ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке
и технолошког развоја Републике Србије

I разред — **РЕШЕЊА – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА** — **РЕПУБЛИЧКИ НИВО**

22. март 2018.

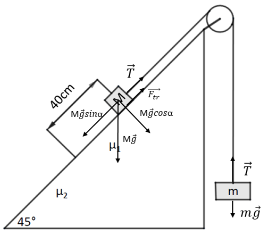
1. При кретању тела вертикално навише на њега делују сила гравитације и сила отпора ваздуха у истом смеру. При томе, $ma_1 = -mg - F_o$ $\boxed{1п}$, односно $a_1 = -g - \frac{F_\circ}{m} = -(g + \frac{F_\circ}{m})$ $\boxed{1п}$. При кретању тела вертикално наниже на њега делују сила гравитације и сила отпора ваздуха у супротним смеровима. При томе, важи $ma_2 = mg - F_\circ$ $\boxed{1п}$, односно $a_2 = g - \frac{F_\circ}{m}$ $\boxed{1п}$. Када тело достигне максималну висину, његова брзина је једнака нули. Одатле је $v_0^2 = 2a_1'h = 2(g + \frac{F_\circ}{m})h$ $\boxed{1п}$, где је $a_1' = -a_1$ $\boxed{1п}$. При кретању вертикално наниже важи $v^2 = 2a_2h = 2(g - \frac{F_\circ}{m})h$ $\boxed{1п}$. Из односа брзина добија се $\frac{v_0^2}{v^2} = 2 = \frac{g+\frac{F_\circ}{m}}{g-\frac{F_\circ}{m}}$ $\boxed{1п}$. Сређивањем се добија $F_\circ = \frac{mg}{3}$ $\boxed{2п}$. Ако време падања тела означимо са t_2, онда имамо $h = \frac{a_2t_2^2}{2}$ и $\frac{h}{4} = \frac{a_2(t_2-1)^2}{2}$. Сређивањем се добија квадратна једначина $3t_2^2 - 8t_2 + 4 = 0$ $\boxed{2п}$, чија су решења $t_2^{(1)} = 2\mathsf{s}$ $\boxed{2п}$ и $t_2^{(2)} = \frac{2}{3}\mathsf{s}$ $\boxed{2п}$. Једино решење које има смисла из услова задатка је $t_2 = 2\mathsf{s}$ $\boxed{2п}$. Максимална висина коју тело достиже током кретања је $h = \frac{a_2t_2^2}{2} = \frac{(g-\frac{F_\circ}{m})t_2^2}{2} = 13{,}08\mathsf{m}$ $\boxed{2п}$.
   други начин:
   Решења $3t_2^2-8t_2+4 = 0$ се могу добити без директне примене формуле за квадратну једначину. Израз са леве стране једнакости може се записати на следећи начин $3t_2^2-8t_2+4 = (\sqrt{3}t_2)^2-2\sqrt{3}t_2\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}+\underbrace{(\frac{4}{\sqrt{3}})^2 - \frac{4}{3}}_{4} = (\sqrt{3}t_2-\frac{4}{\sqrt{3}})^2-(\frac{2}{\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{3}t_2 - \frac{6}{\sqrt{3}})(\sqrt{3}t_2 - \frac{2}{\sqrt{3}})$. Одатле је $(\sqrt{3}t_2 - \frac{6}{\sqrt{3}})(\sqrt{3}t_2 - \frac{2}{\sqrt{3}}) = 0$ и добијају се решења $t_2^{(1)} = 2\mathsf{s}$ и $t_2^{(2)} = \frac{2}{3}\mathsf{s}$. Једино решење које има смисла из услова задатка је $t_2 = 2\mathsf{s}$. Остатак задатка решава се као у првом начину.
   трећи начин:
   Дељењем левих и десних страна једнакости $h = \frac{a_2t_2^2}{2}$ и $\frac{h}{4} = \frac{a_2(t_2-1)^2}{2}$, се добија $4 = \frac{t_2^2}{(t_2-1)^2}$, односно $4(t_2-1)^2-t_2^2 = 0$. Одатле имамо $[2(t_2-1)-t_2]\cdot[2(t_2-1)+t_2] = 0$. Добијају се решења $t_2^{(1)} = 2\mathsf{s}$ и $t_2^{(2)} = \frac{2}{3}\mathsf{s}$. Једино решење које има смисла из услова задатка је $t_2 = 2\mathsf{s}$. Остатак задатка решава се као у првом начину.
   Напомена:
   Сила отпора ваздуха у већини реалних ситуација је или пропорционална интензитету брзине или квадрату брзине. У задатку је дато поједностављење, у виду силе отпора ваздуха константног интензитета, да би проблем био математички једноставнији.

