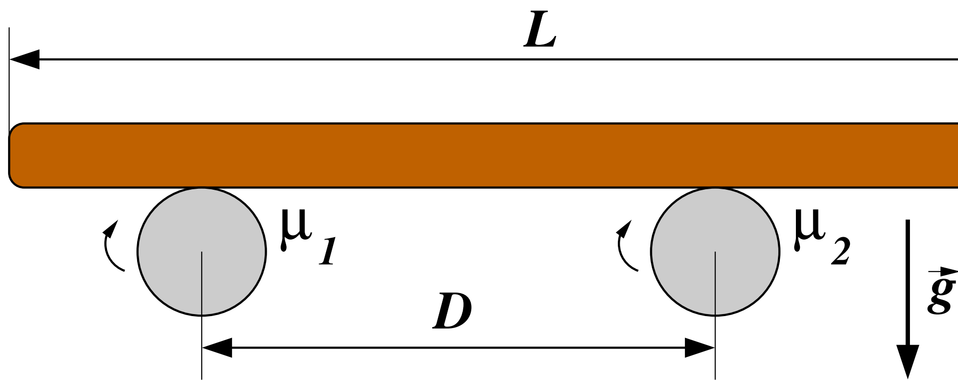
1. Хомоген балван дужине L се креће у хоризонталној равни и нормално на два једнака и паралелна ваљка. Изглед система нормално на осе ваљака је приказан на слици. Растојање између центара ваљака је D. Ваљци се окрећу око својих оса без транслација. Балван проклизава по површинама оба ваљка. Смер ротације сваког од ваљака може бити у смеру казаљке на сату, $s = 1$, или супротном од казаљке на сату, $s = -1$. Смерови приказани на слици илуструју случај $s_1 = s_2 = 1$. Коефицијенти трења између ваљака и балвана су μ_1 и μ_2. Под којим условима за величине $\mu_{1,2}$, L, D и $s_{1,2}$ балван може бити у равнотежи? Одредите равнотежни положај балвана. Када је та равнотежа стабилна? Ако положај стабилне равнотеже постоји, колика је угаона фреквенца малих осцилација око њега? Убрзање Земљине теже је g. **(20 поена)**



Слика уз задатак 1.

2. Инспирисан гледањем Зимских олимпијских игара Милан је решио да се опроба у уметничком клизању. Нарочито му је пажњу привукао такозвани Акселов скок (назван по норвешком клизачу Акселу Паулсену), током кога клизач скочи са залетом унапред, у ваздуху се ротира око своје осе а дочека у назад. Тако постоје једноструки (у коме клизач изврши 1,5 пуну ротацију), двоструки (2,5 ротације) и троструки (3,5 ротације) Акселов скок, док четвороструки, услед изузетне тежине, није ни покушан у оквиру званичних такмичења.

   Решен да буде први који ће у томе успети, након вишегодишњег тренирања, Милан је успео да савлада једноструки, двоструки и троструки скок, док му четвороструки никако није успевао. Због тога је Милан позвао своју другарицу Ивану, која важи за врсног физичара међу својим пријатељима, у помоћ. Након посматрања Милановог тренинга она је приметила следеће ствари: у свим скоковима Милан проведе приближно исто време $t = 0.8\text{s}$ у ваздуху, док је хоризонтална компонента његове брзине приликом одскока била $v_{1h} = 6\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (једноструки), $v_{2h} = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (двоструки) и $v_{3h} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (троструки). Под претпоставком да је у скакању Милан ограничен укупном енергијом коју може да утроши на скок, као и да сваки пут да све од себе, помозимо Ивани да утврди да ли са тренутним нивоом спремности Милан може остварити четвороструки скок, те да ли више времена треба да посвети клизачкој техници или тренингу снаге. **(20 поена)**

3. Електрично поље равног електромагнетног таласа осцилује у равни нормалној на правац простирања. Начин осциловања поља у овој равни одређује поларизацију таласа. На пример, када је поље увек усмерено у истом правцу кажемо да је електромагнетни талас линеарно поларисан. По аналогији, када вектор електричног поља у равни нормалној на правац простирања описује кружницу или елипсу, поларизација је кружна или елиптична. Кружно поларисан талас може бити лево (L) или десно (R) поларисан. Електрично поље L-таласа који се простире дуж z осе је дато компонентама $E_{1x} = E_{10}\cos(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1)$ и $E_{1y} = -E_{10}\sin(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1)$, док је електрично поље R-таласа $E_{2x} = E_{20}\cos(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2)$ и $E_{2y} = E_{20}\sin(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2)$. Увели смо ознаке $E_{1(2)0}$ $k_{1(2)}$ $\omega_{1(2)}$ $\phi_{1(2)}$ за амплитуду електричног поља, интензитет таласног вектора, угаону фреквенцу и фазу лево (десно) кружно поларисаног таласа 1(2).

(а) Покажите да вектор електричног поља десног кружно поларисаног (R) таласа за константно z описује кружницу у равни нормалној на правац простирања и да се по тој кружници креће у негативном смеру, као казаљка на сату. Слично, покажите да поље левог кружно поларисаног (L) таласа обилази кружницу у супротном смеру.

(б) Одредите криву коју описује вектор електричног поља за фиксно z, као у делу (а) у случају суперпозиције два кружно поларисана таласа. Један талас је лево а други десно кружно поларисан. Амплитуде таласа су различите, а угаоне фреквенце и фазе једнаке.

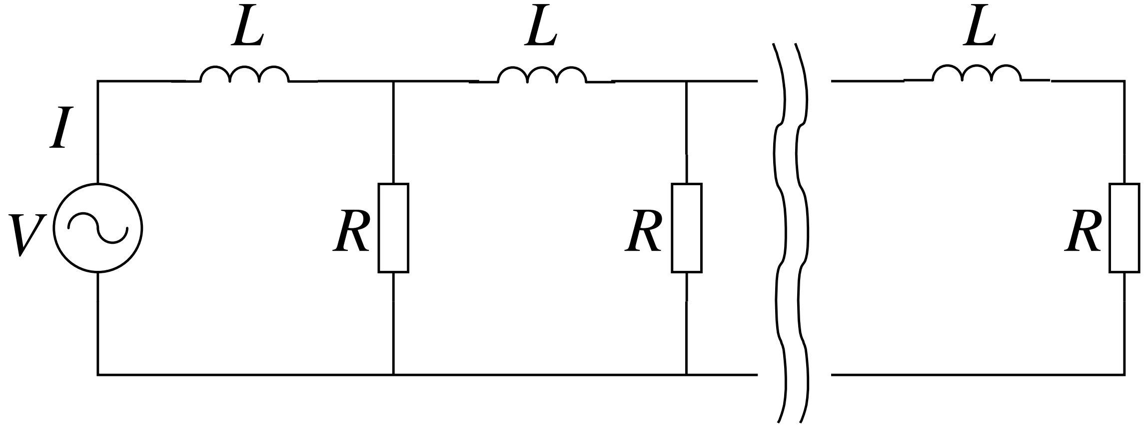
(в) Одредите криву коју описује вектор електричног поља за фиксно z, као у делу (а) у случају суперпозиције два кружно поларисана таласа. Један талас је лево а други десно кружно поларисан. Амплитуде и угаоне фреквенце таласа су једнаке, а фазе су различите.

Помоћ: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. **(20 поена)**

4. Импеданса кола кроз које тече хармонијска наизменична струја се може рачунати као отпор кола једносмерне струје, уз замену реалних отпора комплексним импедансама елемената. Фаза комплексне струје онда одговара фазној разлици између струје и напона. У овом задатку, можете искористити комплексне импедансе да израчунате струју кроз мрежу индуктора и отпорника у облику бесконачне лестве, приказану на слици.

(а) Научили сте да је имагинарни део импедансе позитиван за завојнице и негативан за кондензаторе. Са друге стране, реални део импедансе описује отпорнике и увек је позитиван. Дискутујте Џулове губитке у случају отпорника са негативним отпором? Шта резултат ваше дискусије говори о оваквим елементима кола?

(б) Коло на слици се састоји од бесконачне лестве завојница и отпорника. Индуктивност сваке од завојница је $L = 1{,}0\,\mathrm{mH}$, а отпор сваког отпорника је $R = 180\,\Omega$. Коло се напаја извором напона амплитуде $V = 1{,}0\,\mathrm{V}$ и угаоне фреквенце $\omega = 6{,}3\cdot10^5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Колика је еквивалентна импеданса бесконачног кола на овој угаоној фреквенци? Колика је амплитуда I струје у главној грани кола која садржи извор?



Слика уз задатак 4.

(20 поена)

5. Над небом јужне Србије је 2010. године примећен болид, метеор изразитог сјаја. Током проласка кроз ниже слојеве атмосфере болид се распрснуо уз гласан прасак. Ударни талас тог праска забележило је више сеизмолошких станица. Уз друге заљубљенике у астрономију Игор покушава да пронађе метеорит, остатак болида који је пао на Земљу. Подаци о координатама станица, процењеним растојањима до места пада и њиховим неодређеностима налазе се у приложеној табели. Помозите Игору.

   (а) Приложена мапа терена издељена је у 'секторе' - квадратне области димензија 20km$\times$20km. Одредите координате центра сектора у коме се метеорит највероватније налази. На мапи су уцртане локације станица, као и кружнице радијуса највероватнијег растојања R_i од i-те станице. У овом делу није неопходно било шта рачунати, на скали од 20 km одговор се сам намеће.

   (б) Да су мерења сеизмолошких станица идеална, метеорит би био у тачки $(x^{'},y^{'})$ која истовремено задовољава све три једначине кружница $R_i^2 = (x^{'} - x_i^{'})^2 + (y^{'} - y_i^{'})^2$, где су $(x_i^{'},y_i^{'})$ координате i-те станице са мапе, а R_i процењено растојање до ње. Нажалост, мерења нису идеална, па се кружнице не секу. Игору је потребна највероватнија тачка пада од које би почео потрагу. Поставите нови координатни почетак у центар сектора највероватнијег пада. Распишите израз за R_i у фунцкији нових координата пада x, y, њихових квадрата x^2, y^2 и слободног члана, те га упростите. Сведите израз на линеарну једначину по x и y уз образложење зашто изабрана апроксимација важи.

   (в) Добијени систем 3 једначине са 2 непознате није сагласан. Потражите његово приближно решење следећи поступак описан у наставку задатка. Решавамо систем једначина $a_i x + b_i y = c_i$, где су непознате x и y, а коефицијенти a_i, b_i и c_i су резултати мерења познати са неким грешкама. Пошто једначине чији су коефицијенти боље познати прецизније говоре где се налази решење, свакој од једначина доделите тежину $w_i = \frac{1}{(2R_i \Delta R_i)^2}$. Приближно решење задовољава следећи систем једначина: $Ax + By = C$ и $Dx + Ey = F$, где су $A = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 w_i$, $E = \sum_{i=1}^{3} b_i^2 w_i$, $B = D = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i w_i$, $C = \sum_{i=1}^{3} a_i c_i w_i$ и $F = \sum_{i=1}^{3} b_i c_i w_i$. Решите овај систем и пронађите координате пада (x,y).

   (г) Пронађено решење уцртајте на мапу (тачка P), те дуж праваца S_iP на основу ΔR_i уцртајте интервал у коме треба тражити метеорит. Ако нисте решили део (в), узмите да су највероватније координате пада $(x,y) = (-8\,\text{km}, -9\,\text{km})$ од центра највероватнијег сектора пада. Коначно, уцртајте на мапу шестоугаону област у којој треба трагати за метеоритом.

Станица	x[km]	y[km]	R[km]	ΔR[km]
S_1	36,21	-14,42	71	8
S_2	-44,77	131,31	136	12
S_3	189,32	122,5	133	10

(20 поена)

Напомена: Образложите своја решења и дефинишите ознаке које користите у њима.

Задатке припремили: ***др Владан Павловић***, Природно-математички факултет, Ниш
Марко Кузмановић, Universite Paris-Sud, France
Илија Иванишевић, Институт за физику, Београд
Рецензент: ***др Димитрије Степаненко***, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд