ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2016/2017. ГОДИНЕ

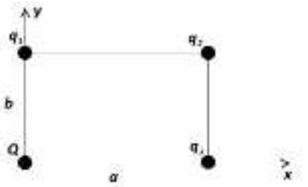
Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ – фермионска категорија

II РАЗРЕД

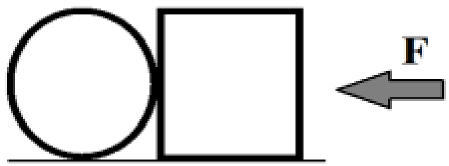
ДРЖАВНИ НИВО
25.03.2017.

1. У почетној тачки координатног система стоји наелектрисање Q. Потребно је додати још 3 налелектрисања q_1, q_2 и q_3 у координатама $(0, b)$, (a, b) и $(a, 0)$, респективно (слика 1), тако да на Q и на још једно наелектрисање (q_1, q_2 или q_3) не делује никаква сила. Наћи q_1, q_2, q_3 и b у фукнцији од Q и a.

(20 поена)



Слика 1.



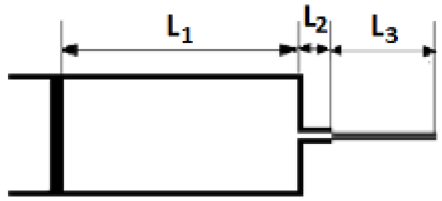
Слика 2.

2. Коцка и цилиндар се налазе на хоризонталној подлози, постављени једно уз друго, тако да се додирују. Пречник цилиндра једнак је бочној страни коцке. Масе коцке и цилиндра су исте и износе $m = 1\text{kg}$. За све површине коефицијенти кинетичког трења (вредност коефицијента трења при кретању) су $\mu = 0.15$. На коцку се делује силом $F = 15\text{N}$ и систем се покреће налево. Која је минимална вредност коефицијента статичког трења μ_0 између коцке и цилиндра таква да се ова два тела крећу заједно на такав начин да кретање цилиндра остане чисто транслаторно?

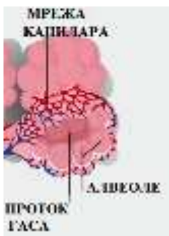
(20 поена)

3. Ветеринар болесном коњу убризгава течни антибиотик густине ρ директно у крв, при чему цела доза антибиотика мора да се нађе у крви након времена t од покретања шприца (слика 3). Шприц се састоји од дела где је клип, полуречника r_1 и дужине L_1, излазног отвора полуречника r_2 и дужине L_2 и игле r_3 и дужине L_3. Игла се пробија кроз кожу и остварује контакт са веном где је притисак p_V. (Запремина дела у коме је клип је много већа од преосталог дела вакцине.)
(а) Под претпоставком да је ветеринар шприц поставио хоризонтално и да делује константном силом F_a, наћи вредност силе F_a и величину статичког притиска на почетку излазног отвора шприца p_a.
(б) Под претпоставком да је ветеринар шприц поставио вертикално надоле и да делује силом F_b таквом да је брзина кретања клипа константна, наћи вредност силе F_b и величину статичког притиска на почетку излазног отвора шприца p_b у зависности од висине клипа изнад излазног отвора h. Поређењем F_a и F_b утврдити који од два начина давања вакцине захтева мању максималну силу.

(20 поена)



Слика 3.



Слика 4.

4. Плућне алвеоле су мали мехурићи унутар плућа који врше спољашњу размену гасова (слика 4). Алвеолу можемо моделирати као лопту која може да се шири и скупља. Са стране унутрашњег зида алвеоле налази се вода и одређена количина сурфактанта, тј. липопротеина. Сурфактант има улогу да смањи вредност укупног површинског напона при смањењу пречника алвеола, што сречава колапс алвеола када се њихова запремина смањи при издисају. Површнски напон воде је

$\gamma_W = 7{,}2 \cdot 10^{-2}\,\frac{N}{m}$, а у случају присуства сурфактанта он се смањује и износи $\gamma_S = 1 \cdot 10^{-3}\,\frac{N}{m}$. Сурфактант потпуно прекрива алвеолу све до полупречника алвеоле од R_0, а даље од тога површина прекривена сурфактантом остаје непромењена. Алвеола се налази у стабилној равнотежи R_{eq} када је њен полупречник једак четвртини максималне вредности од $R_{max} = 0{,}1\ \mathrm{mm}$, а може се показати и да важи $R_{eq} \approx \sqrt{3}R_0$.

(а) Алвеола се налази у стању у коме је полупречник минималан $R_{col} = 0.008\ \mathrm{mm}$ и када је потребно упумпати ваздух. Колика је уштеда енергија коју је потребно уложити да би се алвеола раширила до положаја са полупреником R_0 (горе дефинисаним) у случају присуства сурфактанта у односу на случај без њега?

(б) Колики је допунски притисак испод унутрашње површине мехура уколико се алвеола налази у стању са полупречником $R = 0.03\ \mathrm{mm}$?

(20 поена)

5. Вода у термос боци се греје помоћу грејача који је монтиран са унутрашње стране термос боце. Средња снага грејача износи $P = (150 \pm 3)\ \mathrm{W}$. Боца са водом се налази на ваги тачности $\Delta \mathrm{m} = 0.5\ \mathrm{g}$. Када температура достигне $100^{\circ}\mathrm{C}$ прати се промена масе у функцији од времена. Мерење се понавља 3 пута са различитим почетним масама воде $m_{01} = 640\ \mathrm{g}$, $m_{02} = 652\ \mathrm{g}$ и $m_{03} = 639\ \mathrm{g}$. Хронометар (уређај за мерење времена) се при сваком од три мерења покреће у тренутку када температура воде достигне $100^{\circ}\mathrm{C}$. На поклопцу постоји мали отвор кроз који водена пара може да излази. Грешка појединачног мерења времена је $\Delta \mathrm{t} = 0.2\ \mathrm{s}$. На основу свих датих података одредити латентну топлоту испаравања воде и њену грешку. Универзална гасна константа износи $R = 8.314\,\frac{J}{mol\,K}$.

Напомена: Сматрати да је температура испаравања воде тачно $100^{\circ}\mathrm{C}$ *и да вода не испарава на нижим температурама. Третирати водену пару као идеалан гас.*

m_1[g]	t_1 [s]
636.0	66.02
632.0	130.25
628.0	194.11
624.0	258.84
620.0	322.92
616.0	386.80

m_2 [g]	t_2 [s]
648.0	65.52
644.0	129.55
640.0	193.55
636.0	258.06
632.0	322.58
628.0	387.10

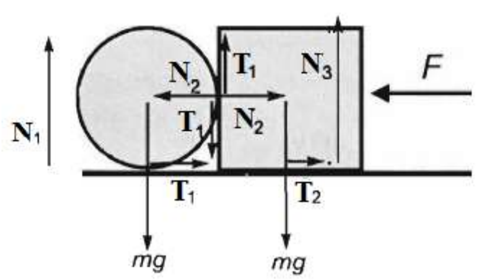
m_3 [g]	t_3 [s]
635.0	65.45
631.0	129.20
627.0	193.00
623.0	258.12
619.0	321.90
615.0	387.30

(20 поена)

Задатке припремили: *Нора Тркља*, Физички факултет, Београд*; др Никола Петровић*, Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Никола Петровић*, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење за средње школе: *Доц. др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

P1. Наелектрисање Q има услове стабилности по x и y оси. По y оси имамо $k\frac{q_1}{b^2}+k\frac{q_2}{a^2+b^2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ **[2п]**, те добијамо $q_1\sqrt{a^2+b^2}^3=-q_2b^3$ **[2п]**, и по x оси $q_3\sqrt{a^2+b^2}^3=-q_2a^3$ **[2п]**. Ако би поред Q и налелектрисање q_1 било стабилно онда би важило $Q\sqrt{a^2+b^2}^3=-q_3b^3$ и $q_2\sqrt{a^2+b^2}^3=-q_3a^3$ из чега би следило $q_3=q_3\frac{a^6}{\sqrt{a^2+b^2}^6}$, што је немогуће **[3п]**. Аналогно се добије да није могуће ни да q_3 буде стабилно, те следи да је q_2 стабилно **[1п]**. Онда важи: $q_1\sqrt{a^2+b^2}^3=-Qa^3$ и $q_2\sqrt{a^2+b^2}^3=-Qb^3$ **[2п]**. Следи: $q_1=-Q\frac{a^3}{\sqrt{a^2+b^2}^3}$ и $q_3=-Q\frac{b^3}{\sqrt{a^2+b^2}^3}$, али и $q_2=-q_1\frac{\sqrt{a^2+b^2}^3}{b^3}=Q\frac{a^3}{b^3}$ као и $q_2=-q_3\frac{\sqrt{a^2+b^2}^3}{a^3}=Q\frac{b^3}{a^3}$ те следи $b=a$ **[4п]**, $q_2=Q$ **[2п]** и $q_1=q_3=-\frac{Q}{\sqrt{2}^3}$ **[2п]**.

P2. Цилиндар може да се креће без ротације уколико је момент силе T_1, кинетичке силе трења која делује у тачки у којој цилиндар додирује земљу, компензован моментом силе статичког трења који делује у тачки у којој цилиндар додирује коцку, он онда има исти интензитет T_1 (слика 1). Применом II Њутновог закона у вертикалном правцу код цилиндра добијамо: $N_1=mg+\mathrm{T}_1$, па важи да је $\mathrm{T}_1=\mu(mg+\mathrm{T}_1)$ **[3п]**, тј. $\mathrm{T}_1=\frac{\mu}{1-\mu}mg$, као и $\mathrm{T}_2=\mu(mg-\mathrm{T}_1)$ **[3п]** када применимо II Њутнов закон у вертикалном правцу код коцке.
У хоризонталним правцима важи $ma=F-T_2-N_2$ **[3п]** и $ma=N_2-T_1$ **[3п]**, дакле $2ma=F-T_2-T_1=F-2\mu mg$, те следи да је $a=\frac{F}{2m}-\mu g$ **[2п]** и $N_2=T_1+ma=\frac{F}{2}+\frac{\mu^2}{1-\mu}mg$ **[2п]**. Услов када цилиндар не ротира је $\mu_0N_2\geq \mathrm{T}_1$ **[2п]** из чега следи $\mu_0\geq \frac{\mu}{\mu^2+\frac{(1-\mu)F}{2mg}}=0.223$ **[2п]**.



Слика 1.

P3. (а) На основу Бернулијеве једначине имамо: $p_0+\frac{F_a}{S_1}+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$ **[1п]**. Из једначине континуитета: $S_1v_1=S_3v_3$, тј. $r_1^2v_1=r_3^2v_3$, па важи $\frac{v_3}{v_1}=\frac{r_1^2}{r_3^2}$ **[1п]**. На основу познатог времена t за које цела доза мора да се нађе у крви, тј. времена за које се испразни шприц, под претпоставком да су запремине излазног дела шприца и игле занемарљиве у односу на запремину у којој се клип креће, може се одредити брзина $v_1=\frac{L_1}{t}$ **[1п]**, па је $v_3=\frac{r_1^2}{r_3^2}\frac{L_1}{t}$ **[1п]**. (Време проласка дозе кроз отвор шприца и иглу занемарљиво је у односу на време проласка кроз шприц: $\frac{L_1}{v_1}\gg\frac{L_2}{v_2}+\frac{L_3}{v_3}$.) Сила којом ветеринар мора да делује на клип је: $F_a=r_1{}^2\pi\left(p_V-p_0+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2\left(\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^4-1\right)\right)$ **[3п]**. Статички притисак у тачки A, на месту почетка излазног отвора шприца, може да се одредити помоћу Бернулијеве једначине $p_\mathrm{A}+\frac{\rho v_2^2}{2}=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$ **[1п]** и једначине континуитета $S_1v_1=S_2v_2$, где је $v_2=\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{L_1}{t}$. Статички притисак у тачки A је: $p_\mathrm{A}=p_V+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2r_1{}^4\left(\frac{1}{r_3^4}-\frac{1}{r_2^4}\right)$ **[2п]**.
(б) На основу Бернулијеве једначине имамо: $p_0+\frac{F_b}{S_1}+\frac{\rho v_1^2}{2}+\rho g(h+L_2+L_3)=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$ **[1п]**. Из услова задатка антибиотик се у крв мора убацивати константном брзином, а како се висина h мења у току времена закључује се да сила мора зависити од висине, тако да буде испуњен услов задатка. Закључује се да сила F_b мора имати облик: $F_b=F-\rho ghS_1$ **[2п]**, па једначина постаје $p_a+\frac{F_a}{S_1}+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$. Затим се до вредности силе долази на сличан начин као у делу задатка под а), уочава се да је $F_b=F_a-\rho g(h+L_2+L_3)r_1{}^2\pi$, тј. $F_b=r_1{}^2\pi\left(p_V-p_0+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2\left(\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^4-1\right)\right)-\rho g(h+L_2+L_3)r_1{}^2\pi=r_1{}^2\pi\left(p_V-p_0+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2\left(\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^4-1\right)-\rho g(h+L_2+L_3)\right)$ **[4п]**, при чему се h мења од $h_{\text{почетно}}=L_1$ до $h_{\text{крајње}}=0$.
Статички притисак у тачки B, на месту почетка излазног отвора шприца, може да се одредити помоћу Бернулијеве једначине $p_b+\frac{\rho v_2^2}{2}+\rho g(L_2+L_3)=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$ и једначине континуитета $S_1v_1=S_2v_2$, где је $v_2=\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{L_1}{t}$. Статички притисак у тачки B је: $p_b=p_V+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2r_1{}^4\left(\frac{1}{r_3^4}-\frac{1}{r_2^4}\right)-\rho g(L_2+L_3)$**[2п]**. Поређењем видимо да је $F_b<F_a$ за све вредности h те се закључује да ветеринар врши мањи рад уколико даје вакцину тако што је постави верикално **[1п]**.

P4. (а) У задатку је речено да је у случају када је полупречник алвеоле R_0, цела унутрашња површина алвеола је покривена монослојем сурфактанта. За $R\leq R_0$ формира се неколико монослојева сурфактаната једних над другима и тада важи $\gamma=\gamma_S$. Када је $R>R_0$ сурфактант не може да буде у слоју тањем од монослоја, па је само део површине покривен сурфактантом, а на остатку повшине налази се вода **[2п]**.

Допунски притисак испод унутрашње површине мехура је $\Delta p = \frac{2\cdot\gamma}{R}$ **[3п]**.

На основу теоријског увода важи: $R_0 = \frac{R_{eq}}{\sqrt{3}} = \frac{R_{max}}{4\sqrt{3}}$ **[1п]**. Рад потребан да би се алвеола проширила за површину ΔS износи $\Delta A = \gamma \cdot \Delta S$ **[1п]** и једнак је енергији коју је потребно уложити за ширење мехура. У случају одсуства сурфактанта коефицијент површинског напона је γ_w, а у случају његовог присуства γ_s. Уштеда енергије износи:

$\Delta E = \Delta A_1 - \Delta A_2 = (\gamma_w - \gamma_s) \cdot 4\pi \left(\frac{R_{max}^2}{48} - R_{col}^2\right) = 1.29 \cdot 10^{-10} J$ **[3п]**.

(б) Потребно је одредити вредност коефицијента површинског напона у овом случају јер је $R = 0.03$ mm $> R_0 \approx 0.014$ mm. У случају да укупну површину $S = S_1 + S_2$ покривају 2 супстанце, површину S_1 супсанца површинског напона γ_1, површину S_2 супсанца површинског напона γ_2, средња вредност површинског напона може се преставити као: $\gamma = \frac{\gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2}{S}$. За наш случај важи: $\gamma(R) = \frac{4\pi {R_0}^2 \gamma_s + (4\pi R^2 - 4\pi {R_0}^2)\gamma_w}{4\pi R^2}$, тј. $\gamma(R) = \gamma_w - \frac{{R_0}^2}{R^2}(\gamma_w - \gamma_s)$ **[5п]**.

Допунски притисак испод унутрашње површине мехура износи:

$\Delta p = \frac{2\cdot\gamma(R)}{R} = \frac{2}{R}\left(\gamma_w - \frac{R_{max}^2}{48R^2}(\gamma_w - \gamma_s)\right) \approx 3.7\ kPa$ **[4п+1п]**.

P5. Количина топлоте коју ослободи грејач у току времена t, троши се на испаравање воде и на вршење рада потребног да се запремина воде која испарава повећа од вредности V_t, која представља запремину течности, на V_p, запремину водене паре. Испаравање се одвија на константном притиску p па важи $\Delta A = p(V_p - V_t) \approx pV_p$, јер је $V_p \gg V_t$ **[1п]**.

Водену пару третирамо као идеалан гас, па важи: $\Delta A = \frac{RT_{100}}{M}\Delta m$ **[1п]**.

Занемарујући количину топлоте коју систем одаје због хлађења, важи:

$\Delta Q = Pt = (q_i + \frac{RT_{100}}{M})\Delta m$ **[3п]**, па промену масе у току времена можемо представити јендачином: $\mathrm{m(t)} = \mathrm{m}_0 - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{q_i} + \frac{\mathrm{RT_{100}}}{\mathrm{M}}} t$ **[1п]**.

Анализирајући текст задатка и вредности мерених података, закључује се да је над три почетно различите масе воде вршено мерење промене масе у току времена, користећи увек исти масени корак од по 4 грама. Формулу која описује промену масе у току времена можемо записати и у облику $m_0 - m = \frac{P}{q_i + \frac{RT_{100}}{M}} t$ из чега се закључује да се из графика зависности промене масе од времена, користећи вредност коефицијнта правца b, добија вредност латентне топлоте испаравања воде. $q_i = \frac{P}{b} - \frac{RT_{100}}{M}$ **[1п]**, где је $T_{100} = 373.15$ K, а $M = 18 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$, па је $\frac{RT_{100}}{M} = 172354\ \frac{\mathrm{J}}{kg}$

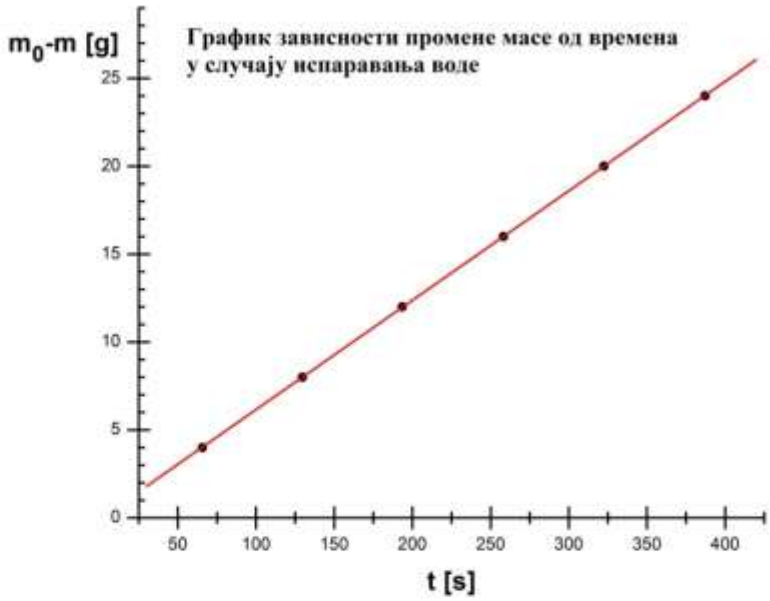
Пре графичког представљања података мерене вредности се морају „средити“ као што је дато у табели **[3п]**:

N	$\mathbf{m_0 - m}$ [g]	t_i [s]	t_{sr} [s]	Δt [s]	t [s]
1	4	66.02 65.52 65.45	65.66333	0.3567 0.4	65.7
2	8	130.25 129.55 129.20	129.6667	0.5833 0.6	129.7
3	12	194.11 193.55 193.00	193.5533	0.5567 0.6	193.6
4	16	258.84 258.06 258.12	258.34	0.5	258.3
5	20	322.92 322.58 321.90	322.4667	0.5667 0.6	322.5
6	24	386.80 387.10 387.30	387.0667	0.3	387.1

Црта се график зависности промене масе од времена. На основу распореда тачака види се да се график може фитовати на линеарну функцију облика: $y = a + bx$. Из коефицијента правца, b, може одредити вредност латентне топлоте испаравања воде. $q_i = \frac{150\ \mathrm{W}}{b} - 172354\ \frac{\mathrm{J}}{kg}$.

Са графика: график са правилно унетим вредностима (табела горе) **[4п]** се бирају се две тачке, прва између прве две експерименталне тачке и друга између последње две експерименталне тачке и очитавају се њихове координате. Одабране тачке:

$A(94s; 5{,}7g)$ и $B(370{,}5s; 23g)$ **[1п]**



За коефицијент правца се добија: $b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(23-5.7)g}{(370.5-94)s} = 0.06257\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$ **[1п]**.

Грешка:

$\Delta b = \left(\frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{|x_B - x_A|} + \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{|y_B - y_A|}\right) b = \left(\frac{(0{,}6+0{,}6)s}{|370.5-94|\mathrm{s}} + \frac{(0{,}5+0{,}5)g}{|23-5.7|g}\right) \cdot 0.06257\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}} = \ 0.00389\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$

$\Delta b \rightarrow\ \ 0{,}004\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$

У наведеном изразу за грешку коефицијента правца вредности $\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A, \Delta y_B$ су апсолутне грешке координата тачака A и B. Свака од ових грешака једнака је већој вредности од одговарајућих грешака њој суседних тачака.

Коначно, коефицијент правца се може записати као: $b = (0.063 \pm 0{,}004\ ) \cdot 10^{-3}\,\frac{kg}{\mathrm{s}}$ **[1п]**.

За вредност латентне топлоте испаравања воде добија се: $q_i = \frac{150\ \mathrm{W}}{b} - 172354\ \frac{\mathrm{J}}{kg} = 2224961\,\frac{\mathrm{J}}{kg}$ **[1п]**.

Грешка за q_i: $\Delta q_i = \Delta\left(\frac{P}{b}\right) + \Delta\left(\frac{RT_{100}}{M}\right) = \Delta\left(\frac{P}{b}\right) = \left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta b}{b}\right) \cdot \frac{P}{b} = \frac{\Delta P}{b} + \frac{P \cdot \Delta b}{b^2}$ **[1п]**

$\Delta q_i = \left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta b}{b}\right) \cdot \frac{P}{b} = 196988\ \frac{\mathrm{J}}{kg} \rightarrow 200000\ \frac{\mathrm{J}}{kg}$.

Коначно, резултат се може записати као: $q_i = (2.2 \pm 0.2) \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{kg}$ **[1п]**

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2016/2017. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије

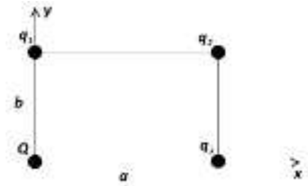
II РАЗРЕД

ЗАДАЦИ – бозонска категорија

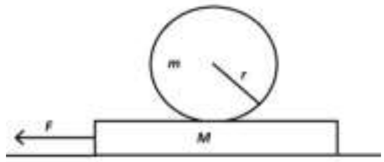
ДРЖАВНИ НИВО
25.03.2017.

1. У почетној тачки координатног система стоји наелектрисање Q. Потребно је додати још 3 налелектрисања q_1, q_2 и q_3 у координатама $(0, b)$, (a, b) и $(a, 0)$, респективно (слика 1), тако да на Q и на још једно наелектрисање (q_1, q_2 или q_3) не делује никаква сила. Наћи q_1, q_2, q_3 и b у фукнцији од Q и a.

(20 поена)



Слика 1.



Слика 2.

2. На столу се налази даска масе M, на којој се налази цилиндар масе m и полупречника r (слика 2). Између даске и стола нема трења, док је коефицијент трења између цилиндра и даске μ. Нека на даску почне да делује сила F налево, као на слици 2. Нека је a_1 убрзање даске налево, a убрзање цилиндра налево и α угаоно убрзање цилиндра у смеру казаљке на сату. Момент инерције цилиндра износи $\frac{1}{2}mr^2$.

(а) Наћи релацију између a_1, a и α.

(б) Под претпоставком да се цилиндар котрља без проклизавања, наћи a_1, a и α и за које вредности силе F важи овај режим.

(в) Под претпоставком да цилиндар проклизава, наћи a_1, a и α и за које вредности силе F важи овај режим.

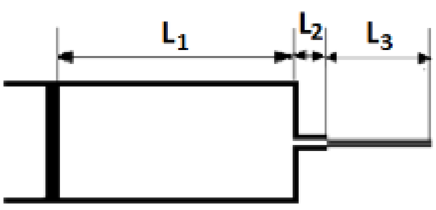
(20 поена)

3. Ветеринар болесном коњу убризгава течни антибиотик густине ρ директно у крв (слика 3), при чему цела доза антибиотика мора да се нађе у крви након времена t од покретања шприца. Шприц се састоји од дела где је клип, полуречника r_1 и дужине L_1, излазног отвора полуречника r_2 и дужине L_2 и игле r_3 и дужине L_3. Игла се пробија кроз кожу и остварује контакт са веном где је притисак p_V. (Запремина дела у коме је клип је много већа од преосталог дела вакцине.)

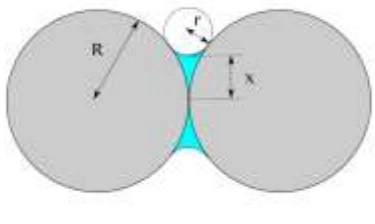
(а) Под претпоставком да је ветеринар шприц поставио хоризонтално и да делује константном силом F_a, наћи вредност силе F_a и величину статичког притиска на почетку излазног отвора шприца p_a.

(б) Под претпоставком да је ветеринар шприц поставио вертикално надоле и да делује силом F_b таквом да је брзина кретања клипа константна, наћи вредност силе F_b и величину статичког притиска на почетку излазног отвора шприца p_b у зависности од висине клипа h изнад излазног отвора. Утврдити који од два начина давања вакцине захтева мањи укупан рад.

(20 поена)



Слика 3.



Слика 4.

4. Позната је чињеница да је дворце у песку лакше правити од влажног песка него од сувог. Могући разлог је вода која међусобно везује зрна песка. На слици 4 је приказана ситуација на нивоу пешчаних зрна, при чему је R полупречник зрна, r полупречник водене површине и x

полупречник пресека водене површине и равни која додирује два зрна песка. Претпоставити да је квашење потпуно, тј. да је угао између воде и песка $\theta = 0^{o}\mathrm{C}$.
(а) Наћи r у функцији од R и x.
(б) Наћи притисак у води ако је површински напон γ. Атмосферски притисак је p_0.
(в) Колику је силу потребно применити да би се одвојила два зрна песка?
(г) Да би се градила кула од песка која се неће крунити или срушити потребно је да сила између два зрна буде јача од силе гравитације. Наћи максималнни полупречник зрна песка R који ово омогућава. Густина зрна песка је $\rho = 2650\ \mathrm{kg/m^3}$, површински напон воде износи $\gamma = 72\mathrm{mN/m}$ и гравитационо убрзање је $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. Сматрати да је квашење мало. На основу добијене величине за R, одговорити да ли је површински напон адекватан механизам који објашњава лепљивост влажног песка.

(20 поена)

5. Вода у термос боци се греје помоћу грејача који је монтиран са унутрашње стране термос боце. Средња снага грејача износи $P = (150 \pm 3)\ \mathrm{W}$. Боца са водом се налази на ваги тачности $\Delta \mathrm{m} = 0.5\ \mathrm{g}$. Када температура достигне $100^{o}\mathrm{C}$ прати се промена масе у функцији од времена. Мерење се понавља 3 пута са различитим почетним масама воде $m_{01} = 640\ \mathrm{g}$, $m_{02} = 652\ \mathrm{g}$ и $m_{03} = 639\ \mathrm{g}$. Хронометар (уређај за мерење времена) се при сваком од три мерења покреће у тренутку када температура воде достигне $100^{o}\mathrm{C}$. На поклопцу постоји мали отвор кроз који водена пара може да излази. Грешка појединачног мерења времена је $\Delta \mathrm{t} = 0.2\ \mathrm{s}$. На основу свих датих података одредити латентну топлоту испаравања воде и њену грешку. Универзална гасна константа износи $R = 8.314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$.
Напомена: Сматрати да је температура испаравања воде тачно $100^{o}\mathrm{C}$ *и да вода не испарава на нижим температурама. Третирати водену пару као идеалан гас.*

$\mathrm{m_1}$[g]	$\mathrm{t_1}$ [s]
636.0	66.02
632.0	130.25
628.0	194.11
624.0	258.84
620.0	322.92
616.0	386.80

$\mathrm{m_2}$ [g]	$\mathrm{t_2}$ [s]
648.0	65.52
644.0	129.55
640.0	193.55
636.0	258.06
632.0	322.58
628.0	387.10

$\mathrm{m_3}$ [g]	$\mathrm{t_3}$ [s]
635.0	65.45
631.0	129.20
627.0	193.00
623.0	258.12
619.0	321.90
615.0	387.30

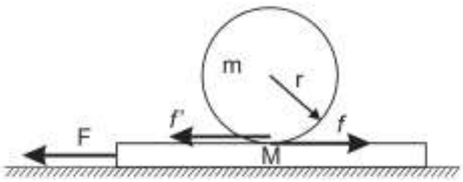
(20 поена)

Задатке припремили: *Нора Trкља,* Физички факултет, Београд*; др Никола Петровић*, Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Никола Петровић*, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење за средње школе: *Доц. др Божидар Николић,* Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2016/2017. ГОДИНЕ

P1. Наелектрисање Q има услове стабилности по x и y оси. По y оси имамо $k\frac{q_1}{b^2}+k\frac{q_2}{a^2+b^2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ **[2п]**, те добијамо $q_1\sqrt{a^2+b^2}^3=-q_2b^3$ **[2п]**, и по x оси $q_3\sqrt{a^2+b^2}^3=-q_2a^3$ **[2п]**. Ако би поред Q и налелектрисање q_1 било стабилно онда би важило $Q\sqrt{a^2+b^2}^3=-q_3b^3$ и $q_2\sqrt{a^2+b^2}^3=-q_3a^3$ из чега би следило $q_3=q_3\frac{a^6}{\sqrt{a^2+b^2}^6}$ што је немогуће **[3п]**. Аналогно се добије да није могуће ни да q_3 буде стабилно, те следи да је q_2 стабилно **[1п]**. Онда важи: $q_1\sqrt{a^2+b^2}^3=-Qa^3$ и $q_2\sqrt{a^2+b^2}^3=-Qb^3$ **[2п]**. Следи: $q_1=-Q\frac{a^3}{\sqrt{a^2+b^2}^3}$ и $q_3=-Q\frac{b^3}{\sqrt{a^2+b^2}^3}$, али и $q_2=-q_1\frac{\sqrt{a^2+b^2}^3}{b^3}=Q\frac{a^3}{b^3}$ као и $q_2=-q_3\frac{\sqrt{a^2+b^2}^3}{a^3}=Q\frac{b^3}{a^3}$ те следи $b=a$ **[4п]**, $q_2=Q$ **[2п]** и $q_1=q_3=-\frac{Q}{\sqrt{2}^3}$ **[2п]**.

P2(а) Посматрајмо тачку контакта између цилиндра и даске. Из услова непроклизавања следи да ће, ако се цилиндар помери удесно за растојање l и ротира за угао θ, померај тачке на дасци бити $l_1=l+r\theta$ **[2п]**. Ако претпоставимо кретање из мировања важи: $l_1=a_1\frac{t^2}{2}$, $l=a\frac{t^2}{2}$ и $\theta=\alpha\frac{t^2}{2}$, те добијамо $a_1=a+r\alpha$ **[1п]**.
(б) Нека је f статичка сила трења између цилиндра и даске. У тачки контакта на даску сила трења делује удесно, а на цилиндар улево (Слика 1). Имамо: $Ma_1=F-f$ **[2п]**, $ma=f$ **[2п]** и $\frac{1}{2}mr^2\alpha=fr$ **[2п]**, те комбиновањем ових једначина и $a_1=a+r\alpha$ добијамо $M\frac{f}{m}+Mr\frac{2f}{mr}=F-f$ те $f=\frac{mF}{m+3M}$ **[1п]**. Следи $a_1=\frac{3F}{m+3M}$, $a=\frac{F}{m+3M}$ и $\alpha=\frac{2F}{(m+3M)r}$ **[2п]**. Услов за овај режим је $f\le\mu mg$, тј. $F\le\mu(m+3M)g$ **[2п]**.
(в) Сада имамо да је $f=\mu mg$ **[1п]** кинетичка сила трења, те имамо $Ma_1=F-\mu mg$, $ma=\mu mg$ и $\frac{1}{2}mr^2\alpha=\mu mgr$, те $a_1=\frac{F-\mu mg}{M}$, $a=\mu g$ и $\alpha=\frac{2\mu g}{r}$ **[3п]**. Услов је да даска проклизава налево, тј. $a_1>a+r\alpha$, из чега следи $F>\mu(m+3M)g$ **[2п]**.



Слика 1.

P3. (а) На основу Бернулијеве једначине имамо: $p_0+\frac{F_a}{S_1}+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$ **[1п]** (p_0 је атмосферски притисак). Из једначине континуитета: $S_1v_1=S_3v_3$, тј. $r_1^2v_1=r_3^2v_3$, па важи $\frac{v_3}{v_1}=\frac{r_1^2}{r_3^2}$ **[1п]**. На основу познатог времена t за које цела доза мора да се нађе у крви, тј. времена за које се испразни шприц, под претпоставком да су запремине излазног дела шприца и игле занемарљиве у односу на запремину у којој се клип креће, може се одредити брзина $v_1=\frac{L_1}{t}$ **[1п]**, па је $v_3=\frac{r_1^2}{r_3^2}\frac{L_1}{t}$ **[1п]**. (Време проласка дозе кроз отвор шприца и иглу занемарљиво је у односу на време проласка кроз шприц: $\frac{L_1}{v_1}\gg\frac{L_2}{v_2}+\frac{L_3}{v_3}$.) Сила којом ветеринар мора да делује на клип је: $F_a={r_1}^2\pi\left(p_V-p_0+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2\left(\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^4-1\right)\right)$ **[3п]**. Статички притисак у тачки А, на месту почетка излазног отвора шприца, може да се одредити помоћу Бернулијеве једначине $p_a+\frac{\rho v_2^2}{2}=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$ **[1п]** и једначине континуитета $S_1v_1=S_2v_2$, где је $v_2=\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{L_1}{t}$. Статички притисак у тачки А је: $p_a=p_V+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2{r_1}^4\left(\frac{1}{r_3^4}-\frac{1}{r_2^4}\right)$ **[2п]**.

(б) На основу Бернулијеве једначине имамо: $p_0+\frac{F_b}{S_1}+\frac{\rho v_1^2}{2}+\rho g(h+L_2+L_3)=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$ **[1п]**. Из услова задатка антибиотик се у крв мора убацивати константном брзином, а како се висина h мења у току времена закључује се да сила мора зависити од висине, тако да буде испуњен услов задатка. Закључује се да сила F_b мора имати облик: $F_b=F-\rho ghS_1$ **[2п]**, па једначина постаје $p_a+\frac{F_a}{S_1}+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$. Затим се до вредности силе долази на сличан начин као у делу задатка под а), уочава се да је $F_b=F_a-\rho g(h+L_2+L_3){r_1}^2\pi$, тј. $F_b={r_1}^2\pi\left(p_V-p_a+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2\left(\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^4-1\right)\right)-\rho g(h+L_2+L_3){r_1}^2\pi={r_1}^2\pi\left(p_V-p_0+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2\left(\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^4-1\right)-\rho g(h+L_2+L_3)\right)$ **[3п]**, при чему се h мења од $h_{\text{почетно}}=L_1$ до $h_{\text{крајње}}=0$.
Статички притисак у тачки А, на месту почетка излазног отвора шприца, може да се одредити помоћу Бернулијеве једначине $p_b+\frac{\rho v_2^2}{2}+\rho g(L_2+L_3)=p_V+\frac{\rho v_3^2}{2}$ и једначине континуитета $S_1v_1=S_2v_2$, где је $v_2=\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{L_1}{t}$. Статички притисак у тачки А је: $p_b=p_V+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L_1}{t}\right)^2{r_1}^4\left(\frac{1}{r_3^4}-\frac{1}{r_2^4}\right)-\rho g(L_2+L_3)$**[2п]**.
У првом случају рад силе износи $A_1=F_a\cdot L_1={r_1}^2\pi L_1(p_V-p_0+\frac{\rho}{2}(\frac{L}{t})^2\left((\frac{r_1}{r_3})^4-1\right))$, док у случају када је вакцина постављена хоризонтално укупан рад износи: $A_1=F_{sr}\cdot L_1={r_1}^2\pi L_1\left(p_V-p_0+\frac{\rho}{2}\left(\frac{L}{t}\right)^2\left(\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^4-1\right)-\rho g\left(\frac{L_1}{2}+L_2+L_3\right)\right)$.Закључује се да ветеринар врши мањи рад уколико даје вакцину тако што је постави верикално **[2п]**.

P4. (а) Са слике се види да се полупречник водене површине, r, може се изразити као: $(x+r)^2+R^2=(R+r)^2$, тј. $r=\frac{x^2}{2(R-x)}$ **[3п]**.
(б) Применом Лапласовог закона добија се притисак у води износи $p_т=p_0+\gamma\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{r}\right)$ **[2п]**, тј. $p_т=p_0+\frac{\gamma}{x}(3-\frac{2R}{x})$ **[3п]**.

(в) У циљу одређивања силе потребне за раздвајање два зрна песка разматрана у овом задатку, замислити да се систем пресече помоћу вертикалне равни која пролази између две сфере. Свака сфера је механички стабилна и важи: $p_0\pi x^2 + 2\pi x\gamma = \left(p_0 + \frac{\gamma}{x}(3 - \frac{2R}{x})\right)\pi x^2 + F$ **[5п]**. Добија се: $F = \gamma\pi(2R - x)$ **[2п]**.

(г) Услов равнотеже је $F = 2\gamma\pi R = mg = \frac{4}{3}\rho R^3\pi g \ (x \ll R)$ **[2п]**, те је $R = \sqrt{\frac{3\gamma}{2\rho g}} = 0{,}208mm$ **[1п]**. Закључује се да је ово истог реда величине као типично зрно песка, следи да површински напон заиста адекватно објашњава особине влажног песка **[2п]**.

Р5. Количина топлоте коју ослободи грејач у току времена t, троши се на испаравање воде и на вршење рада потребног да се запремина воде која испарава повећа од вредности V_t, која представља запремину течности, на V_p, запремину водене паре. Испаравање се одвија на константном притиску p па важи $\Delta A = p(V_p - V_t) \approx pV_p$, јер је $V_p \gg V_t$ **[1п]**.

Водену пару третирамо као идеалан гас, па важи: $\Delta A = \frac{RT_{100}}{M}\Delta m$ **[1п]**.
Занемарујући количину топлоте коју систем одаје због хлађења, важи:
$\Delta Q = Pt = (q_i + \frac{RT_{100}}{M})\Delta m$ **[3п]**, па промену масе у току времена можемо представити јендачином: $\mathrm{m(t)} = \mathrm{m_0} - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{q_i} + \frac{\mathrm{RT_{100}}}{\mathrm{M}}} t$ **[1п]**.

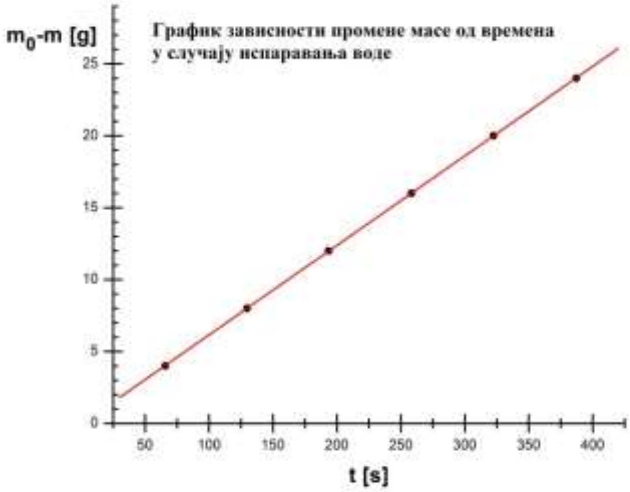
Анализирајући текст задатка и вредности мерених података, закључује се да је над три почетно различите масе воде вршено мерење промене масе у току времена, користећи увек исти масени корак од по 4 грама. Формулу која описује промену масе у току времена можемо записати и у облику $m_0 - m = \frac{P}{q_i + \frac{RT_{100}}{M}} t$ из чега се закључује да се из графика зависности промене масе од времена, користећи вредност коефицијнта правца b, добија вредност латентне топлоте испаравања воде. $q_i = \frac{P}{b} - \frac{RT_{100}}{M}$ **[1п]**, где је $T_{100} = 373.15$ K, а $M = 18 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$, па је $\frac{RT_{100}}{M} = 172354\ \frac{\mathrm{J}}{kg}$

Пре графичког представљања података мерене вредности се морају „средити“ као што је дато у табели **[3п]**:

N	$\mathbf{m_0 - m}$ [g]	t_i [s]	t_{sr} [s]	Δt [s]	t [s]
1	4	66.02 65.52 65.45	65.66333	0.3567 0.4	65.7
2	8	130.25 129.55 129.20	129.6667	0.5833 0.6	129.7
3	12	194.11 193.55 193.00	193.5533	0.5567 0.6	193.6
4	16	258.84 258.06 258.12	258.34	0.5	258.3
5	20	322.92 322.58 321.90	322.4667	0.5667 0.6	322.5
6	24	386.80 387.10 387.30	387.0667	0.3	387.1

Црта се график зависности промене масе од времена. На основу распореда тачака види се да се график може фитовати на линеарну функцију облика: $y = a + bx$. Из коефицијента правца, b, може одредити вредност латентне топлоте испаравања воде. $q_i = \frac{150\ \mathrm{W}}{b} - 172354\ \frac{\mathrm{J}}{kg}$.

Са графика: график са правилно унетим вредностима (табела горе) **[4п]** се бирају се две тачке, прва између прве две експерименталне тачке и друга између последње две експерименталне тачке и очитавају се њихове координате. Одабране тачке: $A(94s; 5{,}7g)$ и $\mathrm{B}(370{,}5s; 23g)$ **[1п]**



За коефицијент правца се добија: $b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(23-5.7)g}{(370.5-94)s} = 0.06257\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$ **[1п]**.

Грешка:

$\Delta b = \left(\frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{|x_B - x_A|} + \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{|y_B - y_A|}\right) b = \left(\frac{(0,6+0,6)s}{|370.5-94|s} + \frac{(0,5+0,5)g}{|23-5.7|g}\right) \cdot 0.06257\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}} = \ 0.00389\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$

$\Delta b \rightarrow\ \ 0,004\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$

У наведеном изразу за грешку коефицијента правца вредности $\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A, \Delta y_B$ су апсолутне грешке координата тачака А и В. Свака од ових грешака једнака је већој вредности од одговарајућих грешака њој суседних тачака.

Коначно, коефицијент правца се може записати као: $b = (0.063 \pm 0,004\ ) \cdot 10^{-3}\frac{kg}{\mathrm{s}}$ **[1п]**.

За вредност латентне топлоте испаравања воде добија се: $q_i = \frac{150\ \mathrm{W}}{b} - 172354\ \frac{\mathrm{J}}{kg} = 2224961\frac{\mathrm{J}}{kg}$ **[1п]**.

Грешка за q_i: $\Delta q_i = \Delta\left(\frac{P}{b}\right) + \Delta\left(\frac{RT_{100}}{M}\right) = \Delta\left(\frac{P}{b}\right) = \left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta b}{b}\right) \cdot \frac{P}{b} = \frac{\Delta P}{b} + \frac{P \cdot \Delta b}{b^2}$ **[1п]**

$\Delta q_i = \left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta b}{b}\right) \cdot \frac{P}{b} = 196988\ \frac{\mathrm{J}}{kg} \rightarrow 200000\ \frac{\mathrm{J}}{kg}$.

Коначно, резултат се може записати као: $q_i = (2.2 \pm 0.2) \cdot 10^6\frac{\mathrm{J}}{kg}$ **[1п]**