2. Из закона кретања се добија $v_0 = 1\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{1п}$, $a_t = 1\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$ $\boxed{1п}$. Интензитет укупног убрзања у тренутку $t_1 = 1\mathsf{s}$ је $a_1 = \sqrt{a_t^2 + a_n^2(t_1)} = \sqrt{a_t^2 + \frac{v^4(t_1)}{R^2}}$ $\boxed{2п}$. Интензитет укупног убрзања у тренутку $t_2 = 2\mathsf{s}$ је $a_2 = \sqrt{a_t^2 + a_n^2(t_2)} = \sqrt{a_t^2 + \frac{v^4(t_2)}{R^2}}$ $\boxed{2п}$. Интензитет брзине у тренутку t, је дат са $v(t) = v_0 + a_tt$ $\boxed{2п}$. Из односа $a_1 : a_2 = 1 : 2$, добија се $R = \frac{\sqrt{v^4(t_2)-4v^4(t_1)}}{\sqrt{3}a_t}$ $\boxed{4п}$, односно $R = \frac{\sqrt{(v_0+a_tt_2)^4-4(v_0+a_tt_1)^4}}{\sqrt{3}a_t}$ $\boxed{2п}$. Заменом бројних вредности добија се $R = 2{,}38\mathsf{m}$ $\boxed{1п}$.

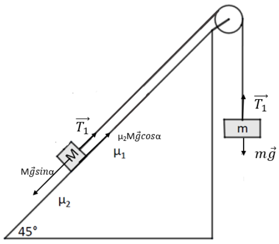
3. Током првих $40\mathsf{cm}$ кретања, једначине кретања су $ma_1 = T - mg$ $\boxed{1п}$ и $Ma_1 = Mg\sin\alpha - \mu_1Mg\cos\alpha - T$ $\boxed{1п}$, одакле се добија да је $a_1 = \frac{Mg\sin\alpha-\mu_1Mg\cos\alpha-mg}{M+m} = 0{,}892\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$ $\boxed{2п}$ (ова вредност је израчуната да би се лакше пратило решење). Време за које тело пређе $d = 40\mathsf{cm}$ се може израчунати из $d = \frac{1}{2}a_1t_1^2$ $\boxed{2п}$, одакле је $t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}}$ $\boxed{1п}$, стога је брзина коју тело има приликом напуштања прве подлоге $v_1 = a_1t_1 = \sqrt{2a_1d}$ $\boxed{2п}$. Након што тело пређе на део подлоге различитог коефицијента трења, потребно је написати нове једначине кретања, а оне су $ma_2 = T_1 - mg$ $\boxed{1п}$ и $Ma_2 = Mg\sin\alpha - \mu_2Mg\cos\alpha - T_1$ $\boxed{1п}$, одакле се добија да је $a_2 = \frac{Mg\sin\alpha-\mu_2Mg\cos\alpha-mg}{M+m} = -1{,}189\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$ $\boxed{2п}$, тј, може се сматрати да тело успорава интензитетом убрзања $a_2 = 1{,}189\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$ $\boxed{1п}$. Време потребно да се тело зауставити се може израчунати из $v = v_1 - a_2t_2$, где је $t_2 = \frac{v_1}{a_2} = \frac{\sqrt{2a_1d}}{a_2}$ $\boxed{2п}$. За то време, тело ће прећи пут од $s = v_1t_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2 = \frac{a_1d}{a_2} = 0{,}3\mathsf{m}$ $\boxed{2п}$. Тело масе m се подигне за $d + s = 0{,}7\mathsf{m}$ $\boxed{2п}$.

4. Како је $v_{co} \neq \omega_0r$, може се закључити да се ради о котрљању са клизањем $\boxed{2п}$. Потребно је размотрити силе које делују на тело (слика 1). Разматрањем сила које делују по x и y − оси, добија се: $\Sigma F_x = ma_{cx} = -\mu N$ $\boxed{2п}$ и $\Sigma F_y = ma_{cy} = 0 = N - mg$ $\boxed{2п}$, одакле следи $N = mg$ $\boxed{1п}$ и $a_{cx} = -\mu g$ $\boxed{1п}$. Пређени пут лопте се стога може рачунати као $x_c = v_0t - \frac{1}{2}\mu gt^2$ $\boxed{2п}$. Потом је потребно размотрити моменте сила који делују на тело, одакле се добија $\Sigma M_{cz} = I_c\alpha$ $\boxed{2п}$ одакле следи $-\mu Nr = \frac{2}{5}mr^2\alpha$ $\boxed{1п}$ и $\alpha = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{r}$ $\boxed{1п}$. Стога је промена угаоне брзине са временом $\omega = \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{r}t$ $\boxed{2п}$. Прелаз са обртања које је супротно од смера казаљке на сату на обртање у смеру

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд



Слика 1: Слика уз трећи задатак. Кретање тела на првом делу пута.



Слика 2: Слика уз трећи задатак.Кретање тела на другом делу пута.

казаљке на сату се дешава непосредно након тренутка када је $\omega = 0$ $\boxed{\textbf{1п}}$, одакле се добија да је $t = \frac{2}{5}\frac{r\omega_0}{\mu g}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Када се ова вредност уврсти у формулу за пређени пут, добија се $x_c = v_0\frac{2}{5}\frac{r\omega_0}{\mu g} - \frac{1}{2}\mu g(\frac{2}{5}\frac{r\omega_0}{\mu g})^2 = 0{,}65\text{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

5. Како се првих 12,5s диск креће равномерно убрзано, релација између његовог пребрисаног угла и времена је $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$, док је број обртаја N дат са $N = \frac{\theta}{2\pi}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Да бисмо одредили угаоно убрзање, потребно је за податке до 12,5s (укључујући и то време) нацртати график зависности $N = f(t^2)$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Грешке за квадрате времена одређујемо као $\Delta t^2 = 2t\Delta t$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Подаци за први график су представљени у табели 1.

t^2[s^2]	број обртаја
31±2	2
63±3	4
94±4	6
125±4	8
156±5	10

За податке из табеле дати $\boxed{\textbf{2п}}$. График овако приказаних података показује линеарну зависност. Након повлачења криве која најбоље одговара подацима, имајући на уму да крива мора да прође кроз тачку (0,0), могуће је приступити одређивању угаоног убрзања. Коефицијент правца. одређујемо на основу две неекспериманталне тачке $A(50\text{s}^2; 3{,}2\text{obrtaja})$ и $B(140\text{s}^2; 9\text{obrtaja})$, одакле је $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0{,}064\frac{\text{obrtaja}}{\text{s}^2} = 0{,}402\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Грешка коефицијента правца је $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{|x_B - x_A|}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, обзиром да су вредности броја обртаја дате без грешке. Како се грешке за тачке које су очитане са графика процењују тако што се бира већа од грешака експерименталних тачака између којих се налазе, потребно је користити грешке квадрата времена за 63s^2 за тачку A и грешку квадрата времена за 156s^2 за тачку B, па је $\Delta k = 0{,}04\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Како је $k = \frac{1}{2}\alpha$ $\boxed{\textbf{1п}}$, следи да је $\alpha = (0{,}80 \pm 0{,}08)\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Како је мотор

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

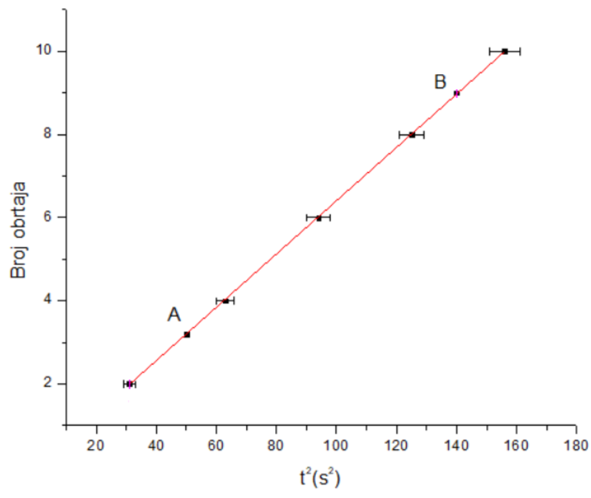
након 12,5s постигао максималну угаону брзину и након тога наставља да се окреће равномерно, податке од 12,5s (укључујући и то време) могуће је представити линеарним фитом $\frac{\theta}{2\pi} = N = \omega t + n$ $\boxed{2п}$, где је N број обртаја. Одатле се јасно види да је коефицијент правца једнак угаоној брзини $\boxed{1п}$. Подаци за овај график се налазе у табели 2.

t[s]	број обртаја
12,50±0,20	10
13,76±0,20	12
15,02±0,20	14
16,27±0,20	16

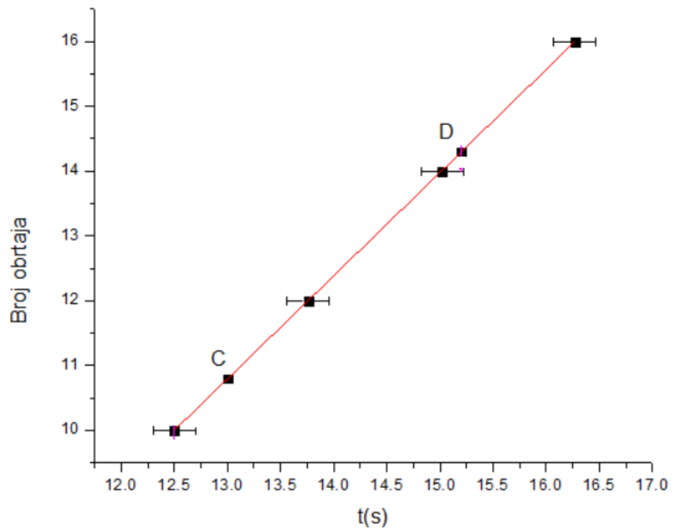
За податке из табеле дати $\boxed{2п}$.

Након повлачења криве која најбоље одговара подацима, могуће је приступити одређивању угаоне брзине. Коефицијент правца одређујемо на основу две неекспериманталне тачке $C(13\text{s}; 10{,}8\text{obrtaja})$ и $D(15{,}2\text{s}; 14{,}3\text{obrtaja})$, одакле је $k = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = 1{,}591\frac{\text{obrtaja}}{\text{s}} = 9{,}997\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\boxed{1п}$. Грешка коефицијента правца је $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_D + \Delta x_C}{|x_D - x_C|}$ $\boxed{1п}$, пошто су вредности броја обртаја дате без грешке. Како се грешке за тачке које су очитане са графика процењују тако што се бира већа од грешака експерименталних тачака између којих се налазе, $\Delta x_D = \Delta x_C = 0{,}2\text{s}$, па је $\Delta k = 0{,}289\frac{\text{obrtaja}}{\text{s}} = 1{,}82\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1{,}8\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\boxed{1п}$. Стога је $\omega = (10{,}0 \pm 1{,}8)\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\boxed{1п}$.

Сваки график вредновати са по $\boxed{3п}$.
Напомена: Ученицима ће бити признат задатак и уколико су користили мајорирање.



Слика 3:



Слика 4:

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд