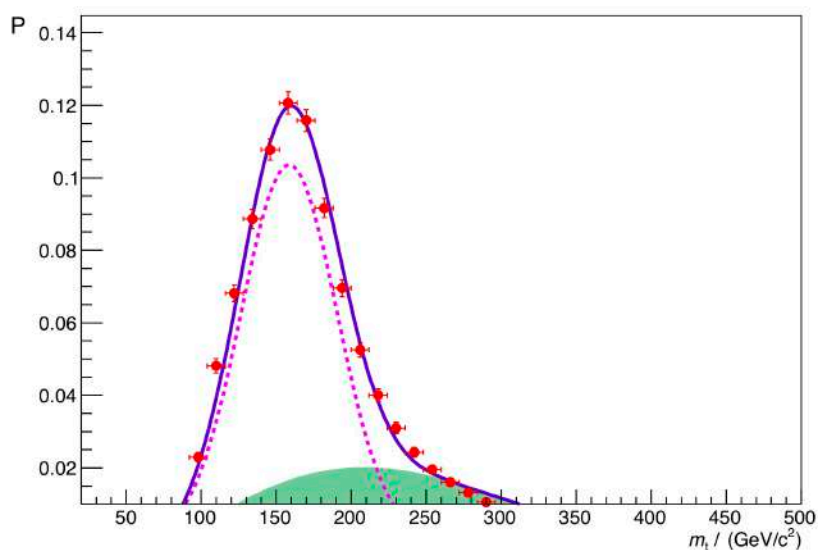
- B.2** Узимајући да је маса W^+ бозона $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ израчунајте две могуће вредности за z -компоненту импулса неутрина, $p_z^{(\nu)}$. Изразите резултат у GeV/c .

- B.3** Израчунајте масу "top" кварка за свако од два могућа решења из претходног питања. Изразите резултат у GeV/c .
[Ако нисте израчунали компоненте импулса неутрина у питању Б.2, користите следеће вредности

$$p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c \quad \text{и} \quad p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c.]$$



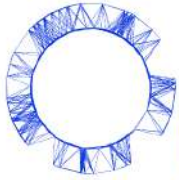
Нормализовани број судара при мерењу масе топ кварка (што је одређено у експерименту), има две компоненте: такозвани "сигнал" (који одговара распаду топ кварка) и "шум" (допринос догађаја који не укључују топ кварк). Експериментални резултати укључују обе врсте процеса, слика 2.



Слика 2. Расподела масе "top" кварка: т.ј. релативни број догађаја E (од енглеског "events"), унутар интервала масе од $12 \text{ GeV}/c^2$ приказан у зависности од масе "top" кварка. Тачке (пуни кружићи са крстом) представљају експерименталне податке. Испрекидана линија одговара "сигналу" а осенчени део одговара "фону".

B.4 Узимајући у обзир дату расподелу масе "top" кварка, за које од два претходно пронађена решења можете рећи да је више вероватно да је тачно? 1.0pt

B.5 Израчунајте растојање које успе да пређе "top" кварк пре него што се распадне, користећи претходно највероватније решење. Претпоставите да је средње време живота "top" кварка, у систему у којем "top" кварк мирује, $5 \times 10^{-25} \text{ s}$. 1.0pt



Физика живих система (10 поена)

Податак: нормални атмосферски притисак $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Део А. Физика крвотока (4,5 поена)

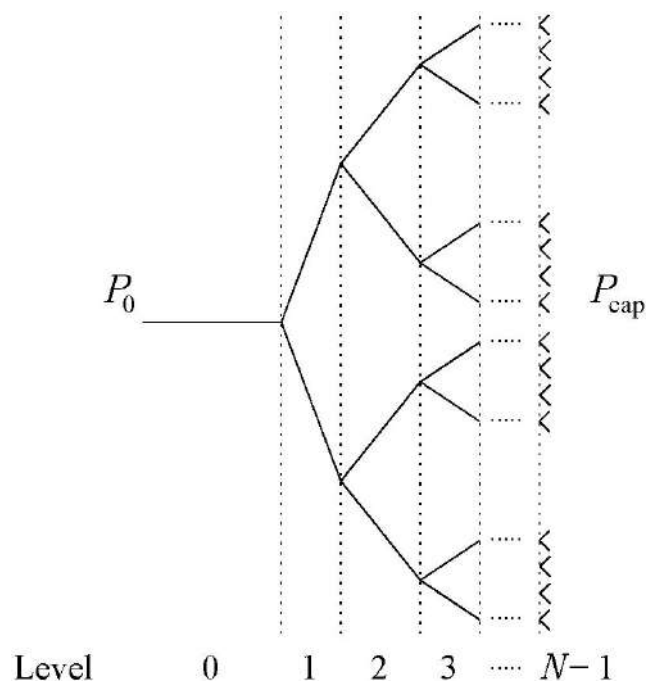
У овом делу задатка проучаваћете два једноставна модела струјања крви кроз крвне судове.

Крвни судови су приближно цилиндричног облика. У случају стационарног и нетурбулентног струјања нестишљивог флуида кроз цилиндричну цев чврстих зидова, разлика притисака на крајевима цеви је дата изразом

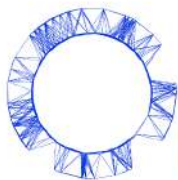
$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

где су ℓ и r редом дужина и полупречник цеви, η коефицијент вискозности флуида, док је Q запремински проток флуида, тј. запремина флуида која у јединици времена прође кроз попречни пресек цеви. Иако је претходни израз изведен под претпоставком стационарног струјања и не узима у обзир деформабилност зидова цеви, неправилни облик цеви, као ни унутрашњу структуру флуида (нпр. чињеницу да се крв састоји од крвних ћелија и крвне плазме), тај израз ипак даје добар ред величине разлике притисака на крајевима реалног крвног суда. Штавише, једначина (1) је формално аналогна Омовом закону; запремински проток флуида је аналогон електричне струје, разлика притисака је аналогон напона, док је фактор $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ аналогон отпорности.

Размотримо симетричну мрежу артериола приказану на слици 1. Артериоле су крвни судови малог пречника који полазе из артерија и снабдевају крвљу капиларни систем ткива. На сваком нивоу мреже долази до рачвања сваког крвног суда на два идентична крвна суда који припадају наредном нивоу мреже. Међутим, крвни судови на вишим нивоима мреже су краћи и мањег пречника: сматрајте да су полупречници и дужине крвних судова на два узастопна нивоа i и $i+1$ мреже повезани релацијама $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$, односно $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.



Слика 1. Мрежа артериола.



A.1 Изведите израз за запремински проток Q_i кроз крвни суд на нивоу i мреже. Резултат изразити у функцији укупног броја нивоа N у мрежи, коефицијента вискозности η , полупречника r_0 и дужине ℓ_0 првог крвног суда у мрежи и разлике $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ између притиска P_0 на уласку у артериолу на нивоу 0 и притиска P_{cap} у капиларном систему ткива. 1.3pt

A.2 Израчунати запремински проток Q_0 кроз артериолу на нивоу 0 узимајући да је њен полупречник 6.0×10^{-5} m, док њена дужина износи 2.0×10^{-3} m. Притисак на улазу у артериолу на нивоу 0 је 55 mmHg. Мрежа артериола садржи $N = 6$ нивоа који повезују артериолу на нивоу 0 са капиларним системом ткива, где притисак износи 30 mmHg. Коефицијент вискозности крви је $\eta = 3.5 \times 10^{-3}$ kg m⁻¹ s⁻¹. Резултат изразите у јединицама ml/h. 0.5pt

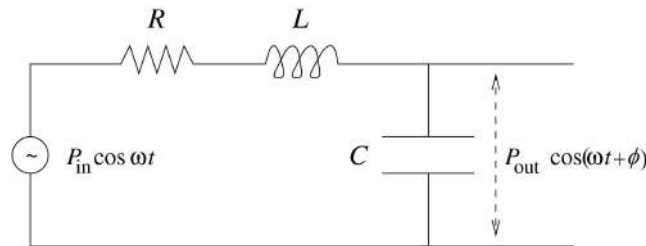
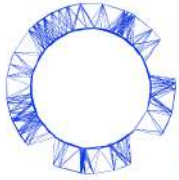
Крвни суд као LCR коло

Апроксимација у којој се крвни судови третирају као цилиндричне цеви крутих зидова није задовољавајућа из више разлога. Ако је струјање временски зависно, као што је случај када описујемо периодично струјање крви током срчаног (кардијалног) циклуса, веома је важно узети у обзир промене пречника крвног суда које су последица временских варијација притиска. Штавише, познато је да су промене притиска у ширим крвним судовима током срчаног циклуса значајне, док су амплитуде осцилација притиска у ужим крвним судовима знатно мање, тј. струјање је практично стационарно.

Услед повећања притиска у крвном суду еластичних зидова, долази до повећања његовог пречника, што омогућава да крвни суд прихвати додатне количине крви које ће из њега истећи када притисак опадне. У том смислу, у оквиру овог једноставног модела, еластичност зидова крвног суда се може узети у обзир додавањем кондензатора у модел. Такође, опис временски зависних струјања треба да узме у обзир и инертност флуида, која је повезана са густином флуида која износи $\rho = 1.05 \times 10^3$ kg m⁻³. Инертност флуида се у оквиру разматраног модела може узети у обзир додавањем индуктивности у модел. На слици 2 је приказана схема еквивалентног електричног кола којим се у оквиру разматраног модела репрезентује појединачни крвни суд. Еквивалентна капацитивност и индуктивност су редом дате изразима

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh}, \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

где је h дебљина зида крвног суда, док је E Јунгов модул ткива од којег је крвни суд начињен. Јунгов модул описује промену димензија ткива крвног суда која је последица дејства силе. Јунгов модул има димензије притиска; за ткиво од којег су начињене артериоле, Јунгов модул је реда величине $E = 0.06$ МПа.



Слика 2. Схема еквивалентног електричног кола којим се у оквиру разматраног модела репрезентује појединачни крвни суд.

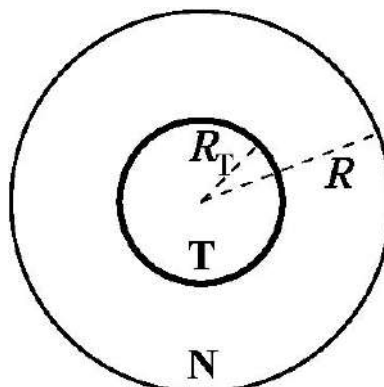
A.3 Ако је струјање крви кроз крвни суд периодично са кружном фреквенцијом ω , изведите (у стационарном режиму) израз за амплитуду притиска на излазу крвног суда P_{out} у функцији амплитуде притиска на улазу крвног суда P_{in} , еквивалентног отпора R , индуктивности L и капацитета C . Формулисати услов који треба да задовољавају параметри η , ρ , E , h , r и ℓ тако да, за мале вредности фреквенције, амплитуда осцилација притиска на излазу крвног суда буде мања од P_{in} . 2.0pt

A.4 За мрежу крвних судова разматрану у делу **A.2**, проценити максималну дебљину зида артериоле h при којој ће услов добијен у делу **A.3** бити задовољен. Сматрати да је h исто за све крвне судове у мрежи, тј. независно од нивоа на којем се крвни суд налази. 0.7pt

Део В. Раст тумора (5,5 поена)

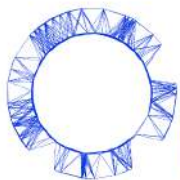
Раст тумора је сложен процес током којег се биолошки механизми, као што су пролиферација ћелија и природна селекција, преплићу са физичким механизмима. У овом делу задатка размотрићемо једноставни модел раста тумора који узима у обзир повећање притиска које је уочено код чврстих тумора.

Посматрајмо групу нормалних ћелија која чини нормално ткиво и која је окружена нерастегљивом мембраном. Та мембрана чини да ткиво увек испуњава запремину лопте полупречника R (видети слику 3).



Слика 3. Једноставни модел тумора.

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-4

српски (Serbia)

На почетку процеса раста тумора, притисак у свакој тачки (нормалног) ткива је једнак атмосферском притиску.

У тренутку $t = 0$, туморско ткиво почне да расте из центра сфере приказане на слици 3; како се величина тумора повећава, тако притисак унутар нормалног ткива расте. Узмите да су оба ткива (како нормално N, тако и туморско T) стишљива, тако да њихове густине ρ_N и ρ_T линеарно расту са порастом притиска:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N}\right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right), \quad (3)$$

где је ρ_0 густина ткива на атмосферском притиску, p допунски притисак у односу на атмосферски притисак (разлика између притиска и атмосферског притиска), док су K_N , K_T редом модули стишљивости нормалног, односно туморског ткива (модул стишљивости је реципрочна вредност коефицијента стишљивости). Туморска ткива су у општем случају теже деформабилна, тј. имају већи модул стишљивости, у односу на нормална ткива.

- B.1** Током раста тумора може се сматрати да се маса нормалног ткива не мења. 1.0pt
Изразити удео запремине туморског ткива у укупној запремини ткива, $v = V_T/V$, у функцији односа маса туморског (M_T) и нормалног (M_N) ткива $\mu = M_T/M_N$ и односа модула стишљивости $\kappa = K_N/K_T$.

Приликом третмана канцера, осим хемотерапије и радиотерапије, понекад се користи и хипертермија. Хипертермија подразумева да се канцерогене ћелије селективно загревају од нормалне температуре људског тела, која износи 37°C , до температура изнад 43°C , што доводи до њихове смрти. Истраживачи активно раде на синтези угљеничних нанотуба окружених полимерима које би могле да се вежу за ћелије тумора. Када се ткиво изложи дејству зрачења из блиског инфрацрвеног дела спектра, највећи део зрачења ће бити апсорбован у области у којој су нанотубе, што ће довести до њиховог загревања, а тиме и до загревања туморских ћелија.

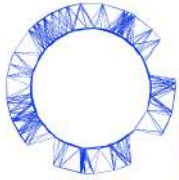
Сматрати да туморско ткиво, нормално ткиво, и ткиво које их окружује имају константан коефицијент топлотне проводљивости k , тако да је, у случају геометрије приказане на слици 3, количина топлоте која у јединици времена прође кроз јединицу површине сфере полупречника r једнака производу константе k и извода температуре по r . Узети да су нанотубе равномерно распоређене у запремини туморског ткива и да, услед загревања, емитују снагу по јединици запремине једнаку \mathcal{P} . Претпоставите да је, на веома великим растојањима од тумора, температура једнака нормалној температури људског тела.

- B.2** Извести израз за температуру у центру туморског ткива у стационарном стању у функцији \mathcal{P} , k , нормалне температуре људског тела и полупречника туморског ткива R_T . 1.7pt

- B.3** Израчунати минималну снагу по јединици запремине \mathcal{P}_{\min} која је неопходна да се све туморске ћелије у туморском ткиву полупречника 5.0 cm загреју до температуре изнад 43°C . Коефицијент топлотне проводљивости ткива је $k = 0.60\text{ W K}^{-1}\text{m}^{-1}$. 0.5pt

Претпоставимо да се туморско ткиво снабдева кисеоником и хранљивим материјама помоћу мреже крвних судова са разгранатом структуром као у делу **A.1**. Током раста тумора, када (допунски) притисак p у туморском ткиву постане већи од (допунског) притиска P_{cap} у капиларном систему ткива (на последњем нивоу мреже), полупречници капилара ће се смањити за мали износ δr . Када

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-5

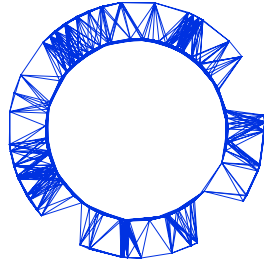
српски (Serbia)

притисак у туморском ткиву достигне критичну вредност p_c (што одговара смањењу полупречника капилара за δr_c), капилари ће пући, што ће угрозити снабдевање туморског ткива. Притисак и промена полупречника су повезани феноменолошким изразом

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Узмите да само капилари (најмањи крвни судови, који се налазе на нивоу $N - 1$ мреже) мењају свој полупречник услед повећања притиска у туморском ткиву.

- B.4** У линеарном режиму, када је разлика $p - P_{\text{cap}}$ веома мала, изразити релативно смањење запремноског протока $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ кроз капиларе у функцији односа $v = V_T/V$ запремине туморског ткива и укупне запремине ткива, K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} и P_{cap} . 2.3pt



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Solutions to Theory Problem 1

LIGO-GW150914

(V. Cardoso, C. Herdeiro)

July 15, 2018

v6.0

Confidential

GW150914 (10 points)

Part A. Newtonian (conservative) orbits (3.0 points)

A.1 Apply Newton's law to mass M_1 :

$$M_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (1)$$

Use, from eq. (1) of the question sheet

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1, \quad (2)$$

in eq. (1) above, to obtain

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2 r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1}. \quad (3)$$

A.1

1.0pt

$$n = 3, \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}.$$

A.2 The total energy of the system is the sum of the two kinetic energies plus the gravitational potential energy. For circular motions, the linear velocity of each of the masses reads

$$|\vec{v}_1| = r_1 \Omega, \quad |\vec{v}_2| = r_2 \Omega, \quad (4)$$

Thus, the total energy is

$$E = \frac{1}{2}(M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \Omega^2 - \frac{GM_1 M_2}{L}, \quad (5)$$

Now,

$$(M_1 r_1 - M_2 r_2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2. \quad (6)$$

Thus,

$$E = \frac{1}{2} \mu L^2 \Omega^2 - G \frac{M \mu}{L}. \quad (7)$$

A.2

1.0pt

$$A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu L^2 \Omega^2.$$

A.3 Energy (3) of the question sheet can be interpreted as describing a system of a mass μ in a circular orbit with angular velocity Ω , radius L , around a mass M (at rest). Equating the gravitational acceleration to the centripetal acceleration:

$$G \frac{M}{L^2} = \Omega^2 L. \quad (8)$$

This is indeed Kepler's third law (for circular orbits). Then, from (7),

$$E = -\frac{1}{2} G \frac{M \mu}{L}. \quad (9)$$

A.3

1.0pt

$$\beta = -\frac{1}{2}.$$

Part B - Introducing relativistic dissipation (7.0 points)

B.1 Some simple trigonometry for the x, y motion of the masses (in an appropriate Cartesian system) yields:

$$(x_1, y_1) = r_1 (\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)), \quad (x_2, y_2) = -r_2 (\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)). \quad (10)$$

Then,

$$Q_{ij} = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \cos^2(\Omega t) - \frac{2}{3} \sin^2(\Omega t) & 2 \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) & 0 \\ 2 \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) & \frac{4}{3} \sin^2(\Omega t) - \frac{2}{3} \cos^2(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

or, using some simple trigonometry and (6),

$$Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & \frac{1}{3} - \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

B.1

1.0pt

$$k = 2\Omega, \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = -\frac{2}{3}, \quad b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 0, c_{12} = c_{21} = 1, c_{ij} \stackrel{\text{otherwise}}{=} 0.$$

B.2 First take the derivatives:

$$\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} = 4\Omega^3 \mu L^2 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Then perform the sum:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} (4\Omega^3 \mu L^2)^2 [2 \sin^2(2\Omega t) + 2 \cos^2(2\Omega t)] = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (14)$$

B.2

1.0pt

$$\xi = \frac{32}{5}.$$

B.3 Now we assume a sequence of Keplerian orbits, with decreasing energy, which is being taken from the system by the GWs.

