

Општа упутства: Теоријски део (30 поена)

Теоријски део траје 5 сати и носи 30 поена.

Пре теста

Не смете да отворите коверте са задацима пре звучног сигнала који означава почетак теста.

Почетак и крај теста ће бити означен звучним сигналом. Такође, на сваки сат ће бити обавештење које означава преостало време, као и петнаест минута пре краја теста (пре коначног сигнала).

Током теста

- Папири за одговоре су предвиђени за одговоре. Упишите коначне одговоре у одговарајућа поља на папирима за одговоре. За сваки задатак постоје додатни празни **радни папири** за **детаље рачуна**. Увек користите радне папире који одговарају задатку који радите (проверите број задатка у заглављу). Ако не желите да нешто буде прегледано, прецртајте. Користите само предњу страну сваког папира.
- У одговорима се трудите да будете што је могуће концизнији. Користите једначине, логичке операторе и скице да бисте приказали оно што мислите, кад год је то могуће. Избегавајте дугачке реченице.
- Молимо вас да нумеричке вредности пишете са одговарајућим бројем значајних цифара.
- Често ће бити могуће да урадите касније делове задатка иако нисте урадили нешто од претходних делова.
- Списак физичких константи је дат на посебном папиру.

Није дозвољено да напустите радно место без дозволе. Ако вам ј епотребна помоћ (допуњавање посуде са водом за пиће, покварен калкулатор, потреба за тоалетом, итд.) молимо вас да скренете пажњу водичу тима тако што ћете подићи једну од три заставице ("Refill my water bottle, please", "I need to go to the toilet, please", or "I need help, please" in all other cases).

На крају теста

- На крају теста одмах морате да престанете да пишете.
- За сваки задатак сортирајте папире на следећи начин: текст задатка, папири са одговорима, радни папири и папири за жврљање.
- Ставите све папире који одговарају једном задатку у исти коверат . Ставите општа упутства и посебан преостали коверат. Проверите да ли сте уписали шифру на сваки коверат. Убаците и

празне папире. Није дозвољено да изнесете било какав папир из сале за тест.

- Оставите калкулатор који сте добили на столу.

Тамна материја

Fritz Zwicky је први научник који је закључио да постоји тамна материја, а до закључка је дошао на основу посматрања кретања унутар Кома кластера галаксија: ради се о скупини, кластеру галаксија који се састоји од око хиљаду галаксија. Zwicky је искористио виријалну теорему како би проценио масу кластера галаксија. У оквиру једноставног планетарног модела, где се планете крећу око сунца по кружним орбитама, виријална теорема повезује кинетичку енергију планете и њену гравитациону потенцијалну енергију. У општијем случају, када имамо више честица које се крећу у једном делу простора под дејством међусобних сила, виријална теорема ће нам дати израз који повезује временски усредњену укупну кинетичку енергију честица и временски усредњену укупну потенцијалну енергију честица.

На основу мерења брзине галаксија које се налазе у близини спољне границе Кома кластера галаксија, Zwicky је 1933. проценио да је укупна маса кластера знатно већа од масе видљивих галаксија у кластеру. Гравитационо привлачење међу видљивом материјом (међу галаксијама) је исувише слабо да би могло да објасни зашто су измерене брзине галаксија тако велике. То значи да мора да постоји нека скривена маса унутар кластера, која би довела до тако великих брзина галаксија. Та скривена маса је у ствари маса тамне материје. У наставку, претпоставићемо да је маса сваке галаксије једнака збиру масе њеног видљивог дела и масе тамне материје унутар галаксије, а која се креће заједно са галаксијом; тамна материја и видљива материја међусобно интерагују само гравитационом силом.

А. Кластер галаксија

Размотримо кластер галаксија који се састоји од великог броја N галаксија и тамне материје који су хомогено распоређени унутар сфере полупречника R , тако да је укупна маса кластера (галаксија и тамне материје) M . Претпоставите да је средња укупна маса једне галаксије (видљиве и тамне материје) m .

A.1	Претпостављајући да је материја равномерно распоређена унутар кластера, одредите укупну гравитациону потенцијалну енергију кластера и изразите је преко M и R .	1.0 pt.
-----	---	---------

Услед ширења Васионе, сваки далеки објект се удаљава од посматрача са Земље и то брзином која зависи од удаљености између посматрача и објекта. Посматрањем супернове типа IA у оквиру i -те галаксије у кластеру измерена је Лајманова фреквенција f_i , где је $i = 1, \dots, N$, али иста та Лајманова фреквенција на Земљи износи f_0 (Лајманова фреквенција одговара линији у спектру зрачења атома водоника).

A.2	Одредите средњу брзину V_{cr} читавог кластера галаксија који се удаљава од Земље, и изразите је преко f_i (где је $i = 1, \dots, N$), f_0 и N . Обратите пажњу да је брзина сваке галаксије веома мала у односу на брзину светлости c .	0.5 pt.
A.3	Претпостављајући да су брзине галаксија изотропне, гледано у односу на центар кластера (односно расподела брзина је иста дуж свих праваца), израчунајте v_{rms} : квадратни корен средњег квадрата брзине галаксија у односу на центар кластера, и v_{rms} изразите преко N, f_i ($i = 1, \dots, N$), и f_0 . На основу овог резултата одредите средњу кинетичку енергију галаксија у односу на центар кластера и изразите је преко v_{rms} и m .	1.5 pt.

Укупну масу кластера можемо да нађемо уз помоћ виријалне теореме. Та теорема каже да за систем честица које се крећу унутар једног дела простора под дејством међусобних конзервативних сила важи да је,

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

где је $\langle K \rangle_t$ временски усредњена укупна кинетичка енергија, $\langle U \rangle_t$ је временски усредњена укупна потенцијална енергија, а γ је константа. Ова теорема се може извести под претпоставком да се честице крећу у једном ограниченом делу простора под дејством међусобних интеракција, што значи да су интензитети брзина и координата коначни, не иду у бесконачност, а на основу тога закључујемо да је и следећа величина

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

коначна.

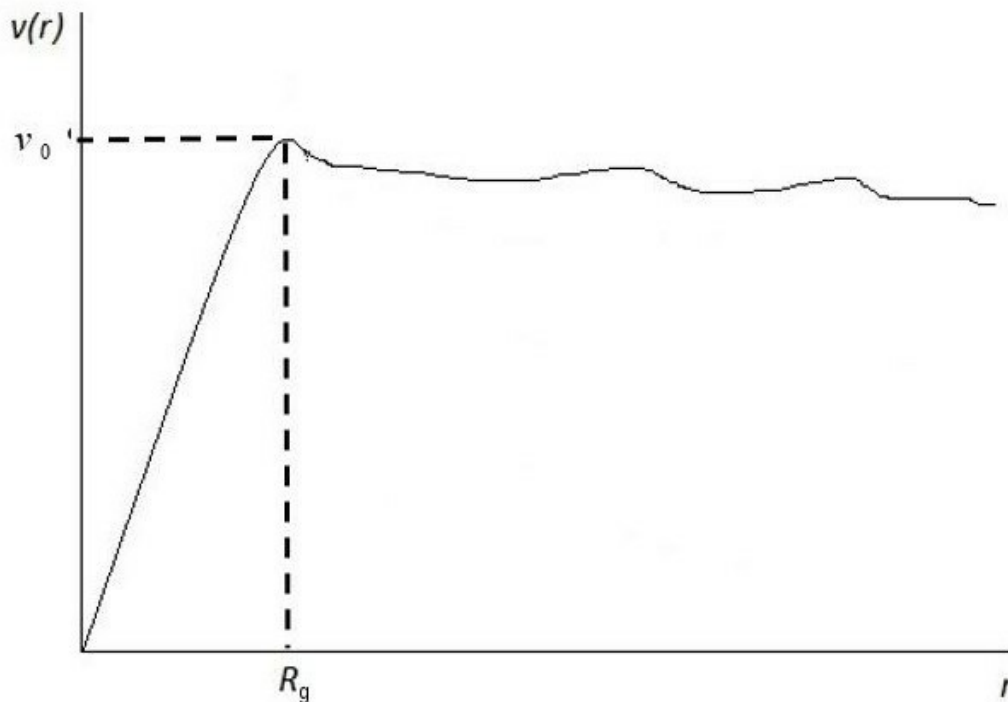
A.4	Користећи чињеницу да када се временско усредњавање рачуна за веома велики временски период $d\Gamma/dt$ тежи нули, $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$, одредите константу γ , која се појављује у виријалној теореме, за случај гравитационе интеракције. (Упутство: покушајте да решите проблем тако што ћете сумирање у Γ извршити за мали број галаксија).	1.7 pt.
A.5	На основу претходног резултата одредите укупну масу тамне материје унутар кластера, и изразите је преко N, m_g, R и v_{rms} , где је m_g средња укупна видљива маса галаксије. Обратите пажњу да је квадратни корен средњег квадрата брзина тамне материје исти као и онај за галаксије.	0.5 pt.

V. Тамна материја унутар галаксије

Тамна материја постоји такође и унутар и ван галаксије. Размотрите галаксију сферног облика којој је видљиви полупречник R_g (то је приближно растојање од центра галаксије унутар кога видимо највећи број звезда галаксије, при чему има један веома мали број звезда које се налазе у области даље од полупречника R_g). Претпоставите да су звезде у галаксији материјалне тачке, и свака звезда има средњу масу m_s . Звезде су распоређене равномерно унутар галаксије, при чему је концентрација звезда n , и претпостављамо да се звезде крећу по кружним орбитама.

B.1	Ако се галаксија састоји само од звезда, одредите брзину $v(r)$ звезде као функцију њеног растојања од центра галаксије, и скицирајте $v(r)$ за $r < R_g$ и $r \geq R_g$.	0.8 pt.
-----	--	---------

До закључка о постојању тамне материје можемо доћи на основу анализе ротационе криве галаксије, а то је крива која представља зависност $v(r)$ добијену на основу мерења. На доњој слици је приказана типична ротациона крива галаксије. Ради једноставности претпоставите да је $v(r)$ линеарна функција за $r \leq R_g$ и константа v_0 за $r > R_g$.



Слика 1 График ротационе криве галаксије.

B.2	Нађите укупну масу m_R оног дела галаксије који се налази унутар полупречника R_g и изразите је преко v_0 и R_g .	0.5 pt.
-----	---	---------

Неслагање између слике 1, у делу В.2, и графика који сте добили у делу В.1 указује на постојање тамне материје.

В.3	Одредите густину масе тамне материје као функцију $r, R_g, v_0, n,$ и m_s за $r < R_g$ и $r \geq R_g$.	1.5 pt.
-----	---	---------

С. Међузвездани гас и тамна материја

Размотрите сада младу галаксију чију масу доминантно чини међузвездани гас и тамна материја (занемарите масу звезда). Претпоставимо да се међузвездани гас састоји од идентичних честица свака масе m_p . Концентрација $n(r)$ и температура гаса $T(r)$ зависе од растојања r од центра галаксије. Премда се унутар гаса одвијају многи физички процеси, можемо претпоставити да се гас налази у хидростатичкој равнотежи, односно да су у галаксији уједначени притисак и гравитационо привлачење.

С.1	Нађите градијент притиска гаса dP/dr , и изразите га преко $m'(r), r$ и $n(r)$. Овде је $m'(r)$ укупна маса гаса и тамне материје унутар сфере полупречнка r а центар те сфере је у центру галаксије.	0.5 pt.
С.2	Претпостављајући да је међузвездани гас идеалан гас, одредити $m'(r)$ и изразите је преко $n(r), T(r)$ и њихових извода по променљивој r .	0.5 pt.

Даље, ради једноставности претпоставите да је температура гаса у свакој тачки иста и износи T_0 , а да је концентрација међузвезданог гаса дата са

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

где су α и β неке константе.

С.3	Наћи густину масе тамне материје као функцију растојања r унутар галаксије.	1.0 pt.
-----	---	---------

Земљотрес, вулкан и цунами

Индонезија је препуна природних ризика. Готово све ризичне природне појаве се могу десити у Индонезији, као на пример, ерупције вулкана, земљотреси и цунами.

А Ерупција Мерапи вулкана



Вулкан Мерапи (Merapi) у Јоџакрти је један од најактивнијих вулкана на Јави. Пирокластична смеша (Pyroclastic flows) је добро позната карактеристика вулканске ерупције. Пирокластична смеша је врела мешавина гаса и стена која излеће из вулкана. 26. октобра 2010. Мерапи је показао свој експлозивни карактер стварајући облак прашине који је досегао висину од 12 km (слика 1) док је изливена пирокластична смеша приморала више од 20000 људи да се евакуише.

(Слика 1: Пирокластични облак снимљен током ерупције Мерапија, Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

Погледајмо узроке највеће ерупције Мерапија 2010. године. Геофизичарима је добро познат утицај мешања спољашње воде и магме на експлозивни тип вулканске ерупције (хидро-магматска ерупција). Претпоставимо да се еруптивни материјал састоји од магматских честица и воде. Отвор вулкана и атмосфера су границе система. Може се претпоставити да се експлозивна ерупција одвија у два корака, (1) тренутна интеракција магме и воде и (2) ширење (експанзија) система. У првом кораку магма масе (m_m) на температури (T_m) се меша са водом из околине, масе (m_w) и температуре (T_w). Топлотна равнотежа се постиже готово тренутно. Овај процес се може посматрати као процес при скоро константној запремини. Латентна топлота испаравања воде и латентна топлота топљења магме се могу занемарити.

A.1	Наћи температуру термалне равнотеже у првом кораку процеса, у зависности од маса и специфичне топлоте воде c_{VW} и магме c_{Vm} (топлотних капацитета по јединици масе).	0.4 pt.
A.2	Одредити равнотежни притисак у првом кораку процеса претпостављајући да је мешавину могуће посматрати као идеалан гас. Узети да је запремина по молу мешавине v_e .	0.3 pt.

Ширење (експанзија) система (други корак) се може одвијати на неколико начина, један од њих је топлотна детонација. Пошто је процес врло сложен, могуће је измерити брзину еруптивне мешавине. Брзина гаса током ерупције зависи од притиска p , укупне масе m и запремине V мешавине у вулканском каналу.

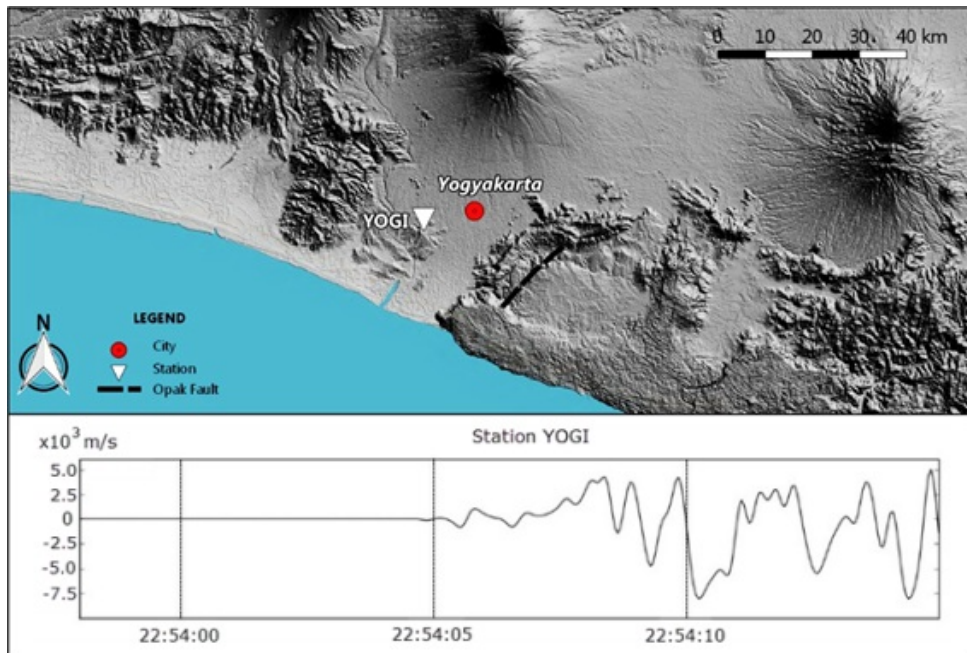
A.3	Изразити брзину гаса током ерупције у функцији p , m , и V до на константу пропорционалности k .	0.3 pt.
-----	--	---------

Измерени притисак је реда величине 100 МПа, што доводи до тога да је брзина ерупције (релативна) толика да се процес може сматрати балистичким.

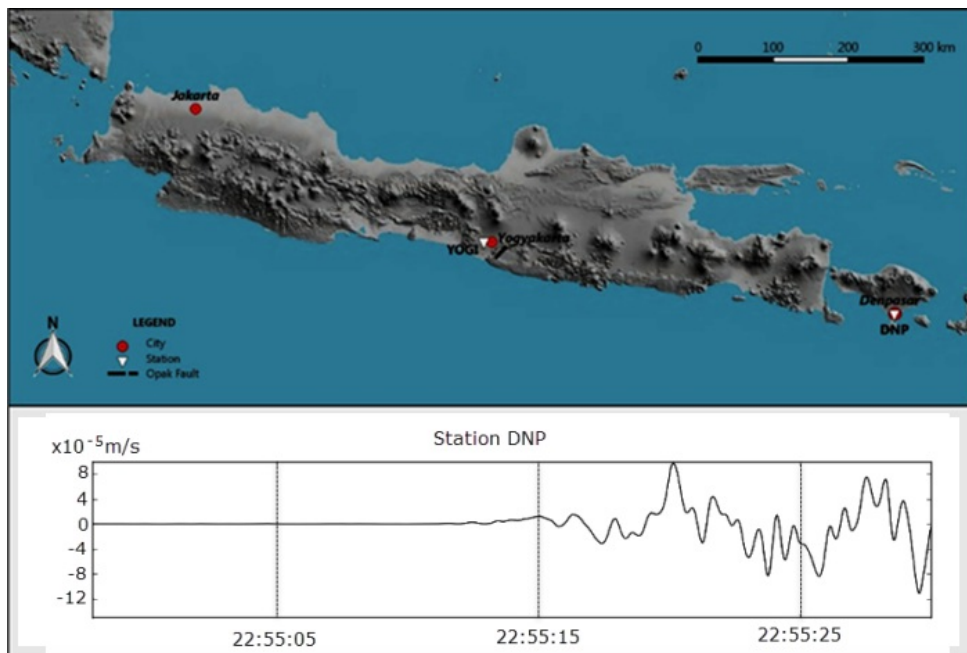
Б Земљотрес у Јоџакрти

2006. земљотрес у Јоџакрти магнитуде $M_w = 6.4$ који је уништио многе грађевине у окрузима Бантул и Јоџакрта, десио се у 05:54:00,00 по локалном времену или 22:54:00.00 UTC. Земљотрес је изавало изненадно померање дела у раседу Орак (види слику 2). Хипоцентар се налазио 15 km испод површине.

Сеизмички талас који се простире у Земљиној кори може да се забележи сеизмометром. Дијаграм који се добије сеизмометром се назива сеизмограм (слике 2 и 3, доњи дијаграм). На сеизмограму је приказана вертикална брзина тла у зависности од времена снимљена у станици Gamping Station Yogyakarta (YOGI) (Слика 2) и у Денпасару на Балију (DNP) (Слика 3). У општем случају сеизмички талас се састоји од три врсте таласа: лонгитудинални или примарни (P -талас), трансверзални или секундарни (S -талас), и површински талас. P и S таласи се крећу испод површине док се површински талас креће по површини Земље. Сеизмички таласи који се крећу испод површине до сеизмичких станица могу се поделити на оне који се крећу праволинијски, оне који се одбијају на граници слоја и оне који се преломе у следећи слој. Лонгитудинални или примарни таласи се крећу највећом брзином, док површински таласи имају најмању брзину, око 60% брзине P -таласа.



(Слика 2: Локација станице YOGI)



(Слика 3: Локација станице DNP (Denpasar))

Растојање између епицентра (пројекција хипоцентра на површину Земље) и YOGI и DNP станица су, редом, 22.5 km и 500 km. Дебљина Земљине коре на Јави (Индонезија) је 30 km. Испод Земљине коре је Земљин омотач. Као и у свим таласним феноменима сеизмички талас задовољава Снелов закон. Сеизмички талас може да се рефлектује на омотачу. У овом задатку претпоставите да је закривљење површине Земље занемарљиво.

Б.1	На слици 2 је приказан сеизмограм добијен у YOGI станици. Искористите дате податке да израчунате брзину P -таласа у Земљиној кори.	0.5 pt.
Б.2	Нађите време потребно директном и одбијеном таласу земљотреса у Јогјакарти да стигне у станицу DNP у Денпасару.	0.6 pt.

Претпостављајући да је Земља састављена само од два слоја: коре и омотача, примарни талас се креће кроз кору и омотач различитим константним брзинама. Брзина у омотачу је већа од брзине у кори. Узмите у обзир да се P -талас који се прелама у омотач под правим углом (90°), делимично одбија назад у кору дуж целе путање којом се креће по граници између коре и омотача.

Б.3	Наћи брзину P -таласа у омотачу.	1.2 pt.
-----	------------------------------------	---------

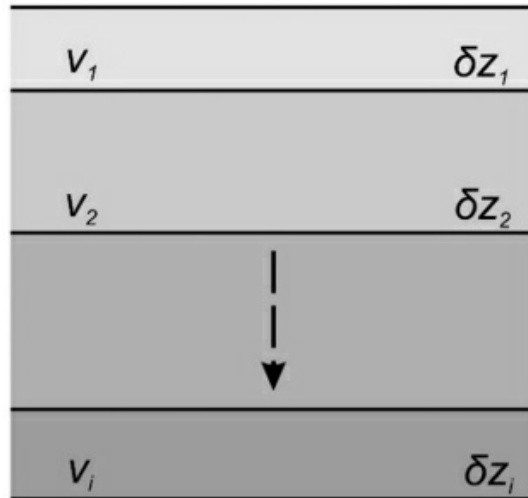
У реалистичнијем моделу, структура Земљине коре се може поделити на бројне танке слојеве, и тада брзина сеизмичког таласа зависи од дубине z као $v(z) = v_0 + az$ где је a константа и хипоцентар је приближно на површини. У овом моделу талас (зрак) је закривљен.

Б.4	Нека је параметар зрака дат као $p = \sin \theta(z)/v(z)$, где је $\theta(z)$ угао између зрака и нормале. Претпостављајући да сеизмички талас који стиже у станицу има вредност параметра таласа p , наћи растојање до епицентра у зависности од p , v_0 и a . Претпоставити да је хипоцентар врло близу површине Земље.	1.4 pt.
-----	--	---------

Б.5	Израчунати време кретања T од хипоцентра до било које сеизмичке станице, у облику интеграла по z .	1.0 pt.
-----	--	---------

Нека се Земљина површина састоји хомогених слојева где је брзина у сваком слоју v_i а дебљина δz_i .

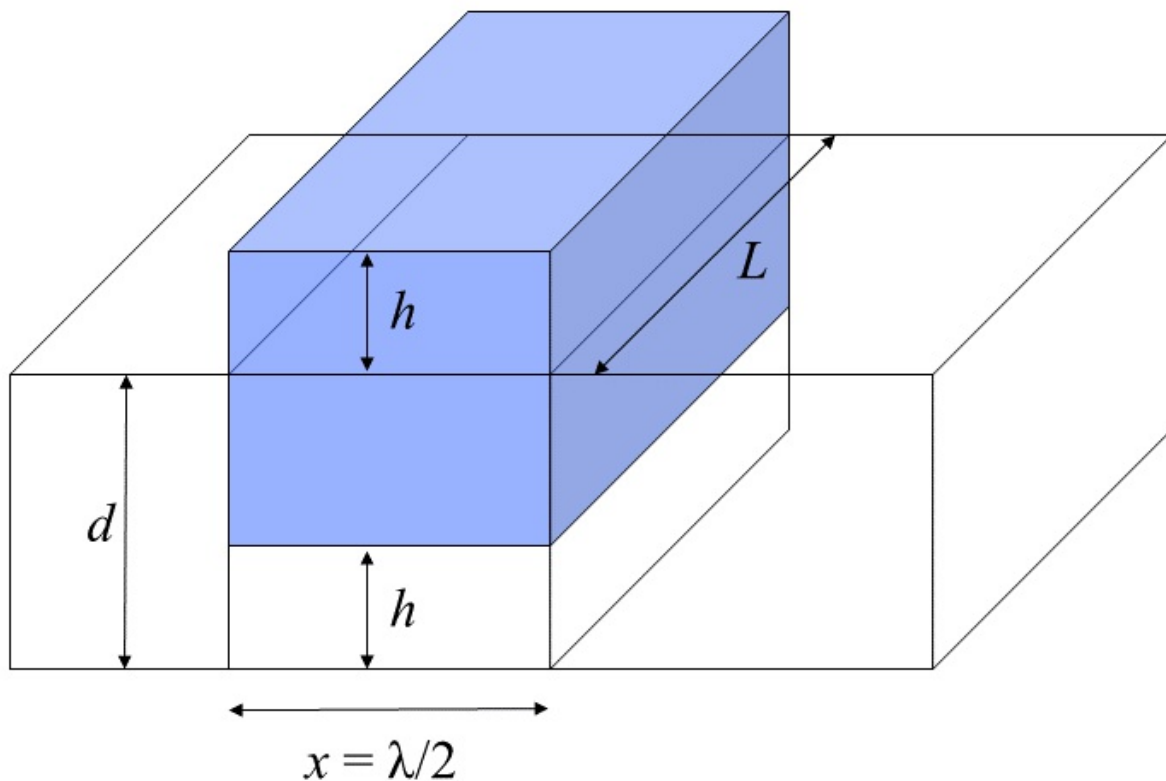
Б.6	Користећи резултат из претходног дела, апроксимирајте време кретања (T) од хипоцентра до станице DNP претпостављајући да се кора састоји од само три слоја, ($i = 1, 2, 3$), карактерисана са $v_1 = 6.65 \text{ km/sec}$, $v_2 = 6.97 \text{ km/sec}$, $v_3 = 6.99 \text{ km/sec}$, $p = 0.143 \text{ sec/km}$, $\delta z_1 = 6.0 \text{ km}$, $\delta z_2 = 9.0 \text{ km}$, $\delta z_3 = 15 \text{ km}$.	1.0 pt.
-----	---	---------



Слика 4: Поједностављен модел Земљине површине.

Ц Цунами на Јави

Земљотрес Пангандаран и цунами су се десили 17. јула 2006 у 15:19:27 по локалном времену на западној обали и централној Јави. Током земљотреса код кога је епицентар испод раседа у кори, дно океана може да се помери и да изазове огроман водени талас, цунами. Другим речима, цунами је плитак водени талас изазван малом амплитудом али са огромном таласном дужином. Нека се дно океана у раседу подигне, као што је приказано на слици 5. Прептпоставимо да се енергија земљотреса претвори у потенцијалну енергију подигнуте воде у океану. У једноставном моделу претпоставићемо да подигнута вода има облик квадра површине $\lambda L/2$ (где је $L \gg \lambda$) и висине h .



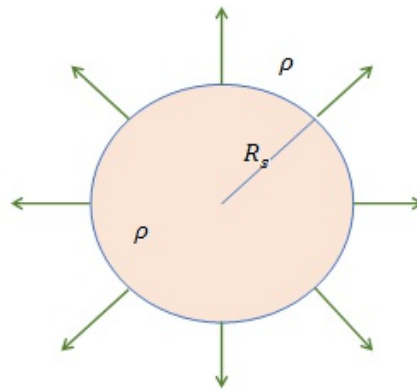
Слика 5: Илустрација цунамија, d је дубина океана.

Ц1	Израчунати потенцијалну енергију издигнуте воде океана у односу на површину океана, после земљотреса. Претпоставите да је густина морске воде ρ .	0.5 pt.
Ц2	Израчунати брзину таласа цунамија до на бездимензионални фактор.	1.2 pt.
Ц3	Користећи енергијске аргументе, одредити амплитуду таласа цунамија у зависности од дубине, претпостављајући да се дубина споро мења и да је на дубини d_0 амплитуда A_0 .	1.3 pt.

Инфлација космоса

Услед релативног кретања галаксија у односу на Земљу, таласна дужина светлости емитоване из извесне галаксије коју региструје посматрач на Земљи се разликује од оригиналне таласне дужине. Ова појава се назива електромагнетни Доплеров ефекат. Интуитивно бисмо очекивали да таласна дужина на Земљи опаженог електромагнетног зрачења које потиче од разних галаксија буде са подједнаком вероватноћом већа (црвени помак), односно мања (плави помак) од оригиналне таласне дужине. Међутим, посматрања показују да електромагнетно зрачење које потиче од свих осим Земљи најближих галаксија доживљава црвени помак. Последњи закључак мора остати на снази без обзира на место у универзуму са којег се обављају посматрања. Дакле, наш универзум се шири. Локалне нерегуларности универзума се могу занемарити на растојањима од места посматрања која су већа од 100 Мрс, где је 1 рс = 3.26 светлосних година. Компликована просторна расподела галаксија, након усредњавања на тим дужинским скалама, постаје све изотропнија (независна од правца посматрања) и све хомогенија (независна од положаја). Можемо, дакле, претпоставити да је универзум сачињен од материје чија је масена густина ρ константна и да се шири.

А. Ширење универзума



У оквирима једноставног модела, наш универзум се може посматрати као лопта константне масене густине која се шири и која се налази унутар знатно веће лопте исте масене густине. Нека је у извесном тренутку полупречник лопте која представља универзум R_s . Ширење ове лопте, односно временска зависност њеног полупречника $R(t)$, може се описати временски зависним фактором скалирања $a(t)$, тако да важи $R(t) = a(t)R_s$.

Примењујући Њутнов закон гравитације да би се израчунала брзина делића масе који се налази на граници лопте која представља наш универзум, добија се прва Фридманова једначина

(1)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2(t)},$$

где је k бездимензионална константа.

A.1	Одредите константу A_1 у једначини (1).	1.3 п
-----	---	-------

Досадашња дискусија је у оквирима нерелативистичке теорије. Заправо, дискусија се може проширити тако да обухвати и релативистички систем тако што би се израз $\rho(t)c^2$ реинтерпретирао као густина укупне енергије (искључујући гравитациону потенцијалну енергију). За релативистички систем, друга Фридманова једначина

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

се може добити користећи први закон термодинамике за адијабатски систем, где c и p означавају брзину светлости и притисак на лопту.

A.2	Одредите константу A_2 у једначини (2).	0.9 п
-----	---	-------

Да би се решиле једначине (1) и (2), треба познавати везу између притиска и масене густине $p = p(\rho)$; пример такве везе је $p(t)/c^2 = wp(t)$, где је w константа. Може се увести и тзв. Хаблов параметар $H = \dot{a}/a$. Ознаке данашњих вредности параметара обично садрже индекс 0, на пример t_0, ρ_0, H_0, a_0 итд. Једноставности ради, узмимо да је $a_0 = 1$.

Верује се да је универзум настао као последица Великог праска, када су емитоване релативистичке честице. Током свог ширења, универзум се хлади и честице у њему постају нерелативистичке. Међутим, недавна посматрања указују на то да у данашњем универзуму најдоминантнији допринос густини енергије потиче од космолошке константе. У случају фотона, са ширењем универзума, таласна дужина фотона се повећава пропорционално са фактором скалирања полупречника универзума.

A.3	У сваком од следећа три случаја одредите вредност константе w : (i) универзум који се састоји само од топлотног зрачења (односно фотона), (ii) универзум који се састоји само од нерелативистичке материје и (iii) универзум чија је густина енергије константна.	1.2 п
A.4	У случају $k = 0$, нађите временску зависност фактора скалирања $a(t)$ у сваком од случајева (i)-(iii) наведених у А.3. У случајевима (i) и (ii) користите почетни услов $a(t = 0) = 0$, а у случају (iii) користите почетни услов $a_0 = 1$.	1.2 п

Различите вредности константе k у једначини (1) одговарају различитим геометријама универзума. Могуће вредности константе k су $k = +1$ (што одговара универзуму са позитивном закривљеношћу који је затворен), $k = 0$ (што одговара равном универзуму који је бесконачан) и $k = -1$ (што одговара универзуму са негативном закривљеношћу који је отворен и бесконачан). Уведимо ознаку $\Omega = \rho/\rho_c$, где је $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ критична густина енергије. Вредност константе A_1 сте израчунали у делу задатка А.1.

A.5	Напишите једначину (1) користећи Ω , H , a , and R_0 .	0.1 п
-----	---	-------

A.6	Одредите опсег вредности параметра Ω у сваком од случајева $k = +1$, $k = 0$ и $k = -1$.	0.3 п
-----	---	-------

V. Мотивација за увођење стадијума инфлације и његови општи услови

Опажање микроталасног позадинског космичког (CMB) зрачења указује на то да је данашњи универзум приближно раван. То значи да је данашњи универзум настао од егзактно равнораног раног универзума; у супротном, свако одступање од равне геометрије би водило повећању закривљености универзума са временом, тако да данашњи универзум не би био ни приближно раван.

B.1	Нађите временску зависност величине $(\Omega(t) - 1)$ у случајевима када се универзум састоји само од топлотног зрачења, односно само од нерелативистичке материје (видите део А.3)	0.5 п
-----	---	-------

По свему судећи, рани универзум није био раван, па је у раној фази своје историје морао да има фазу у којој је густина енергије константна што води експоненцијалном ширењу које се назива инфлација.

B.2	Нађите временску зависност величине $(\Omega(t) - 1)$ за универзум чија је густина енергије константна. Сматрајте да је $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 п
B.3	Покажите да из услова инфлације следе наредни искази: притисак је негативан, ширење је убрзано ($\ddot{a} > 0$), Хаблов радијус се смањује са временом ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 п
B.4	Покажите да услов смањења Хабловог радијуса са временом може да се изрази уводећи параметар $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ као $\epsilon < 1$.	0.2 pt.

Инфлација се дешава докле год је $\epsilon < 1$ и завршава се када је $\epsilon = 1$. Параметар N , дефинисан као $dN = d \ln a = H dt$, говори о томе за колико се редова величине фактор скалирања промени током фазе инфлације, при чему промена тог фактора за један ред величине овде одговара његовом смањењу (повећању) е пута. На крају фазе инфлације, $N = 0$.

C. Инфлација условљена равномерно распоређеним честицама

Једноставан пример физичког система који може да доведе до фазе инфлације је универзум у којем је материја равномерно распоређена. Ради се о тзв. инфлатонима чија се динамика може описати функцијом $\phi(t)$.

Динамика материје може се описати једначином

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

где је $V = V(\phi)$ потенцијал, док је $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. Хаблов параметар задовољава једначину

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right], \quad (4)$$

где је M_{pl} константа која се назива редукована Планкова маса. Фаза инфлације се дешава током довољно дуге доминације потенцијалне енергије V над кинетичком енергијом $\dot{\phi}^2/2$, тако да се члан $\dot{\phi}$ који фигурише у једначини (3) може занемарити. Овај услов дефинише тзв. *slow-roll* апроксимацију.

Величине ϵ и $\eta_V = \delta + \epsilon$, где је $\delta = -\ddot{\phi}/H(\dot{\phi})$, су тзв. *slow-roll* параметри.

C.1	Процените вредности параметара ϵ и η_V , као и $dN/d\phi$, у функцији потенцијала $V(\phi)$ и његовог првог и другог извода (V' and V'').	1.7 п
-----	--	-------

D. Инфлација описана једноставним потенцијалом

Предвиђања било ког модела инфлације треба упоредити са подацима који проистичу из карактеристика опаженог микроталасног позадинског космичког зрачења. Наиме, $n_s = 0.968 \pm 0.006$ и $r < 0.12$, при чему су $r = 16\epsilon$ и $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ израчунати у тачки $\phi = \phi_{start}$, што одговара моделу инфлације у којем доминира. Претпоставимо да је потенцијал облика $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$, где је n цео број, а Λ је константа.

D.1	Израчунајте вредност ϕ_{end} на крају инфлације.	0.5 п
D.2	Изразите r и n_s у функцији броја N и целог броја n . Процените n за које ће вредности r и n_s које предвиђа теорија бити најближе вредностима које проистичу из опажања. Узмите да је $N = 60$.	0.9 п

Општи подаци

Брзина светлости у вакууму	$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Магнетна пермеабилност вакуума	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Диелектрична пропустљивост вакуума	$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Елементарно наелектрисање	$e = 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Маса електрона	$m_e = 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$ $= 0.510\,998\,946\,1(31) \text{ MeV}/c^2$
Маса протона	$m_p = 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $= 938.272\,081\,3(58) \text{ MeV}/c^2$
Маса неутрона	$m_n = 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $= 939.565\,413\,3(58) \text{ MeV}/c^2$
Атомска јединица масе	$u = 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Ридбергова константа	$R_\infty = 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
Гравитациона константа	$G = 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Убрзање Земљине теже	$g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Планкова константа	$h = 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Авогадров број	$N_A = 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Универзална гасна константа	$R = 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Константа моларне масе	$M_u = 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Болцманова константа	$k_B = 1.380\,548\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Штефан-Болцманова константа	$\sigma = 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Dark Matter

A. Cluster of Galaxies

Question A.1

Answer	Marks
<p>Potential energy for a system of a spherical object with mass $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ and a test particle with mass dm at a distance r is given by</p> $dU = -G \frac{M(r)}{r} dm$	0.2 pts
<p>Thus for a sphere of radius R</p> $U = -\int_0^R G \frac{M(r)}{r} dm = -\int_0^R G \frac{4\pi r^3 \rho}{3r} 4\pi r^2 \rho dr = -\frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr$ $= -\frac{16}{15} G \pi^2 \rho^2 R^5$	0.6 pts
<p>Then using the total mass of the system</p> $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ <p>we have</p> $U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$	0.2 pts
Total	1.0 pts

Solutions/ Marking Scheme



T1

Question A.2

Answer	Marks
<p>Using the Doppler Effect,</p> $f_i = f_0 \frac{1}{1 + \beta} \approx f_0(1 - \beta),$ <p>where $\beta = v/c$ and $v \ll c$. Thus the i-th galaxy moving away (radial) speed is</p> $V_{ri} = -\frac{f_i - f_0}{f_0} c$ <p>Alternative without approximation:</p> $f_i = f_0 \frac{1}{1 + \beta}$ $V_{ri} = c \left(\frac{f_0}{f_i} - 1 \right)$	0.2 pts
<p>All the galaxies in the galaxy cluster will be moving away together due to the cosmological expansion. Thus the average moving away speed of the N galaxies in the cluster is</p> $V_{cr} = -\frac{c}{Nf_0} \sum_{i=1}^N (f_i - f_0) = -\frac{c}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_i}{f_0} - 1 \right).$ <p>Alternative without approximation:</p> $V_{cr} = \frac{cf_0}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f_0} \right) = \frac{c}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_0}{f_i} - 1 \right)$	0.3 pts
Total	0.5 pts

Solutions/ Marking Scheme



T1

Question A.3

Answer	Marks
<p>The galaxy moving away speed V_i, in part A.2, is only one component of the three component of the galaxy velocity. Thus the average square speed of each galaxy with respect to the center of the cluster is</p> $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{V}_i - \vec{V}_c)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V_{xi} - V_{xc})^2 + (V_{yi} - V_{yc})^2 + (V_{zi} - V_{zc})^2$ <p>Due to isotropic assumption</p> $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{V}_i - \vec{V}_c)^2 = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (V_{ri} - V_{cr})^2$	0.5 pts
<p>And thus the root mean square of the galaxy speed with respect to the cluster center is</p> $v_{rms} = \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (V_{ri} - V_{cr})^2} = \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (V_{ri}^2 - 2V_{cr}V_{ri} + V_{cr}^2)} = \sqrt{\frac{3}{N} \left(\sum_{i=1}^N V_{ri}^2 \right) - 3V_{cr}^2}$ $v_{rms} = c\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_i}{f_0} - 1 \right)^2 \right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_i}{f_0} - 1 \right) \right)^2}$ $= \frac{c\sqrt{3}}{f_0} \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_i^2 - 2f_i f_0 + f_0^2) \right) - \left(\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right)^2 - 2\frac{f_0}{N} \sum_{i=1}^N f_i + f_0^2 \right)}$ $= \frac{c\sqrt{3}}{f_0 N} \sqrt{\left(N \sum_{i=1}^N f_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N f_i \right)^2}$ <p>Alternative without approximation:</p>	0.7 pts

Solutions/ Marking Scheme



T1

$v_{rms} = c\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_0}{f_i} - 1\right)^2\right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_0}{f_i} - 1\right)\right)^2}$ $= \frac{c\sqrt{3}}{f_0} \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{f_i^2} - 2\frac{1}{f_i} \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_0^2}\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{f_i}\right)^2 - 2\frac{1}{N} \frac{1}{f_0} \sum_{i=1}^N \frac{1}{f_i} + \frac{1}{f_0^2}\right)}$ $= \frac{cf_0\sqrt{3}}{N} \sqrt{\left(N \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{f_i}\right)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{f_i}\right)^2}$	
<p>The mean kinetic energy of the galaxies with respect to the center of the cluster is</p> $K_{ave} = \frac{m}{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\vec{V}_i - \vec{V}_c)^2 = \frac{m}{2} v_{rms}^2$	0.3 pts
Total	1.5 pts

Question A.4

Answer	Marks
<p>The time average of $d\Gamma/dt$ vanishes</p> $\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = 0$ <p>Now</p> $\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \sum_i \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\ &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2K \end{aligned}$	<p>0.6 pts</p>
<p>Where K is the total kinetic energy of the system. Since the gravitational force on i-th particle comes from its interaction with other particles then</p> $\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i &= \sum_{i,j \neq i} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i < j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_i - \sum_{i > j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i < j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_i - \sum_{i < j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j \\ &= \sum_{i < j} \vec{F}_{ji} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = - \sum_{i < j} G \frac{m_i m_j}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j ^2} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j } \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = - \sum_{i < j} G \frac{m_i m_j}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j } = U_{\text{tot}} \end{aligned}$ <p>Alternative proof:</p> $\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i &= \sum_{i,j \neq i} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_i = \vec{F}_{21} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{31} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{41} \cdot \vec{r}_1 + \dots + \vec{F}_{N1} \cdot \vec{r}_1 + \\ &\quad \vec{F}_{12} \cdot \vec{r}_2 + \vec{F}_{32} \cdot \vec{r}_2 + \vec{F}_{42} \cdot \vec{r}_2 + \dots + \vec{F}_{N2} \cdot \vec{r}_2 + \\ &\quad \vec{F}_{13} \cdot \vec{r}_3 + \vec{F}_{23} \cdot \vec{r}_3 + \vec{F}_{43} \cdot \vec{r}_3 + \dots + \vec{F}_{N3} \cdot \vec{r}_3 + \dots \\ &\quad \vec{F}_{1N} \cdot \vec{r}_N + \vec{F}_{2N} \cdot \vec{r}_N + \vec{F}_{3N} \cdot \vec{r}_N + \dots + \vec{F}_{N-1,N} \cdot \vec{r}_{N-1} \end{aligned}$ <p>Collecting terms and noting that $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ we have</p>	<p>0.9 pts</p>

Solutions/ Marking Scheme



T1

$\vec{F}_{12} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \vec{F}_{13} \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + \vec{F}_{14} \cdot (\vec{r}_4 - \vec{r}_1) + \dots + \vec{F}_{23} \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)$ $+ \vec{F}_{24} \cdot (\vec{r}_4 - \vec{r}_2) + \dots + \vec{F}_{34} \cdot (\vec{r}_4 - \vec{r}_3) + \dots = \sum_{i < j} \vec{F}_{ji} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ $= - \sum_{i < j} G \frac{m_i m_j}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j ^2} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j } \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = - \sum_{i < j} G \frac{m_i m_j}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j } = U_{tot}$	
<p>Thus we have</p> $\frac{d\Gamma}{dt} = U + 2K$ <p>And by taking its time average we obtain $\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} = U + 2K \right\rangle_t = 0$ and thus</p> $\langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_t. \text{ Therefore } \gamma = \frac{1}{2}.$	0.2 pts
Total	1.7 pts

Solutions/ Marking Scheme



T1

Question A.5

Answer	Marks
<p>Using Virial theorem, and since the dark matter has the same root mean square speed as the galaxy, then we have</p> $\langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_t$ $\frac{M}{2} v_{rms}^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$	0.3 pts
<p>From which we have</p> $M = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G}$	0.1 pts
<p>And the dark matter mass is then</p> $M_{dm} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g$	0.1 pts
Total	0.5 pts

Solutions/ Marking Scheme



T1

B. Dark Matter in a Galaxy

Question B.1

Answer	Marks
<p>Answer B.1: The gravitational attraction for a particle at a distance r from the center of the sphere comes only from particles inside a spherical volume of radius r. For particle inside the sphere with mass m_s, assuming the particle is orbiting the center of mass in a circular orbit, we have</p> $G \frac{m'(r)m_s}{r^2} = \frac{m_s v_0^2}{r}$	0.3 pts
<p>with $m'(r)$ is the total mass inside a sphere of radius r</p> $m'(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 m_s n$ <p>Thus we have</p> $v(r) = \left(\frac{4\pi G n m_s}{3} \right)^{1/2} r$	0.2 pts
<p>While for particle outside the sphere, we have</p> $v(r) = \left(\frac{4\pi G n m_s R^3}{3r} \right)^{1/2}$	0.2 pts

Solutions/ Marking Scheme



T1

<p>The sketch is given below</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center;">Sketch of the rotation velocity vs distance from the center of galaxy</p>	0.1 pts
Total	0.8 pts

Question B.2

Answer	Marks
<p>The total mass can be inferred from</p> $G \frac{m'(R_g)m_s}{R_g^2} = \frac{m_s v_0^2}{R_g}$ <p>Thus</p> $m_R = m'(R_g) = \frac{v_0^2 R_g}{G}$	0.5 pts
Total	0.5 pts

Solutions/ Marking Scheme



T1

Question B.3

Answer	Marks
<p>Base on the previous answer in B.1, if the mass of the galaxy comes only from the visible stars, then the galaxy rotation curve should fall proportional to $1/\sqrt{r}$ on the outside at a distance $r > R_g$. But in the figure of problem b) the curve remain constant after $r > R_g$, we can infer from</p> $G \frac{m'(r)m_s}{r^2} = \frac{m_s v_0^2}{r}.$ <p>to make $v(r)$ constant, then $m'(r)$ should be proportional to r for $r > R_g$, i.e. for $r > R_g$, $m'(r) = Ar$ with A is a constant.</p>	0.3 pts
<p>While for $r < R_g$, to obtain a linear plot proportional to r, then $m'(r)$ should be proportional to r^3, i.e. $m'(r) = Br^3$.</p>	0.3 pts
<p>Thus for $r < R_g$ we have</p> $m'(r) = \int_0^r \rho_t(r) 4\pi r'^2 dr' = Br^3$ $dm'(r) = \rho_t(r) 4\pi r^2 dr = 3Br^2 dr$ <p>Thus total mass density $\rho_t(r) = \frac{3B}{4\pi}$</p>	0.2 pts
$m_R = \int_0^{R_g} \frac{3B}{4\pi} 4\pi r'^2 dr' = BR_g^3 \text{ or } B = \frac{m_R}{R_g^3} = \frac{v_0^2}{GR_g^2}$ <p>Thus the dark matter mass density $\rho(r) = \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2} - nm_s$</p>	0.2 pts

Solutions/ Marking Scheme




T1

<p>While for $r > R_g$ we have</p> $m'(r) = \int_0^{R_g} \rho(r')4\pi r'^2 dr' + \int_{R_g}^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' = Ar$ $m'(r) = m_R + \int_{R_g}^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' = Ar$ $\int_R^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' = Ar - M_0$ $\rho(r)4\pi r^2 = A, \text{ or } \rho(r) = \frac{A}{4\pi r^2} .$	0.2 pts
<p>Now to find the constant A.</p> $\int_R^r \frac{A}{4\pi r'^2} 4\pi r'^2 dr' = A(r - R_g) = Ar - m_R$ <p>Thus $AR_g = m_R$ and $A = \frac{v_0^2}{G}$</p> <p>We can also find A from the following</p> $G \frac{m'(r)m_s}{r^2} = G \frac{Ar m_s}{r^2} = \frac{m_s v_0^2}{r}, \text{ thus } A = \frac{v_0^2}{G} .$ <p>Thus the dark matter mass density (which is also the total mass density since $n \approx 0$ for $r \geq R_g$.</p> $\rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2} \text{ for } r \geq R_g$	0.3 pts
Total	1.5 pts

C. Interstellar Gas and Dark Matter

Question C.1

Answer	Marks
<p>Consider a very small volume of a disk with area A and thickness Δr, see Fig.1</p>  <p>Figure 1. Hydrostatic equilibrium</p> <p>In hydrostatic equilibrium we have</p> $(P(r) - P(r + \Delta r))A - \rho g(r)A\Delta r = 0$	<p>0.3 pts</p>
$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\rho \frac{Gm'(r)}{r^2}$ $\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm'(r)}{r^2} = -n(r)m_p \frac{Gm'(r)}{r^2}.$	<p>0.2 pts</p>
<p style="text-align: right;">Total</p>	<p>0.5 pts</p>

Solutions/ Marking Scheme



T1

Question C.2

Answer	Marks
<p>Using the ideal gas law $P = n kT$ where $n = N/V$ where n is the number density, we have</p> $\frac{dP}{dr} = kT \frac{dn(r)}{dr} + kn(r) \frac{dT}{dr} = -n(r)m_p \frac{Gm'(r)}{r^2}$ <p>Thus we have</p> $m'(r) = -\frac{kT}{Gm_p} \left(\frac{r^2}{n(r)} \frac{dn(r)}{dr} + \frac{r^2}{T(r)} \frac{dT(r)}{dr} \right).$	0.5 pts
Total	0.5 pts

Question C.3

Answer	Marks
<p>If we have isothermal distribution, we have $dT/dr = 0$ and</p> $m'(r) = -\frac{kT_0}{Gm_p} \left(\frac{r^2}{n(r)} \frac{dn(r)}{dr} \right)$	0.2 pts
<p>From information about interstellar gas number density, we have</p> $\frac{1}{n(r)} \frac{dn(r)}{dr} = -\frac{3r + \beta}{r(r + \beta)}$ <p>Thus we have</p> $m'(r) = \frac{kT_0 r}{Gm_p} \frac{3r + \beta}{(r + \beta)}$	0.2 pts

Solutions/ Marking Scheme



T1

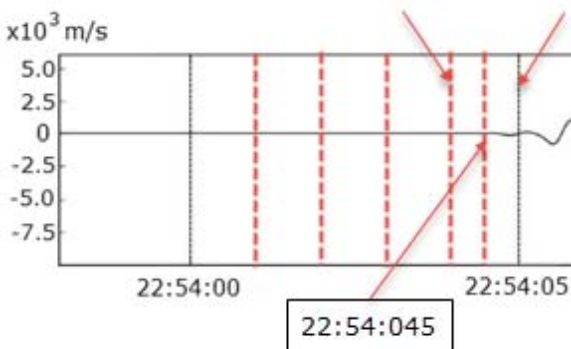
<p>Mass density of the interstellar gas is</p> $\rho_g(r) = \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}$ <p>Thus</p> $m'(r) = \int_0^r (\rho_g(r') + \rho_{dm}(r')) 4\pi r'^2 dr' = \frac{kT_0 r}{Gm_p} \frac{3r + \beta}{(r + \beta)}$ $m'(r) = \int_0^r \left(\frac{\alpha m_p}{r'(\beta + r')^2} + \rho_{dm}(r') \right) 4\pi r'^2 dr' = \frac{kT_0 r}{Gm_p} \frac{3r + \beta}{(r + \beta)}$	0.3 pts
$\left(\frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} + \rho_{dm}(r) \right) 4\pi r^2 = \frac{kT_0}{Gm_p} \frac{3r^2 + 6r\beta + \beta^2}{(r + \beta)^2}$ $\rho_{dm}(r) = \frac{kT_0}{4\pi Gm_p} \frac{3r^2 + 6r\beta + \beta^2}{(r + \beta)^2 r^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}$	0.3 pts
Total	1.0 pts

Earthquake, Volcano and Tsunami

A. Merapi Volcano Eruption

Question	Answer	Marks
A.1	<p>Using Black's Principle the equilibrium temperature can be obtained</p> $m_w c_{vw} (T_e - T_w) + m_m c_{vm} (T_e - T_m) = 0$ <p>Thus,</p> $T_e = \frac{m_w c_{vw} T_w + m_m c_{vm} T_m}{m_w c_{vw} + m_m c_{vm}}$	0.5 pts
A.2	<p>For ideal gas, $p_e v_e = RT_e$, thus</p> $p_e = \frac{R}{v_e} \frac{m_w c_{vw} T_w + m_m c_{vm} T_m}{m_w c_{vw} + m_m c_{vm}}$	0.3 pts
A.3	<p>The relative velocity u_{rel} can be expressed as</p> $u_{rel} = \kappa p^\alpha V^\beta m^\gamma$ <p>where κ is a dimensionless constant. Using dimensional analysis, one can obtain that</p> $LT^{-1} = M^{\alpha+\gamma} L^{-\alpha+3\beta} T^{-2\alpha}$ $\alpha + \gamma = 0$ $-\alpha + 3\beta = 1$ $-2\alpha = -1$ <p>Therefore</p> $u_{rel} = \kappa p^{1/2} V^{1/2} m^{-1/2}$	0.5 pts
Total score		1.3 pts

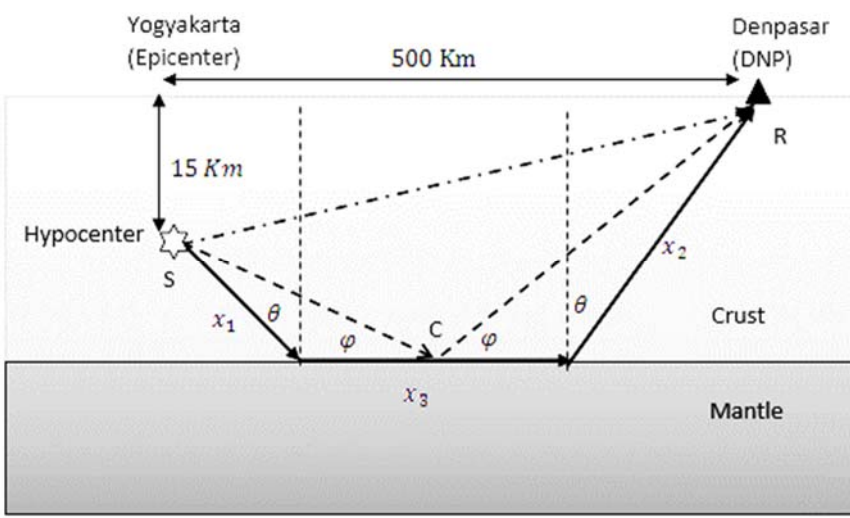
B. The Yogyakarta Earthquake

Question	Answer	Marks	
B.1	<p>From the given seismogram, fig. 2</p>  <p>One can see that the P-wave arrived at 22:54:04.5 or (4.5 – 5.5) seconds after the earthquake occurred at the hypocenter.</p>	0.3 pts	0.5 pts
	<p>Since the horizontal distance from the epicenter to the seismic station in Gamping is 22.5 km, and the depth of the hypocenter is 15 km, the distance from the hypocenter to the station is</p> $\sqrt{22.5^2 + 15^2} \text{ km} = 27.04 \text{ km}$	0.1 pts	
	<p>Therefore, the P-wave velocity is</p> $v_P = \frac{27.04 \text{ Km}}{4.7 \text{ s}} = 5.75 \text{ Km/s}$	0.1 pts	

Solutions/ Marking Scheme



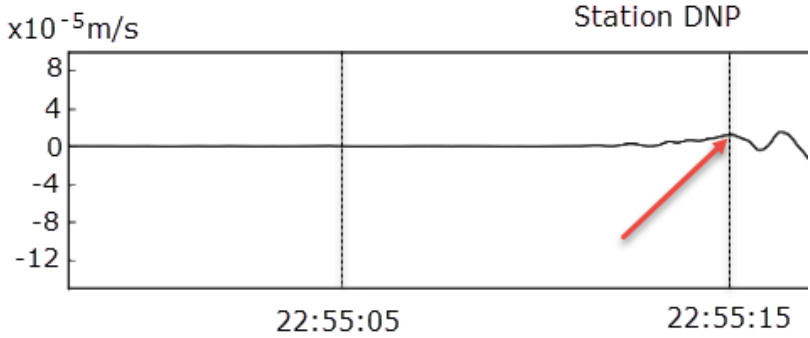
T2

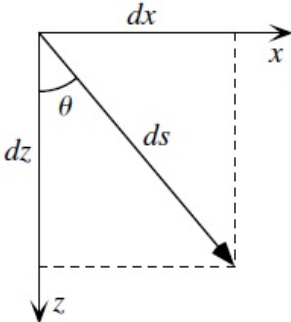
Question	Answer	Marks	
B.2	<p>Direct wave:</p> $t_{\text{direct}} = \frac{SR}{v_1} = \frac{\sqrt{500^2 + 15^2}}{v_1} = \frac{502.021}{5.753} \text{ s} = 86.9 \text{ s}$	0.2 pts	0.6 pts
	<p>As in the case of an optical wave, the Snell's law is also applicable to the seismic wave.</p>  <p>Illustration for the traveling seismic Wave</p> <p>Reflected wave:</p> $t_{\text{reflected}} = \frac{SC}{v_1} + \frac{CR}{v_1}$ $SC \cos \varphi + CR \cos \varphi = 500 \Rightarrow \cot \varphi = \frac{500}{45}$ $t_{\text{reflected}} = \frac{45}{v_1 \sin \varphi} = 87.3 \text{ s}$	0.4 pts	

Solutions/ Marking Scheme



T2

Question	Answer	Marks	
B.3	<p>Velocity of P-wave on the mantle. The fastest wave crossing the mantle is that propagating along the upperpart of the mantle. From the figure on refracted wave, we obtain that</p> $\frac{\sin \theta}{v_1} = \frac{1}{v_2}; \quad \sin \theta = \frac{v_1}{v_2}; \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}$ $\cos \theta = \frac{15}{x_1}; \quad x_1 = \frac{15}{\cos \theta} \text{ km}; \quad x_2 = \frac{30}{\cos \theta} \text{ km}$ $x_3 = 500 - (x_1 + x_2) \sin \theta = 500 - 45 \tan \theta$	0.4 pts	1.2 pts
	<p>The total travel time:</p> $t = \frac{x_1 + x_2}{v_1} + \frac{x_3}{v_2} = \frac{45}{v_1 \cos \theta} + \frac{500}{v_2} - \frac{45 \tan \theta}{v_2}$ $t \cos \theta = 45u_1 + 500u_2 \cos \theta - 45u_2 \sin \theta$ <p>where $u_1 = 1/v_1$ and $u_2 = 1/v_2$. Arranging the equation, we get</p> $(500^2 + 45^2)u_2^2 - 2t \cdot 500u_2 + t^2 - 45^2 u_1 = 0$ <p>whose solution is</p> $v_2 = \frac{500tv_1^2 + 45v_1 \sqrt{(45^2 + 500^2) - t^2v_1^2}}{t^2v_1^2 - 45^2}$	0.5 pts	
	<p style="text-align: center;">Station DNP</p>  <p>From the seismogram, we know that the fastest wave arrived at Denpasar station at 22:55:15, which is $t = 75$ s from the origin time of the earthquake in Yogyakarta. Thus</p> $v_2 = 7.1 \text{ km/s}$	0.3 pts	

Question	Answer	Marks	
B.4	By using Snell's law and defining $p = \sin \theta / v$ and $u = 1/v$, we obtain $p \equiv u(0) \sin \theta_0 = u(z) \sin \theta; \quad \sin \theta = \frac{p}{u(z)}$	0.2 pts	1.4 pts
	where $u(z) = 1/v(z)$ and θ_0 is the initial angle of the seismic wave direction. $\frac{dx}{ds} = \sin \theta = \frac{p}{u(z)}; \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{u(z)}\right)^2}$ $\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dz} = \frac{p}{u} \frac{u}{(u^2 - p^2)^{1/2}} = p / (u^2 - p^2)^{1/2}$ $x = \int_{z_1}^{z_2} \frac{p}{(u^2 - p^2)^{1/2}} dz$	0.5 pts	
	 <p>Illustration for the direction of wave</p> <p>The distance X is equal to twice the distance from epicenter to the turning point. The turning point is the point when $\theta = 90^\circ$. Thus</p> $p = u(z_t) = \frac{1}{v_0 + az_t}; \quad z_t = \frac{1 - pv_0}{ap}$ $X = 2 \int_0^{z_t} \frac{p(v_0 + az)}{(1 - p^2(v_0 + az)^2)^{1/2}} dz = \frac{2}{ap} \left(\sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2} - \sqrt{1 - p^2v_0^2} \right)$	0.7 pts	

Solutions/ Marking Scheme



T2

Question	Answer	Marks	
B.5	<p>For the travel time, $dt = \frac{ds}{v(z)}$; $\frac{dt}{ds} = u(z)$.</p> <p>Thus</p> $\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dz} = \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}}$ <p>and therefore</p> $T = 2 \int_0^{z_t} \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}} dz = 2 \int_0^{z_t} \frac{1}{(v_0 + az)} \frac{1}{(1 - p^2(v_0 + az)^2)^{1/2}} dz$	1.0 pts	1.0 pts
B.6	<p>The total travel time from the source to the Denpasar can be calculated using previous relation</p> $T(p) = 2 \int_0^{z_t} \frac{u^2(z)}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} dz$ <p>Which is valid for a continuous $u(z)$. For a simplified stacked of homogeneous layers (Figure F), the integral equation became a summation</p> $T(p) = 2 \sum_i^N \frac{u_i^2 \Delta z_i}{(u_i^2 - p^2)^{1/2}}$	0.6 pts	1.0 pts
	$T(p) = 2 \frac{u_1^2 \Delta z_1}{(u_1^2 - p^2)^{1/2}} + 2 \frac{u_2^2 \Delta z_2}{(u_2^2 - p^2)^{1/2}} + 2 \frac{u_3^2 \Delta z_3}{(u_3^2 - p^2)^{1/2}}$ $= \frac{2 \times (0.1504)^2 \times 6}{(0.1504^2 - 0.143^2)^{1/2}} + \frac{2 \times (0.1435)^2 \times 9}{(0.1435^2 - 0.143^2)^{1/2}}$ $+ \frac{2 \times (0.1431)^2 \times 15}{(0.1431^2 - 0.143^2)^{1/2}}$ $= 151.64 \text{ second}$ <p>Note that the actual travel time from the epicenter to Denpasar is 75 seconds. By varying the parameters of velocity and depth up to suitable value of observed travel time, physicist can know Earth structure.</p>	0.4 pts	
Total score		5.7	pts

Solutions/ Marking Scheme



T2

C. Java Tsunami

Question	Answer	Marks	
C.1	<p>The center of mass of the raised ocean water with respect to the ocean surface is $h/2$. Thus</p> $E_P = \frac{h^2 \rho \lambda L g}{4}$ <p>where ρ is the ocean water density.</p>	0.5 pts	0.5 pts
C.2	<p>Considering a shallow ocean wave in Fig. 5, the whole water (from the surface until the ocean floor) can be considered to be moving due to the wave motion. The potential energy is equal to the kinetic energy.</p> $\frac{1}{4} \rho \lambda h^2 L g = \frac{1}{4} \rho d L \lambda U^2$ <p>Where $x = \lambda/2$ and U is the horizontal speed of the water component. The water component that was in the upper part $hL \frac{\lambda}{2}$ should be equal to the one that moves horizontally for a half of period of time $\tau/2$, i.e. $hL \lambda/2 = dLU \tau/2$. Thus we have</p> $U = \frac{h\lambda}{\tau d}$	0.7 pts	1.2 pts
	<p>Accordingly,</p> $\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{gd}}$ <p>Thus</p> $v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{gd}$	0.5 pts	
C.3	<p>Using the argument that the wave energy density is proportional to its amplitude $E = kA^2$ with A is amplitude and k is a proportional constant. Because the energy flux is conserve, then $Eva = E_0v_0a$ for an area a where the wave flow through. Then,</p> $kA^2 \sqrt{gd} = kA_0^2 \sqrt{gd_0}$ $A = A_0 \left(\frac{d_0}{d}\right)^{\frac{1}{4}}$ <p>(Therefore the tsunami wave will increase its amplitude and become narrower as it approaches the beach).</p>	1.3 pts	1.3 pts
Total score			3.0 pts

Solutions/ Marking Scheme



T2

Total Score for Problem T2:

Section A : 1.3 points

Section B : 5.7 points

Section C : 3.0 points

Total : 10 points

Cosmic Inflation

A. Expansion of Universe

Question A.1

Answer	Marks
<p>For any test mass m on the boundary of the sphere,</p> $m\ddot{R}(t) = -GmM_s/R^2(t) \quad (\text{A.1.1})$ <p>where M_s is mass portion inside the sphere</p>	0.2
<p>Multiplying equation (A.1.1) with \dot{R} and integrating it gives</p> $\int \dot{R} \frac{d\dot{R}}{dt} dt = \frac{1}{2} \dot{R}^2 = \frac{GM_s}{R} + A$ <p>where A is a integration constant</p>	0.6
<p>Taking $M_s = \frac{4}{3}\pi R^3(t)\rho(t)$, and $\dot{R} = \dot{a} R_s$</p>	0.2
$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \frac{2A}{R_s^2 a^2(t)}$	0.2
<p>Therefore, we have $A_1 = \frac{8\pi G}{3}$</p>	0.1
Total	1.3

Question A.2

Answer	Marks

Solutions/ Marking Scheme



T3

The 2 nd Friedmann equation can be obtained from the 1 st law of thermodynamics :	0.1
$dE = -pdV + dQ.$	
For adiabatic processes $dE + pdV = 0$ and its time derivative is $\dot{E} + p\dot{V} = 0$.	0.1
For the sphere $\dot{V} = V(3\dot{a}/a)$	0.1
Its total energy is $E = \rho(t)V(t)c^2$	0.2
Therefore $\dot{E} = \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\right)Vc^2$	0.1
It yields	0.2
$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0$	
Therefore, we have $A_2 = 3$.	0.1
Total	0.9

Question A.3

Answer	Marks
<p>Interpreting $\rho(t)c^2$ as total energy density, and substituting $\frac{p(t)}{c^2} = w \rho(t)$ in to the 2nd Friedmann equation yields:</p> $\dot{\rho} + 3 \rho(1 + w) \frac{\dot{a}}{a} = 0$	0.1
$\rho \propto a^{-3(w+1)}$	0.2
<p>(i) In case of radiation, photon as example, the energy is given by $E_r = h\nu = hc/\lambda$ then its energy density $\rho_r = \frac{E_r}{V} \propto a^{-4}$ so that $w_r = \frac{1}{3}$</p>	0.3
<p>(ii) In case of nonrelativistic matter, its energy density nearly $\rho_m \simeq \frac{m_0 c^2}{V} \propto a^{-3}$ since dominant energy comes from its rest energy $m_0 c^2$, so that $w_m = 0$</p>	0.3
<p>(iii) For a constant energy density, let say $\epsilon_\Lambda = \text{constant}$, $\epsilon_\Lambda \propto a^0$ so that $w_\Lambda = -1$.</p>	0.3
Total	1.2

Question A.4

Answer	Marks
<p>(i) In case of $k = 0$, for radiation we have $\rho_r a^4 = \text{constant}$. So by comparing the parameters values with their present value, $\rho_r(t) a^4(t) = \rho_{r0} a_0^4$,</p> $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4.$ $\int a da = \frac{1}{2} a^2 + K = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{r0} a_0^4\right)^{\frac{1}{2}} t.$	0.2
<p>Because $a(t = 0) = 0, K = 0$, then</p> $a(t) = (2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{r0} a_0^4\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} = (2H_0)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}.$ <p>where $H_0 = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{r0}\right)^{\frac{1}{2}}$ after taking $a_0 = 1$.</p>	0.2
<p>(ii) for non-relativistic matter domination, using $\rho_m(t) a^3(t) = \rho_{m0} a_0^3$, and similar way we will get</p> $a(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{m0} a_0^4\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3H_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}.$ <p>where $H_0 = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{m0}\right)^{\frac{1}{2}}$.</p>	0.4
<p>(iii) for constant energy density,</p> $\ln a = H_0 t + K'$ <p>Where K' is integration constant and $H_0 = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$. Taking condition $a_0 = 1$,</p> $\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = H_0(t - t_0)$ $a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$	0.4
Total	1.2

Question A.5

Answer	Marks
<p>Condition for critical energy condition:</p> $\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}$ <p>Friedmann equation can be written as</p> $H^2(t) = H^2(t)\Omega(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2(t)}$ $\left(\frac{R_0^2}{c^2}\right) a^2 H^2 (\Omega - 1) = k \quad (\text{A.5.1})$	0.1
Total	0.1

Question A.6

Answer	Marks
<p>Because $\left(\frac{R_0^2}{c^2}\right) a^2 H^2 > 0$, then $k = +1$ corresponds to $\Omega > 1$, $k = -1$ corresponds to $\Omega < 1$ and $k = 0$ corresponds to $\Omega = 1$</p>	0.3
Total	0.3

B. Motivation To Introduce Inflation Phase and Its General Conditions

Question B.1

Answer	Marks
Equation (A.5.1) shows that $(\Omega - 1) = \frac{kc^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2}.$	0.1
In a universe dominated by non-relativistic matter or radiation, scale factor can be written as a function of time as $a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^p$ where $p < 1$ ($p = \frac{1}{2}$ for radiation and $p = \frac{2}{3}$ for non-relativistic matter)	0.2
$(\Omega - 1) = \tilde{k} t^{2(1-p)}$	0.2
Total	0.5

Question B.2

Answer	Marks
For a period dominated by constant energy provides the solution $a(t) = e^{Ht}$ so that $\dot{a} = He^{Ht}$	0.1
$(\Omega - 1) = \frac{k}{H^2} t^{-2Ht}$	0.2
Total	0.3

Question B.3

Answer	Marks
Inflation period can be generated by constant energy period, therefore it is a phase where $w = -1$ so that $p = w\rho c^2 = -\rho c^2$ (negative pressure).	0.2
Differentiating Friedmann equation leads to $\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2}$ $2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\rho}a^2 + 2\rho a \dot{a}) = \frac{8\pi G}{3} (-3 \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) a\dot{a} + 2\rho a\dot{a}).$ $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$	0.4
So that because during inflation $p = -\rho c^2$, it is equivalent with condition $\ddot{a} > 0$ (accelerated expansion)	0.1
As a result, $\ddot{a} = d(\dot{a})/dt = d(Ha)/dt > 0$ or $d(Ha)^{-1}/dt < 0$ (shrinking Hubble radius).	0.2
Total	0.9

Question B.4

Answer	Marks
Inflation condition can be written as $\frac{d(aH)^{-1}}{dt} < 0$, with $H = \dot{a}/a$ as such $\frac{d(aH)^{-1}}{dt} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon) < 0 \Rightarrow \epsilon < 1$	0.2
Total	0.2

C. Inflation Generated by Homogenously Distributed Matter

Question C.1

Answer	Marks
Differentiating equations (4) and employing equation 4 we can get $2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \dot{\phi} \right] = \frac{1}{3M_{pl}^2} [-3H\dot{\phi}^2]$ $\dot{H} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}$	0.3
Therefore $\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2}$	0.1
The inflation can occur when the potential energy dominates the particle's energy ($\dot{\phi}^2 \ll V$) such that $H^2 \approx V/(3M_{pl}^2)$.	0.2
Slow-roll approximation: $3H\dot{\phi} \approx -V'$	0.1
Implies $\epsilon \approx \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (C.1.1)$	0.3
we also have $3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -V''\dot{\phi}$ $\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{V''}{3H^2} - \epsilon$ Therefore $\eta_V \approx M_{pl}^2 \frac{V''}{V} \quad (C.1.2)$	0.4
$dN = H dt = \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right) d\phi \approx -\frac{1}{M_{pl}^2} (V/V') d\phi \quad (C.1.3)$ $\frac{dN}{d\phi} \approx -\frac{1}{M_{pl}^2} (V/V')$	0.3
Total	1.7

D. Inflation with A Simple Potential

Question D.1

Answer	Marks
Inflation ends at $\epsilon = 1$. Using $V(\phi) = \Lambda^4(\phi/M_{pl})^n$ yields $\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2} \left[\frac{n}{\phi_{end}} \right]^2 = 1 \Rightarrow \phi_{end} = \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}$	0.5
Total	0.5

Question D.2

Answer	Marks
From equations (C.1.1), (C.1.2) and (C.1.3) we can obtain $N = - \left[\frac{\phi}{M_{pl}} \right]^2 \frac{1}{2n} + \beta$ where β is a integration constant. As $N = 0$ at ϕ_{end} then $\beta = \frac{n}{4}$. $N = - \left[\frac{\phi}{M_{pl}} \right]^2 \frac{1}{2n} + \frac{n}{4}$	0.2
$\eta_V = n(n-1) \left[\frac{M_{pl}}{\phi} \right]^2 = \frac{2(n-1)}{n-4N}$	0.2
$\epsilon = \frac{n^2}{2} \left[\frac{M_{pl}}{\phi} \right]^2 = \frac{n}{n-4N}$	0.2
so that $r = 16\epsilon = \frac{16n}{n-4N}$	0.1

Solutions/ Marking Scheme



T3

$n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon = 1 - \frac{2(n+2)}{(n-4N)}$	0.1
To obtain the observational constraint $n_s = 0.968$ we need $n = -5.93$ which is inconsistent with the condition $r < 0.12$. There is <u>no a closest integer</u> n that can obtains $r < 0.12$. As example, for $n = -6$ leads a contradiction $0 < (-0.27)$ and for $n = -5$ leads a contradiction $0 < (-0.2)$.	0.1
Total	0.9

Општа упутства: експериментални тест

18. јул 2017.

Експериментални тест се ради 5 сати и вреди 20 поена.

Пре теста

- Не смете отворати коверте са задацима пре него што звучни сигнал означи почетак теста.
- Почетак и крај теста биће означени звучним сигналом. На сваких сат времена, као и петнаест минута пре краја теста (финалног звучног сигнала), бићете обавештени о времену преосталом за израду теста.

Током теста

- Своје одговоре треба да уписујете на одговарајуће листове за одговоре. Резултате својих мерења унесите у одговарајуће табеле, кућице или графике на одговарајућем листу за одговоре. За сваки задатак имате на располагању и листове за детаљнији рад. Водите рачуна да увек пишете на листовима који одговарају задатку који тренутно радите (проверите број задатка у заглављу). Уколико не желите да садржај било ког листа буде прегледан, прецртајте га. Користите само предњу страну сваког листа. Не заборавите да на сваком листу за одговоре и листу за детаљнији рад упишете своју шифру у одговарајуће поље. Одговори или поступак решавања задатка неће бити прегледани уколико шифра ученика није уписана.
- Трудите се да будете што је могуће сажетији у одговорима: када год је то могуће, користите једначине, логичке операције и скице да представите своја размишљања. Избегавајте употребу дугих реченица.
- Није потребно одређивати експерименталне грешке осим ако се то експлицитно не захтева. Ипак, све бројне вредности треба навести са одговарајућим бројем значајних цифара. Такође, сами треба да одлучите о прихватљивом броју мерних тачака или понављања мерења уколико за то нису дата посебна упутства.
- Често ћете умети да решите касније делове задатка иако нисте решили претходне делове.
- Не смете напуштати своје радно место без дозволе. Уколико вам је потребна било каква помоћ (допуна боце са водом, покварен калкулатор, потреба за тоалетом, итд.), подигните увис једну од три заставице ("Допуните моју боцу са водом, молим вас", "Морам да идем у тоалет, молим вас" или "Помозите ми, молим вас" у свим осталим случајевима) како би вам супервизор помогао.

На крају теста

- На крају теста морате одмах престати са писањем.
- За сваки задатак, сложите одговарајуће листове следећим редом: задаци, листови за одговоре, листови за детаљнији рад.

- За E1 (Експериментални задатак бр. 1) треба да приложите милиметарски папир који сте користили за добијање дефлактограма. Проверите да ли сте написали своју шифру и концентрацију раствора који сте користили на том милиметарском папиру.
- У дну сваког **листа за детаљнији рад** морате написати **редни број тог листа и укупан број искоришћених листова за детаљнији рад**.
- Ставите све листове везане за један задатак у један коверат. Ставите општа упутства у преостали посебан коверат (ако га имате, а ако га немате, оставите их ван коверта). Предајте празне листове. Није дозвољено изношење било ког листа са теста.
- Прибор за писање и калкулатор које сте добили од организатора оставите на радном столу.
- Сачекајте за столом док ваши коверти и остала опрема не буду прикупљени. Када сви коверти и остала опрема буду прикупљени, ваш водич ће вас отпратити из просторије у којој сте радили тест. Не заборавите да са собом понесете своју боцу са водом и преосталу ужину.

Одређивање градијента индекса преламања и коефицијента дифузије раствора соли мерењем скретања ласерског снопа

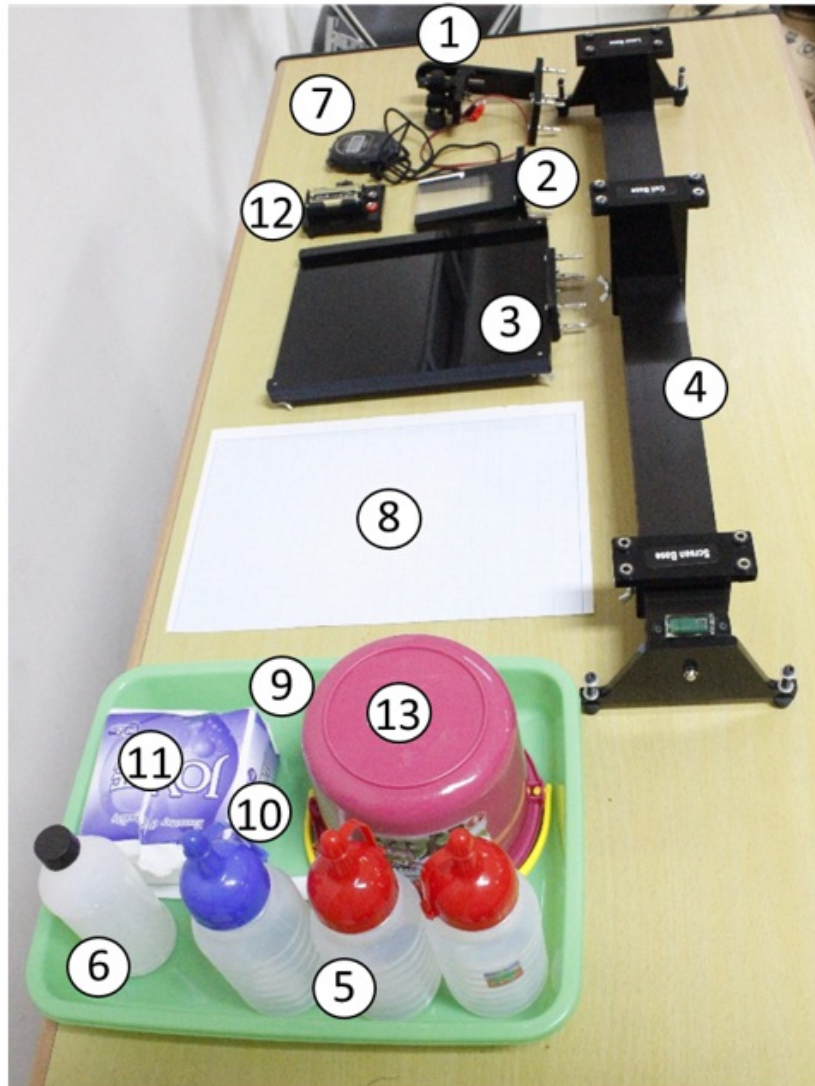
I Увод

Дифузија је процес који укључује случајну шетњу атома или молекула у циљу постизања термодинамичке равнотеже система. На пример, ако посуда садржи смешу воде и раствора соли, јавиће се дифузиони флуks молекула соли из области високе концентрације соли ка области ниске концентрације. Брзину дифузије карактерише коефицијент дифузије D . Дифузија игра веома важну улогу у многим процесима, од биохемије до астрофизике. У овом експерименталном задатку проучава се дифузија молекула соли. Молекули соли дифундују из раствора соли ка областима са дестилованом водом, стварајући прелазни слој са променљивом концентрацијом соли. Индекс преламања раствора зависи од концентрације соли. То значи да се процес дифузије може проучавати коришћењем методе скретања ласерског снопа.

II Циљеви

1. Одређивање коефицијента дифузије воденог раствора соли мерењем градијента индекса преламања.
2. Одређивање промене коефицијента дифузије услед промене концентрације воденог раствора соли.

III Прибор



Слика 1. Прибор за експеримент

1. Извор светлости (Диодни ласер таласне дужине $\lambda = 632 \text{ nm}$ и цилиндрично сочиво),
2. дифузиона ћелија (6.5 cm x 0.8 cm x 6.5 cm) са држачем),
3. екран са држачем,
4. оптичка клупа са метарском траком,
5. водени раствор соли,
6. дестилована вода,
7. хронометар,
8. милиметарски папир,
9. пипета,
10. нож + марамица за чишћење,

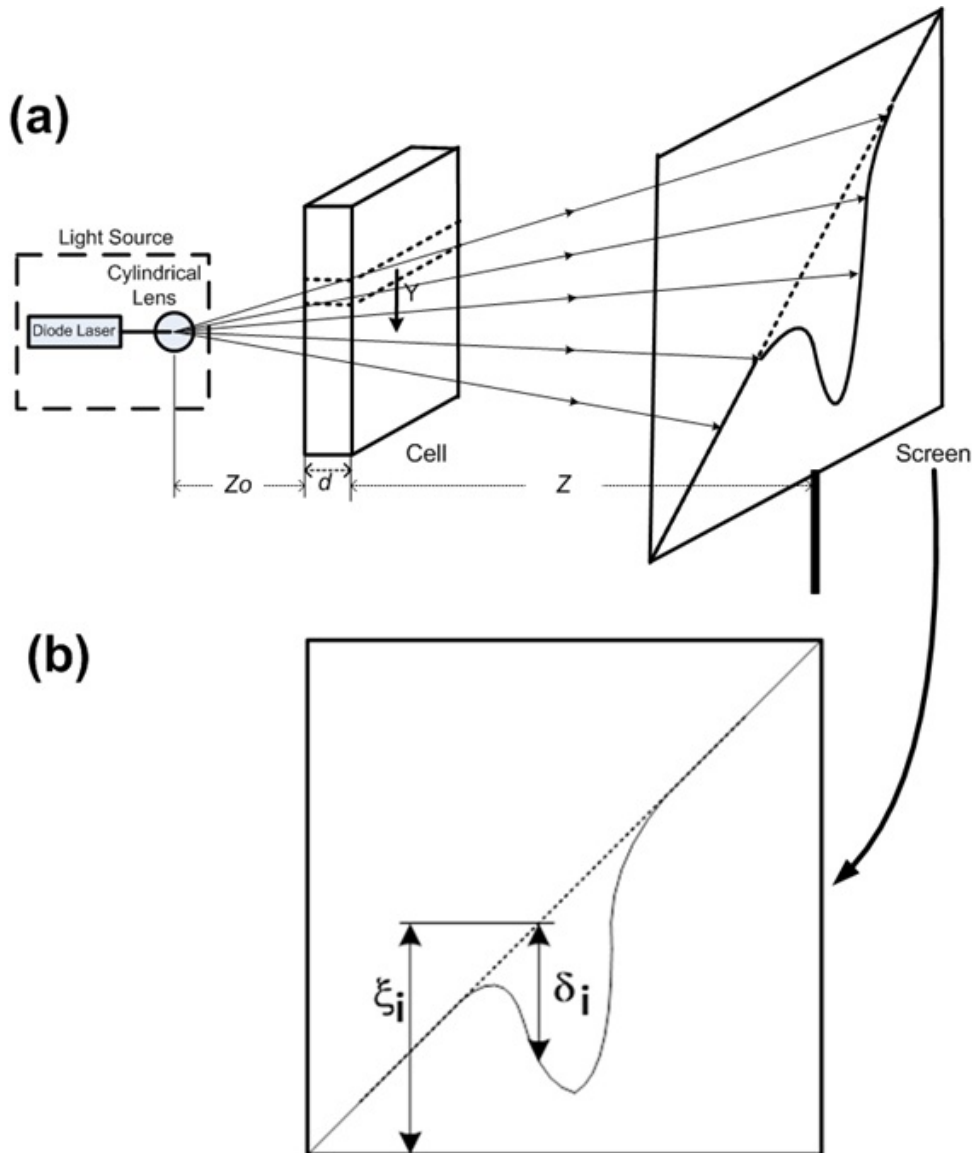
Experiment

Serbia

E1

11. марамица,
12. батерија,
13. посуда за одлагање употребљеног раствора.

Схематски приказ поставке експеримента је дат на слици 2.



Слика 2. (а) Схема експеримента. **Ћелија садржи водени раствор соли са дестилованом водом изнад. (б)** Стандардни дефлектограм, дефлектовани ласерски сноп који се појављује на екрану док дифузија између раствора 1 и раствора 2 траје.

Да би се добио профил градијента индекса преламања (зависност градијента индекса преламања од вертикалне позиције у флуиду), потребно је повезати вертикалну позицију на екрану (ξ) са висином у ћелији (Y), као и вертикално скретање (δ) са градијентом индекса преламања (dn/dY). Из геометрије експерименталне поставке (види слику 2) добија се:

$$Y_i = \frac{\xi_i Z_0}{Z_0 + d + Z} \quad (1)$$

где Z , Z_0 и d , приказани на слици 2(a), означавају растојање између извора светлости и дифузионе ћелије, растојање између дифузионе ћелије и екрана и дебљину дифузионе ћелије, респективно. **За мерење Z_0 , линија означена на извору светлости (ласеру) означава позицију цилиндричног сочива.**

Дебљина ћелије (d) и градијент индекса преламања су довољно мали тако да угао преламања α проузрокује занемарљиво вертикално померање зрака унутар ћелије. У овој апроксимацији сваки зрак пролази на скоро константној висини унутар ћелије и скреће услед градијента индекса преламања који одговара управо тој висини.

Може се показати да је:

$$\left(\frac{dn}{dY}\right)_i = \frac{\delta}{Zd} \quad (2)$$

Препоруке за мерење:

- Да би се добио дефлектовани траг ласера на екрану [као на слици 2(b)] морате да употребите све компоненте приказане на слици 1, следећи схему дату на слици 2(a).
- Проверите да ли је ласер укључен и да ли је зрак који се види дуж дијагонале екрана када пада нормално на дифузиону ћелију. Можете да подесите Z и Z_0 као и жижну даљину ласера (ротирањем задњег дела ласера) да бисте добили светлу и фокусирану линију. Такође можете да подесите правац дијагоналне линије шрафом којим ротирате цео ласер (ослободите ласер користећи шраф на врху). У случају када нема воде или раствора соли треба да видите прав ласерски сноп дуж дијагонале.
- Дефлектовани траг ласера ће се појавити када се помешају два раствора. Прво сипајте раствор соли у посуду дифузионе ћелије до нивоа означеног белом линијом. Накапајте воду лагано у посуду, око 40 капљица, пипетом, после чега треба укључити хронометар да би се измерило време еволуције дифузионог профила. Ако су Z , Z_0 и висина ласера добро одабрани, траг дефлектованог ласерског снопа ће бити у центру екрана, јасан и са максималним скретањем. Потребно је да пронађете оптималну поставку како бисте смањили грешке мерења.
- После 30 минута еволуције треба да прецртате ласерски траг графитном оловком на милиметарски папир који поставите на екран. Водите рачуна да ћете у овом делу задатка морати да извршите мерења за 3 различите вредности концентрације раствора соли (тј. $C_0 = 23 \text{ g}/150 \text{ ml}$, $C_0 = 28 \text{ g}/150 \text{ ml}$ и $C_0 = 33 \text{ g}/150 \text{ ml}$) тако да ћете често морати мењати милиметарски папир. Милиметарски папир треба да поставите на екран и да га причврстите шрафовима који се налазе у углу екрана.
- Проверите да ли сте уписали шифру и концентрацију раствора који сте користили на милиметарски папир.

IV. Експеримент и задаци

A: Мерење градијента индекса преламања воденог раствора соли (4.5 поена)

Потребно је да урадите све доле наведене кораке за сва три раствора соли. Није потребно да процењујете грешке.

A.1	Поставите експеримент и посматрајте дефлектовани траг ласера на екрану. Прецртајте дефлектовани траг ласера на милиметарски папир постављен на екран користећи графитну оловку. Време трајања дифузије (t) износи 30 минута.	1.2 п
A.2	Измерите Z , d , Z_0 , ξ_i и δ_i (где су $i = 1, \dots, 20$, су редни бројеви мерења) користећи дефлектовани траг ласера који сте прецртали на милиметарски папир за време трајања дифузије (t) које износи 30 минута. Вредности параметара Z , d , Z_0 , ξ_i и δ_i изразите у cm. Водите рачуна о томе да су вредности Z , d и Z_0 исте за сва мерења. Резултате мерења упишите у Табелу 1.	1.5 п
A.3	Израчунајте Y_i и $\left(\frac{dn}{dY}\right)_i$ ($i = 1, \dots, 20$ су редни бројеви мерења) за време трајања дифузије (t) које износи 30 минута. Водите рачуна о томе да су вредности Z , d и Z_0 исте за сва мерења. Record the results in Table 2. Plot $\left(\frac{dn}{dY}\right)_i$ vs. Y_i for $t = 30$ minutes.	1.5 п
A.4	На основу дела задатка A.3, одредите Y_i за које $\left(\frac{dn}{dY}\right)_i$ достиже максималну вредност. Обележите ту вредност Y_i као h .	0.3 п

В: Одређивање коефицијента дифузије (4.2 поена)

Кроз експерименталне тачке које сте добили у делу задатка **A.3** може се провући крива чији је аналитички облик:

$$\left(\frac{dn}{dY}\right)_i = \left(\frac{dn}{dc}\right) \left(\frac{dc}{dY}\right)_i \quad (3)$$

$$\left(\frac{dc}{dY}\right)_i \approx \frac{C_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(h-Y_i)^2}{4Dt}} \quad (4)$$

где C , D , t , h редом означавају концентрацију воденог раствора соли, коефицијент дифузије, време трајања дифузије, и вредност Y_i за коју градијент индекса преламања (dn/dY) постиже максимум. Коефицијент дифузије се може израчунати линеаризацијом зависности $(dn/dY)_i$ од Y_i која се може извршити користећи једначине (3) и (4).

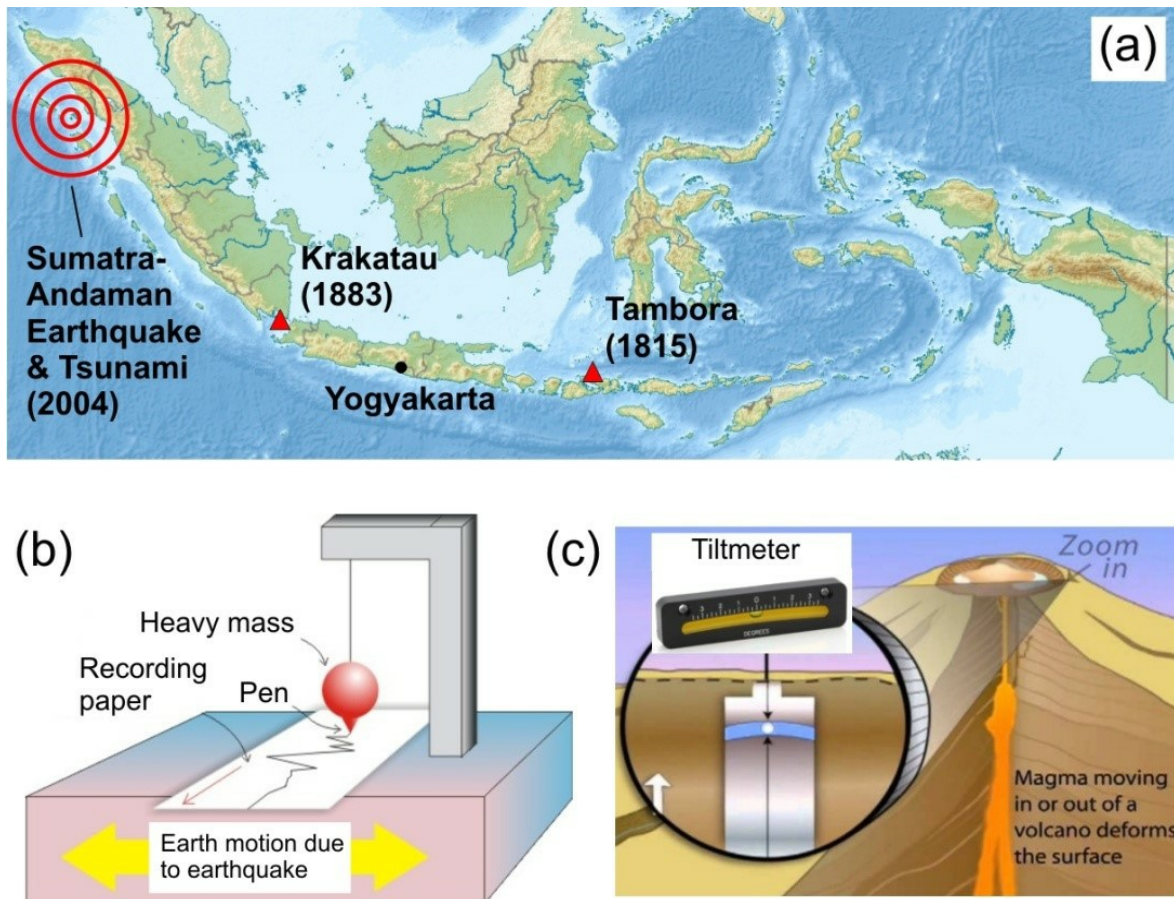
B.1	На основу једначина (3,4) нађите функције $f\left(\frac{dn}{dY}\right)$ и $g(Y)$ такве да између $f\left(\frac{dn}{dY}\right)$ и $g(Y)$ буде линеарна.	0.9 pt.
B.2	Направите табелу (Табела 3 на листовима за одговоре) која садржи експерименталне тачке, величину која се наноси на абсцису и величину која се наноси на оординату линеаризоване зависности добијене у B.1 за експерименталне податке из задатка A . Нацртајте график користећи податке из направљене табеле.	1.8 п
B.3	Одредите коефицијент дифузије D користећи график добијен у B.2 за време дифузије $t = 30$ минута. Водите рачуна да линерна зависност може бити добра само за део ваших података.	1.5 п

Ц. Нелинеарна дифузија (1.3 поена)

C.1	<p>Досадашња анализа је заснована на претпоставци да D не зависи од C. Ако то није тачно, у питању је нелинеарна дифузија. Ипак, близу максимума $\frac{dn}{dY}$ може се узети да је у питању стандардна дифузија, при којој коефицијент дифузије одговара локалној вредности концентрације. Одредите промену коефицијента дифузије услед промене концентрације воденог раствора соли, графички, користећи податке из дела Б.</p>	1.3 pt.
------------	--	---------

Магнетна замка на бази паралелних диполних ланаца за проучавање земљотреса и вулканске активности

А. Увод

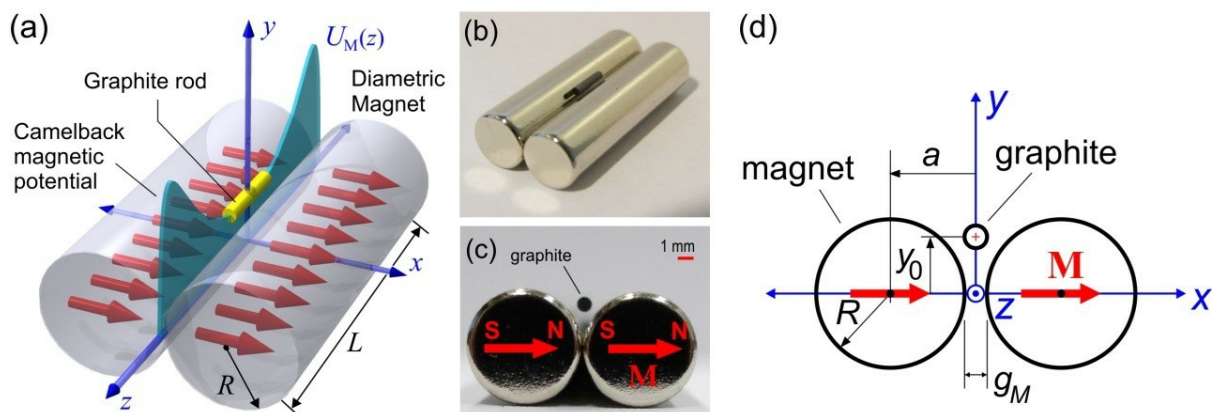


Слика 1. (а) Физичко-географска карта Индонезије са назначеним местима и годинама великих природних катастрофа. (б) Принципијелна схема сеизмометра који се користи за детекцију земљотреса. (с) Тилтметар за праћење вулканске активности.

Индонезија је највећи светски архипелаг који се састоји од око 17000 острва која се протежу кроз тропске пределе, због чега носи епитет "бисер екватора". Нажалост, изложена је многим природним претњама као што су земљотреси и вулканске ерупције. Огромне природне катастрофе (слика 1а) као што су the Суматра-Андаман земљотрес и цунами (2004) и ерупције вулкана Кракатау (1883) и Тамбора (1815) остаће упамћене као најсмртоносније несреће у историји. За детекцију земљотреса користи се *сеизмометар*, уређај који садржи клатно и *помоћу којег се мери померање или убрзање тла* (слика 1б). За праћење вулканске активности користи се *тилтметар* помоћу којег је могуће пратити промене *нагиба тла* услед подземних кретања магме (Слика 1с). У овом задатку истраживаћемо физичке законе на којима се заснива функционисање нове врсте магнетне замке и сензора, такозване замке на бази *паралелних*

диполних ланаца (PDL замке), као и њене примене за детекцију земљотреса и праћење вулканске активности.

Систем паралелних диполних ланаца састоји се од два линијска низа правилно распоређених магнетних дипола (такозвани *диполни ланци*) као што је приказано на слици 2. Недавно су два индонезанска физичара открила веома интересантан феномен у овом систему: уколико је дужина диполних ланаца већа од извесне критичне дужине, магнетно поље на крајевима система се појачава, што за последицу има стварање тзв. "*двогрбог потенцијала*", као што је приказано на слици 2а.* Управо описани "*двогрби ефекат*" је релевантан за функционисање овог система као *новог типа магнетне замке која се назива замка паралелних диполних ланаца (PDL замка)*. PDL замка се може експериментално реализовати користећи пар дијаметричних магнета, односно два цилиндрична магнета чији су вектори магнетизације усмерени дуж пречника цилиндара као што је приказано на слици 2с; северни и јужни пол магнета се тада налазе налазе на дијаметрално супротним крајевима омотача цилиндра уместо на његовим базама.

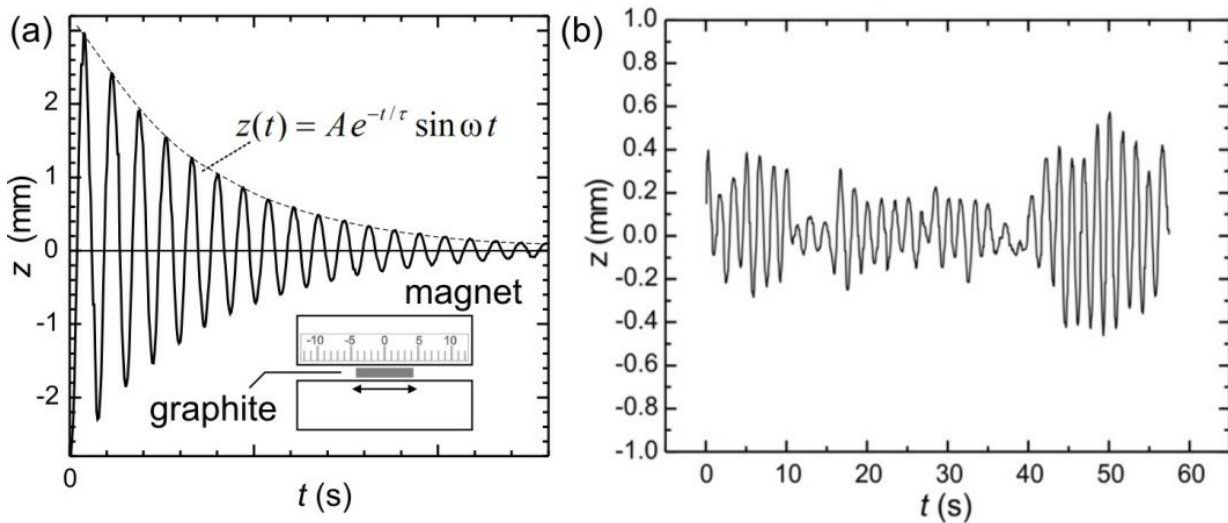


Слика 2. (а) Теоријски модел замка паралелних диполних ланаца (PDL замке) са двогрбим потенцијалом дуж z -осе. (б) Експериментална реализација PDL замке користећи дијаметричне магнете. (с) Попречни пресек експерименталне поставке. (д) Схематски приказ PDL замке. [* Gunawan and Virgus, J. Appl. Phys. **121**, 133902 (2017)].

Ако поставимо графитни уложак (централни део графитне оловке или мина техничке оловке) у замку он ће левитирати односно бити заробљен у стабилном стању. То се дешава због тога што дуж x осе на графит делују одбојне силе од магнета са обе стране, док дуж вертикале (y осе) одбојна магнетна сила бива уравнотежена гравитационом силом, услед чега графитни уложак левитира на висини y_0 (слика 2d). Двогрби потенцијал осигурава стабилност графитног улошка дуж z осе.

Двогрби потенцијал којег креира магнетна замка омогућава *једнодимензионалне осцилације дуж z осе*. Мали померај графитног улошка из равнотежног положаја усмерен дуж z осе доводи до поткритично пригушених осцилација улошка као што је приказано на слици 3а. Дакле, PDL замка се може користити као осетљиви сеизмометар. Уколико се подлога под уређајем тресе, графитни уложак тежи да остане у стабилном стању и магнитуда његовог помераја из стабилног стања (слика 3б) представља сигнал "земљотреса". Слично овоме, PDL замка се може користити као осетљиви тилтметар: уколико се замка благо нагне у односу на почетни положај, графитни уложак ће се

значајно померити без икаквог трења.



Слика 3. (а) Поткритично пригушене осцилације графитног улошка у двогрбном потенцијалу. (б) Примена PDL замке као сеизмометра: вибрације подлоге детектоване користећи PDL замку.

У наредна два дела задатка ћемо проучавати физику и примене PDL замке.

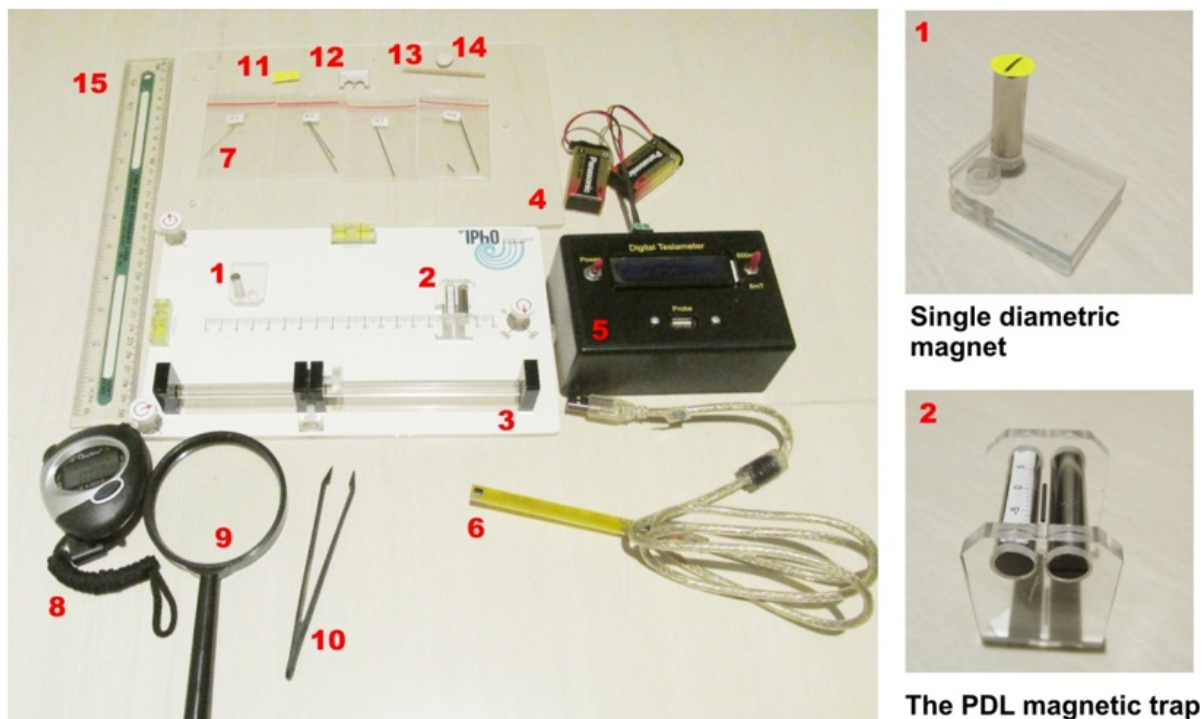
Део А: Основне карактеристике

- (1) Одређивање магнетизације магнета M (2.5 п)
- (2) Магнетна левитација и магнетна суцептибилност χ (1.0 п)
- (3) Осцилације у двогрбном потенцијалу и магнетна суцептибилност χ (1.0 п)
- (4) Фактор добротe осцилатора Q и одређивање коефицијента вискозности ваздуха μ_A (3.0 п)

Део В: Примене

- (5) PDL замка као сеизмометар (0.5 п)
- (6) PDL замка као тилтметар (2.0 п)

B. Апаратура



Слика 4. Поставка експеримента

1. Дијаметрични магнет. Жути стикер треба закачити тако да стрелица показује правац и смер вектора магнетизације.
2. PDL магнетна замка, приказана са графитним улошком који левитира. Молимо вас да не померате дијаметричне магнете од којих се састоји PDL магнетна замка.
3. Горње постоље са 3 шрафа.
4. Доње постоље.
5. Тесламетар за мерење магнетне индукције. Тесламетар се напаја помоћу батерија, док се Холов сензор повезује на тесламетар користећи кабал.
6. Холов сензор и кабал помоћу којег се повезује на тесламетар.
7. Графитни штапови (мине за техничке оловке) са четири различита пречника $\text{NB}/0.3$, $\text{NB}/0.5$, $\text{NB}/0.7$, и $\text{NB}/0.9$. За прецизније вредности пречника различитих графитних штапова погледајте одељак **КОНСТАНТЕ И ПОДАЦИ** у продужетку. Ове графитне штапове можете ломити по потреби тако да добијете улошке одговарајућих дужина.
8. Хронометар.

9. Лупа.
10. Пинцета од антистатичког материјала.
11. Округли жути стикер—за означавање правца и смера вектора магнетизације (северни пол-јужни пол) појединачног магнета.
12. Посебно дизајниран лењир који се може поставити на PDL магнетну замку и који служи за мерење висине на којој графитни уложак левитира.
13. Чачкалица за фино померање графитног уложка.
14. Силиконски причвршћивач помоћу којег се дијаметрични магнет/PDL замка причвршћује за постоље.
15. Лењир.

УПУТСТВА И УПОЗОРЕЊА:

1. **Појединачни дијаметрични магнет и PDL замку (два дијаметрична магнета) треба држати одвојено једно од другог. У супротном, могу да се сударе и полеме!**
2. **Да бисте сачували батерију, искључите тесламетар када год га не користите!**
3. Пажљиво одвојите делове апаратуре 7 и 11-14 од доњег постоља (део апаратуре 4) и потом поставите горње постоље (део апаратуре 3) на доње постоље.
4. Положај горњег постоља у односу на доње можете подешавати користећи три шрафа који се налазе на горњем постољу.

КОНСТАНТЕ И ПОДАЦИ:

Полупречник дијаметричног магнета	:	$R = 3.2 \text{ mm}$
Дужина дијаметричног магнета	:	$L = 25.4 \text{ mm}$
Процеп између делова PDL замке	:	$g_M = 1.5 \text{ mm}$
Густина графита	:	$\rho = 1680 \text{ kg/m}^3$
Пречник графитног штапа "HB/0.3"	:	$d = 0.38 \text{ mm}$
Пречник графитног штапа "HB/0.5"	:	$d = 0.56 \text{ mm}$
Пречник графитног штапа "HB/0.7"	:	$d = 0.70 \text{ mm}$
Пречник графитног штапа "HB/0.9"	:	$d = 0.90 \text{ mm}$
Собна температура	:	$T = 298 \text{ K}$
Магнетна пропустљивост вакуума	:	$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$
Болцманова константа	:	$k_B = 1.38064852 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

Experiment

Serbia

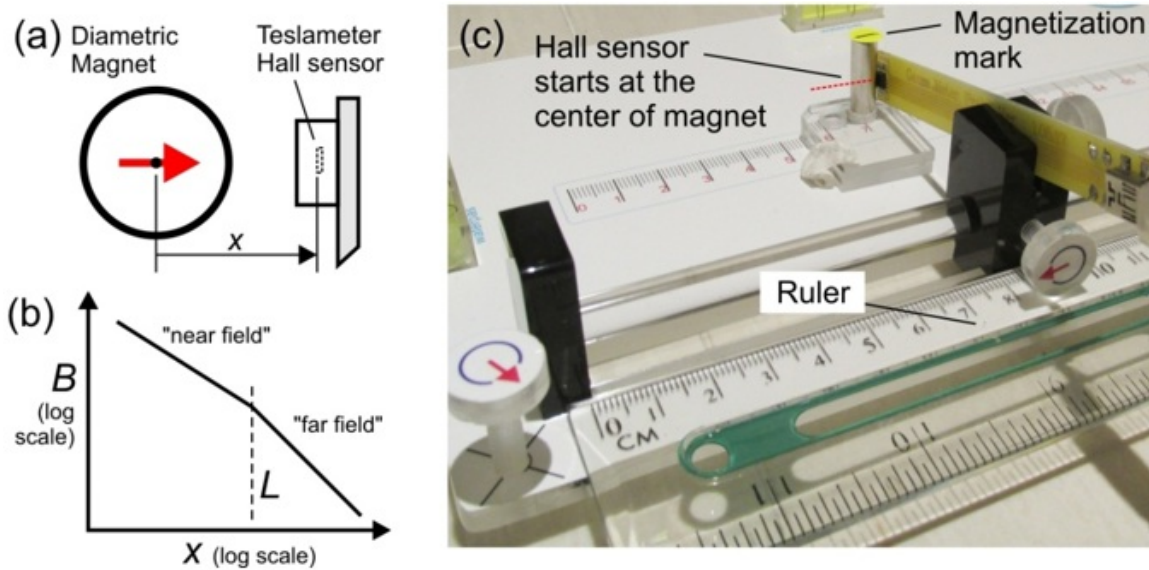
E2

Гравитационо убрзање : $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

Ц - Експеримент и питања

Део А: Основне карактеристике PDL замке

[1] Одређивање магнетизације магнета (M) (2.5 п)



Слика 5. (а) Мерење магнетног поља. (б) Профил магнетног поља. (с) Поставка експеримента.

Јачина магнетне замке зависи од укупног магнетног диполног момента магнета m . Она зависи магнетизације M , која је једнака магнетном диплоном моменту по јединици запремине и представља карактеристику материјала. За цилиндричан магнет:

$$M = \frac{m}{\pi R^2 L} \quad (1)$$

где је R полупречник а L дужина магнета (видети део Константе и подаци). Може се узети да је вредност M иста за све магнете који се користе у овом експерименту. Испитиваћете профил магнетног поља и треба да одредите M дијаметричног магнета који се користи у PDL замци.

Узмите један дијаметрични магнет и поставите експеримент као на слици 5с. Поставите магнет тако да је магнетизација (као што је приказано на слици 5а) уперена у Холов сензор (за магнетно поље). Измерите јачину магнетног поља дуж x осе користећи тесламетар. Магнетно поље B у близини магнета ("near field") или апроксимацији "диполне зоне" за приближно $x \leq 16$ mm је:

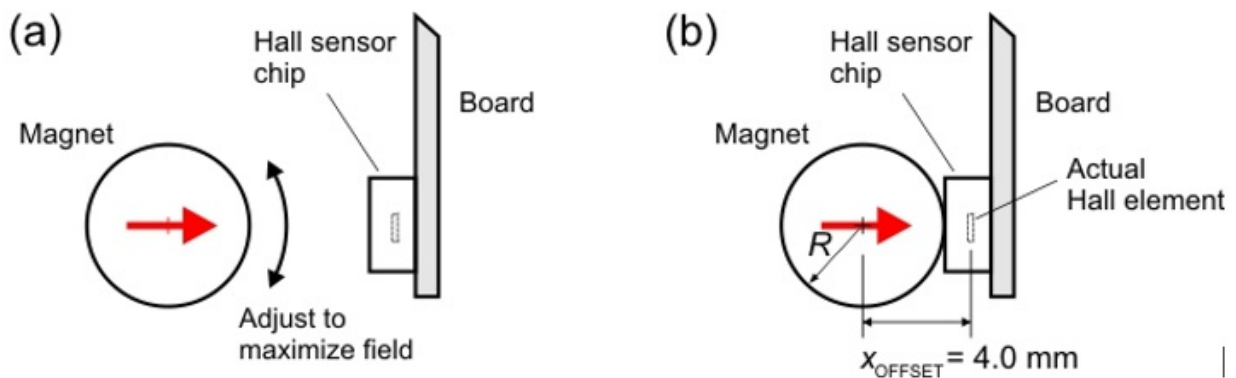
$$B_I(x) = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3 L} \quad (2)$$

x оса је дуж осе магнетизације дијаметричног магнета као што је приказано на слици 5а, а x представља растојање од центра дијаметричног магнета до сонде Холовог сензора унутар сензорског чипа. Молимо вас погледајте померај приказан на слици 5б.

Мерићете само у "near field" области:

A.1	Запишите нулти померај (B_0) Тесламетра без магнета у близини. Одузмите ову вредност од свих измерених вредности поља.	0.1 п
A.2	Измерите магнетно поље B у зависности од x у близини магнета ($7 \leq x \leq 16$ mm)! Где је x растојање мерено од центра магнета. Запишите и нацртајте податке на листу за одговоре. Погледајте "Упутства" дата испод.	1.15 п
A.3	Одредите вредност експонента p користећи експерименталне податке.	0.75 п
A.4	Одредите магнетизацију магнета M .	0.5 п

Упутства:



Слика 6. Мерење магнетног поља (a) Подешавања (b) померај

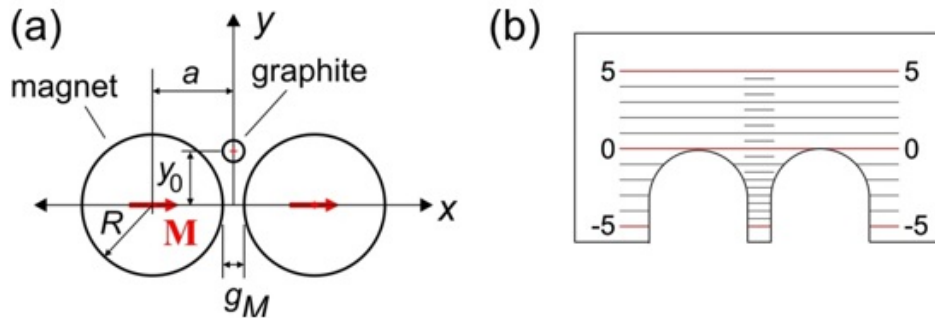
- Искључите Тесламетар када га год не користите да бисте сачували батерије!**
- За Тесламетар, чекајте око ~2 секунде за сваки податак пре него што га запишете.
- Водите рачуна да x мерите од центра магнета. Полупречник магнета је $R = 3.2$ mm.
- Користите препоручену поставку експеримента дату на слици 5с.
- Ротирањем магнета подесите га тако да магнетизација буде у смеру Холовог сензора, као на слици 6а, да би поље било максимално. Користите жути округли стикер да означите правац магнетизације на магнету.
- Када Холов сензор додирује магнет стварно растојање између центра магнета Холовог сензора је дата величином помераја: $x_{OFFSET} = 4$ mm.
- Почните мерења са Холовим сензором на $x = 5$ mm! Не користите податке када сензор додирује магнет ($x = 4$ mm) јер је сензор сатурисан или се сонда криви због контакта.

[2] Ефекат магнетне левитације и магнетна суспендибилност (χ) (1 п)

Experiment

Serbia

E2



Слика 7. (а) Ефекат магнетне левитације у PDL замци. (б) Убаците лењир за мерење висине левитације y_0 .

PDL замка може да покаже ефекат магнетне левитације. Графит левитира у центру замке на висини y_0 као што је приказано на слици 7а. Графит од магнета одбија сила $F_M(y_0)$ која зависи од магнетне сусцептибилности χ и позиције улошка y_0 . Магнетна сусцептибилност показује колико је материјал намагнетисан у датом пољу. Појављује се у релацији: $\mu = (1 + \chi)\mu_0$ где је μ магнетна пермеабилност материјала. Одбојна магнетна сила која делује на графитни уложак у PDL замци је дата са:

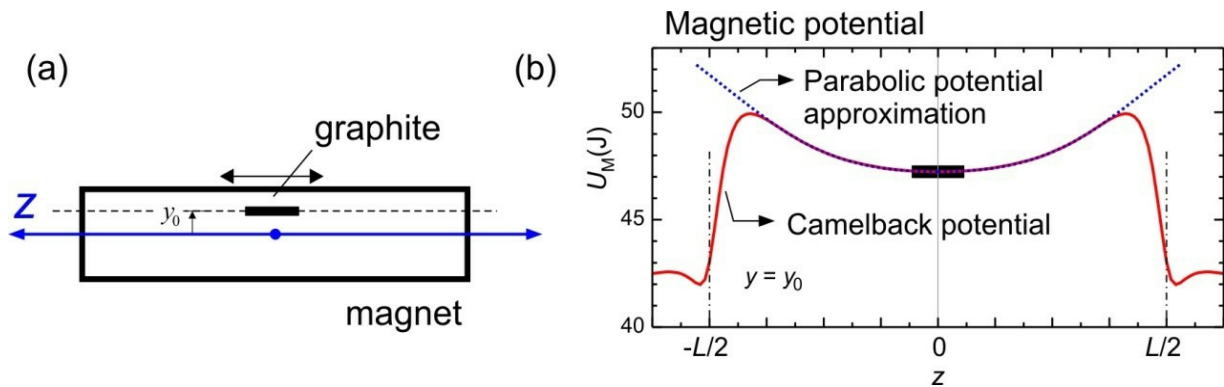
$$F_M(y_0) = -\frac{\mu_0 M^2 \chi V_r}{2} \frac{R^4}{a^5} f\left(\frac{y_0}{a}\right) \quad (3)$$

Водите рачуна да када је $F_M(y_0)$ позитивно сила је усмерена навише и у формули је знак "-". V_r је запремина графитног улошка. M је запреминска магнетизација магнета (добијена у питању 1), a је позиција центра магнета дата са: $a = R + g_M/2$ (види слику 7а) где је g_M растојање између магнета: $g_M = 1.5 \text{ mm}$. $f(u)$ је бездимензионална функција за магнетну одбојну силу у процепу између магнета дата као:

$$f(u) = \frac{4u(3-u^2)(1-u^2)}{(1+u^2)^5} \quad (4)$$

A.5	Пажљиво убаците графитни уложак HB/0.5 и дужине = 8 mm у замку. Измерите висину левитације y_0 улошка (слика 7а)! Помоћ: Користите лењир који се убацује између магнета као на слици 7b. Потисните лењир до магнета како бисте могли да очитате позицију магнетног улошка.	0.1 п
A.6	Користећи резултате из дела А.5 одредите магнетну сусцептибилност χ графитног улошка.	0.8 п
A.7	Који тип магнетног материјала је графит? Изаберите : (i) Феромагнет; (ii) парамегнет; или (iii) дијамагнет?	0.1 п

[3] Осцилације у двогрбном потенцијалу и магнетна сусцептибилност (χ) (1 п)



Слика 8. (а) Осцилације графита на висини y_0 . (б) Двогрби потенцијал PDL замке и његова параболична апроксимација.

Одредићемо χ независно користећи осцилације у двогрбном магнетном потенцијалу PDL замке као што је приказано на слици 8. За мале амплитуде ($z < 4$ mm) магнетни потенцијал може да се апроксимира параболом (тачкаста крива на слици 8b):

$$U_M = \frac{1}{2}k_z z^2 \quad (5)$$

где је k_z "константа еластичности" потенцијала а z померај центра масе уложка. Константа еластичности k_z зависи од магнетизације магнета M (из питања 1), а χ је:

$$k_z = -C_1 \mu_0 \chi M^2 V_r \quad (6)$$

где је μ_0 магнетна пермеабилност, V_r је запремина графитног уложка, $C_1 = 198.6 / \text{m}^2$ је константа за овакву поставку магнетне замке.

Поставите магнетни уложак у центар магнетне замке. Подесите ниво платформе користећи шrafoве тако да уложак стоји у центру замке. Померите уложак чачкалицом да бисте изазвали осцилације дуж двогрбог потенцијала.

A.8	Изведите осцилације са "НВ/0.5" графитом и $l = 8$ mm. Ограничите се на мале амплитуде $A < 4$ mm. Одредите период осциловања. (Осцилације ће слабити током времена, занемарите ефекат пригушења).	0.2 п
A.9	Израчунајте магнетну сусцептибилност графита (χ) користећи ове осцилације.	0.8 п

[4] Фактор добротe осцилатора (Q) и одређивање вискозности ваздуха (3 п)

Примећено је да су осцилације графитног улошка пригушене због отпора ваздуха и потребно је установити како трење зависи од величине графитног улошка (пречник и дужина) и одредити вискозност ваздуха μ_A . Кретање улошка може да се моделира подкритичним пригушеним осцилацијама: $z(t) = Ae^{-t/\tau} \sin(\omega t)$ као што је приказано на слици 3а где је A почетна амплитуда и $\omega = 2\pi f$ угаона брзина, док је t време. Амплитуда опада са временом као $\exp(-t/\tau)$ где је τ временска константа пригушења. Овим је одређен и фактор добротe осцилатора: $Q = \omega\tau/2$. Ако је $Q > 0.5$ осцилације су подкритично пригушене, за $Q = 0.5$ критично пригушене и за $Q < 0.5$ надкритично пригушене. *Фактор добротe је важан за дизајнирање PDL замки као сеизмометарских и тилтметарских сензора.*

Временска константа пригушења τ може да се израчуна тако што се цилиндрични уложак апроксимира дугачким елипсоидом и израчуна Стоксова сила отпора:

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{\rho r^2}{\mu_A} \ln \left(0.607 \times \frac{l}{r} \right) \quad (7)$$

где су ρ , r и l масена густина, полупречник и дужина улошка а μ_A је вискозност ваздуха. Желимо да проценимо вискозност ваздуха на основу овог модела.

A.10	Потребно је одредити временску константу пригушења τ . Скицирајте како сте мерили τ на једноставан начин.	0.5 п
A.11	Изведите експеримент са пригушеним осцилацијама за групу уложака са различитим пречницима и фиксираним дужином 8 mm. Одредити временску константу пригушења τ за сваки уложак.	1.5 п
A.12	Одредите вискозност ваздуха μ_A .	1.0 п

Део Б. Примена за сензоре

[5] Сеизмометар начињен од PDL замке (0.5 п)

Замислите да желите да дизајнирате сеизмометар користећи ову PDL магнетну замку. За примену у сеизмометру потребна нам је веома велика осетљивост или веома мало убрзање "подрхтавања пода", т.ј. најмање могуће убрзање које може детектовати. Ово убрзање подрхтавања пода је дато са (у јединицама $m/(s^2 \text{ Hz}^{0.5})$):

$$a_n = \sqrt{\frac{4k_B T \omega}{Q m_R}} \quad (8)$$

где је k_B Болцманова константа, T температура (погледајте одељак **КОНСТАНТЕ И ПОДАЦИ**), а m_R је маса графитног улошка, све дато у SI јединицама. У оквиру Питања 4 мерили сте τ за неколико различитих пречника графитних уложака. Изаберите онај за који мислите да ће најбоље послужити за сеизмометар.

B.1	Који пречник графитног улошка сте изабрали?	0.2 п
B.2	Израчунајте убрзање подрхтавања пода сеизмометра (a_n) за случај графитног улошка који сте изабрали.	0.3 п

[6] Тилтметар начињен од PDL замке (2 п)

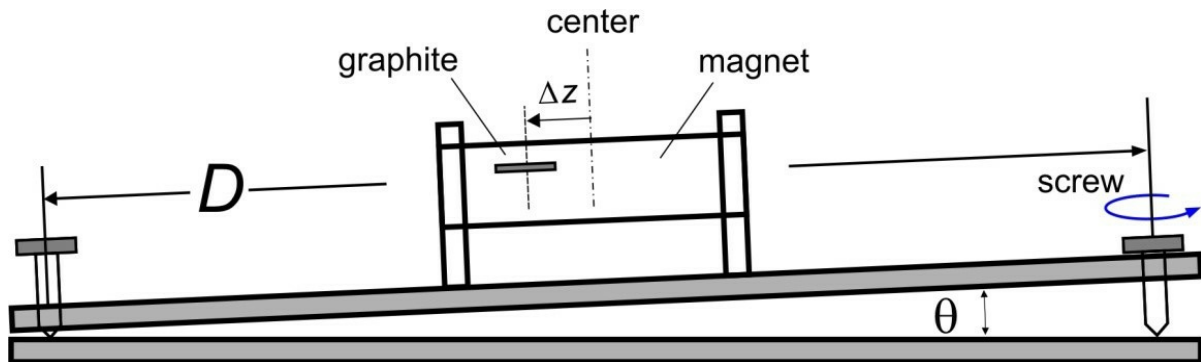


Figure 9. Систем PDL замке као тилтметар

Сада ћемо анализирати PDL замку као веома осетљиви тилтметар који служи да прати активност вулкана. Промене у нагибу тла симулирамо тако што одврћемо шраф и желимо да одредимо величину навоја (корак) шрафа S , где S представља промену висине по једном обрту шрафа. Показаћемо да мерењем помераја графитног улошка унутар замке можемо прецизно измерити нагиб (tilt).

У овом експерименту узмите графитни уложак HB/0.5 дужине $l = 8$ mm. Поставите га у централни положај. Претпоставите да се samelback потенцијал може апроксимирати хармонијским потенцијалом као у питању 3.

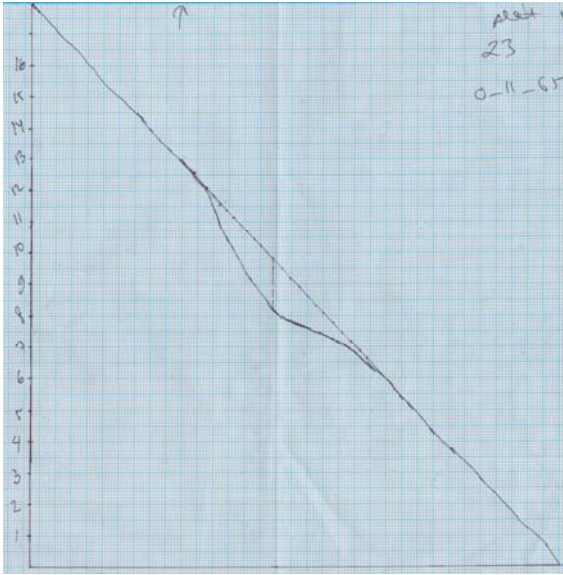
B.3	Изведите теоретски везу између помераја Δz графитног улошка, величине навоја шрафа S и броја обрта шрафа (N).	0.5 п
B.4	Полако окрећући шраф одредите померај графитног улошка Δz у зависности од броја обртаја шрафа (N). Одредите величину навоја шрафа S .	1.25 п
B.5	Прилоком промене нагиба, желимо се да графитни уложак врати у равнотежу што је пре могуће (уместо да осцилује веома дуго) како би очитавање било што једноставније. Колика је идеална вредност Q фактора за тилтметар?	0.25 п

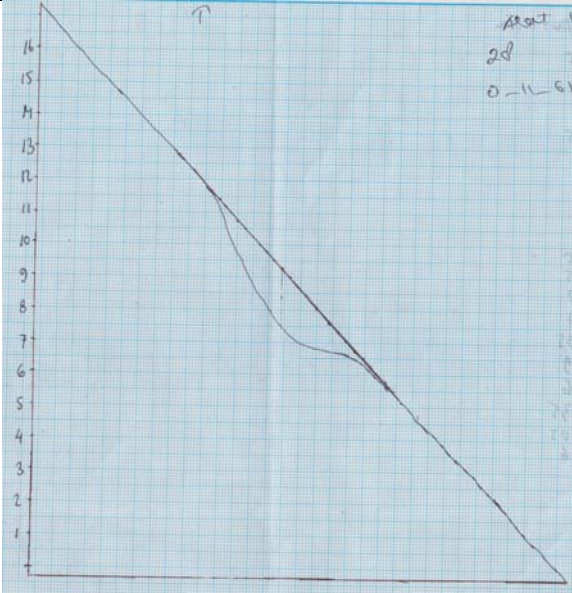
Determination of Refractive Index Gradient and Diffusion Coefficient of Salt Solution from Laser Deflection Measurement

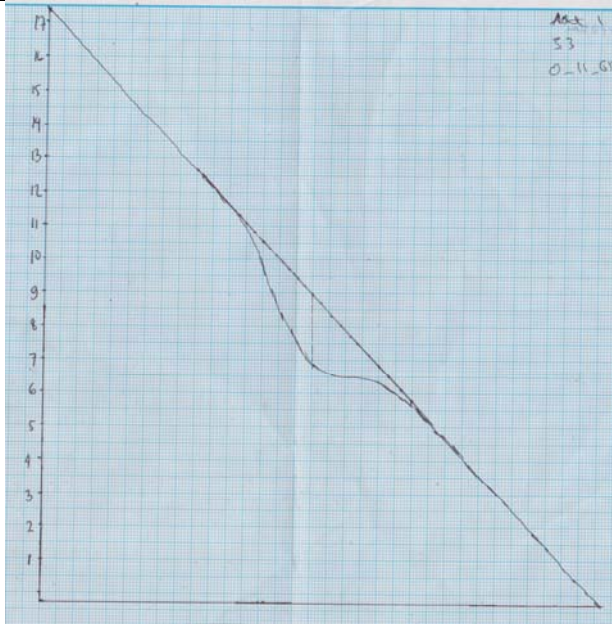
(10 points)

A. Measurement of Refractive Index Gradient of Salt Water Solution

(4.5 points)

Question	Answer	Marks
<p>A1. (1.2 pts)</p>	 <p>No dip</p> <p>No reference line</p> <p>Deflectogram (DL) not at the centre (+- 5mm) but the depth of dip still in 1.5 - 1.6 cm range</p> <p>DL at the centre, the depth of dip <1.5 cm or >1.6 cm</p> <p>DL not at the centre, the depth of dip <1.5 cm or >1.6 cm</p>	<p>Deflectogram of $C_0 = 23 \text{ g/150 mL}$</p> <p>Centred</p> <p>Depth of dip: 1.5 - 1.6 cm (0.4 pts)</p> <p>-0.4</p> <p>-0.05</p> <p>-0.05</p> <p>-0.05</p> <p>-0.1</p>
		Deflectogram

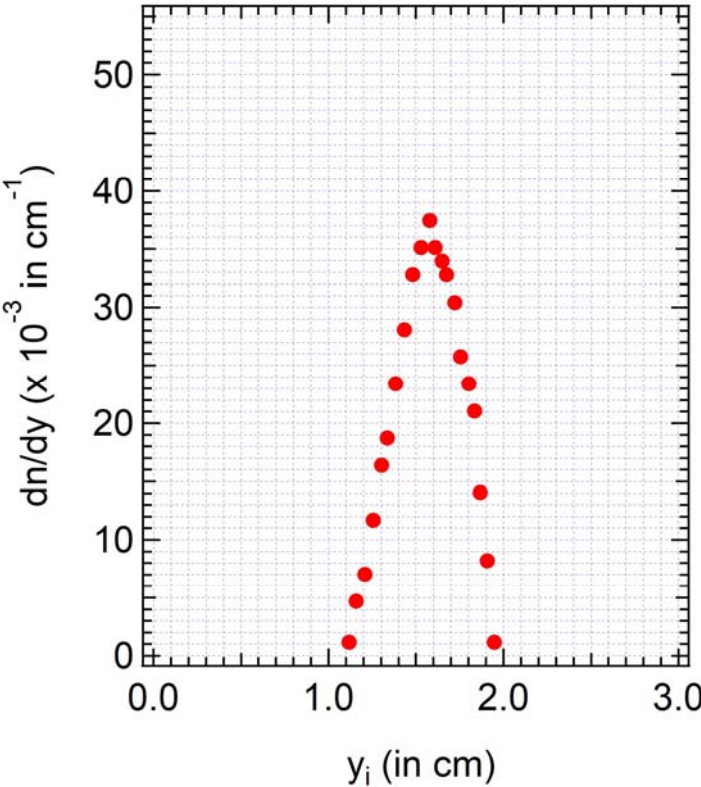
<p>A1.</p>	 <p>No dip</p> <p>No reference line</p> <p>Deflectogram (DL) not at the centre (+- 5mm) but the depth of dip still in 1.7 cm - 1.9 cm range</p> <p>DL at the centre, the depth of dip <1.7 cm or >1.9 cm</p> <p>DL not at the centre, the depth of dip <1.7 cm or >1.9 cm</p>	<p>of</p> <p>$C_0 = 28 \text{ gr}/150 \text{ mL}$</p> <p>Centred</p> <p>Deep of dip: 1.7 - 1.9 cm (0.4 pts)</p> <p>-0.4</p> <p>-0.05</p> <p>-0.05</p> <p>-0.05</p> <p>-0.1</p>
------------	--	--

<p>A1.</p>	 <p>No dip</p> <p>No reference line</p> <p>Deflectogram (DL) not at the centre (+5mm) but the depth of dip still in 1.9 - 2.3 cm range</p> <p>DL at the centre, the depth of dip <1.9 cm or >2.3 cm</p> <p>DL not at the centre, the depth of dip <1.9 cm or >2.3 cm</p>	<p>Deflectogram of</p> <p>$C_0 = 33 \text{ g}/150 \text{ mL}$</p> <p>Deep of dip: 1.9 - 2.3 cm</p> <p>(0.4 pts)</p> <p>-0.4 pts</p> <p>-0.05 pts</p> <p>- 0.05 pts</p> <p>- 0.05 pts</p> <p>-0.1</p>																																																																																																
<p>A2. (1.5 pts)</p>	<table border="1" data-bbox="400 1480 1177 2033"> <thead> <tr> <th>i</th> <th>$\delta_i \text{ (cm)}$</th> <th>$\xi_i \text{ (cm)}$</th> <th>$Z_0 \text{ (cm)}$</th> <th>$d \text{ (cm)}$</th> <th>$Z \text{ (cm)}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0.05</td> <td>11.55</td> <td>10.4 ± 0.1</td> <td>0.8 ± 0.1</td> <td>53.4 ± 0.1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0.35</td> <td>11.3</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.6</td> <td>11.05</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0.9</td> <td>10.85</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>1</td> <td>10.65</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>1.1</td> <td>10.35</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>1.3</td> <td>10.15</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>1.4</td> <td>9.85</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>1.45</td> <td>9.7</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>1.5</td> <td>9.45</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>1.6</td> <td>9.25</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>1.5</td> <td>8.95</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>1.4</td> <td>8.65</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>1.2</td> <td>8.35</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>1</td> <td>8.05</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	i	$\delta_i \text{ (cm)}$	$\xi_i \text{ (cm)}$	$Z_0 \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$Z \text{ (cm)}$	1	0.05	11.55	10.4 ± 0.1	0.8 ± 0.1	53.4 ± 0.1	2	0.35	11.3				3	0.6	11.05				4	0.9	10.85				5	1	10.65				6	1.1	10.35				7	1.3	10.15				8	1.4	9.85				9	1.45	9.7				10	1.5	9.45				11	1.6	9.25				12	1.5	8.95				13	1.4	8.65				14	1.2	8.35				15	1	8.05				<p>Table 1 of</p> <p>$C_0 = 23 \text{ g}/150 \text{ mL}$</p> <p>Optimum Z and Z_0</p> <p># data = 20</p> <p>(0.5 pts)</p>
i	$\delta_i \text{ (cm)}$	$\xi_i \text{ (cm)}$	$Z_0 \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$Z \text{ (cm)}$																																																																																													
1	0.05	11.55	10.4 ± 0.1	0.8 ± 0.1	53.4 ± 0.1																																																																																													
2	0.35	11.3																																																																																																
3	0.6	11.05																																																																																																
4	0.9	10.85																																																																																																
5	1	10.65																																																																																																
6	1.1	10.35																																																																																																
7	1.3	10.15																																																																																																
8	1.4	9.85																																																																																																
9	1.45	9.7																																																																																																
10	1.5	9.45																																																																																																
11	1.6	9.25																																																																																																
12	1.5	8.95																																																																																																
13	1.4	8.65																																																																																																
14	1.2	8.35																																																																																																
15	1	8.05																																																																																																

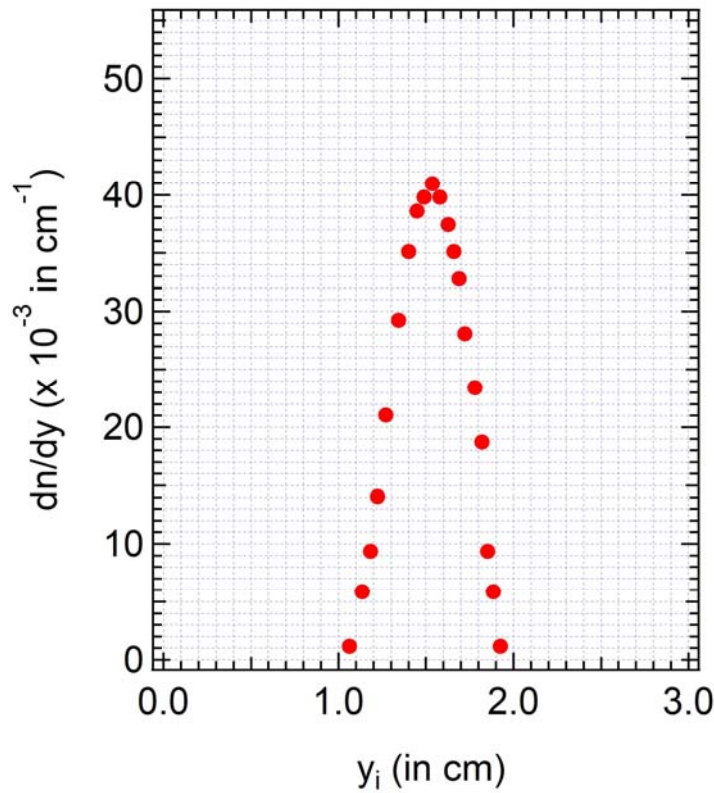
	<table border="1"> <tbody> <tr><td>16</td><td>0.8</td><td>7.75</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>17</td><td>0.7</td><td>7.55</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>18</td><td>0.5</td><td>7.25</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>19</td><td>0.3</td><td>6.95</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td>0.2</td><td>6.65</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>21</td><td>0.05</td><td>6.4</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>Correct data point must be extracted from deflectogram</p> <p># correct data points ≥ 20, but not all observable (Z, Z_0, d) are written -0.05 pts</p> <p>Incorrect d -0.05 pts</p> <p>$15 \leq \# \text{ correct data points} < 20$, -0.15 pts</p> <p>$10 < \# \text{ correct data points} < 15$ -0.3 pts</p> <p>#correct data points < 10 -0.45 pts</p>	16	0.8	7.75				17	0.7	7.55				18	0.5	7.25				19	0.3	6.95				20	0.2	6.65				21	0.05	6.4																																																																																														
16	0.8	7.75																																																																																																																														
17	0.7	7.55																																																																																																																														
18	0.5	7.25																																																																																																																														
19	0.3	6.95																																																																																																																														
20	0.2	6.65																																																																																																																														
21	0.05	6.4																																																																																																																														
A2.	<table border="1"> <thead> <tr> <th>i</th> <th>δ_i (cm)</th> <th>ξ_i (cm)</th> <th>Z_0 (cm)</th> <th>d(cm)</th> <th>Z (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.05</td><td>11.65</td><td>10.4 ± 0.1</td><td>0.8 ± 0.1</td><td>53.4 ± 0.1</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.25</td><td>11.4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>0.4</td><td>11.2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>0.8</td><td>11</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>10.75</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>1.2</td><td>10.4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>1.4</td><td>10.2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td>1.5</td><td>10</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>1.6</td><td>9.8</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>1.7</td><td>9.5</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td>1.75</td><td>9.25</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>12</td><td>1.7</td><td>8.95</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td>1.65</td><td>8.7</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>14</td><td>1.5</td><td>8.4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td>1.25</td><td>8.05</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td>0.9</td><td>7.6</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>17</td><td>0.6</td><td>7.3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>18</td><td>0.4</td><td>7.05</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>19</td><td>0.25</td><td>6.75</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td>0.05</td><td>6.3</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	i	δ_i (cm)	ξ_i (cm)	Z_0 (cm)	d (cm)	Z (cm)	1	0.05	11.65	10.4 ± 0.1	0.8 ± 0.1	53.4 ± 0.1	2	0.25	11.4				3	0.4	11.2				4	0.8	11				5	1	10.75				6	1.2	10.4				7	1.4	10.2				8	1.5	10				9	1.6	9.8				10	1.7	9.5				11	1.75	9.25				12	1.7	8.95				13	1.65	8.7				14	1.5	8.4				15	1.25	8.05				16	0.9	7.6				17	0.6	7.3				18	0.4	7.05				19	0.25	6.75				20	0.05	6.3				<p>Table 1 of $C_0 = 28 \text{ g}/150 \text{ mL}$</p> <p>Optimum Z and Z_0</p> <p># data = 20</p> <p>(0.5 pts)</p>
i	δ_i (cm)	ξ_i (cm)	Z_0 (cm)	d (cm)	Z (cm)																																																																																																																											
1	0.05	11.65	10.4 ± 0.1	0.8 ± 0.1	53.4 ± 0.1																																																																																																																											
2	0.25	11.4																																																																																																																														
3	0.4	11.2																																																																																																																														
4	0.8	11																																																																																																																														
5	1	10.75																																																																																																																														
6	1.2	10.4																																																																																																																														
7	1.4	10.2																																																																																																																														
8	1.5	10																																																																																																																														
9	1.6	9.8																																																																																																																														
10	1.7	9.5																																																																																																																														
11	1.75	9.25																																																																																																																														
12	1.7	8.95																																																																																																																														
13	1.65	8.7																																																																																																																														
14	1.5	8.4																																																																																																																														
15	1.25	8.05																																																																																																																														
16	0.9	7.6																																																																																																																														
17	0.6	7.3																																																																																																																														
18	0.4	7.05																																																																																																																														
19	0.25	6.75																																																																																																																														
20	0.05	6.3																																																																																																																														

	<p>Correct data point must be extracted from deflectogram</p> <p># correct data points ≥ 20, but not all observable (Z, Z_0, d) are written</p> <p>Incorrect d</p> <p>$15 \leq \# \text{ correct data points} < 20$,</p> <p>$10 < \# \text{ correct data points} < 15$</p> <p>$\# \text{ correct data points} < 10$</p>	<p>-0.05 pts</p> <p>-0.05 pts</p> <p>-0.15 pts</p> <p>-0.3 pts</p> <p>-0.45 pts</p>																																																																																																																																				
A2.	<table border="1"> <thead> <tr> <th>i</th> <th>δ_i (cm)</th> <th>ξ_i (cm)</th> <th>Z_0 (cm)</th> <th>d(cm)</th> <th>Z (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.05</td><td>11.6</td><td>10.4 ± 0.1</td><td>0.8 ± 0.1</td><td>53.4 ± 0.1</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.15</td><td>11.4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>0.35</td><td>11.1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>0.65</td><td>10.85</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>1.1</td><td>10.6</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>1.3</td><td>10.4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>1.5</td><td>10.2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td>1.7</td><td>10</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>1.85</td><td>9.7</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>2</td><td>9.5</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td>2.1</td><td>9.25</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>12</td><td>2</td><td>9</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td>1.8</td><td>8.6</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>14</td><td>1.5</td><td>8.3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td>1.25</td><td>8.05</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td>1</td><td>7.8</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>17</td><td>0.75</td><td>7.45</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>18</td><td>0.55</td><td>7.15</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>19</td><td>0.4</td><td>6.8</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td>0.2</td><td>6.4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>21</td><td>0.05</td><td>6.1</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>Correct data point must be extracted from deflectogram</p> <p># correct data points ≥ 20, but not all observable (Z, Z_0, d) are written</p> <p>Incorrect d</p> <p>$15 \leq \# \text{ correct data points} < 20$,</p>	i	δ_i (cm)	ξ_i (cm)	Z_0 (cm)	d (cm)	Z (cm)	1	0.05	11.6	10.4 ± 0.1	0.8 ± 0.1	53.4 ± 0.1	2	0.15	11.4				3	0.35	11.1				4	0.65	10.85				5	1.1	10.6				6	1.3	10.4				7	1.5	10.2				8	1.7	10				9	1.85	9.7				10	2	9.5				11	2.1	9.25				12	2	9				13	1.8	8.6				14	1.5	8.3				15	1.25	8.05				16	1	7.8				17	0.75	7.45				18	0.55	7.15				19	0.4	6.8				20	0.2	6.4				21	0.05	6.1				<p>Table 1 of</p> <p>$C_0 = 33 \text{ g}/150 \text{ mL}$</p> <p># data point ≥ 20</p> <p>(0.5 pts)</p> <p>-0.05 pts</p> <p>-0.05 pts</p> <p>-0.15 pts</p>
i	δ_i (cm)	ξ_i (cm)	Z_0 (cm)	d (cm)	Z (cm)																																																																																																																																	
1	0.05	11.6	10.4 ± 0.1	0.8 ± 0.1	53.4 ± 0.1																																																																																																																																	
2	0.15	11.4																																																																																																																																				
3	0.35	11.1																																																																																																																																				
4	0.65	10.85																																																																																																																																				
5	1.1	10.6																																																																																																																																				
6	1.3	10.4																																																																																																																																				
7	1.5	10.2																																																																																																																																				
8	1.7	10																																																																																																																																				
9	1.85	9.7																																																																																																																																				
10	2	9.5																																																																																																																																				
11	2.1	9.25																																																																																																																																				
12	2	9																																																																																																																																				
13	1.8	8.6																																																																																																																																				
14	1.5	8.3																																																																																																																																				
15	1.25	8.05																																																																																																																																				
16	1	7.8																																																																																																																																				
17	0.75	7.45																																																																																																																																				
18	0.55	7.15																																																																																																																																				
19	0.4	6.8																																																																																																																																				
20	0.2	6.4																																																																																																																																				
21	0.05	6.1																																																																																																																																				

	<p>10<# correct data points<15</p> <p>#correct data points<10</p>	<p>-0.3 pts</p> <p>-0.45 pts</p>																																																																		
<p>A3. (1.5 pts)</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>i</th> <th>Y_i (cm)</th> <th>dn/dY</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1.85944</td><td>0.00117</td></tr> <tr><td>2</td><td>1.81919</td><td>0.00819</td></tr> <tr><td>3</td><td>1.77894</td><td>0.01404</td></tr> <tr><td>4</td><td>1.74674</td><td>0.02106</td></tr> <tr><td>5</td><td>1.71455</td><td>0.02340</td></tr> <tr><td>6</td><td>1.66625</td><td>0.02574</td></tr> <tr><td>7</td><td>1.63405</td><td>0.03043</td></tr> <tr><td>8</td><td>1.58575</td><td>0.03277</td></tr> <tr><td>9</td><td>1.56161</td><td>0.03394</td></tr> <tr><td>10</td><td>1.52136</td><td>0.03511</td></tr> <tr><td>11</td><td>1.48916</td><td>0.03745</td></tr> <tr><td>12</td><td>1.44086</td><td>0.03511</td></tr> <tr><td>13</td><td>1.39257</td><td>0.03277</td></tr> <tr><td>14</td><td>1.34427</td><td>0.02809</td></tr> <tr><td>15</td><td>1.29597</td><td>0.02340</td></tr> <tr><td>16</td><td>1.24767</td><td>0.01872</td></tr> <tr><td>17</td><td>1.21548</td><td>0.01638</td></tr> <tr><td>18</td><td>1.16718</td><td>0.01170</td></tr> <tr><td>19</td><td>1.11888</td><td>0.00702</td></tr> <tr><td>20</td><td>1.07058</td><td>0.00468</td></tr> <tr><td>21</td><td>1.03034</td><td>0.00117</td></tr> </tbody> </table> <p>Jury must check the data in table</p> <p># wrong data point < 3</p> <p>3<# wrong data point < 6</p> <p># wrong data point > 6</p>	i	Y _i (cm)	dn/dY	1	1.85944	0.00117	2	1.81919	0.00819	3	1.77894	0.01404	4	1.74674	0.02106	5	1.71455	0.02340	6	1.66625	0.02574	7	1.63405	0.03043	8	1.58575	0.03277	9	1.56161	0.03394	10	1.52136	0.03511	11	1.48916	0.03745	12	1.44086	0.03511	13	1.39257	0.03277	14	1.34427	0.02809	15	1.29597	0.02340	16	1.24767	0.01872	17	1.21548	0.01638	18	1.16718	0.01170	19	1.11888	0.00702	20	1.07058	0.00468	21	1.03034	0.00117	<p>Table 2 of</p> <p>C₀ = 23 g/150 mL.</p> <p># data = 20</p> <p>(0.25 pts)</p> <p>- 0</p> <p>- 0.05 pts</p> <p>- 0.25pts</p>
i	Y _i (cm)	dn/dY																																																																		
1	1.85944	0.00117																																																																		
2	1.81919	0.00819																																																																		
3	1.77894	0.01404																																																																		
4	1.74674	0.02106																																																																		
5	1.71455	0.02340																																																																		
6	1.66625	0.02574																																																																		
7	1.63405	0.03043																																																																		
8	1.58575	0.03277																																																																		
9	1.56161	0.03394																																																																		
10	1.52136	0.03511																																																																		
11	1.48916	0.03745																																																																		
12	1.44086	0.03511																																																																		
13	1.39257	0.03277																																																																		
14	1.34427	0.02809																																																																		
15	1.29597	0.02340																																																																		
16	1.24767	0.01872																																																																		
17	1.21548	0.01638																																																																		
18	1.16718	0.01170																																																																		
19	1.11888	0.00702																																																																		
20	1.07058	0.00468																																																																		
21	1.03034	0.00117																																																																		

<p>A3.</p>	 <p>No x-axis label -0.01 pts</p> <p>No x-axis unit -0.01 pts</p> <p>Without x-axis unit -0.01 pts</p> <p>No y-axis label -0.01 pts</p> <p>No y-axis unit -0.01 pts</p> <p>Without y-axis unit -0.01 pts</p> <p>Ordinate axis represented in 2 digid behind point -0.05 pts</p> <p>Ordinate axis represented in 3 digid behind point -0 pts</p> <p>Random shape -0.25 pts</p>	<p>Plot dn/dY vs Y</p> <p>$C_0 = 23 \text{ g}/150 \text{ mL}$.</p> <p>“Gaussian-Like” shape</p> <p>(0.25 pts)</p>															
<p>A3.</p>	<table border="1" data-bbox="399 1836 790 2016"> <thead> <tr> <th>i</th> <th>Y_i (cm)</th> <th>dn/dY</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1.87554</td> <td>0.00117</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1.83529</td> <td>0.00585</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1.80309</td> <td>0.00936</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1.77089</td> <td>0.01872</td> </tr> </tbody> </table>	i	Y_i (cm)	dn/dY	1	1.87554	0.00117	2	1.83529	0.00585	3	1.80309	0.00936	4	1.77089	0.01872	<p>Table 2 of</p> <p>$C_0 = 28 \text{ g}/150 \text{ mL}$.</p> <p># data = 20</p>
i	Y_i (cm)	dn/dY															
1	1.87554	0.00117															
2	1.83529	0.00585															
3	1.80309	0.00936															
4	1.77089	0.01872															

	<table border="1"> <tbody> <tr><td>5</td><td>1.73065</td><td>0.02340</td></tr> <tr><td>6</td><td>1.67430</td><td>0.02809</td></tr> <tr><td>7</td><td>1.64210</td><td>0.03277</td></tr> <tr><td>8</td><td>1.60990</td><td>0.03511</td></tr> <tr><td>9</td><td>1.57770</td><td>0.03745</td></tr> <tr><td>10</td><td>1.52941</td><td>0.03979</td></tr> <tr><td>11</td><td>1.48916</td><td>0.04096</td></tr> <tr><td>12</td><td>1.44086</td><td>0.03979</td></tr> <tr><td>13</td><td>1.40061</td><td>0.03862</td></tr> <tr><td>14</td><td>1.35232</td><td>0.03511</td></tr> <tr><td>15</td><td>1.29597</td><td>0.02926</td></tr> <tr><td>16</td><td>1.22352</td><td>0.02106</td></tr> <tr><td>17</td><td>1.17523</td><td>0.01404</td></tr> <tr><td>18</td><td>1.13498</td><td>0.00936</td></tr> <tr><td>19</td><td>1.08668</td><td>0.00585</td></tr> <tr><td>20</td><td>1.01424</td><td>0.00117</td></tr> </tbody> </table> <p>Jury must check the data in table</p> <p># wrong data point < 3</p> <p>3 < # wrong data point < 6</p> <p># wrong data point > 6</p>	5	1.73065	0.02340	6	1.67430	0.02809	7	1.64210	0.03277	8	1.60990	0.03511	9	1.57770	0.03745	10	1.52941	0.03979	11	1.48916	0.04096	12	1.44086	0.03979	13	1.40061	0.03862	14	1.35232	0.03511	15	1.29597	0.02926	16	1.22352	0.02106	17	1.17523	0.01404	18	1.13498	0.00936	19	1.08668	0.00585	20	1.01424	0.00117	<p>(0.25 pts)</p> <p>- 0</p> <p>- 0.05 pts</p> <p>- 0.25pts</p>
5	1.73065	0.02340																																																
6	1.67430	0.02809																																																
7	1.64210	0.03277																																																
8	1.60990	0.03511																																																
9	1.57770	0.03745																																																
10	1.52941	0.03979																																																
11	1.48916	0.04096																																																
12	1.44086	0.03979																																																
13	1.40061	0.03862																																																
14	1.35232	0.03511																																																
15	1.29597	0.02926																																																
16	1.22352	0.02106																																																
17	1.17523	0.01404																																																
18	1.13498	0.00936																																																
19	1.08668	0.00585																																																
20	1.01424	0.00117																																																
A3.		<p>Plot dn/dY vs Y</p> <p>$C_0 = 28 \text{ g}/150 \text{ mL}$.</p> <p>“Gaussian-Like” shape</p> <p>(0.25 pts)</p>																																																



without x-axis label

without x-axis unit

wrong x-axis unit

without y-axis label

without y-axis unit

wrong y-axis unit

Ordinate axis represented in 2 digid behind point

Ordinate axis represented in 3 digid behind point

Random shape of the curve

-0.01 pts

-0.01 pts

-0.01 pts

-0.01 pts

-0.01 pts

-0.01 pts

-0.05 pts

-0 pts

-0.25 pts

A3.

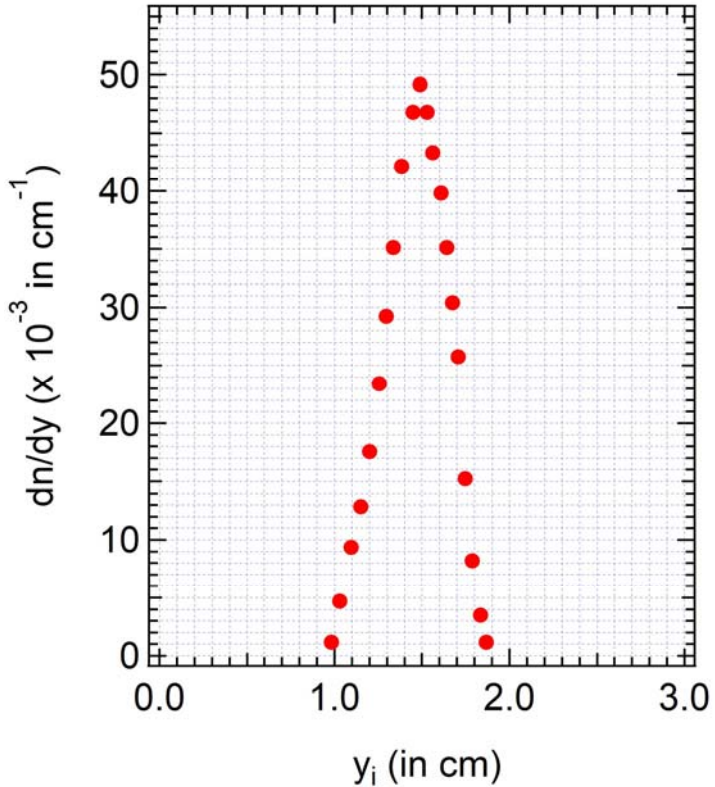
i	Y _i (cm)	dn/dY
1	1.86749	0.00117
2	1.83529	0.00351
3	1.78699	0.00819
4	1.74674	0.01521
5	1.70650	0.02574

Table 2 of

C₀ = 33 g/150 mL.

data = 20

	<table border="1"> <tbody> <tr><td>6</td><td>1.67430</td><td>0.03043</td></tr> <tr><td>7</td><td>1.64210</td><td>0.03511</td></tr> <tr><td>8</td><td>1.60990</td><td>0.03979</td></tr> <tr><td>9</td><td>1.56161</td><td>0.04330</td></tr> <tr><td>10</td><td>1.52941</td><td>0.04681</td></tr> <tr><td>11</td><td>1.48916</td><td>0.04915</td></tr> <tr><td>12</td><td>1.44891</td><td>0.04681</td></tr> <tr><td>13</td><td>1.38452</td><td>0.04213</td></tr> <tr><td>14</td><td>1.33622</td><td>0.03511</td></tr> <tr><td>15</td><td>1.29597</td><td>0.02926</td></tr> <tr><td>16</td><td>1.25572</td><td>0.02340</td></tr> <tr><td>17</td><td>1.19938</td><td>0.01755</td></tr> <tr><td>18</td><td>1.15108</td><td>0.01287</td></tr> <tr><td>19</td><td>1.09473</td><td>0.00936</td></tr> <tr><td>20</td><td>1.03034</td><td>0.00468</td></tr> <tr><td>21</td><td>0.98204</td><td>0.00117</td></tr> </tbody> </table> <p>Jury must check the data in table</p> <p># wrong data point < 3</p> <p>3 < # wrong data point < 6</p> <p># wrong data point > 6</p>	6	1.67430	0.03043	7	1.64210	0.03511	8	1.60990	0.03979	9	1.56161	0.04330	10	1.52941	0.04681	11	1.48916	0.04915	12	1.44891	0.04681	13	1.38452	0.04213	14	1.33622	0.03511	15	1.29597	0.02926	16	1.25572	0.02340	17	1.19938	0.01755	18	1.15108	0.01287	19	1.09473	0.00936	20	1.03034	0.00468	21	0.98204	0.00117	(0.25 pts)
6	1.67430	0.03043																																																
7	1.64210	0.03511																																																
8	1.60990	0.03979																																																
9	1.56161	0.04330																																																
10	1.52941	0.04681																																																
11	1.48916	0.04915																																																
12	1.44891	0.04681																																																
13	1.38452	0.04213																																																
14	1.33622	0.03511																																																
15	1.29597	0.02926																																																
16	1.25572	0.02340																																																
17	1.19938	0.01755																																																
18	1.15108	0.01287																																																
19	1.09473	0.00936																																																
20	1.03034	0.00468																																																
21	0.98204	0.00117																																																
A3.		<p>Plot dn/dY vs Y</p> <p>$C_0 = 33 \text{ g}/150 \text{ mL}$</p> <p>(0.25 pts)</p>																																																

	 <p>without x-axis label -0.01 pts</p> <p>without x-axis unit -0.01 pts</p> <p>wrong x-axis unit -0.01 pts</p> <p>without y-axis label -0.01 pts</p> <p>without y-axis unit -0.01 pts</p> <p>wrong y-axis unit -0.01 pts</p> <p>without y-axis label -0.05 pts</p> <p>wrong y-axis unit -0 pts</p> <p>Ordinate axis represented in 2 digid behind point -0.25 pts</p> <p>Ordinate axis represented in 3 digid behind point</p> <p>Random shape of the curve</p>	
<p>A4. (0.3 pts)</p>	<p>h for 23 g/ 150 mL = (1.5 ± 0.1) cm</p>	<p>0.1 pts</p>

	h for 28 g/ 150 mL = (1.5 ± 0.1) cm	0.1 pts
	h for 33 g/ 150 mL = (1.5 ± 0.1) cm	0.1 pts
	If h is correctly determined from graph A3 for each concentration	- 0
	If h is not correctly determined from graph A3 for each concentration	-0.1

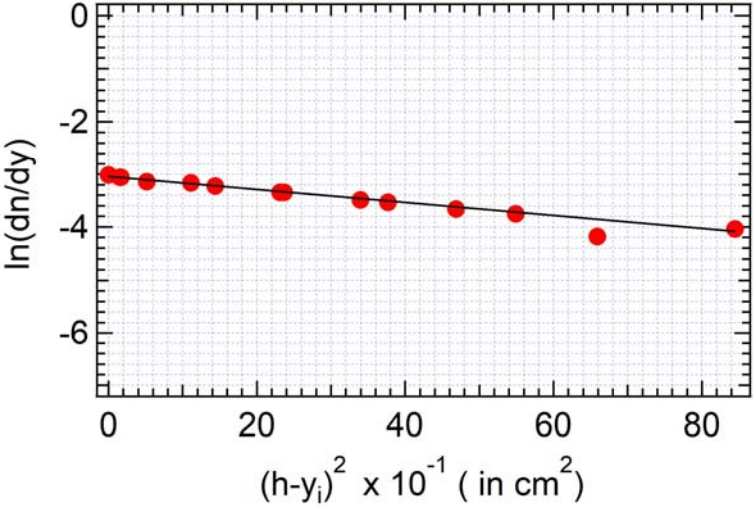
B : Determination of Diffusion Coefficient (4.2 points)

Question	Answer	Marks												
B1. (0.9 pts)	<p>Linear form of eq.(3)</p> $\ln\left(\frac{dn}{dy}\right) \approx m(h - Y)^2 + C \quad (b1)$ $m = -\frac{1}{4D_e t}$ <p>Constant : $C = \ln\left(\left(\frac{dn}{dc}\right)\left(\frac{c_0}{2\sqrt{\pi D_e t}}\right)\right)$</p> <p>Other than (b1)</p>	0.9 pt -0.9 pts												
B2. (1.8 pts)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>i</th> <th>(h-y_i)²</th> <th>ln(dn/dy)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0.06592</td> <td>-3.86003</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0.050423</td> <td>-3.75467</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.031065</td> <td>-3.65936</td> </tr> </tbody> </table>	i	(h-y _i) ²	ln(dn/dy)	1	0.06592	-3.86003	2	0.050423	-3.75467	3	0.031065	-3.65936	Table 3 of $C_0 = 23$ g /150 mL.
i	(h-y _i) ²	ln(dn/dy)												
1	0.06592	-3.86003												
2	0.050423	-3.75467												
3	0.031065	-3.65936												

	<table border="1"> <tbody> <tr><td>4</td><td>0.020752</td><td>-3.4923</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.00917</td><td>-3.41819</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.005128</td><td>-3.3831</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.000984</td><td>-3.3492</td></tr> <tr><td>8</td><td>6.99E-07</td><td>-3.28466</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.002414</td><td>-3.3492</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.009493</td><td>-3.41819</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.021237</td><td>-3.57235</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.037646</td><td>-3.75467</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.05872</td><td>-3.97781</td></tr> </tbody> </table> <p>Jury must check the data in table</p> <p># of data point > 10</p> <p>3 <= # of data point < 10</p> <p># of data point < 3</p> <p># wrong data point < 3</p> <p>3 < # wrong data point < 6</p> <p># wrong data point > 6</p>	4	0.020752	-3.4923	5	0.00917	-3.41819	6	0.005128	-3.3831	7	0.000984	-3.3492	8	6.99E-07	-3.28466	9	0.002414	-3.3492	10	0.009493	-3.41819	11	0.021237	-3.57235	12	0.037646	-3.75467	13	0.05872	-3.97781	<p># data = 10</p> <p>(0.3 pts)</p> <p>-0 pts</p> <p>-0.05 pts</p> <p>-0.3 pts</p> <p>- 0</p> <p>- 0.05 pts</p> <p>- 0.25 pts</p>
4	0.020752	-3.4923																														
5	0.00917	-3.41819																														
6	0.005128	-3.3831																														
7	0.000984	-3.3492																														
8	6.99E-07	-3.28466																														
9	0.002414	-3.3492																														
10	0.009493	-3.41819																														
11	0.021237	-3.57235																														
12	0.037646	-3.75467																														
13	0.05872	-3.97781																														
B2	<p>Using linear regression of eq. (B1.1), we obtain</p> <p>m (slope) = -10 cm^{-2} till -8.8 cm^{-2}</p>	<p>Plot of Table 3</p> <p>$C_0 = 23 \text{ g}/150 \text{ mL}$</p> <p># data = 10</p> <p>(0.3pts)</p>																														

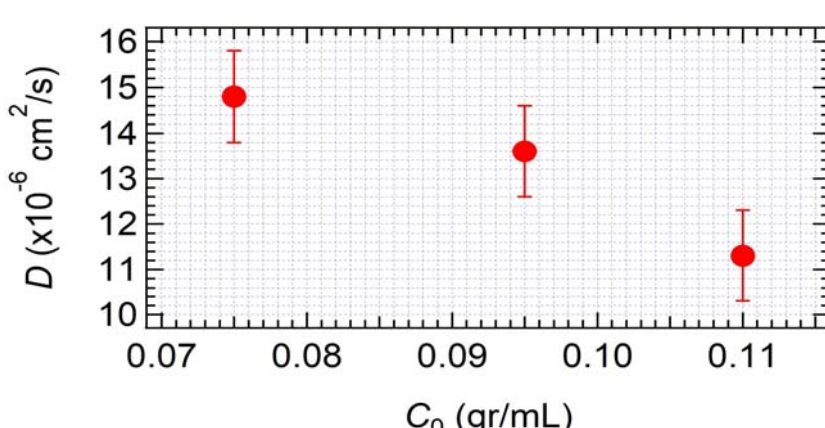
	<p>without x-axis label</p> <p>without x-axis unit</p> <p>wrong x-axis unit</p> <p>without y-axis label</p> <p>without y-axis unit</p> <p>wrong y-axis unit</p> <p># of data point in linear range > 10</p> <p>3 ≤ # of data point in linear range < 10</p> <p># of data point in linear range < 3 or random shape of curve</p> <p>m is out of range</p>	<p>-0.01 pts</p> <p>-0.01 pts</p> <p>-0.01 pts</p> <p>-0.01 pts</p> <p>-0.01 pts</p> <p>-0.01 pts</p> <p>-0</p> <p>- 0.05 pts</p> <p>- 0.25 pts</p> <p>-0.3 pts</p>																																										
B2.	<table border="1"> <thead> <tr> <th>i</th> <th>(h-v_i)²</th> <th>ln(dn/dv)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.057912</td><td>-3.75467</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.033968</td><td>-3.57235</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.023136</td><td>-3.41819</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.014378</td><td>-3.3492</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.007693</td><td>-3.28466</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.001553</td><td>-3.22404</td></tr> <tr><td>7</td><td>6.99E-07</td><td>-3.19505</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.002414</td><td>-3.22404</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.007989</td><td>-3.25389</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.018955</td><td>-3.3492</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.037646</td><td>-3.53152</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.071007</td><td>-3.86003</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.099079</td><td>-4.26549</td></tr> </tbody> </table> <p>Jury must check the data in table</p>	i	(h-v _i) ²	ln(dn/dv)	1	0.057912	-3.75467	2	0.033968	-3.57235	3	0.023136	-3.41819	4	0.014378	-3.3492	5	0.007693	-3.28466	6	0.001553	-3.22404	7	6.99E-07	-3.19505	8	0.002414	-3.22404	9	0.007989	-3.25389	10	0.018955	-3.3492	11	0.037646	-3.53152	12	0.071007	-3.86003	13	0.099079	-4.26549	<p>Table 3 of</p> <p>C₀ = 28 g /150 mL</p> <p># data = 10</p> <p>(0.3 pts)</p>
i	(h-v _i) ²	ln(dn/dv)																																										
1	0.057912	-3.75467																																										
2	0.033968	-3.57235																																										
3	0.023136	-3.41819																																										
4	0.014378	-3.3492																																										
5	0.007693	-3.28466																																										
6	0.001553	-3.22404																																										
7	6.99E-07	-3.19505																																										
8	0.002414	-3.22404																																										
9	0.007989	-3.25389																																										
10	0.018955	-3.3492																																										
11	0.037646	-3.53152																																										
12	0.071007	-3.86003																																										
13	0.099079	-4.26549																																										

	<p># of data point in linear range > 10 -0.05 pts</p> <p>3 <= # of data point in linear range < 10 -0.3 pts</p> <p># of data point in linear range < 3 or random shape of curve -0.3 pts</p> <p>m is out of range</p>																																											
B2.	<table border="1"> <thead> <tr> <th>i</th> <th>(h-y_i)²</th> <th>ln(dn/dy)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.046873</td><td>-3.65936</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.033968</td><td>-3.4923</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.023136</td><td>-3.3492</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.014378</td><td>-3.22404</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.005128</td><td>-3.13948</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.001553</td><td>-3.06152</td></tr> <tr><td>7</td><td>6.99E-07</td><td>-3.01273</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.001688</td><td>-3.06152</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.011126</td><td>-3.16688</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.023647</td><td>-3.3492</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.037646</td><td>-3.53152</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.054884</td><td>-3.75467</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.08446</td><td>-4.04235</td></tr> </tbody> </table> <p>Jury must check the data in table</p> <p># of data point > 10 -0 pts</p> <p>3 <= # of data point < 10 -0.05 pts</p> <p># of data point < 3 -0.3 pts</p> <p># wrong data point < 3 - 0</p> <p>3 < # wrong data point < 6 - 0.05 pts</p> <p># wrong data point > 6 - 0.25</p>	i	(h-y _i) ²	ln(dn/dy)	1	0.046873	-3.65936	2	0.033968	-3.4923	3	0.023136	-3.3492	4	0.014378	-3.22404	5	0.005128	-3.13948	6	0.001553	-3.06152	7	6.99E-07	-3.01273	8	0.001688	-3.06152	9	0.011126	-3.16688	10	0.023647	-3.3492	11	0.037646	-3.53152	12	0.054884	-3.75467	13	0.08446	-4.04235	<p>Table 3 of C₀ = 33 g /150 mL</p> <p># data = 10</p> <p>(0.3 pts)</p>
i	(h-y _i) ²	ln(dn/dy)																																										
1	0.046873	-3.65936																																										
2	0.033968	-3.4923																																										
3	0.023136	-3.3492																																										
4	0.014378	-3.22404																																										
5	0.005128	-3.13948																																										
6	0.001553	-3.06152																																										
7	6.99E-07	-3.01273																																										
8	0.001688	-3.06152																																										
9	0.011126	-3.16688																																										
10	0.023647	-3.3492																																										
11	0.037646	-3.53152																																										
12	0.054884	-3.75467																																										
13	0.08446	-4.04235																																										
B2.		<p>Plot of Table 3</p> <p>C₀ = 33 g/150 mL</p>																																										

	 <p>Using linear regression of eq. (B1.1), we obtain m (slope) = -11.3 cm^{-2} till -12.8 cm^{-2} without x-axis label without x-axis unit wrong x-axis unit without y-axis label without y-axis unit wrong y-axis unit m is out of range # of data point in linear range > 10 $3 \leq \#$ of data point in linear range < 10 # of data point in linear range < 3 or random shape of curve</p>	<p># data = 10 (0.3pts) -0.01 pts -0.01 pts -0.01 pts -0.01 pts -0.01 pts -0.01 pts -0.3 pts -0 pts -0.05 pts -0.3</p>
<p>B3 (1.5 pts)</p>	<p>D of 23 g/ 150 mL = $(1.38 \text{ till } 1.58) \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ D of 28 g/ 150 mL = $(1.26 \text{ till } 1.46) \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$</p>	<p>0.5 pts 0.5 pts</p>

	D of 33 g/ 150 mL = (1.03 till 1.23) $\times 10^{-5}$ cm ² /s D is out of range for each concentration	0.5 pts- -0.5 pts
--	--	----------------------

C. Nonlinear diffusion (1.3 points)

Question	Answer	Marks
C1. (1.3 pts)	 <p>Without error bars Value of C not stated in C₀/2</p>	Plot D vs. C_0 0.8 pts -0 -0.4 pts
C1.	$\frac{d}{dc}D = -4.2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ mL g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ till $-15.8 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ mL g}^{-1} \text{ s}^{-1}$	0.5 pts -0.01 pts -0.5 pts



E1. Marking Scheme & Solution

Student Code

Experimental
Question

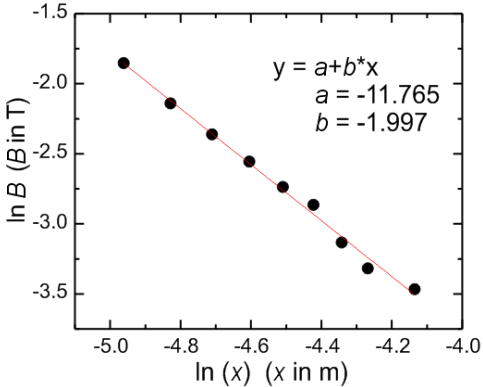
1

page 19 of 19

Parallel Dipole Line Magnetic Trap for Earthquake & Volcanic Sensing (10 points)

A. BASIC CHARACTERISTICS OF PDL TRAP

1. Determination of the magnet's magnetization (M) (2.5 pts)

Question	Answer	Marks																																																												
A.1 0.1 pts	<p>Record zero offset (B_0) of the Teslameter without any magnet nearby. Subtract subsequent field measurement with this value</p> <p>Example from a Teslameter unit: $B_0 = 0.86$ mT</p>	<p>0.08 pts range (-10 mT to 10 mT)</p> <p>Correct unit: 0.02 pts</p>																																																												
A.2 1.15 pts	<p>Measure magnetic field B vs. x in the near field region ($7 \leq x \leq 16$ mm). <u>Where x is the position measured from the center of the magnet.</u> Record and plot your result on the answer sheet.</p> <p>$x_0 = 4$ mm, $B_0 = 0.86$ mT. Δx is measured from surface. $B = B_{raw} - B_0$</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Δx (mm)</th> <th>X (mm)</th> <th>B_{raw} (T)</th> <th>B (T)</th> <th>$\ln(x)$ x in m</th> <th>$\ln(B)$ B in T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>3</td><td>7</td><td>0.1576</td><td>0.1567</td><td>-4.962</td><td>-1.853</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>0.1186</td><td>0.1177</td><td>-4.828</td><td>-2.139</td></tr> <tr><td>5</td><td>9</td><td>0.0951</td><td>0.0942</td><td>-4.710</td><td>-2.362</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>0.0785</td><td>0.0776</td><td>-4.605</td><td>-2.556</td></tr> <tr><td>7</td><td>11</td><td>0.0657</td><td>0.0648</td><td>-4.510</td><td>-2.736</td></tr> <tr><td>8</td><td>12</td><td>0.0579</td><td>0.0570</td><td>-4.423</td><td>-2.864</td></tr> <tr><td>9</td><td>13</td><td>0.0445</td><td>0.0436</td><td>-4.343</td><td>-3.132</td></tr> <tr><td>10</td><td>14</td><td>0.0371</td><td>0.0362</td><td>-4.269</td><td>-3.318</td></tr> <tr><td>12</td><td>16</td><td>0.0321</td><td>0.0312</td><td>-4.135</td><td>-3.466</td></tr> </tbody> </table> <p>Plot:</p> 	Δx (mm)	X (mm)	B_{raw} (T)	B (T)	$\ln(x)$ x in m	$\ln(B)$ B in T	3	7	0.1576	0.1567	-4.962	-1.853	4	8	0.1186	0.1177	-4.828	-2.139	5	9	0.0951	0.0942	-4.710	-2.362	6	10	0.0785	0.0776	-4.605	-2.556	7	11	0.0657	0.0648	-4.510	-2.736	8	12	0.0579	0.0570	-4.423	-2.864	9	13	0.0445	0.0436	-4.343	-3.132	10	14	0.0371	0.0362	-4.269	-3.318	12	16	0.0321	0.0312	-4.135	-3.466	<p>Correct label and unit for data: 0.1 pts</p> <p>Number of correct data for $x \leq 16$ mm: 0.05 pts for each correct data, max 0.45 pts</p> <p>Plot: -Correct axis label and unit: 0.05 pts - Using around 75% of plot area: 0.05 pts -For each correct data point: 0.05 pts, max. 0.4 pts -Adding trendline: 0.1 pts</p>
Δx (mm)	X (mm)	B_{raw} (T)	B (T)	$\ln(x)$ x in m	$\ln(B)$ B in T																																																									
3	7	0.1576	0.1567	-4.962	-1.853																																																									
4	8	0.1186	0.1177	-4.828	-2.139																																																									
5	9	0.0951	0.0942	-4.710	-2.362																																																									
6	10	0.0785	0.0776	-4.605	-2.556																																																									
7	11	0.0657	0.0648	-4.510	-2.736																																																									
8	12	0.0579	0.0570	-4.423	-2.864																																																									
9	13	0.0445	0.0436	-4.343	-3.132																																																									
10	14	0.0371	0.0362	-4.269	-3.318																																																									
12	16	0.0321	0.0312	-4.135	-3.466																																																									

<p>A.3 0.75 pts</p>	<p>Use your experimental data to determine the value of the exponent p.</p> <p>Linear regression (LR) $y = a + b x : B = \frac{\mu_0 m}{2 \pi L x^p}$</p> <p>$\ln(B) = a - p \ln x$ where $a = \ln\left(\frac{\mu_0 m}{2 \pi L}\right)$.</p> <p>LR yields : $a = -11.765$ and $b = -1.997$</p> <p>The power exponent: $p = -b = 2.0$</p> <p>Note that this is in very good agreement with the exact result: at short distance ($x < L$) a diametric (or a dipole line) magnet has $B \sim 1/r^2$ dependence. See Ref. [1] , Fig. 2c.</p>	<p>Obtaining p from graph: 0.05 pts Obtaining p from linear regression: 0.1 pts</p> <p>Result: $p = 1.8 - 2.2 : 0.65$ pts $p = 1.6 - 2.4 : 0.35$ pts</p> <p>Result with wrong sign: $p = (-1.8) - (-2.2) : 0.4$pts $p = (-1.6) - (-2.4) : 0.1$pts</p> <p>More than two sig. figs.: minus 0.05 pts</p>
<p>A.4 0.5 pts</p>	<p>Determine the magnet's magnetization M.</p> <p>$m = \frac{2 \pi L}{\mu_0} \exp(a) = 0.987 \text{ Am}^2$</p> <p>$M = \frac{m}{\pi R^2 L} = 1.2 \times 10^6 \text{ A/m}$</p> <p>This is close to the more accurate results from more extensive measurements to far field (see Ref. [1], Fig. 2c) and we use this value for subsequent questions: $M = 1.1 \times 10^6 \text{ A/m}$</p>	<p>Correct unit: 0.05 pts</p> <p>Obtaining intercept (a) from graph: 0.025 pts Obtaining intercept from LR: 0.05 pts</p> <p>Correct formula for m and/or M : 0.1 pts</p> <p>Result for M ($\times 10^6 \text{ A/m}$): $0.9 - 1.4 : 0.3$ pts $0.1 - 2.5 : 0.15$ pts</p> <p>More than 2 sig. figs.: minus 0.05 pts</p>

2. The Magnetic Levitation Effect and Magnetic Susceptibility (χ) (1 pts)

Question	Answer	Marks
<p>A.5 0.1 pts</p>	<p>Place gently a graphite rod HB/0.5 and length = 8 mm. Measure the levitation height y_0 of the rod (see Fig. 7a). Hint: Use the insert ruler provided as shown in Fig. 7b. Press the ruler on the magnets to read the position of the graphite rod</p> <p>We levitate graphite HB/0.5, $l = 8$ mm. Using the insert-ruler, we measure approximately $\Delta y = 1$ mm from the top of the magnet surface. Thus: $y_0 = R - \Delta y = (3.2 - 1) \text{ mm} = 2.2 \text{ mm}$</p>	<p>correct unit: 0.02</p> <p>$y_0 = (1.7 - 2.2) \text{ mm} : 0.08$ pts</p> <p>partial credit: Only $\Delta y = (1 - 1.5) \text{ mm} : 0.03$ pts</p>

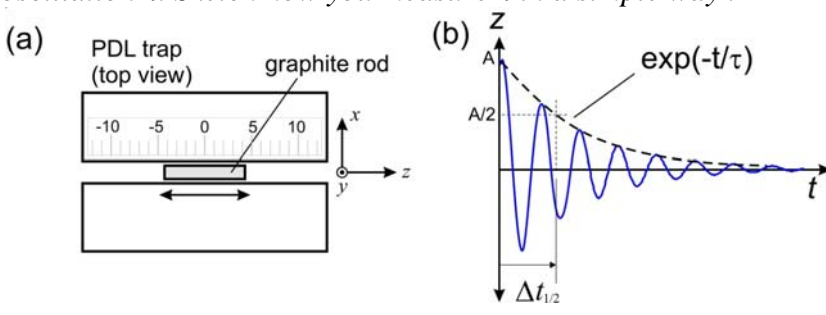
A.6 0.8 pts	<p>Use the result from part A.5 to determine the magnetic susceptibility χ of the graphite rod.</p> <p>Solving for χ: $mg = F_y = -\frac{\mu_0 M^2 \chi V_R R^4}{2 a^5} f_Y(y_0/a)$</p> $\chi = -\frac{2\rho g a^5}{\mu_0 M^2 R^4 f_Y(y_0/a)}$ <p>We calculate: $a = R + g_M / 2 = (3.2 + 1.5/2) \text{ mm} = 3.95 \text{ mm}$.</p> <p>Using $y_0 = 2.2 \text{ mm}$: $f_Y(u) = \frac{4u(3-u^2)(1-u^2)}{(1+u^2)^5}$,</p> <p>$f_Y(y_0/a) = f_Y(2.2/3.95) = 1.07$</p> <p>Using the correct $M = 1.1 \times 10^6 \text{ A/m}$; and $R = 3.2 \text{ mm}$, $\rho = 1680 \text{ kg/m}^3$ we have: $\chi = -1.85 \times 10^{-4}$.</p> <p>Note that this is very good agreement with the literature value for graphite pencil lead: $\chi = -2 \times 10^{-4}$ (see Ref.[1], pg. 2 & Ref.[2]). The sign is negative indicating a diamagnetic material.</p>	<p>Correct expression for χ: 0.4 pts</p> <p>Result for χ ($\times 10^{-4}$) -(1.4 to 2.6) : 0.4 pts -(0.5 to 4) : 0.2 pts</p> <p>Wrong sign: minus 0.1 pts</p>
A.7 0.1 pts	<p>What kind of magnetic material is graphite? Choose one: (i) Ferromagnetic; (ii) Paramagnetic; or (iii) Diamagnetic?</p> <p>(iii) Diamagnetic. Because: (1) Graphite is repelled by magnetic field (2) The sign of χ is negative.</p>	<p>Correct choice: 0.1 pts</p>

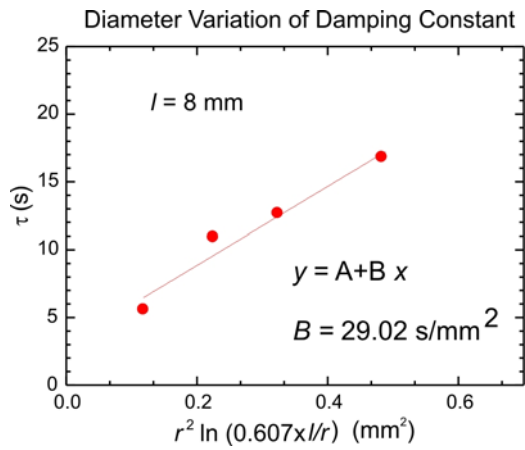
3. The camelback potential oscillation and magnetic susceptibility (χ) (1 points)

Question	Answer	Marks																		
A.8 0.2 pts	<p><u>Perform an oscillation for the "HB/0.5" graphite and $l = 8 \text{ mm}$. Limit to small oscillation amplitude i.e. $A < 4 \text{ mm}$.</u></p> <p><u>Determine the oscillation period. (The oscillation will decay over time due to damping, ignore this damping effect).</u></p> <p>Example, we measured 5 oscillations of HB/0.5 with length $l = 8 \text{ mm}$. We displaced it by $\sim 3 \text{ mm}$ and let it oscillates. We measured 5 oscillation periods:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;">Trial</th> <th style="width: 15%;">5 Tz</th> <th style="width: 15%;"></th> <th style="width: 15%;"></th> <th style="width: 15%;"></th> <th style="width: 15%;"></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>(s)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>6.12</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Trial	5 Tz						(s)					1	6.12					<p>Correct label and unit: 0.02 pts</p> <p>Number of correct data each 0.01 pts, max 0.03 pts</p> <p>Number of oscillation < 3 : 0 pts >= 3 : 0.05 pts</p> <p>$T_z = (1.2 - 1.5) \text{ s}$: 0.1 pts</p>
Trial	5 Tz																			
	(s)																			
1	6.12																			

	<table border="1"> <tr> <td>2</td> <td>6.13</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>6.14</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>Average : $T_z = 1.23$ s</p>	2	6.13					3	6.14					
2	6.13													
3	6.14													
A.9 0.8 pts	<p>Calculate the magnetic susceptibility (χ) of the graphite using this oscillation</p> <p>For harmonic oscillator : $k_z = m_R \omega^2$, solving for χ:</p> $\chi = -\frac{k_z}{C_1 \mu_0 M^2 V_r} = \frac{\omega^2 \rho}{C_1 \mu_0 M^2}$ <p>Using the correct $M = 1.1 \times 10^6$ A/m. Using $C_1 = 198.6/\text{m}^2$, and $T_z = 1.23$ s, we obtain $\chi = -1.5 \times 10^{-4}$.</p> <p>Note that this is in good agreement with the literature value of the graphite pencil lead: $\chi = -2 \times 10^{-4}$ (Ref.[1], pg. 2); and the sign is negative indicating a diamagnetic material.</p>	<p>Correct expression for χ: 0.4 pts</p> <p>Result for χ ($\times 10^{-4}$) -(1.4 to 2.6) : 0.4 pts -(0.5 to 4) : 0.2 pts</p> <p>Wrong sign: minus 0.1 pts</p>												

4. Oscillator quality factor (Q) and estimate of air viscosity μ_A (3.0 points)

Question	Answer	Marks
A.10 0.5 pts	<p>We need to determine the damping time constant of the oscillation τ. Sketch how you measure τ in a simple way.</p>  <p>The trick is to use "half-time" concept of exponential decay. We set the oscillation and measure the time taken for the amplitude to halve. The lifetime is:</p> $\tau = \frac{\Delta t_{1/2}}{\ln 2}$	<p>Correct idea: 0.3 pts</p> <p>Correct expression for τ: 0.2 pts</p>
A.11 1.5 pts	<p>Perform oscillation damping experiments with a group of rods with various diameters and fixed length of 8 mm. Determine the damping time constant τ for each rods</p>	<p>Correct label and unit 0.1</p> <p>Number of correct data</p>

	<p>We displaced the graphite by ~4 mm, started the stopwatch and then waited until it decays to half.</p> <table border="1" data-bbox="300 398 1131 987"> <thead> <tr> <th>Trial</th> <th>Diam.</th> <th>Actual Radius</th> <th>$\Delta t_{1/2}$</th> <th>Mean $\Delta t_{1/2}$</th> <th>τ</th> <th>$r^2 \times \ln(0.607/l/r)$</th> </tr> <tr> <td></td> <td>(mm)</td> <td>(mm)</td> <td>(s)</td> <td>(s)</td> <td>(s)</td> <td>(mm²)</td> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0.3</td> <td>0.19</td> <td>3.89</td> <td>3.913</td> <td>5.646</td> <td>0.117</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>3.97</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>3.88</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0.5</td> <td>0.28</td> <td>7.69</td> <td>7.617</td> <td>10.989</td> <td>0.224</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>7.57</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>7.59</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.7</td> <td>0.35</td> <td>8.77</td> <td>8.82</td> <td>12.73</td> <td>0.322</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>8.81</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>8.88</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0.9</td> <td>0.45</td> <td>12.4</td> <td>11.70</td> <td>16.88</td> <td>0.482</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>11.33</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>11.38</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Trial	Diam.	Actual Radius	$\Delta t_{1/2}$	Mean $\Delta t_{1/2}$	τ	$r^2 \times \ln(0.607/l/r)$		(mm)	(mm)	(s)	(s)	(s)	(mm ²)	1	0.3	0.19	3.89	3.913	5.646	0.117				3.97							3.88				2	0.5	0.28	7.69	7.617	10.989	0.224				7.57							7.59				3	0.7	0.35	8.77	8.82	12.73	0.322				8.81							8.88				4	0.9	0.45	12.4	11.70	16.88	0.482				11.33							11.38				<p>for each diameter (4): < 3 : 0.1 pts >=3 : 0.25 pts (max 1.0 pts)</p> <p>Positive monotonic trend for τ vs. diameter from 0.3 to 0.9 mm with $\tau = 5$ to 20 sec : 0.4 pts</p>
Trial	Diam.	Actual Radius	$\Delta t_{1/2}$	Mean $\Delta t_{1/2}$	τ	$r^2 \times \ln(0.607/l/r)$																																																																																														
	(mm)	(mm)	(s)	(s)	(s)	(mm ²)																																																																																														
1	0.3	0.19	3.89	3.913	5.646	0.117																																																																																														
			3.97																																																																																																	
			3.88																																																																																																	
2	0.5	0.28	7.69	7.617	10.989	0.224																																																																																														
			7.57																																																																																																	
			7.59																																																																																																	
3	0.7	0.35	8.77	8.82	12.73	0.322																																																																																														
			8.81																																																																																																	
			8.88																																																																																																	
4	0.9	0.45	12.4	11.70	16.88	0.482																																																																																														
			11.33																																																																																																	
			11.38																																																																																																	
<p>A.12 1 pts</p>	<p>Determine the air viscosity μ_A</p>  <p>We have: $\tau = b r^2 \ln\left(0.607 \times \frac{l}{r}\right)$, where: $b = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\mu_A}$. We performed linear regression $y = a + b x$, with $y = \tau$ and $x = r^2 \ln\left(0.607 \times \frac{l}{r}\right)$. We obtain: $b = 29.02 \text{ s/mm}^2$.</p> $\mu_A = \frac{2}{3} \frac{\rho}{b} = 38.6 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s} \quad (1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ kg/m s})$ <p>Note that this is about 2.1x the actual viscosity of air of $18.2 \mu\text{Pa.s}$. The discrepancy is due to the ellipsoidal</p>	<p>Correct unit: 0.05</p> <p>Obtaining result with linear regression or plot: 0.25 pts</p> <p>Result μ_A ($\times 10^{-6}$ Pa.s): 20 - 60 : 0.7 pts 10 - 80 : 0.4 pts 1 - 100 : 0.1 pts</p>																																																																																																		

	approximation of the Stokes drag (vs. the actual cylindrical shape of the rod) and the proximity effect of the rod to the magnet (wall effect). Another factor is the crude nature of our manual τ determination. See Ref. [1], pg. 8.	
--	---	--

B. SENSOR APPLICATION OF THE PDL TRAP

5. PDL Trap Seismometer (0.5 pts)

Question	Answer	Marks
B.1 0.2 pts	<p><i>Which diameter of rod do you choose?</i></p> <p>To obtain the lowest acceleration noise floor "a_n" we should choose the largest diameter graphite i.e. 0.9 mm, because their damping time is the longest and the mass is the largest.</p>	Correct answer: 0.2 pts
B.2 0.3 pts	<p><i>Calculate the seismometer acceleration noise floor (a_n) for the rod of your choice!</i></p> <p>For HB/0.9 and length $l = 8$ mm: We use $\tau = 16.9$ s; and $T = 298$ K, we have: $m_R = \rho \pi r^2 l = 8.55 \times 10^{-6}$ kg :</p> $a_n = \sqrt{\frac{4k_B T \omega_0}{Q m_R}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\tau m_R}} = 1.5 \times 10^{-8} \text{ m}/(\text{s}^2 \text{ Hz}^{0.5})$	<p>Correct unit: 0.1</p> <p>Correct answer: 0.2 pts</p>

6. PDL Trap Tiltmeter (2 pts)

Question	Answer	Marks
B.3 0.5 pts	<p><i>Derive the relation theoretically between displacement Δz with the screw thread size S and the number of turns (N).</i></p> $k_z \Delta z = m g \sin \theta = m g N S / D \quad \Delta z = \frac{m g S N}{k_z D}$ <p>From Question 3, we also have $k_z = m \omega^2$:</p> $\Delta z = \frac{g S}{\omega^2 D} N$	<p>Correct expression: 0.5 pts</p> <p>Partial credit $k_z \Delta z = m g \sin \theta : 0.2$</p>
B.4 1.25 pts	<p><i>By turning the screw slowly, determine the rod displacement Δz vs. the number of screw turns (N). Determine the thread size S</i></p>	Correct label and unit: 0.1 pts

	<p>We measured the distance between screws: $D = 22$ cm, and we used the period from Q3: $T_z = 1.23$ s</p> <table border="1" data-bbox="303 436 1077 817"> <thead> <tr> <th>Δz (mm)</th> <th>ϕ</th> <th>N (turn)</th> <th></th> <th></th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>0.5</td><td>135</td><td>0.375</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>270</td><td>0.75</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1.5</td><td>450</td><td>1.25</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>585</td><td>1.625</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2.5</td><td>720</td><td>2.0</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>855</td><td>2.375</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3.5</td><td>945</td><td>2.625</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <div data-bbox="311 862 1125 1164"> </div> <p>By performing linear regression: $y = a + b x$ We have $b = 1.287$ mm/turns : $S = \frac{b \omega^2 D}{g} = 0.75$ mm/turn. This is reasonably close to the actual value of the thread size: $S = (0.8 \pm 0.1)$ mm/turn.</p>	Δz (mm)	ϕ	N (turn)				0	0	0				0.5	135	0.375				1	270	0.75				1.5	450	1.25				2	585	1.625				2.5	720	2.0				3	855	2.375				3.5	945	2.625				<p>Distance between screws: $22.8 < D < 22.2$ cm : 0.1 pts</p> <p>Number of correct data: < 3 sets : 0 pts $3-5$ sets: 0.15 pts > 5 sets : 0.25 pts</p> <p>Obtaining result with linear regression or plot: 0.2 pts</p> <p>Result: $0.7 < S < 0.9$: 0.55 pts $0.5 < S < 1.1$: 0.15 pts</p> <p>Correct unit for S : 0.05</p>
Δz (mm)	ϕ	N (turn)																																																						
0	0	0																																																						
0.5	135	0.375																																																						
1	270	0.75																																																						
1.5	450	1.25																																																						
2	585	1.625																																																						
2.5	720	2.0																																																						
3	855	2.375																																																						
3.5	945	2.625																																																						
<p>B.5 0.25 pts</p>	<p>When the ground tilt changes we want the graphite rod to go to equilibrium as fast as possible (instead of sustaining very long oscillation) to allow easy reading. What is the ideal Q factor for a tiltmeter?</p> <p>We need critical damping thus: $Q = 0.5$</p>	<p>Correct Q : 0.25 pts</p>																																																						

REFERENCES:

[1] Gunawan, O. & Virgus, Y. *The one-dimensional camelback potential in the parallel dipole line trap: Stability conditions and finite size effect.* J. Appl. Phys. 121, 133902, (2017). DOI:10.1063/1.4978876.
 [2] Gunawan, O., Virgus, Y. & Fai Tai, K. *A parallel dipole line system.* Appl. Phys. Lett. 106, 062407, (2015). DOI: 10.1063/1.4907931.