First, from (9), differentiating with respect to time,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM\mu}{2L^2} \frac{dL}{dt}, \quad (15)$$

Since this loss of energy is due to GWs, we equate it with (minus) the luminosity of GWs, given by (14)

$$\frac{GM\mu}{2L^2} \frac{dL}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (16)$$

We can eliminate the L and dL/dt dependence in this equation in terms of Ω and $d\Omega/dt$, by using Kepler's third law (8), which relates:

$$L^3 = G \frac{M}{\Omega^2}, \quad \frac{dL}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{L}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (17)$$

Substituting in (16), we obtain:

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^3 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2 \equiv \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5. \quad (18)$$

B.3

1.0pt

$$M_c = (\mu^3 M^2)^{1/5}.$$

B.4 Angular and cycle frequencies are related as $\Omega = 2\pi f$. From the information provided above: *GWs have a frequency which is twice as large as the orbital frequency*, we have

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{f_{\text{GW}}}{2}. \quad (19)$$

Formula (10) of the question sheet has the form

$$\frac{d\Omega}{dt} = \chi \Omega^{11/3}, \quad \chi \equiv \frac{96 (GM_c)^{5/3}}{5 c^5}. \quad (20)$$

Thus, from (11) of the question sheet

$$\Omega(t)^{-8/3} = \frac{8}{3} \chi (t_0 - t), \quad (21)$$

or, using (20) and the definition of χ gives

$$f_{\text{GW}}^{-8/3}(t) = \frac{(8\pi)^{8/3}}{5} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} (t_0 - t). \quad (22)$$

B.4

2.0pt

$$p = 1.$$

B.5 From the figure, we consider the two Δt 's as half periods. Thus, the (cycle) GW frequency is $f_{\text{GW}} = 1/(2\Delta t)$. Then, the four given points allow us to compute the frequency at the mean time of the two intervals as

	$t_{\overline{AB}}$	$t_{\overline{CD}}$
t (s)	0.0045	0.037
f_{GW} (Hz)	$(2 \times 0.009)^{-1}$	$(2 \times 0.006)^{-1}$

Now, using (22) we have two pairs of (f_{GW}, t) values for two unknowns (t_0, M_c) . Expressing (22) for both $t_{\overline{AB}}$ and $t_{\overline{CD}}$ and dividing the two equations we obtain:

$$t_0 = \frac{A t_{\overline{CD}} - t_{\overline{AB}}}{A - 1}, \quad A \equiv \left(\frac{f_{\text{GW}}(t_{\overline{AB}})}{f_{\text{GW}}(t_{\overline{CD}})}\right)^{-8/3}. \quad (23)$$

Replacing by the numerical values, $A \simeq 2.95$ and $t_0 \simeq 0.054$ s. Now we can use (22) for either of the two values $t_{\overline{AB}}$ or $t_{\overline{CD}}$ and determine M_c . One obtains for the chirp mass

$$M_c \simeq 6 \times 10^{31} \text{ kg} \simeq 30 \times M_{\odot}. \quad (24)$$

Thus, the total mass M is

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 69 \times M_{\odot}. \quad (25)$$

This result is actually remarkably close to the best estimates using the full theory of General Relativity! [Even though the actual objects do not have precisely equal masses and the theory we have just used is not valid very close to the collision.]

B.5

$$M_c \simeq 30 \times M_\odot, \quad M \simeq 69 \times M_\odot.$$

1.0pt

B.6 From (8), Kepler's law states that $L = (GM/\Omega^2)^{1/3}$. The second pair of points highlighted in the plot correspond to the cycle prior to merger. Thus, we use (19) to obtain the orbital angular velocity at t_{CD} :

$$\Omega_{t_{\text{CD}}} \sim 2.6 \times 10^2 \text{ rad/s}. \quad (26)$$

Then, using the total mass (25) we find

$$L \sim 5 \times 10^2 \text{ km}. \quad (27)$$

Thus, these objects have a maximum radius of $R_{\text{max}} \sim 250 \text{ km}$. Hence they have over 30 times more mass and,

$$\frac{R_\odot}{R_{\text{max}}} \sim 3 \times 10^3 \quad (28)$$

they are 3000 times smaller than the Sun and!

Their linear velocity is

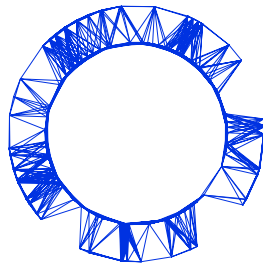
$$v_{\text{col}} = \frac{L}{2} \Omega \simeq 7 \times 10^4 \text{ km/s}. \quad (29)$$

They are moving at over 20% of the velocity of light!

B.6

$$L_{\text{collision}} \sim 5 \times 10^2 \text{ km}, \quad \frac{R_\odot}{R_{\text{max}}} \sim 3 \times 10^3, \quad \frac{v_{\text{col}}}{c} \sim 0.2.$$

1.0pt



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Solutions to Theory Problem 2

Where is the neutrino?

(Miguel C N Fiolhais and António Onofre)

July 24, 2018

v1.2

Confidential

Where is the neutrino? (10 points)

Part A. ATLAS Detector physics (4.0 points)

A.1

The magnetic force is the centripetal force:

$$m \frac{v^2}{r} = evB \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}.$$

First express the velocity in terms of the kinetic energy,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}},$$

and then insert it in the expression above for the radius to get

A.1

$$r = \frac{\sqrt{2Km}}{eB}.$$

0.5pt

A.2

The radius of the circular motion of a charged particle in the presence of a uniform magnetic field is given by,

$$r = \frac{mv}{eB}.$$

This formula is valid in the relativistic scenario if the mass correction, $m \rightarrow \gamma m$ is included:

$$r = \frac{\gamma mv}{eB} = \frac{p}{eB} \Rightarrow p = reB.$$

Note that the radius of the circular motion is half the radius of the inner part of the detector. One obtains [1 MeV/c = 5.34 × 10⁻²² m kg s⁻¹]

A.2

$$p = 330 \text{ MeV}/c.$$

0.5pt

A.3

The acceleration for the particle is $a = \frac{evB}{\gamma m} \sim \frac{ecB}{\gamma m}$, in the ultrarelativistic limit. Then,

$$P = \frac{e^4 c^2 \gamma^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 \gamma^2 m^2} = \frac{e^4 \gamma^2 c^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^5 m^2}.$$

Since $E = \gamma mc^2$ we can obtain $\gamma^2 c^4 = \frac{E^2}{m^2}$ and, finally,

$$P = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} E^2 B^2.$$

Therefore,

A.3

$$\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5 \quad \text{and} \quad k = 4.$$

1.0pt

A.4

The power emitted by the particle is given by,

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} E^2 B^2.$$

The energy of the particle as a function of time can be calculated from

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{1}{E^2} dE = -\int_0^t \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} B^2 dt,$$

where $E(0) = E_0$. This leads to,

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} t \quad \Rightarrow \quad E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

with

A.4

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

1.0pt

A.5

If the initial energy of the electron is 100 GeV, the radius of curvature is extremely large ($r = \frac{E}{eBc} \approx 167$ m). Therefore, in approximation, one can consider the electron is moving in the inner part of the ATLAS detector along a straight line. The time of flight of the electron is $t = R/c$, where $R = 1.1$ m is the radius of the inner part of the detector. The total energy lost due to synchrotron radiation is,

$$\Delta E = E(R/c) - E_0 = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 \frac{R}{c}} - E_0 \approx -\alpha E_0^2 \frac{R}{c}$$

and

A.5

$$\Delta E = -56 \text{ MeV}.$$

0.5pt

A.6

In the ultrarelativistic limit, $v \approx c$ and $E \approx pc$. The cyclotron frequency is,

$$\omega(t) = \frac{c}{r(t)} = \frac{ecB}{p(t)} = \frac{ec^2B}{E(t)}$$

A.6

$$\omega(t) = \frac{ec^2B}{E_0} \left(1 + \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} E_0 t \right).$$

0.5pt

Part B. Finding the neutrino (6.0 points)

B.1

Since the W^+ boson decays into an anti-muon and a neutrino, one can use principles of conservation of energy and linear momentum to calculate the unknown $p_z^{(\nu)}$ of the neutrino. Moreover, the anti-muon and the neutrino can be considered massless, which implies that the magnitude of their momenta (times c) and their energies are the same. Therefore, the conservation of linear momentum can be expressed as

$$\vec{p}^{(W)} = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)},$$

and the conservation of energy as,

$$E^{(W)} = cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)}.$$

In addition, one can also relate the energy and the momentum of the W^+ boson through its mass,

$$m_W^2 = (E^{(W)})^2/c^4 - (p^{(W)})^2/c^2$$

which leads to a quadratic equation on $p_z^{(\nu)}$,

$$\begin{aligned} m_W^2 &= [(p^{(\mu)} + p^{(\nu)})^2 - (\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)})^2] / c^2 \\ &= (2p^{(\mu)}p^{(\nu)} - 2\vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)}) / c^2 \end{aligned}$$

B.1

$$m_W^2 = \frac{1}{c^2} \left(2p^{(\mu)} \sqrt{(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2} - 2\vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - 2p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)} \right).$$

1.5pt

B.2

The numerical substitution directly in the answer of B.1, using

$$p^{(\mu)} = 37.2 \text{ GeV}/c \quad m_W^2 c^2 = 6464.2 (\text{GeV}/c)^2 \quad p_T^{(\nu)2} = 10864.9 (\text{GeV}/c)^2$$

$$\vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} = 2439.3 (\text{GeV}/c)^2 \quad p_z^{(\mu)} = -12.4 \text{ GeV}/c,$$

leads to

$$6464.2 = 74.4 \sqrt{10864.9 + p_z^{(\nu)2}} - 4878.6 + 24.8 p_z^{(\nu)}.$$

This is a quadratic equation, equivalent to

$$0.88889 p_z^{(\nu)2} + 101.64 p_z^{(\nu)} - 12378 = 0$$

whose solutions are:

B.2

1.5pt

$$p_z^{(\nu)} = 74.0 \text{ GeV}/c \quad \text{or} \quad p_z^{(\nu)} = -188.3 \text{ GeV}/c.$$

The general solution of the equation above in B.1 leads to

$$p_z^{(\nu)} = \frac{2\vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} p_z^{(\mu)} + m_W^2 c^2 p_z^{(\mu)}}{2(p_T^{(\mu)})^2} \pm \frac{p^{(\mu)} \sqrt{-4(p_T^{(\mu)})^2 (p_T^{(\nu)})^2 + 4(\vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)})^2 + 4\vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} m_W^2 c^2 + m_W^4 c^4}}{2(p_T^{(\mu)})^2}$$

Numerical substitution leads to the above mentioned values for $p_z^{(\nu)}$.

B.3

The final state particles of the top quark decay are the anti-muon, the neutrino and jet 1. Since the neutrino is now fully reconstructed the energy and linear momentum of the top quark can be calculated as,

$$\begin{aligned} E^{(t)} &= cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)} + cp^{(j_1)} \\ \vec{p}^{(t)} &= \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)} + \vec{p}^{(j_1)}. \end{aligned}$$

The top quark mass is,

$$\begin{aligned} m_t &= \sqrt{(E^{(t)})^2/c^4 - (\vec{p}^{(t)})^2/c^2} \\ &= c^{-1} \sqrt{(p^{(\mu)} + p^{(\nu)} + p^{(j_1)})^2 - (\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)} + \vec{p}^{(j_1)})^2}. \end{aligned}$$

The substitution of values leads to two possible masses:

B.3

1.0pt

$$m_t = 169.3 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{or} \quad m_t = 311.2 \text{ GeV}/c^2$$

B.4

According to the frequency distribution for signal (dashed line), the probability of the $m_t = 169.3 \text{ GeV}/c^2$ solution is roughly 0.1 while the probability of the $m_t = 311.2 \text{ GeV}/c^2$ solution is below 0.01. Therefore,

B.4

The most likely candidate is the $m_t = 169.3 \text{ GeV}/c^2$ solution.

1.0pt

B.5

The top quark energy for the most likely candidate is $E^{(t)} = cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)} + cp^{(j_1)} = 272.6 \text{ GeV}$.

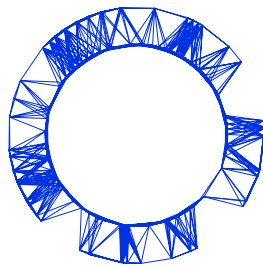
$$d = vt = v\gamma t_0 = \frac{p^{(t)}}{m_t} t_0 = ct_0 \sqrt{\frac{E^{(t)^2}}{m_t^2 c^4} - 1}.$$

B.5

$$d = 2 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

1.0pt

IPhO 2018
Lisbon, Portugal



Solutions to Theory Problem 3

Physics of Live Systems

(Rui Travasso, Lucília Brito)

July 24, 2018

v1.0

Confidential

Physics of Live Systems (10 points)

Part A. The physics of blood flow (4.5 points)

A.1

Since the vessel network is symmetrical, the flow in a vessel of level $i + 1$ is half the flow in a vessel of level i .

In this way, we can sum the pressure differences in all levels:

$$\Delta P = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i R_i = Q_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{2^i}.$$

Introducing the radii dependences yields

$$\Delta P = Q_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{8\ell_i \eta}{2^i \pi r_i^4} = Q_0 \frac{8\ell_0 \eta}{\pi r_0^4} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{2^{4i/3}}{2^i 2^{i/3}} = Q_0 N \frac{8\ell_0 \eta}{\pi r_0^4}.$$

Therefore

$$Q_0 = \Delta P \frac{\pi r_0^4}{8N\ell_0 \eta}.$$

Hence, the flow rate for a vessel network in level i is

A.1

1.3pt

$$Q_i = \Delta P \frac{\pi r_0^4}{2^{i+3} N \ell_0 \eta}.$$

A.2

Replace values in the formula and change units appropriately

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\Delta P \pi r_0^4}{8N\ell_0 \eta} = \\ &= \frac{(55 - 30) \times 1.013 \times 10^5 \times 3.1415 \times (6.0 \times 10^{-5})^4}{760 \times 48 \times 2.0 \times 10^{-3} \times 3.5 \times 10^{-3}} = 4.0 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

to obtain the final value in the requested unites:

A.2

0.5pt

$$Q_0 \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

A.3

The current is given by

$$I = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}.$$

The pressure difference in the capacitor is

$$P_{\text{out}} e^{i(\omega t + \phi)} = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} \frac{1}{i\omega C} = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{i\omega C R - \omega^2 LC + 1}.$$

The amplitude is

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}}.$$

To be smaller than P_{in} , for $\omega \rightarrow 0$:

$$(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2 > 1 \iff -2CL + C^2 R^2 > 0.$$

Replacing the expressions for L , C , and R we get: $\frac{64\eta^2 \ell^2}{3Ehr^3\rho} > 1$.

A.3
2.0pt

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}}.$$

Condition:

$$\frac{64\eta^2 \ell^2}{3Ehr^3\rho} > 1.$$

Alternative way to obtain P_{out} :

The amplitude of the current in the equivalent circuit is $I_0 = \frac{P_{\text{in}}}{Z}$, where

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

is the modulus of the impedance. Hence, the voltage amplitude in the capacitor is

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{\omega C} \times I_0 = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}.$$

A.4

The previous condition can also be expressed as

$$h < \frac{64\eta^2 \ell^2}{3Er^3\rho}.$$

For the network referred to in **A.2**

$$h < \frac{64\eta^2 \ell_0^2 \times 2^i}{3 \times 2^{2i/3} E r_0^3 \rho} = \frac{64 \times (3.5 \times 10^{-3})^2 \times (2.0 \times 10^{-3})^2}{3 \times 0.06 \times 10^6 \times (6.0 \times 10^{-5})^3 \times 1.05 \times 10^3} \times 2^{i/3} = 7.7 \times 10^{-5} \times 2^{i/3}.$$

For $i = 0$, in the worse case scenario,

$$h_{\max} = 7.7 \times 10^{-5} \times 2^0 = 7.7 \times 10^{-5} \text{ m}$$

This value is certainly observed in these vessels since their radius range from $18 \mu\text{m}$ to $60 \mu\text{m}$. A wall width smaller than $80 \mu\text{m}$ is certainly reasonable.

A.4 Maximum $h = 8 \times 10^{-5} \text{ m}$

0.7pt

Part B. Tumor growth (5.5 points)

B.1

The expressions for the masses of tumour and normal tissue are written as:

$$\begin{cases} M_T = V_T \rho_T = V_T \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) \\ M_N = V \rho_0 = (V - V_T) \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N}\right) \end{cases}$$

The pressure, p , can be expressed as

$$p = \frac{M_T K_T}{V_T \rho_0} - K_T$$

and, then, used in the equation for M_N :

$$M_N = (V - V_T) \frac{M_N}{V} \left[\left(1 - \frac{K_T}{K_N}\right) + \frac{M_T V K_T}{V_T M_N K_N} \right]$$

Simplifying and rearranging the terms, the equation for v becomes

$$(1 - \kappa) v^2 - (1 + \mu) v + \mu = 0,$$

for which the solution is (the other solution of the quadratic equation is not physically relevant since does not lead to $v = 0$ for $\mu = 0$)

B.1

$$v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4\mu(1 - \kappa)}}{2(1 - \kappa)}.$$

1.0pt

B.2

For $r < R_T$, the conservation of energy implies that

$$4\pi r^2 (-k) \frac{dT}{dr} = \mathcal{P} \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Therefore, the temperature difference to $37\text{ }^\circ\text{C} = 310.15\text{ K}$, $\Delta T(r)$, is given by

$$\Delta T(r) = -\frac{\mathcal{P}r^2}{6k} + C,$$

where C is a constant.

For $r > R_T$, the conservation of energy implies that

$$4\pi r^2(-k)\frac{dT}{dr} = \mathcal{P}\frac{4}{3}\pi R_T^3.$$

Therefore, the temperature difference to $37\text{ }^\circ\text{C}$ is

$$\Delta T(r) = \frac{\mathcal{P}R_T^3}{3kr}.$$

In this case there is no constant, since very far away the increase in temperature is zero.

Matching the two solutions at $r = R_T$ gives

$$C = \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}.$$

Therefore the temperature at the centre of the tumour, in SI units, is

B.2 Temperature: $310.15 + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}$.	1.7pt
--	-------

B.3

The increase in temperature at the tumour surface (the lower temperature in the tumour) is

$$\Delta T(R_T) = \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k}.$$

This increase should be equal to 6.0 K . Therefore,

$$\mathcal{P} = \frac{3\Delta Tk}{R_T^2} = \frac{3 \times 6 \times 0.6}{0.05^2} = 4.3\text{ kW/m}^3.$$

B.3 $\mathcal{P}_{\min} = 4.3\text{ kW/m}^3$.	0.5pt
---	-------

B.4

We can relate δr with the pressure in the tumour, using the relation given in the text up to leading order in $p - P_{\text{cap}}$: $\delta r = \frac{p - P_{\text{cap}}}{2(p_c - P_{\text{cap}})} \delta r_c$. Therefore, if $p - P_{\text{cap}}$ is very small, also it is δr .

The pressure can be related with the volume. We know that

$$\frac{M_N}{V_N} = \frac{\rho_0 V}{V - V_T} = \frac{\rho_0}{1 - v} = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N}\right).$$

And so $p = \frac{K_N v}{1-v}$.

When the thinner vessels are narrower, the flow rate in the main vessel is altered:

$$\Delta P = (Q_0 + \delta Q_0) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{8\ell_i \eta}{2^i \pi r_i^4} = (Q_0 + \delta Q_0) \frac{8\ell_0 \eta}{\pi r_0^4} \left(\sum_{i=0}^{N-2} \frac{2^{4i/3}}{2^i 2^{i/3}} + \frac{2^{4(N-1)/3}}{2^{N-1} 2^{(N-1)/3} \left(1 - \frac{\delta r}{r_0/2^{(N-1)/3}}\right)^4} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta P \simeq (Q_0 + \delta Q_0) \frac{\Delta P}{NQ_0} \left(N - 1 + 1 + \frac{4\delta r}{r_{N-1}} \right)$$

Noting that $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} = \frac{\delta Q_0}{Q_0}$, we obtain

$$1 + \frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} = \frac{1}{1 + \frac{4\delta r}{Nr_{N-1}}} \simeq 1 - \frac{4\delta r}{Nr_{N-1}}.$$

And so:

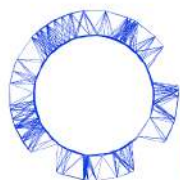
$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq -\frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}.$$

Putting all together

B.4

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq -\frac{2}{N} \frac{K_N v - (1-v)P_{\text{cap}}}{(1-v)(p_c - P_{\text{cap}})} \frac{\delta r_c}{r_{N-1}}.$$

2.3pt



Општа упутства

Експериментални тест се ради 5 сати и вреди 20 поена.

Пре теста

- Не смете отворати коверте са задацима пре звучног сигнала који означава почетак такмичења.
- Почетак и крај теста ће бити најављени звучним сигналом. На сваких сат времена, као и петнаест минута пре краја теста (пре последњег звучног сигнала), бићете обавештени о времену преосталом за рад.

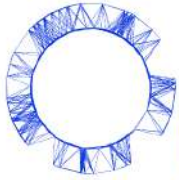
Током теста

- Своје одговоре треба да уписујете на за то предвиђене листове за одговоре. Резултате својих проучавања уносите у одговарајуће табеле, поља или графике на одговарајућем листу за одговоре (који је означен словом A). За сваки задатак обезбеђени су додатни празни листови (означени словом W) за детаљнији рад. Водите рачуна да увек користите листове за детаљнији рад који припадају задатку који радите (број задатка је дат у заглављу листа). Уколико сте на било ком листу написали нешто што не желите да буде прегледано, прецртајте то. Користите само предњу страну сваког листа.
- Трудите се да будете што је могуће сажетији у својим одговорима; где год је то могуће, користите једначине, логичке операције и скице да представите своја размишљања. Избегавајте употребу дугих реченица.
- Није потребно процењивати експерименталне грешке осим ако се то експлицитно не тражи. Ипак, бројне вредности треба да буду наведене са прихватљивим бројем значајних цифара. Такође, сами треба да одлучите о прихватљивом броју мерених тачака или поновљених мерења, ако за то не постоје посебна упутства.
- Често би требало да сте у стању да решите касније делове задатка иако претходни делови нису решени.
- Не смете напуштати место за рад без дозволе. Ако вам је потребна било каква помоћ (допуњавање боце са водом, покварени калкулатор, потреба за тоалетом итд.), привуците пажњу водича тима подизањем одговарајуће заставице: "H₂O" ако желите допуну боце са водом, "WC" ако имате потребу за тоалетом или "Help!" у свим осталим случајевима. Уколико су вам потребни додатни листови за детаљнији рад или листови за цртање графика, подигните заставицу "Help!".

На крају теста

- На крају теста морате да престанете са писањем.
- За сваки задатак, сложите одговарајуће листове у следећем редоследу: омот (C), питања (Q), листови за одговоре (A), листови за детаљнији рад (W).
- Све листове везане за један задатак ставите у исти коверат. Општа упутства (G) ставите у преостали посебан коверат. Предајте све празне листове. Није дозвољено изнети било који лист са теста.
- Вратите прибор за писање (једну хемијску оловку, једну графитну оловку, један лењир, једну гумицу/резач), као и калкулатор, у провидну кесу са патент затварачем (рајсфершлусом).

Experiment

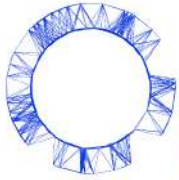


IPhO 2018
Lisbon, Portugal

G0-2

српски (Serbia)

- Останите на свом месту за рад током прикупљања коверата. Када сви коверти буду прикупљени, водич ће вас извести из сале за тест. Кесу са прибором за писање оставите на столу, а боцу са водом понесите.

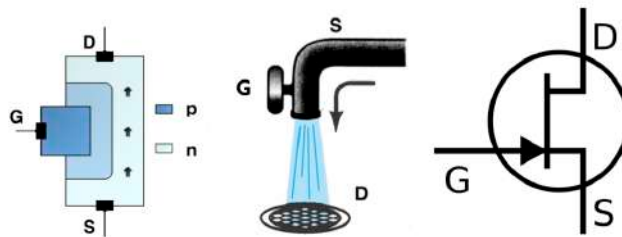


Папирни транзистор (10 поена)

Модерна електроника почива на једноставном, а моћном уређају: транзистору, који се може користити као прекидач и као појачивач. Прекидачки режим рада се користи за чување и обраду дигиталне информације.

У овом задатку ћемо анализирати два типа транзистора са ефектом поља (FET транзистора): JFET (Junction Field Effect Transistor) и TFT (Thin Film Transistor).

Сада ћемо укратко описати принцип рада FET транзистора. FET је нелинеарни уређај са три конектора (Gate, у даљем тексту G, Source, у даљем тексту S, и Drain, у даљем тексту D) помоћу којег можемо контролисати струју између конектора S и D контролишући напон примењен између конектора G и S. Можемо успоставити једноставну, али несавршену, аналогију између чесме и FET транзистора, према којој конектор G код транзистора игра улогу покретне ручице којом се регулише проток воде кроз славину.



Слика 1. Схема JFET транзистора n-типа (лево), аналогија између JFET транзистора и чесме (у средини) и симбол JFET транзистора (десно). Стрелице на схеми JFET транзистора означавају смер у којем електрична струја између S и D тече кроз уски канал n-типа. Ширина канала зависи од напона примењеног између G и S.

Функционисање JFET-а почива на својствима спојева између различитих полупроводничких материјала, на пример p-допираног и n-допираног силицијума, чему и дугује своје име. JFET има уски канал кроз који тече струја између S и D; код JFET-а n-типа, тај канал је начињен од полупроводника n-типа. Ширину канала је могуће прецизно контролисати доводећи **негативан** напон између G и S, $V_{GS} = V_G - V_S$. При фиксираним V_{GS} , струја која тече између S и D је нелинеарна функција напона примењеног између D и S, $V_{DS} = V_D - V_S$. Међутим, при малим вредностима напона V_{DS} , зависност струје од напона јесте линеарна, па JFET поседује омски карактер. Излазни отпор $R_{DS} = V_{DS}/I_{DS}$, међутим, зависи од примењеног напона V_{GS} по закону

$$R_{DS} = \frac{R_{DS}^0}{1 - V_{GS}/V_P}, \quad (1)$$

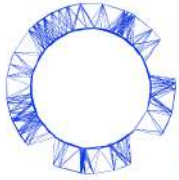
где је R_{DS}^0 излазни отпор при $V_{GS} = 0$, док је $V_P < 0$ карактеристика JFET транзистора, тзв. *pinch-off напон*. При pinch-off напону, FET блокира проток струје.

При било ком фиксираним $V_{GS} > V_P$, са порастом напона V_{DS} , струја између S и D ће почети да одступа од линеарног закона и ући ће у неком моменту у засићење. Нека је I_{DSS} струја засићења при $V_{GS} = 0$. У режиму засићења (велики примењени напон V_{DS}), струја засићења зависи од V_{GS} по закону

$$I_{DS} = I_{DSS} (1 - V_{GS}/V_P)^2. \quad (2)$$

Истакнимо две веома важне карактеристике JFET-а. Иако напонам контролисана излазна отпорност JFET-а може бити веома мала, улазна отпорност ($R_{GS} = V_{GS}/I_{GS}$) је екстремно висока, типично

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-2

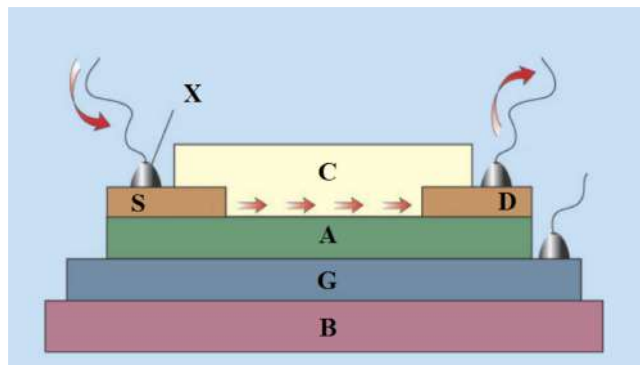
српски (Serbia)

већа од $10^9 \Omega$, тако да овај уређај користи веома слабу улазну струју. Такође, капацитивност малог JFET-а је веома мала, што га чини брзим уређајем који може да се "отвара" и "затвара" са фреквенцијом изнад MHz.

Сада ћемо описати механизам функционисања другог типа FET-а, TFT-а.

Као и било који други FET, TFT омогућава контролу струје између два конектора, S и D, помоћу потенцијала на који се поставља трећи конектор, G.

Конектор G је физички одвојен од полупроводничког слоја помоћу диелектрика који је одговоран за успостављање вертикалног електричног поља које контролише слободне носиоце наелектрисања у полупроводнику (ефекат поља). Диелектрични слој може бити замењен електролитичком мембраном, нпр. папиром, у којој постоје слободни јони (видети слику 2). У том случају, напон примењен на G ће учинити да се јони акумулирају на граници са полупроводником, што ће модулисати густину слободних носилаца у полупроводнику (тзв. Electrolyte Gated Transistor - EGT). Истраживачи са универзитета Universidade Nova у Лисабону су 2008. године остварили пионирски подухват развивши папирни транзистор и светски су лидеру у том пољу.



Слика 2. Схема папирног TFT-а који ћете користити у овом задатку. S - Source; D - Drain; G - Gate; A - папир (диелектрик); B - супстрат; C - полупроводнички слој (галијум-индијум-цинк оксид (GIZO)); X - метални контакти. Стрелице означавају конвенционални смер струје.

Слично JFET-овима, TFT-ови могу да раде у два основна режима, линеарном режиму и режиму засићења. Насупрот JFET-у, унутрашња капацитивност TFT-а јесте релевантан параметар за функционисање уређаја.

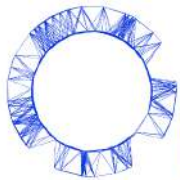
У овом експерименталном задатку ћете испитати како функционишу JFET n-типа и папирни TFT.

Конструисаћете карактеристичне криве ових уређаја мерећи струју између S and D (I_{DS}) при различитим напонима примењеним на G (V_{GS}), односно D (V_{DS}).

Две најважније карактеристичне криве су излазна крива и трансфер крива:

- **излазна крива:** мери се струја између S и D (I_{DS}) и црта се график њене зависности од напона између S и D (V_{DS}), при чему се V_{DS} постепено мења од 0 V до највише +3 V, док се V_{GS} држи константим;
- **трансфер крива:** I_{DS} се мери и црта се график њене зависности од V_{GS} . V_{DS} се при томе држи константним на одређеној вредности при којој транзистор ради у **режиму засићења**, док се V_{GS} постепено мења од -3 до 0 V.

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

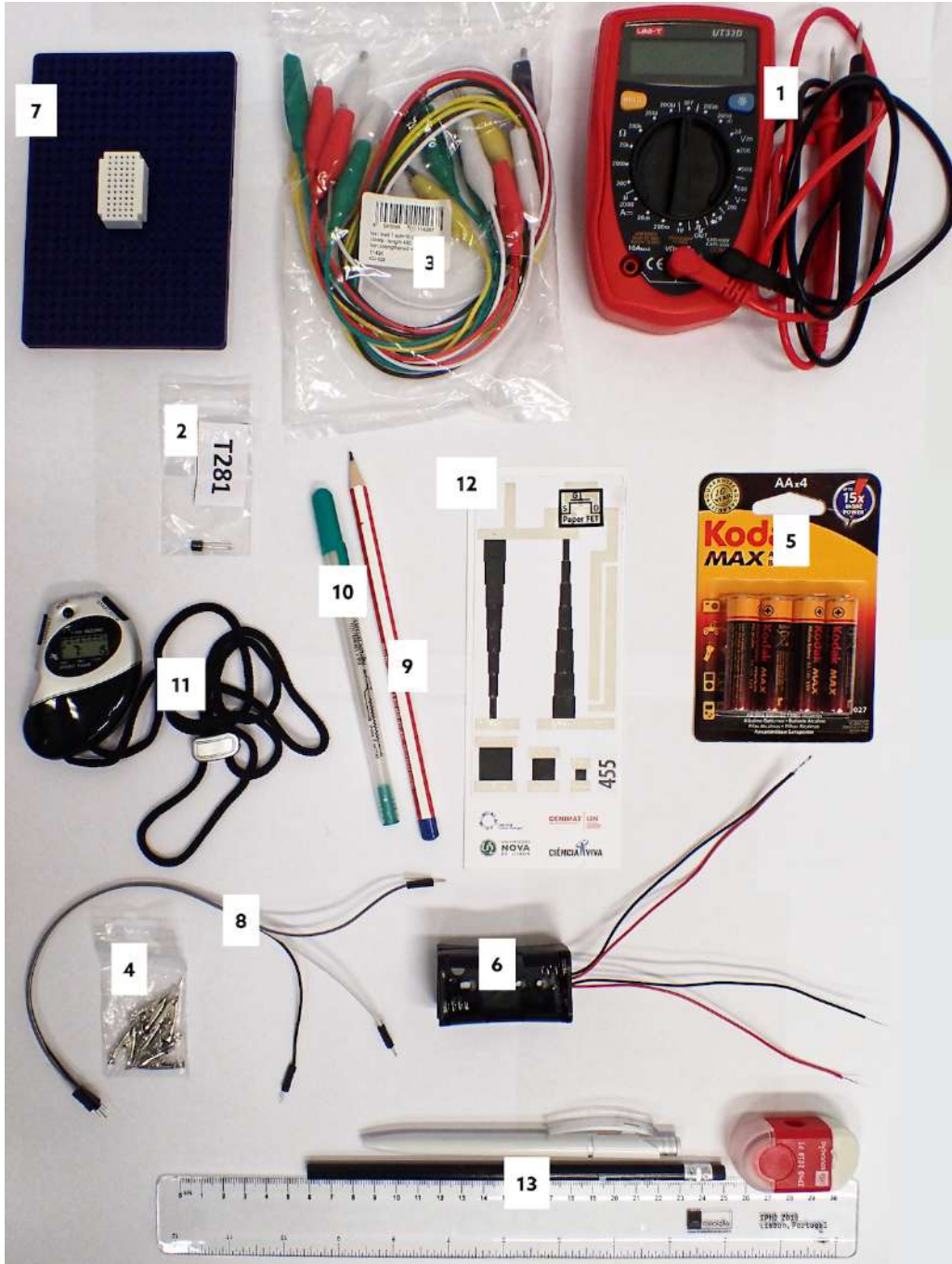
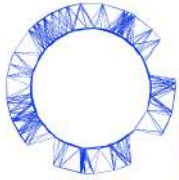
Q1-3

српски (Serbia)

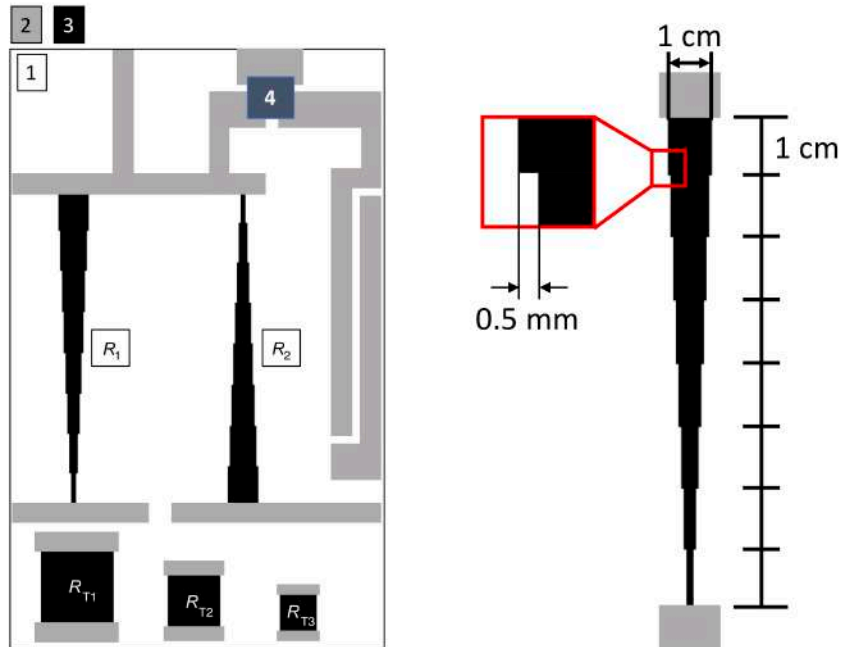
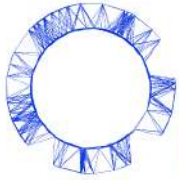
Апаратура

За решавање експерименталног задатка на располагању имате (видети слику 3):

1. мултиметар,
2. JFET транзистор (налази се у обележеној пластичној кеси),
3. 10 каблова са алигатор штипаљкама,
4. 4 алигатор штипаљке у засебној пластичној кеси,
5. паковање батерија ($4 \times 1.5 \text{ V}$),
6. држач за батерије,
7. експериментална плочица (mini-breadboard) на постолу,
8. 3 жичана краткоспојника (jumper wire),
9. HB графитну оловку,
10. оловку која садржи проводно сребрно мастило (Circuit Scribe),
11. хронометар,
12. лист папира који садржи штампано коло и TFT са папиром као диелектричним слојем (видети слику 4),
13. кесу са прибором за писање (1 хемијска оловка, 1 графитна оловка, 1 гумица/резач, 1 лењир).



Слика 3. Апаратура.

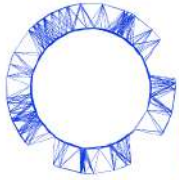


Слика 4. Лево: лист папира са штампаним колима: папир (1), сребрни проводници (2), угљенични отпорници (3), папирни транзистор (4), отпорности разделника напона (R_1 и R_2). Десно: физичке димензије отпорности разделника напона (кораци од по 0.5 mm су константни за сваки сегмент).

Важно упозорење:

Не савијати лист папира који садржи штампана кола и транзистор јер то може довести до њиховог оштећења. Током мерења, трудите се да тај лист папира буде раван да бисте добили што боље резултате.

Током мерења имајте на уму следеће **важне информације**:



- мултиметар треба увек да ради у **DC режиму**;
- мултиметар нема могућност аутоматског прилагођавања мерног опсега тако да приликом мерења треба сами да пажљиво одаберете најприхватљивији опсег. У случају прекорачења мерног опсега, на левој страни дисплеја мултиметра ћете видети "1" (за позитивне вредности), односно "-1" (за негативне вредности). Тада треба да одаберете ужи мерни опсег.
- У опсегу слабих струја, мултиметар је заштићен осигурачем од 315 mA. **Немојте кратко спајати** батерију и мултиметар да не би дошло до прегоревана осигурача због прејаке струје!
- Унутрашњи отпор мултиметра када се користи као волтметар износи $10\text{ M}\Omega$.
- Када се мултиметар користи као амперметар, зависност његовог унутрашњег отпора од мерног опсега је дата у следећој табели:

Опсег	R_{int}/Ω
200 mA	1.0
20 mA	10
2 mA	100

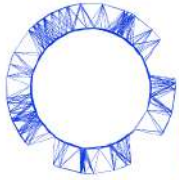
Табела 1. Унутрашњи отпор мултиметра када се користи као амперметар.

Дакле, када се мултиметар користи као амперметар у DC режиму, пад напона између његових крајева износи 200 mV унутар целог интервала сваког од 3 доступна мерна опсега у DC режиму.

Део А. Прорачун параметара електричног кола (2,5 поена)

Потребне вредности напона V_{DS} и V_{GS} ћете добити користећи угљеничне отпорнике одштампане на папиру (R_1 и R_2 на слици 4) помоћу којих ћете конструисати разделник напона. Отпори R_1 и R_2 чине укупни отпор разделника напона R_{tot} . Када се на крајеве отпорника, на пример R_1 , доведе константни напон (у овом случају, напон од око 3 V се постиже прикључивањем на батерију), електрични потенцијал се мења од око 3 V на позитивном контакту батерије (V_{in}) до 0 V на уземљењу. У даљем тексту, уземљење ће означавати заједнички контакт два паковања батерија. Жељена вредност излазног напона V_{out} (видети слику 5) се постиже поделом R_{tot} на два отпора (R_x и R_y на слици 5).

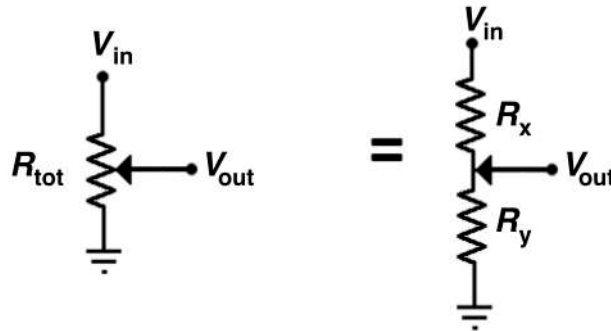
Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-7

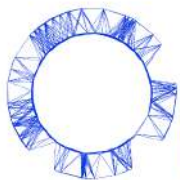
српски (Serbia)



Слика 5. Електрична схема разделника напона.

A.1	Изразите излазни напон V_{out} у функцији V_{in} и отпора R_x и R_y .	0.2pt
A.2	Мултиметром измерите отпоре три тест отпорника у дну листа (R_{T1} , R_{T2} и R_{T3}). Мерења поновите довољан број пута мерећи отпор између разних позиција на сребрним контактима. Добијене вредности унесите на лист за одговоре. Израчунајте средњу вредност и процените грешку отпора сваког од тест отпорника.	0.5pt
A.3	Покажите да отпор танког филма облика квадрата не зависи од дужине странице квадрата. Тај отпор, који не зависи од површине филма, је <i>специфична отпорност листа (sheet resistance)</i> и означава се са R_{\square} .	0.3pt
A.4	Користећи податке прикупљене у делу А.2, израчунајте средњу вредност специфичне отпорности листа угљеничног филма. Израчунајте специфичну отпорност ρ материјала филма и процените њену грешку узимајући у обзир да је дебелина сваког од три филма $20 \pm 1 \mu\text{m}$.	0.4pt
A.5	Покажите да су теоријске вредности отпорности R_1 и R_2 дате као $R_1 = R_2 = \kappa R_{\square}$, $\kappa \sim 14.2897$. Измерите R_1 и R_2 и упишите вредности на лист за одговоре. Израчунајте експерименталну вредност величине κ и упоредите је са теоријском вредношћу.	0.5pt

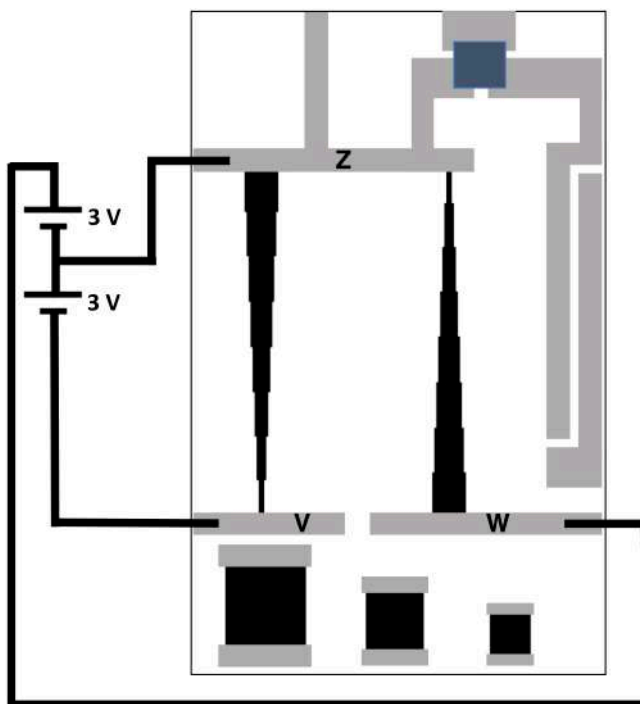
Користећи оловку са сребрним мастилом, нацртајте 7 еквидистантних проводних линија дуж сваког од датих отпорника као што је приказано на слици 6. Ове линије ће играти улогу контактних тачака разделника напона.



Слика 6. Пример цртања контактних линија и начин обележавања контактних тачака.

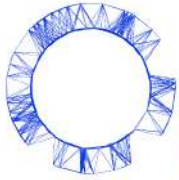
A.6 За сваку контактну тачку појединачно, измерите вредности отпорности R_x и R_y . R_x се дефинише као отпорност између контактне тачке и тачке V (у случају отпорника 1), односно W (у случају отпорника 2), док се R_y дефинише као отпорност између контактне тачке и тачке Z. Резултате мерења унесите у одговарајуће табеле на листу за одговоре. 0.3pt

Поставите 4 AA батерије у држач за батерије. Водите рачуна да батерије поставите са коректним поларитетом и пазите да не направите кратак спој. Потом повезите држач за батерије као што је означено на слици 7. Приликом повезивања водите рачуна да не оштетите сребрне проводнике алигатор штипаљкама.



Слика 7. Повезивање батерије.

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-9

српски (Serbia)

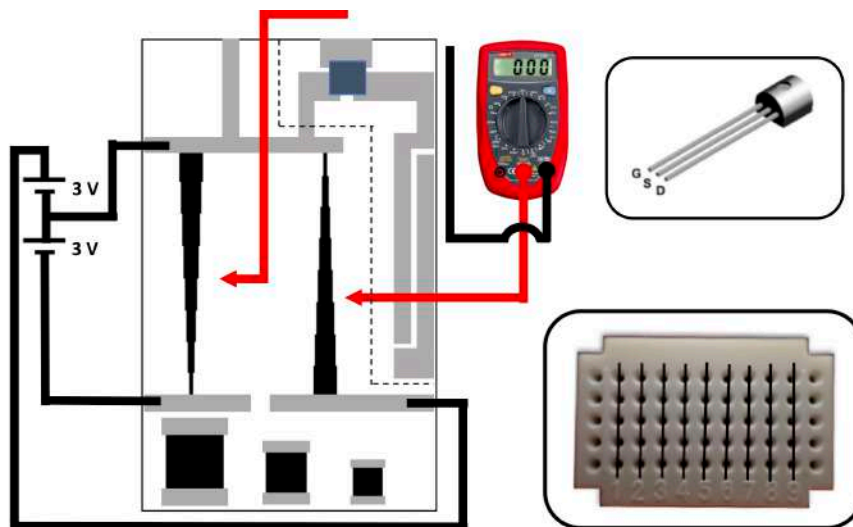
A.7 За сваку контактну тачку измерите потенцијал V_{out} те тачке у односу на тачку Z и унесите измерене вредности у табеле дате на листу за одговоре. 0.3pt

Овим се завршава део који се тиче прорачуна параметара електричног кола. У наставку задатка ћете мерити карактеристичне криве JFET транзистора.

Део В. Карактеристичне криве за комерцијални JFET транзистор (4 поена)

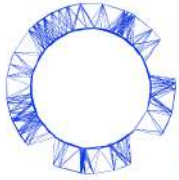
Да бисте окарактерисали JFET транзистор користите поставку приказану на слици 8. Почните са идентификацијом три конектора (S, D, и G) вашег JFET транзистора – **веома је важно да правилно идентификујете конекторе јер JFET уређај није симетричан!** У ту сврху можете искористити експерименталну плочицу (minibreadboard), причвшћену за подлогу, у коју ћете уметнути JFET транзистор. Искористите жичане краткоспојнике (jumper wires) који су вам на располагању, а које се такође могу уметнути рупице које се налазе на експерименталној плочици.

Користећи каблове који су вам на располагању повежите G и S транзистора са нултим потенцијалом (тачку Z у колу поставите на 0 V). Током рада на овом делу задатка конектор S JFET транзистора увек мора бити спојен са уземљењем, односно спојен на нулти потенцијал.



Слика 8. Поставка за одређивање карактеристичних кривих JFET транзистора. У делу Б задатка не користи се онај део кола који се на слици налази у области оивиченој испрекиданом линијом, а у којој је TFT. На слици у горњем десном боксу је приказано како треба идентификовати Gate, Source и Drain JFET транзистора. У доњем боксу је приказано како су рупице у експерименталној плочици повезане. Све рупице унутар једне нумерисане колоне су међусобно повезане, и изоловане су од рупица из осталих колона. Приказана слика мултиметра не сугерише како треба извршити мерење, она је само илустративна. Сами треба да поставите ротирајући прекидач мултиметра у одговарајући режим за мерење, у зависности од тога коју величину желите да мерите. Ваша је дужност и да окретањем ротирајућег прекидача подесите опсег мерења.

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

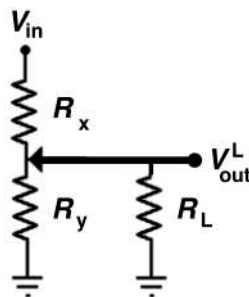
Q1-10

српски (Serbia)

B.1 Повежите Gate конектор (G) транзистора са нултим напонем ($V_{GS} = 0$). Након тога повежите један од каблова мултиметра, који треба да је у DC режиму за мерење једносмерне струје, са drain конектором (D) транзистора, а са другим каблом мултиметра додирните тачку са највећим напонем који је доступан на разделнику напона. Упишите вредност струје I_{DS} на одговарајуће место на листу за одговоре. 0.2pt

B.2 Измерите струју I_{DS} при различитим позитивним напонима које прикључујете на Drain конектор, при чему се напон $V_{GS} = 0$ не мења. Након тога измените коло тако што ћете применити негативни напон између Source и Gate конектора транзистора ($V_{GS} < 0$). Затим, поновите мерења струје I_{DS} као функцију примењеног позитивног напона између Drain и Source конектора. Измерене вредности унесите у одговарајућу табелу која вам је дата на листовима за одговоре. 0.8pt

Када се разделник напона оптерети повезивањем прикључка малог отпора (слика 9), вредности напона које нам даје разделник напона V_{out}^L су другачије од номиналних вредности V_{out} које меримо када прикључак има велики отпор, као што је случај волтметра са великим унутрашњим отпором.



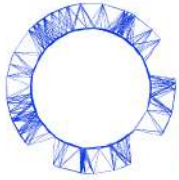
Слика 9. Оптерећени разделник напона.

B.3 Размотрите оптерећени разделник напона повезан са прикључком отпора R_L . Изведите израз за корекциони фактор $f = V_{out}^L / V_{out}$ у функцији R_L , R_x и R_y . 0.2pt

JFET транзистор има мали излазни отпор када је $V_{GS} = 0$. У том случају је $R_{DS}^0 \sim 50 \Omega$. Међутим овај отпор значајно расте уколико је Gate конектор поларисан негативно у односу на Source конектор. При $V_{GS} < 0$ излазни отпор се приближно мења по закону који је дат једначином (1).

B.4 Користећи одговарајуће корекционе факторе, израчунајте V_{DS} , пад напона између Drain и Source конектора, за све тачке измерене у B.2. Размотрите следеће номиналне податке за JFET који се користи у овом задатку: $R_{DS}^0 = 50 \Omega$, $V_p = -1.4 V$. 1.2pt

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q1-11

српски (Serbia)

B.5	Нацртајте излазне криве $I_{DS}(V_{DS})$ за ваш JFET транзистор.	0.5pt
B.6	Размотрите транзистор који ради на малим V_{DS} . Одредите експерименталне вредности R_{DS} вашег JFET транзистора за различите V_{GS} и прикажите податке графички.	0.5pt
B.7	Нацртајте трансфер криву за ваш JFET транзистор при $V_{DS} \sim +3\text{ V}$.	0.3pt

Када је JFET транзистор у режиму засићења, струја I_{DS} се приближно мења по закону који је дат једначином (2).

B.8	На основу досадашњих мерења, одредите I_{DSS} и <i>pinch-off</i> напон V_p вашег уређаја. Упоредите вредност коју сте добили за V_p са номиналном вредношћу напона.	0.4pt
------------	---	-------

Важан параметар JFET транзистора, конкретно када се користи као појачивач, је такозвана транзисторска транскондуктанса, g , која се дефинише као

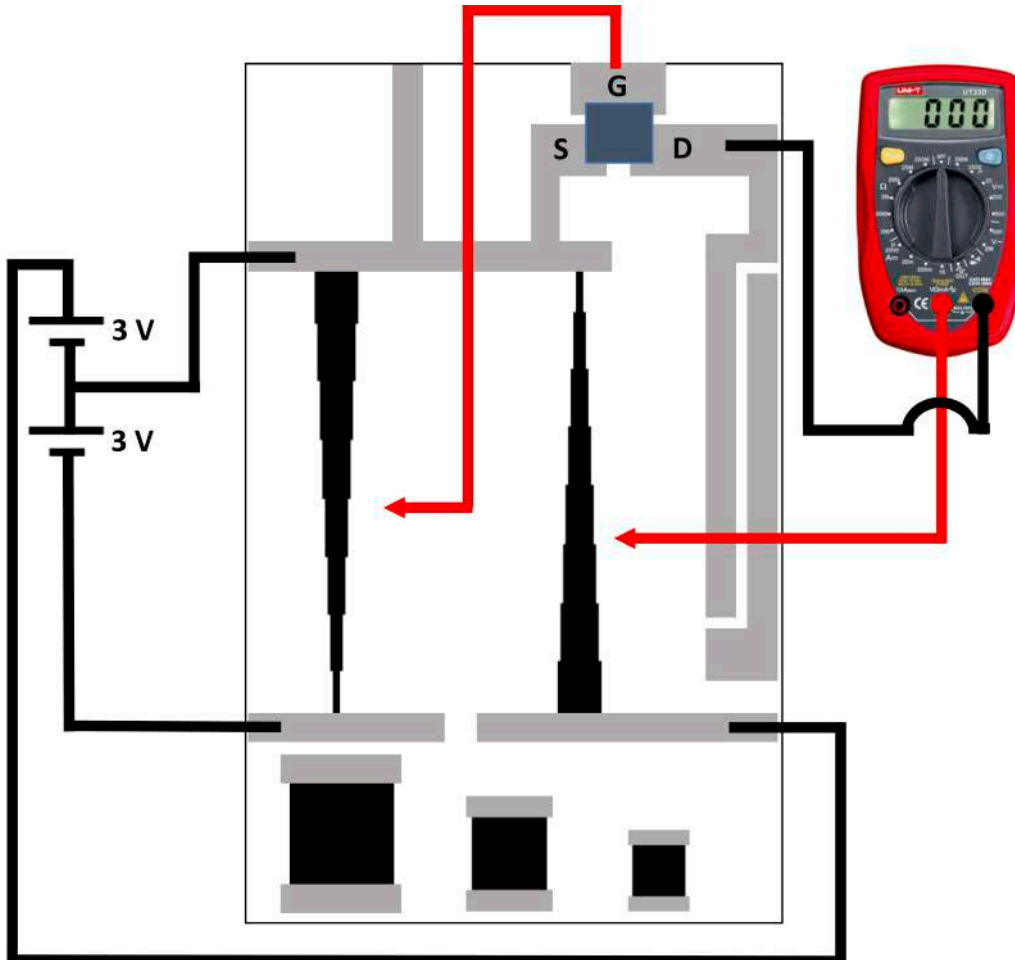
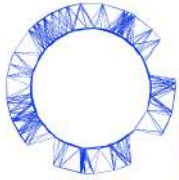
$$g = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}}. \quad (3)$$

За функцију две променљиве $f(x, y)$, ознака $\frac{\partial f}{\partial x}$ значи извод функције f по променљивој x при чему је y константа.

B.9	Одредите, на основу измерене трансфер криве, транскондуктансу вашег уређаја при $V_{GS} = -0.50\text{ V}$. Упоредите добијену вредност транскондуктансе са вредношћу која се добија применом једначине (2).	0.4pt
------------	--	-------

Део С. Папирни TFT транзистор (2.0 поена)

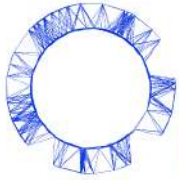
Од сада више не користите JFET транзистор. Сви следећи проблеми и питања се односе на TFT транзистор који се налази у горњем десном углу штампаног кола. Gate, Source и Drain конектори TFT транзистора су означени на слици 10. Повежите TFT Gate и Source конекторе на нулти потенцијал. У овом делу задатка Source конектор папирног TFT увек треба да је повезан са заједничким каблом (који се, у ствари, састоји од два спојена кабла различитих боја) батеријског паковања, односно мора бити повезан на потенцијал 0 V, као што је приказано на слици 10. Поларишите транзистор са напоном $V_{DS} > 0$, преко једног од разделника напона (слика 10). Проверите да ли струја тече кроз амперметар.



Слика 10. Поставка за мерење које се спроводи над папирним TFT транзистором. Приказана слика мултиметра не сугерише како треба извршити мерење, она је само илустративна. Сами треба да поставите ротирајући прекидач мултиметра у одговарајући режим за мерење, у зависности од тога коју величину желите да мерите. Ваша је дужност и да окретањем ротирајућег прекидача подесите опсег мерења.

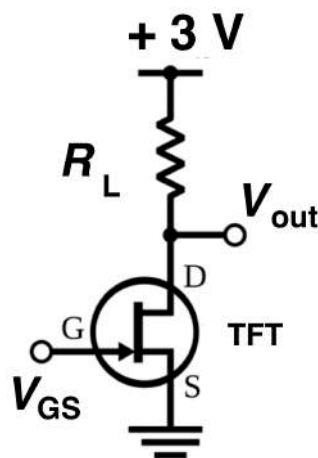
C.1 Примените напон $V_{DS} = +3.0 \text{ V}$. Затворите транзистор применом напона $V_{GS} = -3.0 \text{ V}$. Сачекајте 1 min како би дошло до затварања транзистора. Запишите на листу за одговоре резидуалну вредност струје I_{closed} . Затим отворите транзистор стављајући $V_{GS} = 0$, при чему је напон $V_{DS} = +3.0 \text{ V}$. Измерите струју као функцију времена у временском интервалу од најмање 5 min почевши од тренутка када отворите транзистор. Након тога унесите податке за $I_{DS}(t)$ на одговарајуће место на листу за одговоре. 0.8pt

C.2 Нацртајте зависност $I_{DS}(t)$. Добијена временска зависност је суперпозиција две временске експоненцијалне функције, при чему је временска константа једне од њих (τ_2) знатно већа од временске константе друге (τ_1). Одредите мању временску константу, τ_1 . 1.2pt



Део D. Инверторско коло (1.0 поена)

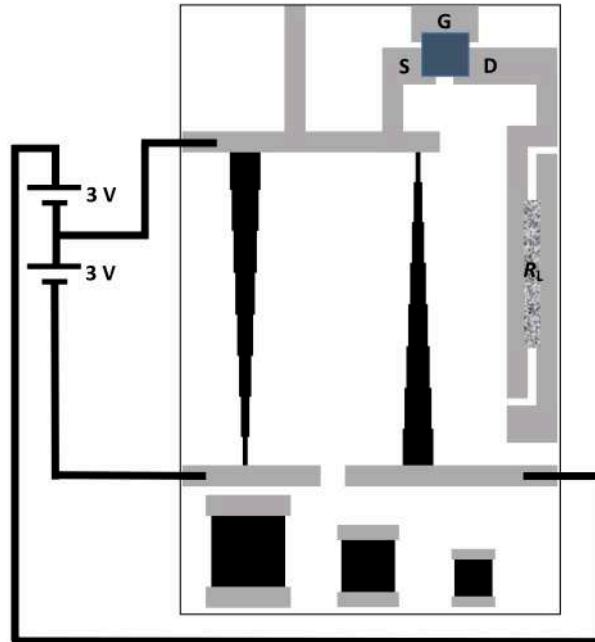
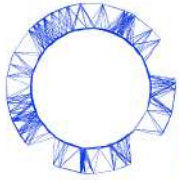
У микроелектронским колима једно од најважнијих кола је инвертер, који је у стању да инвертује дигитални улаз. На пример, уколико је улазни напон $V_{in} = \text{high}$, онда инвертер доводи до излазног напона $V_{out} = \text{low}$, и обротно. Транзистор је, поново, основа оваквог микроелектронског кола. Једна од најједноставнијих реализација је такозвани уобичајени појачивач извора, приказан на слици 11. Он се састоји од транзистора и прикључка отпорности R_L . У овом случају је $V_{in} = V_{GS}$, а V_{out} је напон који се мери на Drain конектору транзистора. На овај начин ћемо у овом делу задатка пратити шта се дешава са V_{out} приликом промене напона V_{GS} са -3 V на 0 V .



Слика 11. Уобичајени појачивач извора и инверторско коло.

У поставци приказаној на слици 11 транзистор је папирни TFT, а R_L је отпорност прикључка који ћете додати ручно, тако што ћете повезати Drain конектор транзистора контактом напона V_{in} користећи траг оловке, као што је указано на слици 12. Док пишете приложеном оловком ви остављате танки слој проводног графита на папир. Што више пута прелазите оловком по истом трагу, тиме наносите више слојева проводног графита један преко другог, услед чега ћете добити мању отпорност. Приликом цртања R_L обратите пажњу да константно пратите његову отпорност. Како бисте подесили да вам је V_{out} што је могуће ближе вредности 0 V , отпорност прикључка мора бити што је могуће већа, тако да, приликом цртања отпора, покушајте да достигнете вредност која је близу циљане вредности отпора од $R_L = 200\text{ k}\Omega$.

Можете или да користите оловку како бисте смањили R_L или да гумицом бришете траг оловке како бисте повећали отпор. Треба да тежите да добијете вредност која се разликује не више од 10% од циљане вредности.



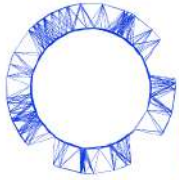
Слика 12. Поставка конфигурације за инвертер/уобичајени појачивач извора.

Користите НВ оловку коју сте добили и нацртајте руком графитни отпорник са вредношћу отпора $R_L \approx 200 \text{ k}\Omega$ који би требало да се користи као прикључак папирног TFT-а како би се napravilo инверторско коло приказано на слици 12.

D.1 Упишите на листу за одговоре измерену вредност R_L до које сте дошли. 0.5pt
Поставите инверторско коло (слика 12) користећи отпорнике од графитних трака и папирни TFT. Пре мерења не заборавите да ваш транзистор мора бити у потпуности испражњен тако што ћете применити напон $V_{GS} = -3 \text{ V}$ и сачекати око $\sim 1 \text{ min}$. Тада измерите V_{out} при пребацивању напона V_{GS} са -3 V на 0 V , и читавајте V_{out} након временске стабилизације која за свако појединачно мерење треба да износи максимално 100 s . Унесите измерене вредности на лист за одговоре.

D.2 Нацртајте измерене $V_{out}(V_{in})$ криве трансфера напона и скицирајте на графику континуалну криву која пролази кроз тачке на графику. 0.5pt

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-1

српски (Serbia)

Вискозоеластичност полимерских влакана (10 поена)

Молимо вас да водите рачуна о томе да не смете да истежете влакно пре почетка експеримента!
Укључите вагу (ваги је потребно око 10 минута да се загреје). Не мењајте подешавања на ваги.

Увод

Чврсти материјал се под дејством спољашње силе деформише. За мале интензитете силе, деформација је пропорционална сили (Хуков закон) и реверзибилна је, односно материјал поврати почетни облик када сила престане да делује.

Деформације чврстих тела је погодније описати користећи концепт напона и истезања. Напон σ је дефинисан као сила по јединици површине, односно сила F подељена површином S , на коју делује, док је истезање, ϵ , релативна промена дужине:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{and} \quad \epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}, \quad (1)$$

где су ℓ и ℓ_0 коначна и почетна дужина нити, респективно. У оквиру једноставног еластичног понашања, напон је пропорционалан истезању $\sigma = E \epsilon$ (Хуков закон) и фактор пропорционалности, E , је Јунгов модуло.

Еластично понашање које описује Хуков закон је апроксимација која је добра само довољно мале напоне. За веће напоне промене лагано постају иреверзибилне док се не достигне пластични режим, у коме кретање молекула више није међусобно повезано, што подсећа на кретања молекула у вискозном флуиду.

Вискозоеластични материјали

Неки материјали показују особине еластичних чврстих тела истовремено са особинама вискозних флуида, и познати су као *вискозоеластични*.

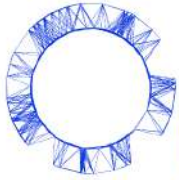
При истраживању вискозоеластичних материјала је разумно одвојено разматрати чисто еластично понашање и додатно вискозно понашање, што значи да је укупни напон σ потребан да изазове истезање ϵ збир чисто еластичног члана $\sigma_0 = E_0 \epsilon_0$ и вискозног члана σ_1 :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \quad (2)$$

Обе компоненте напона одговарају истом истезању ($\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1$). Са друге стране, истезање, ϵ_1 , које одговара вискозоеластичном члану је обично се апроксимира збиром чисто еластичног истезања, $\epsilon_1^e = \sigma_1 / E_1$, и чисто вискозног истезања, ϵ_1^v , (оба изазвана истим напоном $\sigma_1 = \sigma_1^e = \sigma_1^v$):

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^e + \epsilon_1^v \quad (3)$$

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-2

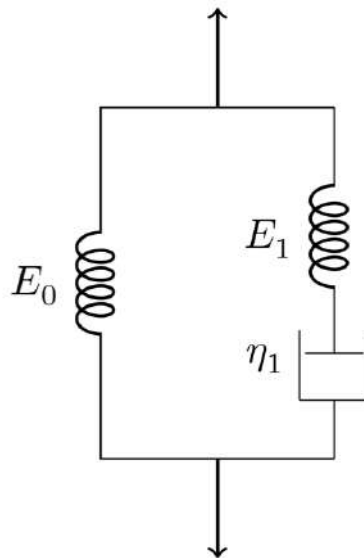
српски (Serbia)

У чисто вискозном процесу, претпостављена је линеарна веза између напона и временског извода истезања (слично као у случају вискозног флуида),

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{d\epsilon_1^v}{dt},$$

где је η_1 коефицијент вискозности.

Овај феноменолошки модел је такозвани *стандардни модел линеарног чврстог тела* са линеарном вискозоеластичношћу, и схематски је представљен на слици 1, где опруге представљају чисто еластичне компоненте а посуда представља чисто вискозне компоненте.



Слика 1. Стандардни модел линеарне вискозоеластичности.

Из горњих једначина добија се:

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad (4)$$

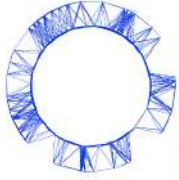
Даље, за стандардни модел линеарне вискозоеластичности, може се показати:

$$\sigma = E_0 \epsilon + \tau_1 (E_0 + E_1) \frac{d\epsilon}{dt} - \tau_1 \frac{d\sigma}{dt} \quad (5)$$

где је $\tau_1 = \eta_1/E_1$. Ове диференцијална једначина показује да веза између истезања и напона није више линеарна, и издужење и напон су у општем случају функције времена. Да би се добило $\epsilon(t)$ потребно је знати $\sigma(t)$, и обрнуто.

Постоје два важна специјална случаја у којима су или $d\epsilon/dt = 0$ или $d\sigma/dt = 0$, позната као *напонски релаксациони услов* и *пузајући услов*, респективно. У првом случају материјал је нагло истегнут за

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-3

српски (Serbia)

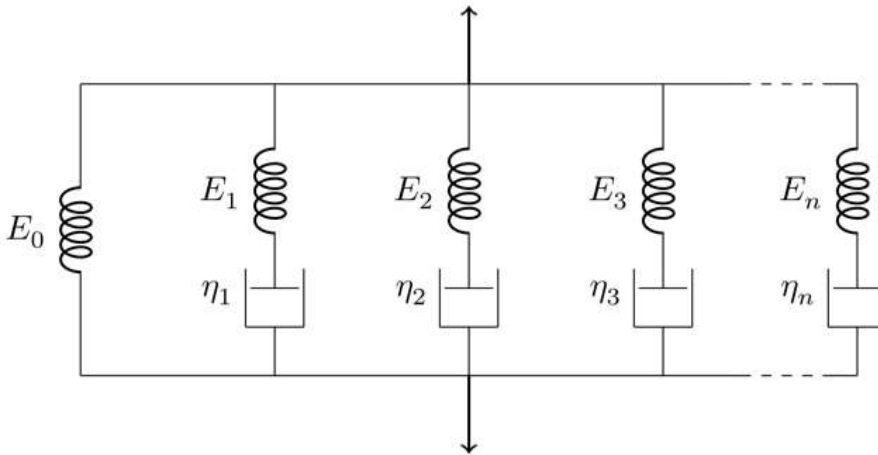
ϵ , и одржава се константним током времена, тако да је $d\epsilon/dt = 0$. У овом случају $\sigma(t)$ тада зависи само вискозоеластичних параметара средине и решење једначине (5) је

$$\sigma(t) = \epsilon(E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1}), \quad (6)$$

где је узето да у $t = 0$ само еластичне компоненте доприносе напону и тада је $\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + E_1)$. Ово решење показује да вискозоеластични напон експоненцијално опада са временом, са временском константом τ_1 .

Мулти-вискозоеластични процеси

Стандардни линеарни модел се може проширити и на случај више вискозоеластичних процеса, као што је предложено на слици 2.



Слика 2. Генерализани модел за мулти-вискозоеластичне процесе.

У случају N различитих вискозоеластичних компоненти,

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

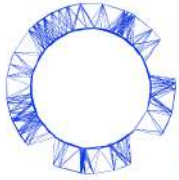
где је $\frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{1}{E_k} \frac{d\sigma_k}{dt} + \frac{\sigma_k}{\eta_k}$, и као и раније, $\frac{d\epsilon_0}{dt} = \frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}$.

Генерализација једначине (5) је у том случају:

$$\sigma = E_0 \epsilon + \eta_t \frac{d\epsilon}{dt} - \sum_k \tau_k \frac{d\sigma_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

где је $\eta_t = \sum_k \eta_k$ и $\tau_k = \eta_k / E_k$.

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

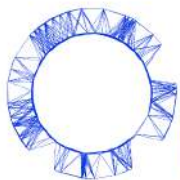
Q2-4

српски (Serbia)

У области константног напона, различити вискозоеластични напони морају експоненцијално да опадају са временом, $\sigma_k = A_k e^{-t/\tau_k}$, што доводи до следећег решења:

$$\sigma(t) = \epsilon \left(E_0 + \sum_k E_k e^{-t/\tau_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

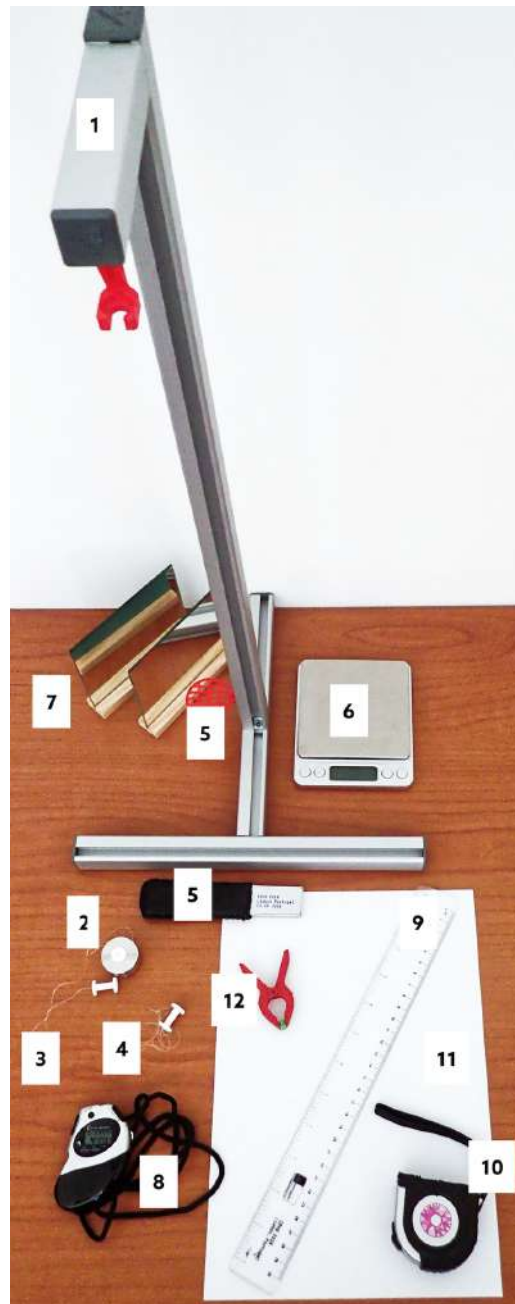
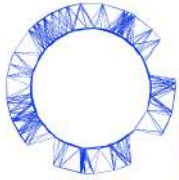
где је претпостављено да у $t = 0$ само еластична компонента доприноси укупном напону, иа да је $\sigma_0 = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$. Резултујући вискозоеластични одзив очигледно није линеаран.



Прибор

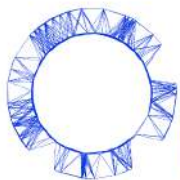
Списак прибора за овај експериментални задатак (слика 3):

1. 1 сталак, са помоћним системима за постављање ласерског показивача и држача влакна, затегнутог вертикално константним напоном изнад ваге;
2. 1 шупљи цилиндар као тег и завртањ држач за који се закачи влакно;
3. 1 дугачко термопалстично полиуретанско (TPU) влакно причвршћено за завртње држаче који служе да се влакно једним крајем причврсти за сталак, а другим за тег;
4. 1 кратко влакно са једним завртњем држачем;
5. 1 ласерски показивач са пратећом опремом;
6. 1 дигитална вага;
7. 2 равна огледала;
8. 1 хронометар;
9. 1 лењир;
10. 1 метални метар;
11. 1 лист папира А4, који служи као екран;
12. 1 штапаљка којом се фиксира ласер и укључује.



Слика 3. Прибор за експериментални задатак 2.

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-7

српски (Serbia)

Део А: Мерење релаксације напона (1.9 поена)

Молимо вас да водите рачуна да влакно не сме да буде истезано пре почетка експеримента! Ако се деси да влакно случајно истегнете морате да тражите потпуно ново, с тим што замена може да потраје и да вам скрати време за рад.

Пажљиво прочитајте упутства у делу D: "Обрада података" пре него што почнете мерења у овом делу да бисте могли да испланирате начин на који ћете да мерите.

A.1 Измерите дужину неистегнуте нити између глава завртања. Да бисте добили дужину целог влакна, ℓ_0 , укључујући и дужину влакна унутар завртања, додајте по 5 mm са сваке стране. На листу за одговоре упишите вредност за ℓ_0 и њену грешку. 0.3pt

A.2 Измерите укупну масу сета за оптерећење, P_0 , у јединицама грам-силе (gf). 0.3pt
1 gram-force је сила која одговара тежини једног грама $1 \text{ gf} = 9.80 \times 10^{-3} \text{ N}$.
Упишите резултат на листу за одговоре и процените грешку.

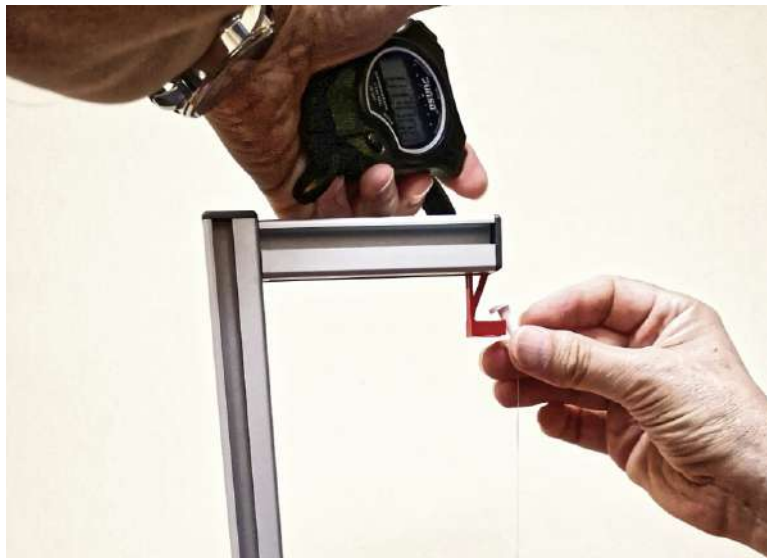
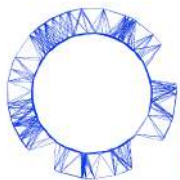
Да бисте уочили различите релаксационе компоненте потребно је да мерите напон довољно дуго. У овом случају је довољно да пратите еволуцију напона око 45 минута.

У следећем делу је потребно да извршите истовремено радње 1. и 2. Молимо вас да пажљиво прочитате упутства пре него што почнете мерење.

Важно: Ако је експеримент прекинут из било ког разлога не може бити настављен. Мора се почети поново са новим влакном. У том случају морате да тражите потпуно ново влакно.

Истовремено урадите следеће:

1. Док је сет за оптерећење (тег са завртњем) на ваги, исправите влакно тако да завртањ са другог краја влакна причврстите на сталак (слика 4).
2. Почните да мерите време хронометром истовремено са радњом 1.



Слика 4. Качење влакна на сталак и почетак мерења времена.

A.3 Уписујте вредности са ваге, $P(t)$, и одговарајућа времена, током приближно 45 минута, у табелу на листу за одговоре. 1.0pt

A.4 Измерите дужину истегнутог влакна, ℓ , и процените грешку. Упишите резултат и грешку за ℓ на листу за одговоре. 0.3pt

Део В: Мерење пречника истегнутог влакна (1.5 поена)

Не гледајте директно у ласер! Када није у употреби ласерски показивач треба да буде искључен.

Ако не можете да добијете дифракциону слику, молимо вас да тражите нови ласер.

У овом делу ћете користити дифракцију светлости да бисте измерили пречник влакна полимера. Пречник неистегнутог влакна је 0.5 mm . Као што вероватно знате, дифракциона слика добијена дифракцијом на правоугаоном прорезу ширине d је слична слици коју ствара дифракција на цилиндричном објекту полупречника d . У Фраунхоферовом режиму, када је се дифракциона слика види на екрану који је удаљен од предмета много више него што је пречник објекта, растојање између дифракционих минимума за мале углове је исто за прорез и тело, и једнако је:

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

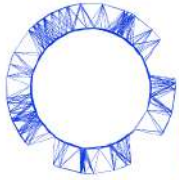
где је θ угао дифракције.

Користите да је таласна дужина светлости ласера $650 \pm 10 \text{ nm}$.

Да бисте урадили овај део задатка, треба да:

1. Укључите ласер користећи штапаљку (слика 5).
2. Поставите ласер тако да директно погађа истегнуто влакно.

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-9

српски (Serbia)

3. Користећи прибор који имате на располагању нађите начин да пројектујете дифракциону слику на папирни екран, и измерите величине потребне да одредите пречник влакна користећи једначину (10).



Слика 5. Укључивање ласера коришћењем штипаљке.

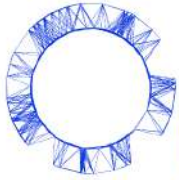
B.1	Скицирајте метод којим сте мерили на листу за одговоре.	0.6pt
B.2	Измерите оптичко растојање, D , између влакна и дифракционе слике. Упишите резултат и процењену грешку на листу за одговоре.	0.3pt
B.3	Одредите средње растојање, \bar{x} , између дифракционих минимума и одговарајућу грешку. Упишите резултат и процењену грешку на листу за одговоре.	0.3pt
B.4	Користећи једначину (10) за дифракционе податке, одредите пречник, d , истегнутог влакна и одредите грешку. Упишите резултат и процењену грешку на листу за одговоре.	0.3pt

Део С: Замена влакна (0.3 поена)

Пре него што пређете на обраду података (**део D**) треба да припремите поставку за мерење са краћим влакном (**део E**).

Одвојите тег са дугачког влакна (одвртните завртањ) и пребаците га на слободан крај краћег влакна (провуците влакно кроз отвор и фиксирајте га завртњем, слика б).

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-10

српски (Serbia)

Ако не можете да убаците влакно кроз отвор на завртњу, молимо вас да тражите помоћ.



Слика 6. Причвршћивање полиуретанског влакна на завртањ држач.

- C.1** Измерите дужину, ℓ'_0 влакна као у делу **A.1**. Упишите резултат и процењену грешку на листу за одговоре. 0.3pt

Окачите ново влакно на горњи део сталка тако да тег остварује константни напон на влакно. Влакно ће у неком тренутку достићи стационарну вредност истегања $\epsilon = \sigma/E$, док ви радите део са обрадом података (**истезање треба да траје најмање 30 минута**).

Део D: Обрада података (5.7 поен)

Напомена: Гравитационо убрзање у Лисабону је $g = 9.80 \text{ ms}^{-2}$.

- D.1** Израчунајте силу која делује на влакно, F , у јединицама gf, за св амерења и попуните одговарајућу колону у табели коју сте користили у делу **A.3**. 0.3pt
- D.2** Нацртајте график $F(t)$ на листу за графике приложеном са листовим аза одговоре. 0.4pt

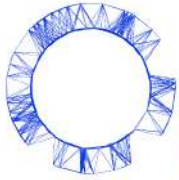
С обзиром да се вага не креће, може се сматрати да су мерења извршена при константном истегању и једначина (9) може да се користи. Количник $\frac{\sigma}{\epsilon}$ се може написати као $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$, где је β константа. Тада је:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2} + E_3 e^{-t/\tau_3} + \dots \quad (11)$$

где је сума уређена ($\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots$) ради једноставности.

- D.3** Одредите константно истегање, ϵ , и одговарајућу грешку. Упишите резултат и процењену грешку на листу за одговоре. 0.3pt
- D.4** Израчунајте фактор β , са σ у SI јединицама и F у gf јединицама. Упишите резултат на листу за одговоре (не морате да рачунате грешку). 0.3pt

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-11

српски (Serbia)

D.5 Подаци на графику у делу **D.2** се не могу објаснити чисто еластичним процесом. Скицирајте на делу за график на листу за одговоре, шта бисте очекивали како $F(t)$ треба да изгледа у чисто еластичном случају. 0.4pt

Обрада података је једноставнија ако се уместо $F(t)$ користи $\frac{dF}{dt}$. Тада се релаксациони параметри могу одредити са графика у неколико корака. Да би се то урадило извод $\frac{dF}{dt}$ треба израчунати у свакој тачки. То се може урадити графички или нумерички. У једноставнијем случају када су интервали између тачака једнаки нумерички извод функције $f(t)$ у тачки t_i , у скупу тачака $(t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), \dots$, је приближно једнак

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (12)$$

где је h (константни) интервал између тачака, и N је број тачака.

Ако интервал између тачака није константан нумерички извод је приближно:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_i = \frac{h_-^2 f_{i+1} - h_+^2 f_{i-1} + (h_+^2 - h_-^2) f_i}{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2} \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (13)$$

где су $h_+ = (t_{i+1} - t_i)$, $h_- = (t_i - t_{i-1})$ док је N број тачака. Једначина представља средњи извод са леве и десне стране, отежњен инверзним временским интервалом.

За анализу података и налажење релевантних параметара потребно је следити следеће кораке. Пошто је дата уређена сума у једначини (11), урадите следеће:

D.6 Претпоставите да су ваши подаци за времена дужа од τ_2 и израчунајте извод, $\frac{dF}{dt}$, за тачке за које је $t > 1000$ s. Упишите резултате у табелу из дела **A.3**. Ако графички одређујете извод $\frac{dF}{dt}$ користите обезбеђени лист за графике. 0.5pt

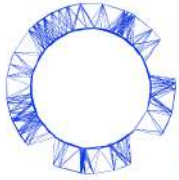
D.7 На листу за одговоре упишите како $\frac{dF}{dt}$ зависи од времена у случају једног вискозоеластичног процеса. 0.3pt

D.8 Одредите графички параметре E_1 и τ_1 у SI јединицама користећи податке дате у D.6. Напишите E_1 и τ_1 на листу за одговоре без грешака. 1.0pt

D.9 Одредите параметар E_0 у SI јединицама користећи податке дате у D.6. Напишите одговор на листу за одговоре (без грешака). 0.3pt

D.10 Попуните колону $y(t)$ у табели из дела A.3, тако што ћете одузети еластично и најдуже вискозоеластичну компоненту од $F(t)$ (н е треба да користите тачке из D.6). 0.3pt

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-12

српски (Serbia)

- D.11** Користећи графички метод, из $y(t)$ (D.10) одредите параметре за другу вискозоеластичну компоненту, E_2 и τ_2 у SI јединицама. Упишите резултат на лист за одговоре (грешке нису потребне). 1.0pt

Остале вискозоеластичне компоненте се могу одредити на исти начин.

- D.12** Одредите временски интервал $[t_i, t_f]$ релевантан за трећу компоненту. Упишите t_i и t_f на лист за одговоре (без грешака). 0.3pt

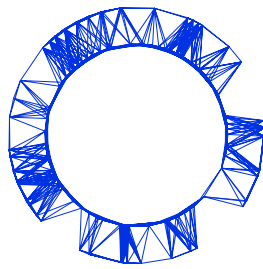
- D.13** Одредите τ_3 у SI јединицама, са графика из D.11. Упишите резултат на лист за одговоре (без грешака). 0.3pt

Део Е: Мерење E при константном напону (0.6 поена)

Вратите се крајем влакно окаченом у делу С. Водите рачуна да је прошло најмање 30 минута од када сте га окачили. Можете претпоставити да је влакно достигло стационарну вредност истезања $\epsilon = \sigma/E$.

- E.1** Одредите E директно из дужине истегнутог влакна. Запишите резултат на листу за одговоре заједно са релативним одступањем од E_0 добијеним у делу D (без грешака). 0.6pt

IPhO 2018
Lisbon, Portugal



Solutions to Experimental Problem 1

Paper transistor

(Elvira Fortunato, Luís Pereira, Rui Igreja, Paul Grey, Inês Cunha, Diana Gaspar, Rodrigo Martins)

July 23, 2018

v1.4

Confidential

Sketch of the solutions:

Part A. Circuit dimensioning (2.4 points)

A.1

Using Ohm's law, the current through the voltage divisor is $I = V_{\text{in}} / (R_x + R_y)$, and $V_{\text{out}} = R_y I$. Thus

A.1

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} \frac{R_y}{R_x + R_y}$$

0.2pt

A.2

A.2 Uncertainty in each measurement: $\pm 0.01 \Omega$

0.5pt

#	R_{T1}	R_{T2}	R_{T3}
1	122.3	125.3	125.3
2	122.3	125.4	125.4
3	122.3	125.3	125.4
4	122.2	125.2	125.5
5	122.3	125.4	125.4
6	122.3	125.4	125.3
7	122.2	125.4	125.4
8	122.2	125.3	125.4
9	122.2	125.4	125.4
10	122.2	125.4	125.5
\bar{R}	122.25	125.35	125.40
σ_R	0.05	0.07	0.07

A.3

- A.3** For a parallelepiped conductor of length l , width w and thickness t , the resistance is given by 0.3pt

$$R = \rho \frac{l}{wt}$$

For a thin film of square shape, $l = w$, thus

$$R = \rho \frac{l}{tl} = \frac{\rho}{t} = R_{\square}.$$

A.4

The weighted average value (weighed by $1/\sigma^2$) of the sheet resistance is $\bar{R} = 123.94 \pm 0.04 \Omega$ and $\rho = R_{\square}t$.

- A.4** $\bar{R} = 123.94 \pm 0.04 \Omega$
 $\rho = 2.5 \pm 0.1 \times 10^{-3} \Omega \text{ m}.$ 0.4pt

A.5

- A.5** For a rectangular thin film $R = R_{\square} \frac{l}{w}$, thus 0.5pt

$$R_1 = R_2 = R_{\square} (1 + 1/0.9 + 1/0.8 + 1/0.7 + 1/0.6 + 1/0.5 + 1/0.4 + 1/0.3) = 14.2897 R_{\square}$$

Measured values:

$$R_1 = 1776 \pm 1 \Omega \quad k_1 = 14.33$$

$$R_2 = 1787 \pm 1 \Omega \quad k_2 = 14.42$$

$$\bar{k} = 14.3 \pm 0.1$$

Comparison with the theoretical value: the average value is compatible, within the assigned error bar, with the theoretical value.

A.6

A.6 Uncertainty in resistance measurements: $\pm 1 \Omega$.

0.3pt

Resistor R_1 :

Points	R_x/Ω	R_y/Ω
Z	1776	0
A	1708	165
B	1578	296
C	1421	452
D	1239	607
E	1033	829
F	768	1072
G	439	1394
V	0	1782

Resistor R_2 :

Points	R_x/Ω	R_y/Ω
Z	1791	0
H	1428	411
I	1120	737
J	882	996
K	670	1200
L	498	1396
M	341	1555
N	188	1719
W	0	1793

A.7

A.7

0.3pt

Points	V_{out}/V	Points	V_{out}/V
Z	0	-	—
A	-0.208	H	0.664
B	-0.435	I	1.171
C	-0.699	J	1.593
D	-1.003	K	1.939
E	-1.337	L	2.24
F	-1.756	M	2.51
G	-2.29	N	2.77
V	-2.99	W	3.00

Part B. Characteristic Curves of the JFET transistor (4.5 points)

B.1

B.1 $I_{DS} = 11.84 \pm 0.01$ mA

0.2pt

B.2

Gate/Drain	Z	H	I	J	K	L	M	N	W
Z	0	1.58	2.18	2.82	3.60	4.75	6.45	9.43	11.87
A	0	1.52	2.13	2.67	3.47	4.53	6.04	7.82	8.78
B	0	1.45	2.00	2.63	3.29	4.21	5.15	5.77	6.09
C	0	1.28	1.79	2.23	2.59	2.85	2.99	3.08	3.16
D	0	0.65	0.76	0.81	0.85	0.89	0.92	0.94	0.96
E	0	0.03	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.07
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0

B.3

The unloaded voltage is

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} \frac{R_y}{R_x + R_y}$$

and the loaded voltage is

$$V_{\text{out}}^{\text{L}} = V_{\text{in}} \frac{R'_y}{R_x + R'_y},$$

where R'_y is the equivalent resistance of the parallel association between R_y and R_L :

$$R'_y = \frac{R_y R_L}{R_y + R_L}.$$

Thus,

$$f = \frac{\frac{R'_y}{R_x + R'_y}}{\frac{R_y}{R_x + R_y}} = \frac{(R_x + R_y)R'_y}{(R_x + R'_y)R_y} = \frac{(R_x + R_y) \frac{R_L}{R_y + R_L}}{R_x + R_y \frac{R_L}{R_y + R_L}}$$

Note that in terms of $\eta = 1/(1 + \frac{R_y}{R_L})$, the factor f can be written as

$$f = \frac{(R_x + R_y)\eta}{R_x + R_y\eta}$$

When $R_L \gg R_y$, $\eta \rightarrow 1$, and $f \rightarrow 1$; when $R_L \ll R_y$, $\eta \rightarrow 0$ and $f \rightarrow 0$.

B.3

$$f = \frac{(R_x + R_y)\eta}{R_x + R_y\eta}$$

0.2pt

B.4

B.4

Gate: A $V_{GS} = 0 \text{ V}$ $R_{DS} = 50.0$

0.7pt

Drain	V_{out}/V	V_{out}^L/V	V_{DS}/V	I_{DS}/mA	rI/V	f
Z	0,000	0,000	0,000	0,00	0,000	1,000
H	0,664	0,105	0,089	1,58	0,016	0,158
I	1,171	0,139	0,117	2,18	0,022	0,119
J	1,593	0,181	0,153	2,82	0,028	0,114
K	1,939	0,237	0,201	3,60	0,036	0,122
L	2,240	0,315	0,267	4,75	0,048	0,140
M	2,510	0,443	0,379	6,45	0,065	0,177
N	2,770	0,724	0,630	9,43	0,094	0,261
W	3,000	3,000	2,881	11,87	0,119	1,000

B.4

0.7pt

cont.

Gate: B $V_{GS} = -0.208 \text{ V}$ $R_{DS} = 58.73$

Drain	V_{out}/V	V_{out}^L/V	V_{DS}/V	I_{DS}/mA	rI/V	f
Z	0.000	0.000	0.000	0.00	0.000	1.000
H	0.664	0.118	0.102	1.52	0.015	0.177
I	1.171	0.157	0.136	2.13	0.021	0.134
J	1.593	0.204	0.177	2.67	0.027	0.128
K	1.939	0.267	0.233	3.47	0.035	0.138
L	2.240	0.353	0.308	4.53	0.045	0.158
M	2.510	0.495	0.435	6.04	0.060	0.197
N	2.770	0.799	0.721	7.82	0.078	0.289
W	3.000	3.000	2.912	8.78	0.088	1.000

Gate: C $V_{GS} = -0.435 \text{ V}$ $R_{DS} = 72.54$

Drain	V_{out}/V	V_{out}^L/V	V_{DS}/V	I_{DS}/mA	rI/V	f
Z	0.000	0.000	0.000	0.00	0.000	1.000
H	0.664	0.136	0.122	1.45	0.015	0.205
I	1.171	0.183	0.163	2.00	0.020	0.157
J	1.593	0.239	0.213	2.63	0.026	0.150
K	1.939	0.312	0.279	3.29	0.033	0.161
L	2.240	0.411	0.369	4.21	0.042	0.184
M	2.510	0.572	0.520	5.15	0.052	0.228
N	2.770	0.907	0.850	5.77	0.058	0.328
W	3.000	3.000	2.939	6.09	0.061	1.000

B.4

0.7pt

cont.

Gate: D $V_{GS} = -0.699 \text{ V}$ $R_{DS} = 99.86$

Drain	V_{out}/V	V_{out}^L/V	V_{DS}/V	I_{DS}/mA	rI/V	f
Z	0.000	0.000	0.000	0.00	0.000	1.000
H	0.664	0.170	0.157	1.28	0.013	0.256
I	1.171	0.232	0.214	1.79	0.018	0.198
J	1.593	0.303	0.281	2.23	0.022	0.190
K	1.939	0.395	0.369	2.59	0.026	0.204
L	2.240	0.516	0.487	2.85	0.029	0.230
M	2.510	0.708	0.678	2.99	0.030	0.282
N	2.770	1.089	1.059	3.08	0.031	0.393
W	3.000	3.000	2.968	3.16	0.032	1.000

Gate: E $V_{GS} = -1.003 \text{ V}$ $R_{DS} = 176.3$

Drain	V_{out}/V	V_{out}^L/V	V_{DS}/V	I_{DS}/mA	rI/V	f
Z	0.000	0.000	0.000	0.00	0.000	1.000
H	0.664	0.245	0.238	0.65	0.007	0.369
I	1.171	0.346	0.338	0.76	0.008	0.295
J	1.593	0.454	0.446	0.81	0.008	0.285
K	1.939	0.586	0.578	0.85	0.009	0.302
L	2.240	0.754	0.745	0.89	0.009	0.337
M	2.510	1.004	0.994	0.92	0.009	0.400
N	2.770	1.451	1.441	0.94	0.009	0.524
W	3.000	3.000	2.990	0.96	0.010	1.000

B.4
cont.

1.2pt

Gate: F $V_{GS} = -1.337 \text{ V}$ $R_{DS} = 1111$

Drain	V_{out}/V	V_{out}^L/V	V_{DS}/V	I_{DS}/mA	rI/V	f
Z	0.000	0.000	0.000	0.00	0.000	1.000
H	0.664	0.526	0.523	0.03	0.003	0.791
I	1.171	0.857	0.853	0.04	0.004	0.732
J	1.593	1.149	1.144	0.05	0.005	0.721
K	1.939	1.431	1.426	0.05	0.005	0.738
L	2.240	1.719	1.714	0.05	0.005	0.767
M	2.510	2.039	2.034	0.05	0.005	0.812
N	2.770	2.430	2.424	0.06	0.006	0.877
W	3.000	3.000	2.993	0.07	0.007	1.000

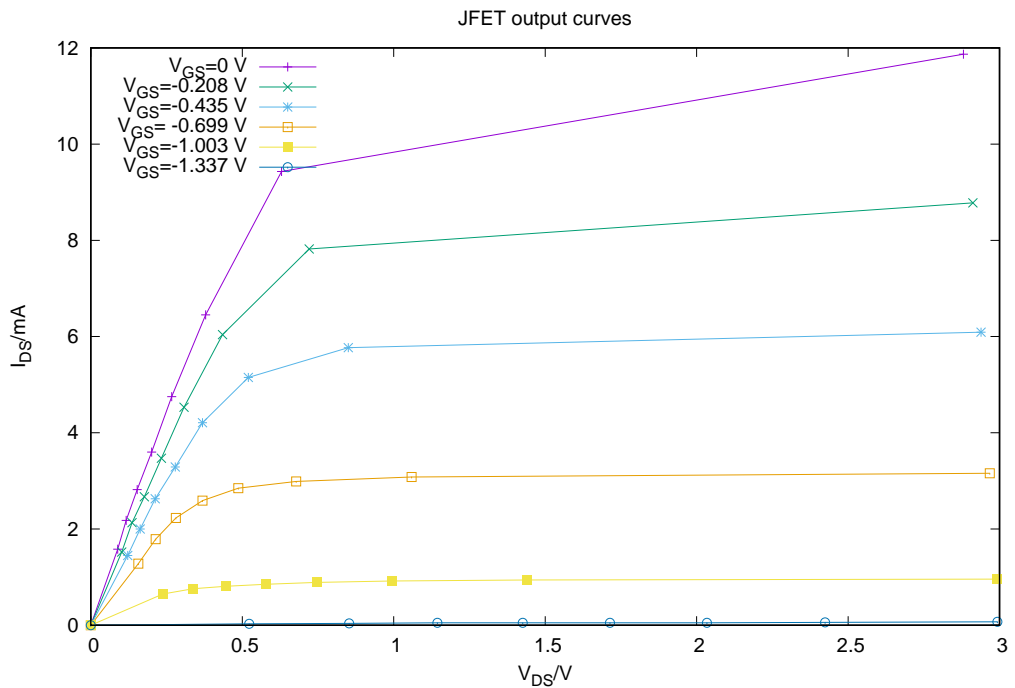
Gate: G $V_{GS} = -1.756 \text{ V}$ $R_{DS} = \infty$

Drain	V_{out}/V	V_{out}^L/V	V_{DS}/V	I_{DS}/mA	rI/V	f
Z	0.000	0.000	0.000	0.00	0.000	1.000
H	0.664	-0.288	-0.288	0.00	0.000	-0.434
I	1.171	-0.325	-0.325	0.00	0.000	-0.278
J	1.593	-0.415	-0.415	0.00	0.000	-0.260
K	1.939	-0.562	-0.562	0.00	0.000	-0.290
L	2.240	-0.800	-0.800	0.00	0.000	-0.357
M	2.510	-1.325	-1.325	0.00	0.000	-0.528
N	2.770	-3.675	-3.675	0.00	0.000	-1.327
W	3.000	3.000	3.000	0.00	0.000	1.000

B.5

B.5 Output curves:

0.5pt



Confidential

B.6

The R_{DS} values are obtained from the slopes of the linear region of the output curves (small V_{DS} voltages).

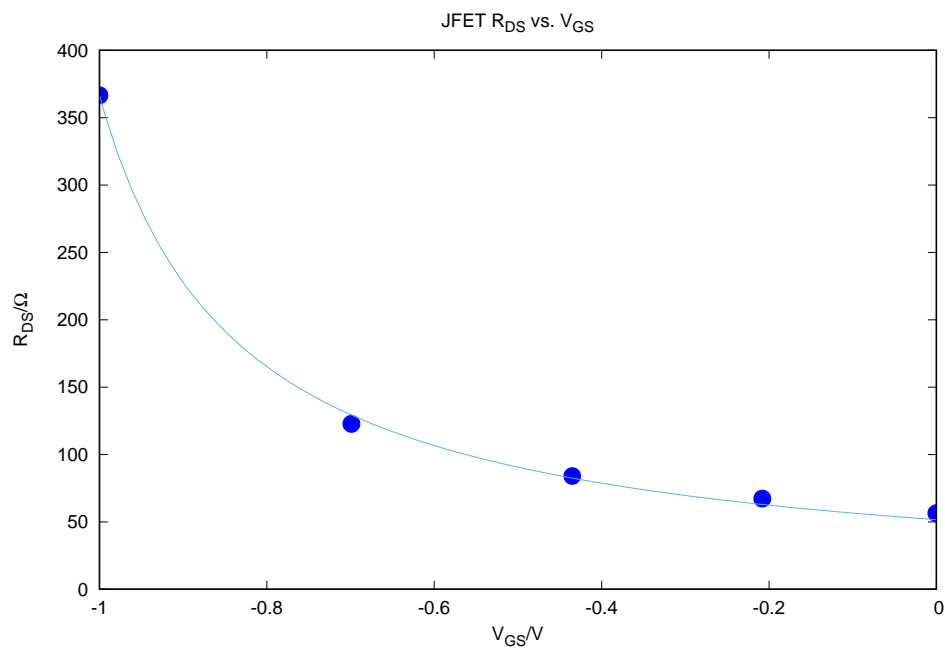
The last point in the plot $R_{DS}(V_{GS})$ has a large error bars as we are missing points in the linear regime, and will be ignored.

The solid line in the plot is the result of a fit to $R_{DS} = R_{DS}^0 (1 - V_{GS}/V_P)$, that gave $R_{DS}^0 = 52(2) \Omega$, $V_P = -1.18(1) \text{ V}$.

B.6

0.5pt

V_{GS}/V	R_{DS}/Ω
0	56.5 ± 2
-0.208	67.4 ± 2
-0.435	84.1 ± 4
-0.699	122.84 ± 4
-1.003	366.6 ± 4
-1.337	1111 ± 100



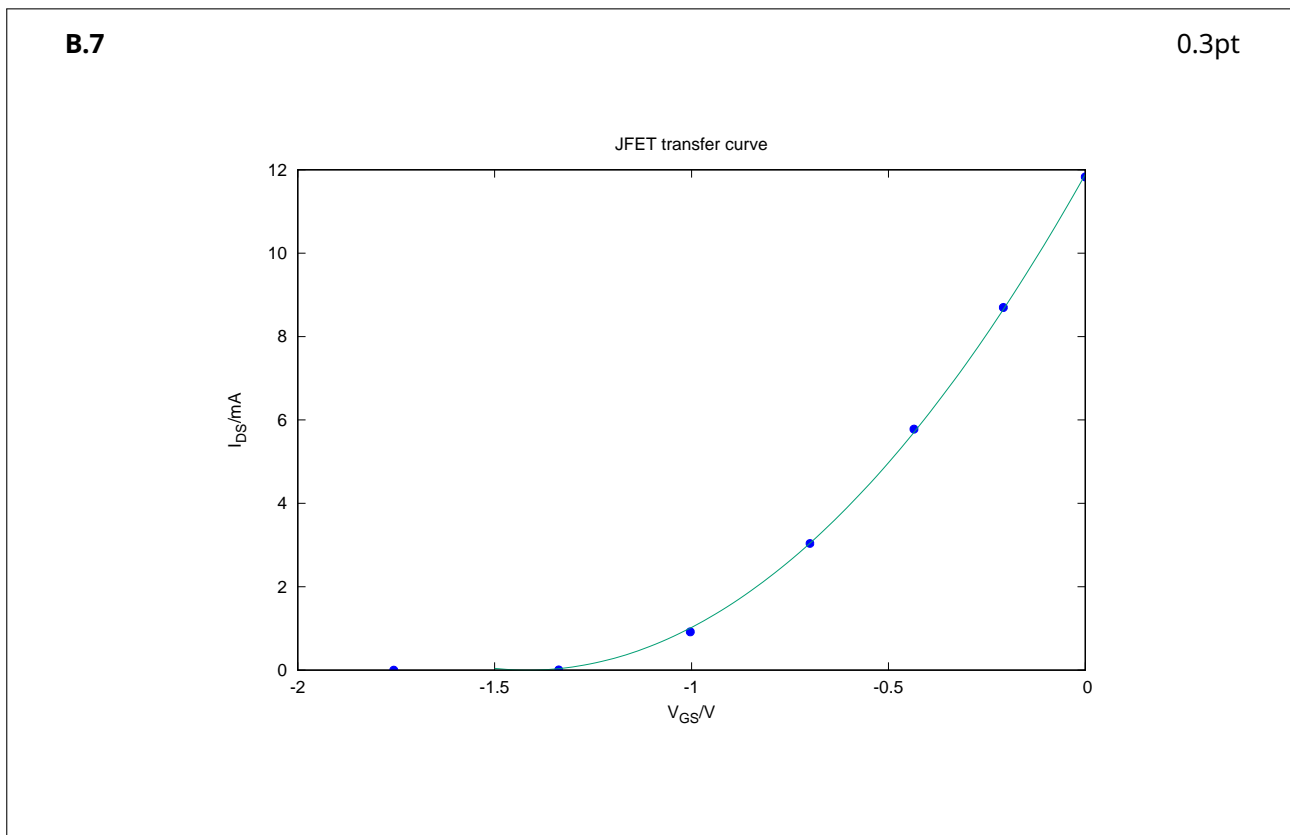
Confidential

B.7

The data was obtained with $V_{DS} = +3$ V. The solid line is the result of the fit to the data of the function

$$I_{DS} = I_{DSS} (1 - V_{GS}/V_P)^2.$$

The fitted parameters are $I_{DSS} = 11.89 \pm 0.06$ mA and $V_P = -1.42 \pm 0.02$ V.



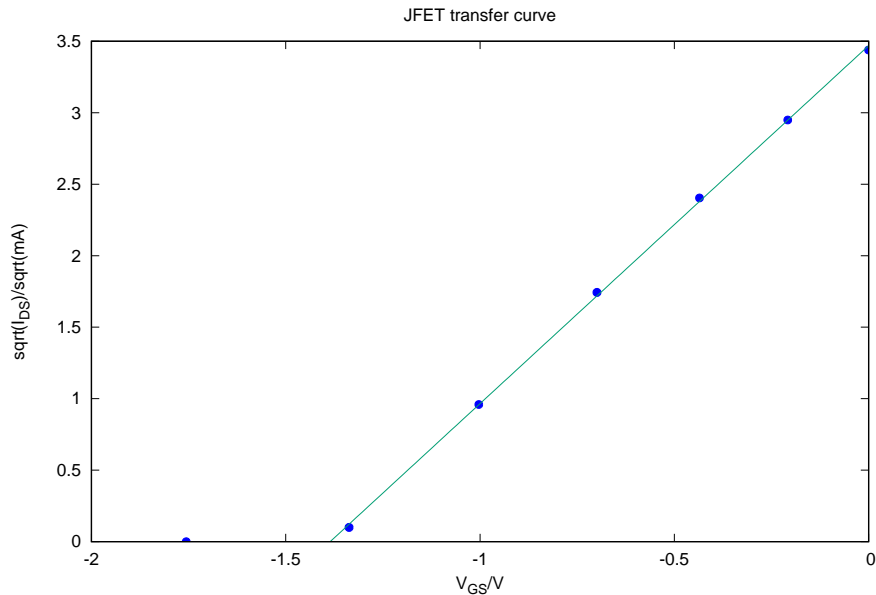
Confidential

B.8

From

$$I_{DS} = I_{DSS} (1 - V_{GS}/V_P)^2$$

a plot of $\sqrt{I_{DS}}$ as function of V_{GS} should yield a straight line with slope $a = -\sqrt{I_{DS}}/V_P$ that intercepts the x -axis at V_P .

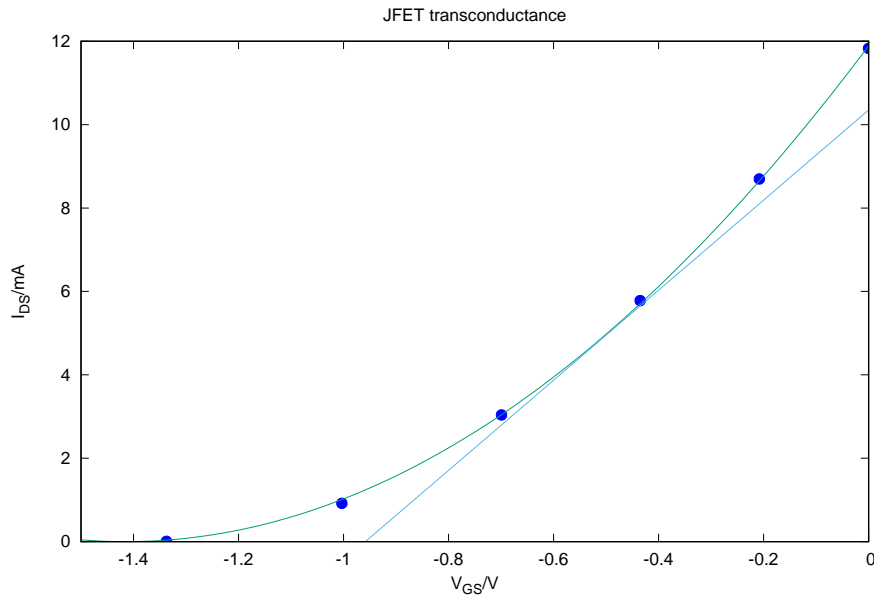


A linear fit to $f(x) = ax + b$ gave $a = 2.50(2)$ and $b = 3.47(2)$. Thus, $V_p = -b/a = -1.39(2)$ V and $I_{DSS} = 4.23^2 = 12.0(2)$ mA.

B.8	$V_p = -b/a = -1.39(2)$ $I_{DSS} = 4.23^2 = 12.0(2)$	0.4pt
------------	--	-------

B.9

The transconductance is the slope of the transfer curve at a given point. From the transfer plot, we draw the tangent at the point with abscissa -0.50 V and read the slope from the graph, obtaining $g = 10.8(1)$ m⁻¹.



From

$$I_D = I_{DSS} (1 - V_{GS}/V_P)^2,$$

$$g = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} = 2I_{DSS} (1 - V_{GS}/V_P) \left(-\frac{1}{V_P} \right) = \frac{2I_{DSS}}{V_P} (V_{GS}/V_P - 1).$$

Substituting values,

$$g = 10.8 \text{ m}^{-1}$$

a value that agrees with that obtained using the graphical method.

B.9 $g_{\text{measured}} = 10.8(1) \text{ m}^{-1}$
 $g_{\text{model}} = 10.8 \text{ m}^{-1}$

0.4pt

Part C: The Paper Thin Film Transistor (2.0 points)

C.1

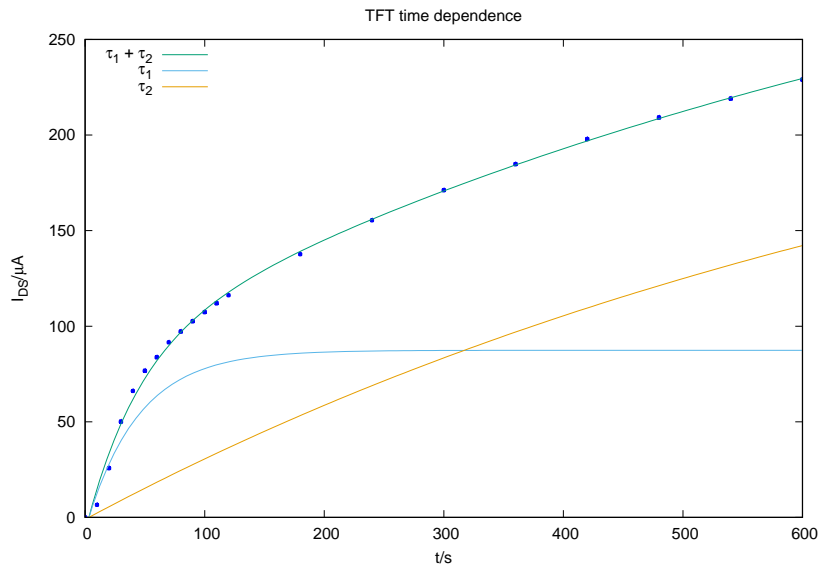
C.1					0.8pt
	t/s	$I_{DS}/\mu A$	t/s	$I_{DS}/\mu A$	
	0	0	110	112,0	
	10	6.6	120	116.2	
	20	25.8	180	137.7	
	30	50.1	240	155.4	
	40	66.2	300	171.2	
	50	76.7	360	184.4	
	60	83.8	420	197.9	
	70	91.6	480	209.2	
	80	97.2	540	219.1	
	90	102.6	600	220.0	
	100	107.4	-	-	

Confidential

C.2

The data is similar to that of the charge of a capacitor, superimposed with an almost linear component that corresponds to the charge of the second capacitor with a larger time constant.

A least squares fit to a $A(1 - \exp(-t/\tau_1)) + B(1 - \exp(-t/\tau_2))$ is also depicted, showing that the data can be well fitted by this model. The shorter time constant is $\tau_1 = 43(8)$ s, the longer time constant, τ_2 is roughly 20 times larger.

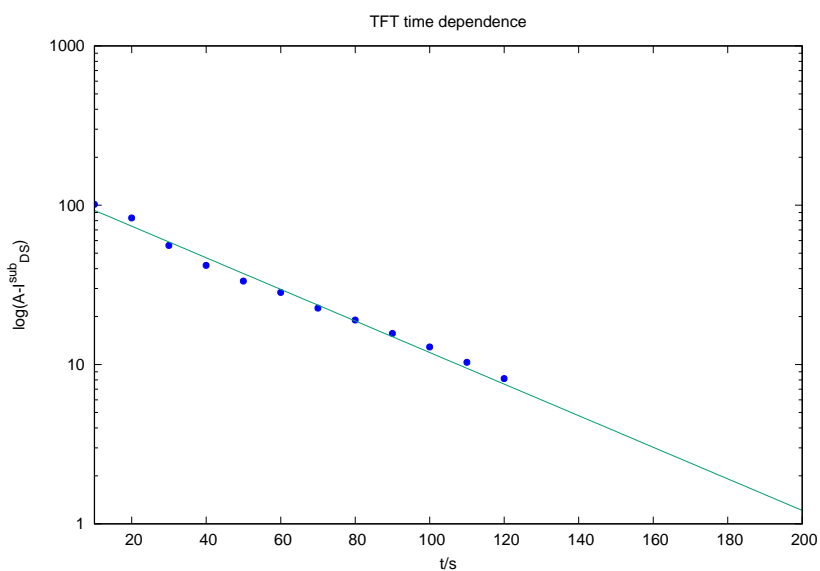
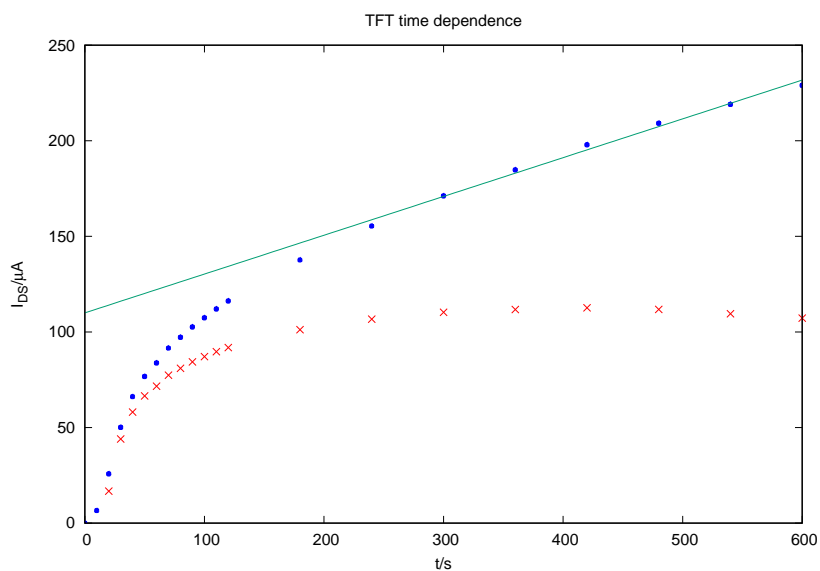


Let $I_{DS}^{\text{sub}} = A(1 - \exp(-t/\tau_1))$ be the data subtracted from the long time constant component. A logarithmic plot of $\log(A - I_{DS}^{\text{sub}})$ should be a straight line of slope $-1/\tau_1$. The constant A , the saturation current of the short τ_1 component, can be easily estimated from the above plot.

The slope of the line is $m = -0.023(1)$, from which we get $\tau_1 = 44(3)$ s. The error bar is underestimated, as it does not take into account the error in the subtraction of the τ_2 component.

C.2

1.2pt



$$\tau_1 = 44(3) \text{ s.}$$

Part D. Inverter Circuit (1.0 points)

D.1

D.1 $R_L = 198 \text{ k}\Omega$

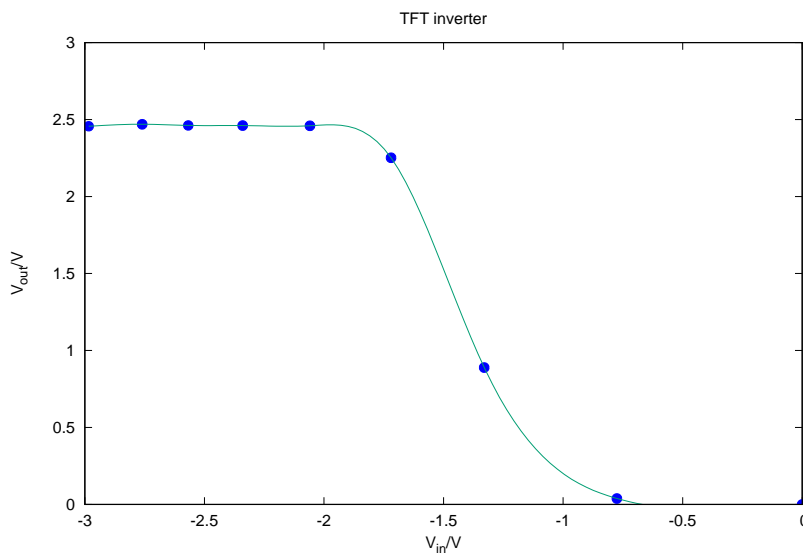
0.5pt

t	V_{in}/V	V_{out}/V
	-2.983	2.456
	-2.760	2.470
	-2.567	2.461
	-2.340	2.461
	-2.058	2.460
	-1.719	2.252
	-1.330	0.889
	-0.775	0.039

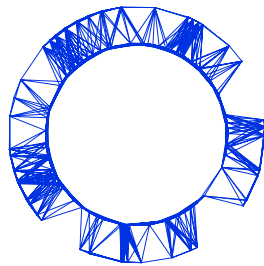
D.2

D.2

0.5pt



IPhO 2018
Lisbon, Portugal



Solutions to Experimental Problem 2

Viscoelasticity of a polymer thread

(J. M. Gil, J. Pinto da Cunha, R. C. Vilão, H. V. Alberto)

July 22, 2018

v1.1

Confidential

Problem 2: Viscoelasticity of a polymer thread (10 points)

Part A. Stress-relaxation measurements (1.9 points)

A.1

Measurement: $\ell_0 = 42.7 + 2 \times 0.5 = 43.7 \text{ cm}$,

A.1	$\ell_0 = (43.7 \pm 0.2) \text{ cm}$.	0.3pt
------------	--	-------

A.2

A.2	$P_0 = (81.11 \pm 0.03) \text{ gf}$.	0.3pt
------------	---------------------------------------	-------

A.3

The table contains the readings on the scale P (Question A.3) and the force on the thread, $F(t)$, at constant strain (Question D.1). The values of $\frac{dF}{dt}$ (Question D.6) were computed numerically using equal time intervals. The function $y(t)$ is given by $y(t) = F(t) - F_0 - F_1 e^{-t/\tau_1}$ (Question D.10).

A.3	t / s	$P(t) / \text{gf}$	F / gf	$\frac{dF}{dt} / \text{gf s}^{-1}$	$y(t) / \text{gf}$	1.0pt
	10	35.7	45.41		2.82	
	17	36.2	44.91		2.33	
	26	36.6	44.51		1.95	
	32	36.8	44.31		1.76	
	40	37.0	44.11		1.57	
	46	37.1	44.01		1.48	
	51	37.2	43.91		1.38	
	58	37.3	43.81		1.29	
	65	37.4	43.71		1.20	

A.3

0.3pt

t/s	$P(t)/\text{gf}$	F/gf	$\frac{dF}{dt}/\text{gf s}^{-1}$	$y(t)/\text{gf}$
73	37.5	43.61		1.12
84	37.6	43.51		1.03
94	37.7	43.41		0.94
105	37.8	43.31		0.86
118	37.9	43.21		0.77
136	38.0	43.11		0.70
151	38.1	43.01		0.62
173	38.2	42.91		0.55
193	38.3	42.81		0.48
217	38.4	42.71		0.41
247	38.5	42.61		0.35
279	38.6	42.51		0.29
317	38.7	42.41		0.23
358	38.8	42.31		0.18
408	38.9	42.21		0.14
471	39.0	42.11		0.11
525	39.1	42.01		0.07
591	39.2	41.91		0.03
600	39.2	41.91		0.04
672	39.3	41.81		0.01
773	39.4	41.71		0.007
866	39.5	41.61		-0.01
900	39.52	41.59		-0.00
993	39.6	41.51		-0.01
1124	39.7	41.41		
1200	39.74	41.37	-7.00×10^{-4}	
1272	39.8	41.31		
1419	39.9	41.21		
1500	39.94	41.17	-5.33×10^{-4}	
1628	40.0	41.11		
1800	40.06	41.05	-4.67×10^{-4}	
1869	40.1	41.01		
2037	40.2	40.91		
2100	40.22	40.89	-3.83×10^{-4}	
2400	40.29	40.82		

Confidential

A.4

Measurement: $\ell = 50.0 + 2 \times 0.5 = 51.0 \text{ cm}$,

A.4

$$\ell = (51.0 \pm 0.2) \text{ cm} .$$

0.3pt

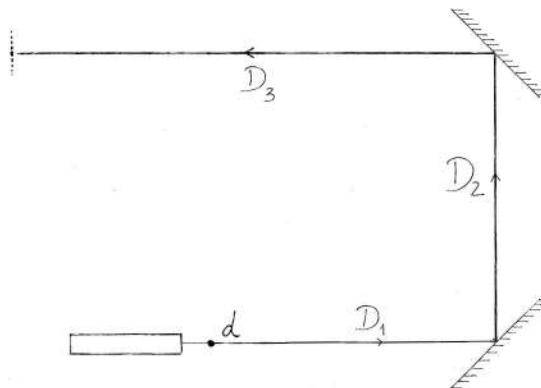
Part B. Measurement of the stretched thread diameter (1.5 points)

B.1

Two mirrors are used to maximize the distance D and consequently the distance between diffraction minima.

B.1 Sketch of the method

0.6pt



B.2

The total distance D is the sum

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = (26.0 + 36.0 + 102.3) \text{ cm} = 164.3 \text{ cm} = 1.643 \text{ m} .$$

The estimated uncertainties are

$$\sigma_{D_1} = \sigma_{D_2} = \sigma_{D_3} \approx 0.5 \text{ cm} \Rightarrow \sigma_D = \sqrt{3 \times \sigma_{D_1}^2} = 0.5 \times \sqrt{3} = 0.87 \text{ cm} .$$

B.2

$$D = (1.643 \pm 0.009) \text{ m} .$$

0.3pt

B.3

The distance between minima, x , is quite small. To reduce the error, the total distance Nx , with $N = 22$, was measured:

$$22x = 49 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x} = 2.227 \text{ mm} .$$

The corresponding uncertainty is

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{22x}}{22} = \frac{0.25 \text{ mm}}{22} = 0.011 \text{ mm} .$$

B.3

$$\bar{x} = (2.227 \pm 0.011) \text{ mm} .$$

0.3pt

B.4

Using previous results, we get

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta} \simeq \frac{\lambda D}{\bar{x}} = \frac{650 \times 10^{-9} \text{ m} \times 1.643 \text{ m}}{2.227 \times 10^{-3} \text{ m}} = 4.795 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.480 \text{ mm} .$$

For the uncertainties, we have

$$\frac{\sigma_d}{d} = \frac{\sigma_\lambda}{\lambda} + \frac{\sigma_D}{D} + \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{10}{650} + \frac{0.0087}{1.643} + \frac{0.011}{2.227} = 0.02517 \Rightarrow \sigma_d = 0.02517 \times 0.480 \text{ mm} = 0.012 \text{ mm} .$$

B.4

$$d = (0.480 \pm 0.012) \text{ mm} .$$

0.3pt

Part C. Change to a new thread (0.3 points)

C.1

Measurement: $\ell'_0 = 31.6 + 2 \times 0.5 = 32.6 \text{ cm}$.

C.1

$$\ell'_0 = (32.6 \pm 0.2) \text{ cm} .$$

0.3pt

Part D. Data Analysis (5.7 points)

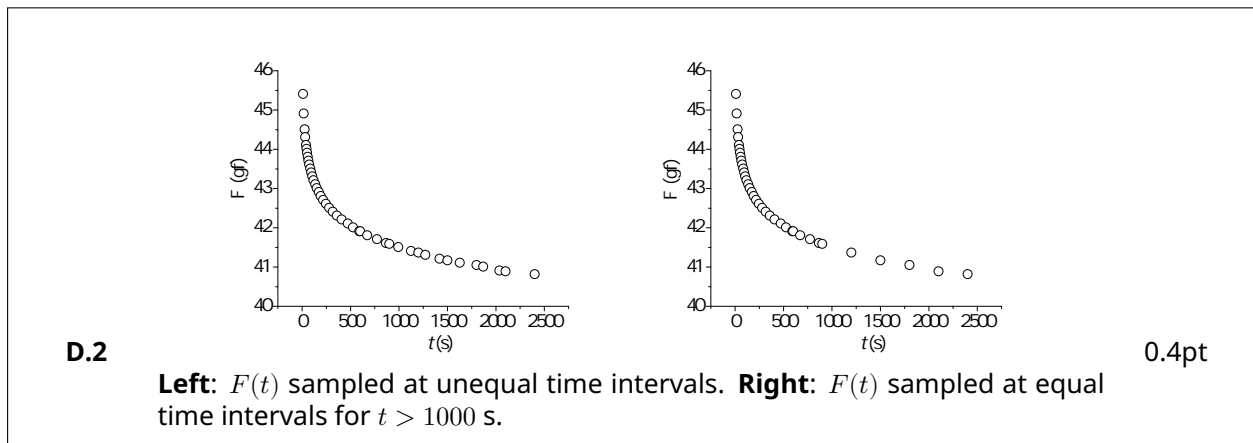
D.1

The force on the thread was calculated as $F(t) = (P_0 - P(t))$, in gram-force units.

D.1 See column $F(t)$ in the table in A.3.

0.3pt

D.2



0.4pt

D.3

The dimensionless quantity ϵ is given by

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{51.0 - 43.7}{43.7} = 0.167 \text{ .}$$

The uncertainty in ϵ , σ_ϵ , is calculated propagating the uncertainties in the measured length, σ_l and σ_{l_0} :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon} &= \frac{\sigma_{(l-l_0)}}{l-l_0} + \frac{\sigma_{l_0}}{l_0} \\ &= \frac{\sqrt{\sigma_l^2 + \sigma_{l_0}^2}}{l-l_0} + \frac{\sigma_{l_0}}{l_0} \\ &= \frac{0.2 \times \sqrt{2}}{7.3} + \frac{0.2}{43.7} \\ &= 0.0433 \end{aligned}$$

Therefore, $\sigma_\epsilon = 0.0433 \times 0.167 = 0.0072$.

D.3

$$\epsilon = 0.167 \pm 0.007 \text{ .}$$

0.3pt

D.4

One has

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F}{\epsilon S}.$$

In this case, $S = \pi(d/2)^2 = 1.809 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ and $\epsilon = 0.167$. We also have $1 \text{ gf} = g \times 10^{-3} \text{ N}$ with $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$. Therefore, if F is in gram-force units we have

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{9.8 \times 10^{-3} \text{ gf}^{-1} \text{ N}}{0.167 \times 1.809 \times 10^{-7} \text{ m}^2} F = (324293 \text{ gf}^{-1} \text{ N m}^{-2}) F,$$

where F is in gf, and σ is in N m^{-2} . Comparing with $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$ we get

$$\beta = 324293 \text{ gf}^{-1} \text{ N m}^{-2}.$$

Note that, if we write

$$F(t) = F_0 + F_1 e^{-t/\tau_1} + F_2 e^{-t/\tau_2} + F_3 e^{-t/\tau_3} + \dots \quad (1)$$

and compare with equation

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2} + E_3 e^{-t/\tau_3} + \dots \quad (2)$$

we conclude that $E_0 = \beta F_0$, $E_1 = \beta F_1$, $E_2 = \beta F_2$, etc.

D.4

$$\beta = 3.24 \times 10^5 \text{ gf}^{-1} \text{ N m}^{-2}.$$

0.3pt

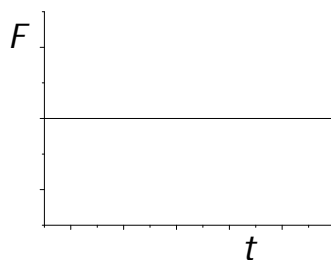
D.5

For a purely elastic process, $\sigma = \epsilon E_0$ and

$$F = \alpha \sigma = \alpha \epsilon E_0.$$

Thus, a graph of a constant function is expected.

D.5



0.4pt

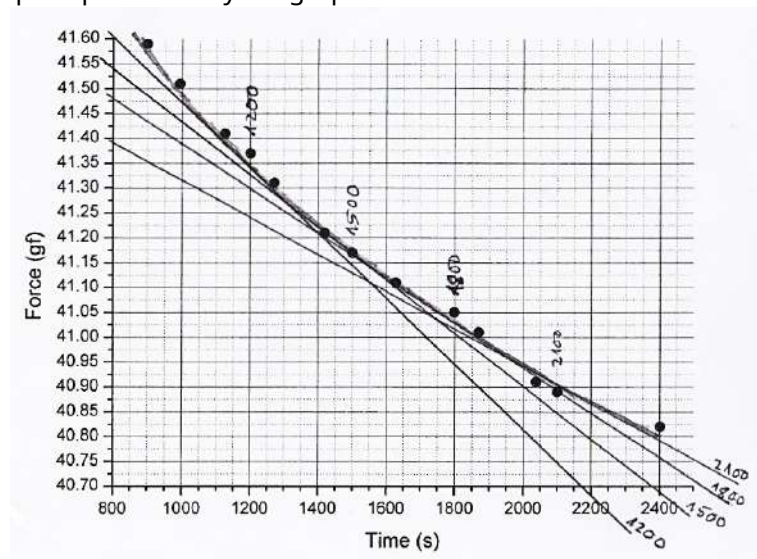
D.6

The data for $\frac{dF}{dt}$ inserted in table introduced in A.3, was computed numerically for equal time intervals. However, the graphical method is also exemplified. In the present graph, tangent lines to $F(t)$ are drawn at four different time instants (1200, 1500, 1800 and 2100 s). The slopes of those lines are a measure of $\frac{dF}{dt}$ at those instants.

D.6 See in the table used in A.3, the column with $\frac{dF}{dt}$.

0.5pt

This graph is present only if a graphical method is used.



Confidential

D.7

For a single viscoelastic process,

$$F = \frac{1}{\beta} (E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1}) = F_0 + F_1 e^{-t/\tau_1} .$$

Therefore,

D.7

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{F_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} , \quad \text{where} \quad F_1 = \frac{E_1}{\beta} .$$

0.3pt

D.8

The linearisation of the expression of dF/dt is accomplished using logarithms:

$$\ln \left(-\frac{dF}{dt} \right) = \ln \left(\frac{F_1}{\tau_1} \right) - \frac{1}{\tau_1} t .$$

The plot of $\ln(-dF/dt)$ is shown in the graph below for a case where the derivative was obtained numerically (left) and using a graphic method (right).

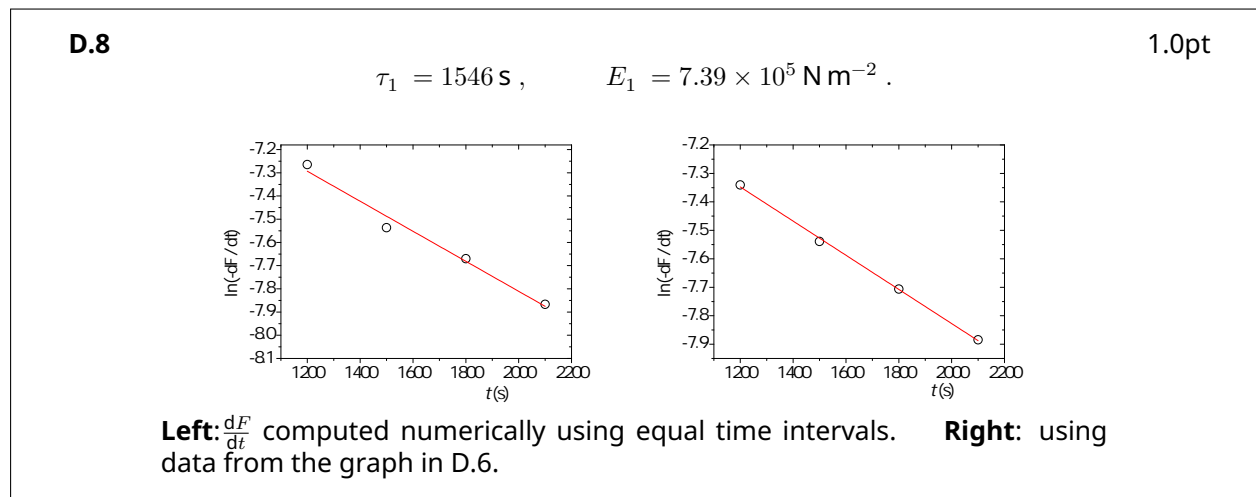
For the left graph, the best straight line is $\ln(-dF/dt) = m_1 t + b_1$ where $m_1 = (-6.47 \pm 0.62) \times 10^{-4}$ and $b_1 = (-6.52 \pm 0.11)$, using t in seconds and the force in gram-force units. If the derivative is computed numerically for unequal time intervals, the final parameters E_1 and τ_1 are similar.

The best straight line for the right graph yields $m_1 = (-6.00 \pm 0.15) \times 10^{-4}$ and $b_1 = (-6.63 \pm 0.02)$ using t in seconds and the force in gram-force units.

Thus, using the data from the left graph, $\tau_1 = \frac{1}{-m_1} = 1546$ s and

$$F_1 = \tau_1 e^{b_1} = 2.28 \text{ gf} \Rightarrow E_1 = \beta F_1 = 7.39 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} .$$

For the right graph, the final parameters are $\tau_1 = 1667$ s and $E_1 = 7.13 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$.



Confidential

D.9

For the 4 points on the left graph in D.8, we can write

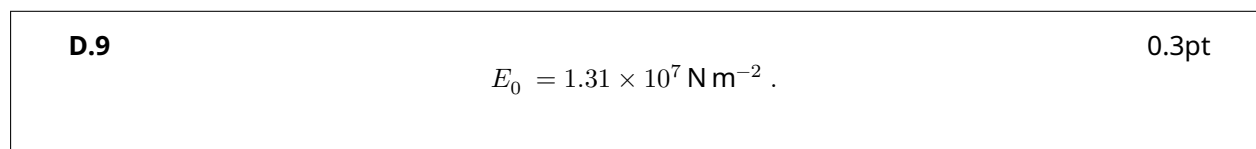
$$F(t) = F_0 + F_1 e^{-t/\tau_1} \Rightarrow F_0 = F(t) - F_1 e^{-t/\tau_1}$$

Thus, averaging F_0 for the 4 points of the left graph in D.8:

$$F_0 = \left(\frac{40.32 + 40.31 + 40.34 + 40.30}{4} \right) = 40.32 \text{ gf}$$

Finally,

$$E_0 = \beta F_0 = 324293 \times 40.32 \text{ N m}^{-2} .$$



D.10

The function $y(t)$ is given by

$$y(t) = F(t) - F_0 - F_1 e^{-t/\tau_1},$$

and was added in the Table introduced in A.3 using $F_0 = 40.32$ gf, $F_1 = 2.28$ gf and $\tau_1 = 1546$ s.

D.10 See column $y(t)$ in the Table in A.3.

0.3pt

D.11

Since

$$y(t) = F(t) - F_0 - F_1 e^{-t/\tau_1},$$

then

$$y(t) = F_2 e^{-t/\tau_2} + F_3 e^{-t/\tau_3} + \dots, \quad \tau_2 > \tau_3 > \dots$$

At long times, when the contributions from the higher components are small enough, we expect a linear behaviour for $\ln y(t)$:

$$\ln y = \ln F_2 - \frac{1}{\tau_2} t.$$

In this case, the $y(t)$ data points become meaningless above 500 s. In the region 200-500 s the graph is linear and that region can be used to extract the parameters of the second component. The equation of the straight line is $\ln y_2 = b_2 + m_2 t$. From the graph below,

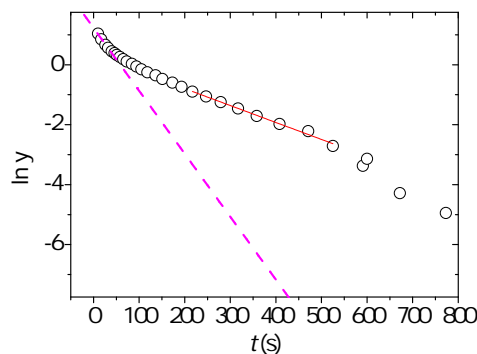
$$m_2 = -(5.65 \pm 0.19) \times 10^{-3} \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{-m_2} = 177 \text{ s}$$

$$b_2 = 0.33 \pm 0.07 \Rightarrow F_2 = e^{b_2} = 1.39 \Rightarrow E_2 = \beta F_2 = 4.5 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}.$$

D.11

$$E_2 = 4.5 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}, \quad \tau_2 = 177 \text{ s}.$$

1.0pt



The best straight line in the range 200-500 s yield the parameters τ_2 and E_2 (Question D.11). The slope of the best straight line in the range [10, 30] s give an estimate of τ_3 (Questions D.12 and D.13).

D.12

Below around 30 s there is clear deviation from a linear behaviour indicating the presence of a third component. In our case, the first data point was acquired at $t = 10$ s.

D.12 (0.3 pt)

$$t_i = 10 \text{ s} \quad , \quad t_f = 30 \text{ s}$$

D.13

Drawing a line in the graph using the first data points (in the range defined in D.12), as shown in the graph in D.11, τ_3 can be estimated as:

$$m_3 = -0.02 \Rightarrow \tau_3 \approx m_3^{-1} ,$$

D.13

0.3pt

$$\tau_3 \approx 50 \text{ s} .$$

Part E. Measuring E in constant stress conditions (0.6 points)

E.1

From Question C.1 we have

$$\ell'_0 = (32.60 \pm 0.2) \text{ cm} .$$

The final length ℓ' should be measured. In our case,

$$\ell' = 42.2 + 2 \times 0.5 = 43.2 \text{ cm} \Rightarrow \ell' = (43.2 \pm 0.2) \text{ cm} .$$

Therefore, the strain is

$$\epsilon = \frac{\ell' - \ell'_0}{\ell'_0} = 0.325 .$$

Given that

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\frac{Mg}{\pi R^2}}{\epsilon} = \frac{80.2 \times 10^{-3} \times 9.8}{\pi \times (0.24 \times 10^{-3})^2 \times 0.325} = 1.337 \times 10^7 \text{ N m}^{-2} .$$

Note that the radius R of the stretched thread was not measured. We used the value measured in task B.4: $R \approx 0.24 \times 10^{-3} \text{ m}$.

The relative difference is

$$\frac{E - E_0}{E_0} = 0.021 .$$

E.1

$$E = 1.337 \times 10^7 \text{ N m}^{-2} , \quad \frac{E - E_0}{E_0} = 2.1\% .$$

0.6pt