

## Општа упутства: експериментални тест

12. јули, 2016

Експериментални тест се ради 5 сати и носи 20 поена.

### Пре теста

- Не смете да отворате коверте са задацима пре звучног сигнала који означава почетак такмичења.
- Почетак и крај теста ће бити означен звучним сигналом. Такође, биће обавештења на сваки сат о времену које је преостало за рад, као и петнаест минута пре краја теста (пре звучног сигнала).

### Током теста

- Обезбеђени су посебни листови предвиђени за писање одговора. Унесите резултате проучавања у одговарајуће табеле, поља или графике на одговарајућем листу за одговоре (означеном са А). За сваки задатак имате посебан празан папир за детаљнији рад (означен са W). Водите рачуна да увек користите папир за рад који припада задатку који тренутно радите (проверите број задатка у заглављу). Ако сте на било ком папиру написали нешто што не желите да буде прегледано, прецртајте то.
- Трудите се да будете што је могуће сажетији у одговорима: користите једначине, логичке операције и скице да представите ваша размишљања, кад год је то могуће. Избегавајте дугачке реченице.
- Није потребно одређивати експерименталне грешке осим ако се то експлицитно не тражи. Ипак, тражи се да дате прихватљив број значајних цифара када наводите бројне вредности. Такође, треба сами да одлучите о прихватљивом броју мерених тачака или поновљених мерења, ако за то не постоје посебна упутства.
- Требало би да сте у стању да често решите касније делове задатка иако претходни делови нису решени.
- Није дозвољено напуштање радног места без дозволе. Ако вам је потребна било каква помоћ (допуњавање боце са водом, покварени калкулатор, потреба за тоалетом итд.), привуците пажњу водичу тима тако што ћете поставити једну од три заставице у држач, који се налази на вашем одељењу ("Допуните ми боцу, молим вас", "Морам да идем у тоалет, молим вас" или "Треба ми помоћ, молим вас" у свим осталим ситуацијама).

### На крају теста

- На крају теста морате да престанете са писањем.
- За сваки задатак, сложите одговарајуће листове у следећем редоследу: омот (C), питања (Q), одговори (A), радни листови (W).
- Ставите све листове везане за један задатак у исти коверат. Ставите општа упутства (G) у преостали посебан коверат. Будите сигурни да се ваша шифра види кроз прозорчић на сваком коверту. Предајте и празне листове. Није дозвољено да изнесете било који лист са теста.

- Ставите ваш прибор за писање (2 хемијске оловке, 1 фломастер, 1 оловку, 1 маказе, 1 лењир, 2 пара чепова за уши) као и обезбеђени калкулатор и ваш лични калкулатор (ако га имате) назад у провидну торбицу.
- Сачекајте за вашим столом док не покупе ваше коверте. Када се сви коверти сакупе ваш водич ће вас извести из сале за тест. Понесите прибор за писање са собом и предајте га на излазу. Понесите, такође, и боцу са водом.

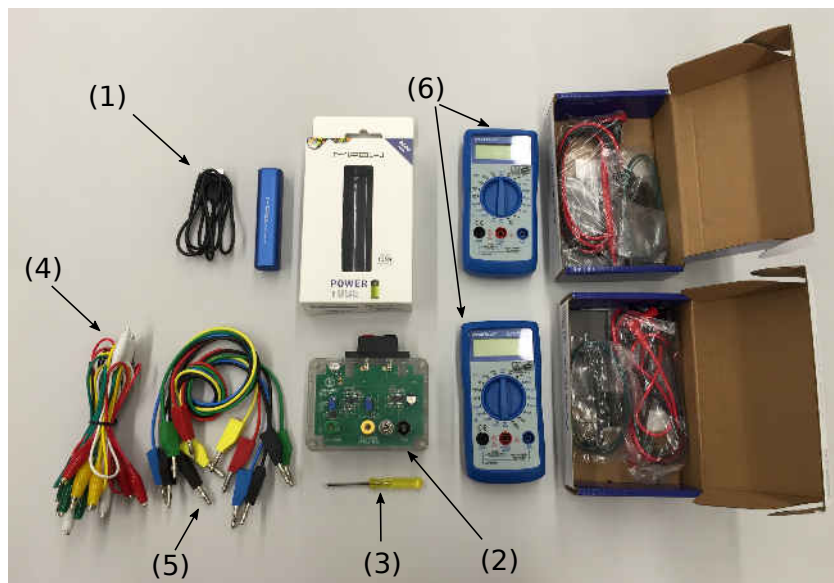
## Ставке

<b>Експеримент Е-I:</b>	Електрична проводност у две димензије	10 поена
<b>Експеримент Е-II:</b>	Перлице које скачу - Модел фазних прелаза и нестабилности	10 поена

Део прибора за експеримент Е-I и Е-II је исти. Поред осталих, извор и генератор сигнала се користе у оба експеримента, али у различитим поставкама.

Упозорење: Док распакујете кутију не подижите уређај са звучником држећи га за пластични цилиндар који је причвршћен за мембрану.

## Прибор који се користи у оба експеримента

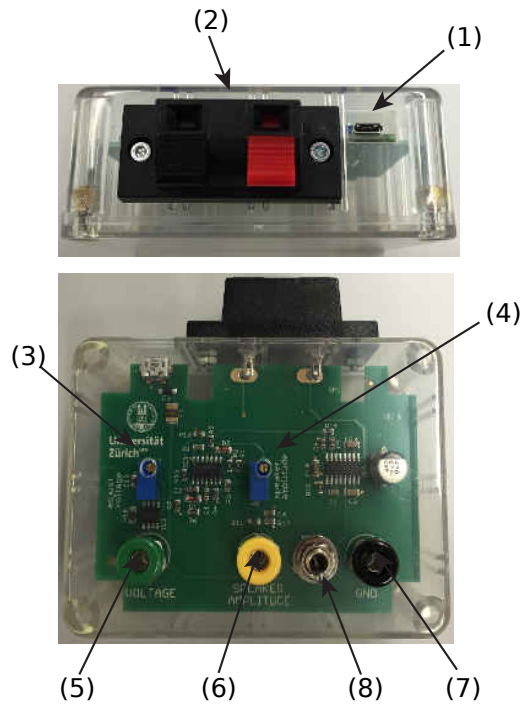


Слика 1: Заједнички прибор за оба експеримента.

1. Батерија са USB каблом
2. Подесиви генератор сигнала који напаја батерија
3. Мали шрафцигер
4. Десет каблова са крокодилским штипаљкама
5. Шест каблова са 4 mm прикључцима
6. Два дигитална унимера

Такође можете да користите било шта од приложеног прибора да бисте урадили задатак.

## Генератор сигнала



Слика 2.

1. USB конектор за напајање генератора сигнала
2. Прикључци звучника (користе се само у E-II)
3. Потенциометар за подешавање константног напона (користи се само у E-I)
4. Потенциометар за подешавање амплитуде сигнала (користи се само у E-II)
5. Прикључак за једносмерни напон (користи се само у E-I)
6. Прикључак за подешавање амплитуде осциловања (користи се само у E-II)
7. Заједнички прикључак за уземљење
8. Прекидач за укључивање звучника

Да бисте прикључили напајање на генератор сигнала, прикључите батерију користећи USB кабл, на USB прикључак на генератору сигнала (1).

Уочите да је неколико кругова потенциометра потребно да се пређе са једног краја опсега на други. Потенциометар механичке границе за крај опсега.

## Дигитални унимери

Дигитални унимери се користе за мерење јачине струје и напона. Увек прикључите два кабла у прикључке означене са "VmAΩ" и "GND" и изаберите current/voltage (струја/напон) као и опсег мерења.

## Електрична проводност у две димензије (10 поена)

Пре него што кренете са решавањем проблема молимо вас да прочитате општа упутства која се налазе у посебној коверти.

### Увод

У потрази за развојем нове генерације уређаја који се заснивају на полупроводничкој технологији, као што су компјутерски чипови или соларне ћелије, истраживачи траже нове материјале који показују истакнуте транспортне особине (нпр. мала електрична специфична отпорност). Мерење ових особина се врше на узорцима коначних димензија, са контактима коначне отпорности и при специјалним геометријама. Ови ефекти се морају узети у обзир како би се донели закључци о правим карактеристикама материјала. Поред тога, танки филмови могу показивати различите особине у односу на 3D материјале.

У овом задатку, истражићемо електричне особине одређених материјала. Користћемо следеће дефиниције:

- **Отпорност  $R$ :** Отпорност је електрична особина узорка или уређаја. Представља величину коју меримо на одређеном узорку са датим димензијама.
- **Специфична отпорност  $\rho$ :** Специфична отпорност је особина материјала која одређује њену отпорност. Ова величина зависи од врсте материјала и од спољашњих параметара као што су температура, али не зависи од геомерије (и величине) узорка.

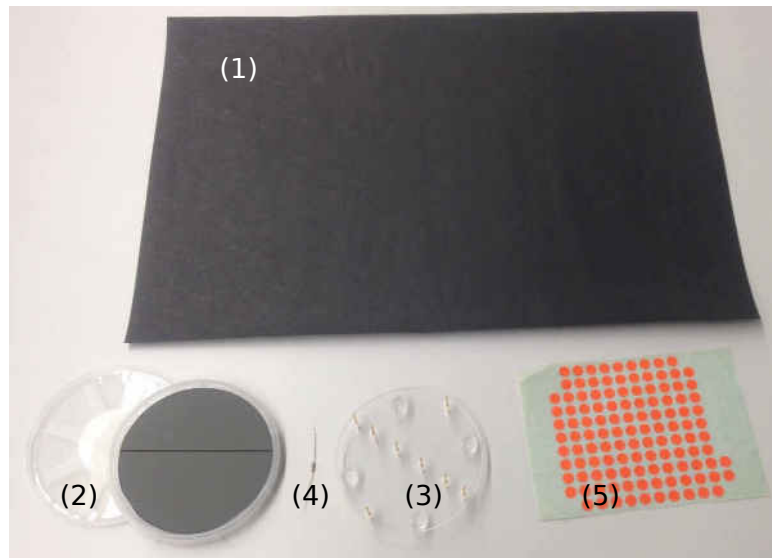
У овом задатку, мерићемо такозвану специфичну отпорност танког филма (sheet resistivity). Ова величина представља специфичну отпорност подељену са дебелином веома танког листа (слоја).

Истражићемо утицај следећих параметара на електричну отпорност танких филмова:

- начина повезивања електричног кола,
- геометрије узорака,
- и димензије узорака.

Лист проводног папира и силикон обложен металом ће се користити као узорци.

## Апаратура



Слика 1: Додатна опрема за овај експеримент.

1. Папир обложен графитом (тако да постаје проводан)
2. Силицијум обложен танким филмом хрома (налзи се у посебној посуди)
3. Држач од плексигласа са 8 струјних прикључака
4. Омски отпорник
5. Обојене налепнице

## Важне напомене

- Силицијум обложен танким филмом хрома се лако може оштетити уколико вам испадне. Не пипати и не гребати сјајну металну површину.

## Упутства

- У овом експерименту, генератор сигнала ће бити коришћен као извор напона једносмерне струје. У овом моду, сигнал генератор даје константан напон између напонске утичнице (voltage socket) (5) и уземљења (GND socket) (7).

(Бројеви се односе на фотографију у општим упутствима.)

- Напон (опсег: 0- 5 V) се може мењати помоћу потенциометра (означеног са *подешавање напона (adjust voltage)*) помоћу шрафцигера (3).
- При вршењу експеримента, будите сигурни да сте звучник (loudspeaker drive section) сигнал генератора ислучили помоћу прекидача (8). Ово се може проверити мерењем напона између утичнице за звучник (speaker amplitude monitor socket) (6) и уземљења (GND socket) (7). Уколико је звучник искључен напон између ова два излаза ће бити једнак нули.

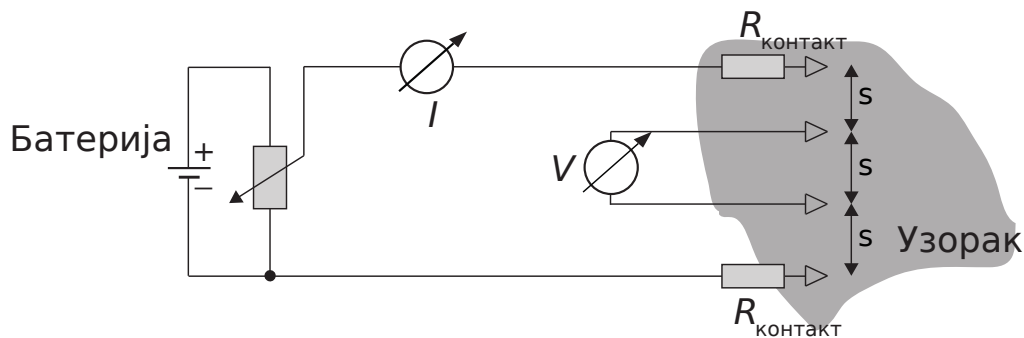


## Део А. Мерења методом четири тачке (M4T) (Four-point-probe (4PP)) (1.2 поена)

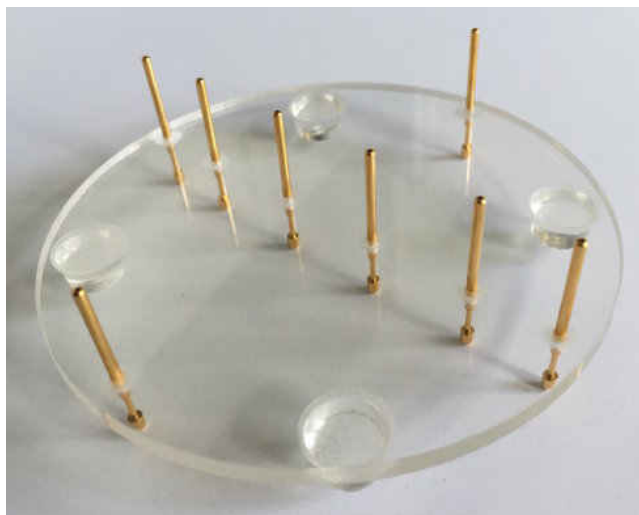
Како би прецизно измерили специфичну проводност, контакти за мерење напона и струје би требало да буду раздвојени.

Ова техника се назива метод четири тачке (M4T). Четири контакта су распоређена симетрично тако да формирају најједноставнију могућу конфигурацију: Струја  $I$  тече кроз узорак кроз један од спољашњих контаката, затим тече по свим могућим путевима кроз узорак и затим излази из узорка кроз други контакт. Између њих, напон  $V$  је мерен дуж одређеног пута  $s$  на узорку.

Симетрична поставка која ће се користити у овом делу задатка је представљена на следећој слици (растојање  $s$  је исто између свака два узастопна контакта):



Крива зависности струје  $I$  од напона  $V$  представља  $I - V$ -карактеристику узорка и омогућава одређивање отпорности овог дела узорка. У наставку ћемо користити само M4T технику. У овом делу задатка ћемо користити четири (унутрашња) од датих осам контаката приказаних на слици.



Слика 2: Држач за M4T мерења са четири гумене ножице и осам контаката (места за прикључивање сонди).

За следећа мерења, користити цео лист проводног папира.

**Важне напомене за сва наредна мерења:**

- Користити дужу страну листа папира као референтну страну. Четири контакта треба да буду поравнати паралелно са дужицом страном папира.
- Обратите пажњу да користите обложу (црну) страну папира, а не браон страну (полеђину папира). Можете означити тачну оријентацију помоћу обојених налепница.
- Проверити да у папиру нема рупа и да папир није исечен.
- За ова мерења поставити контакте што ближе центру узорка.
- Притиснути контакте довољно јаком силом како би се обезбедио добар контакт са узорком. Довољан притисак је онај при чему пластичне ножице само дотакну површину.

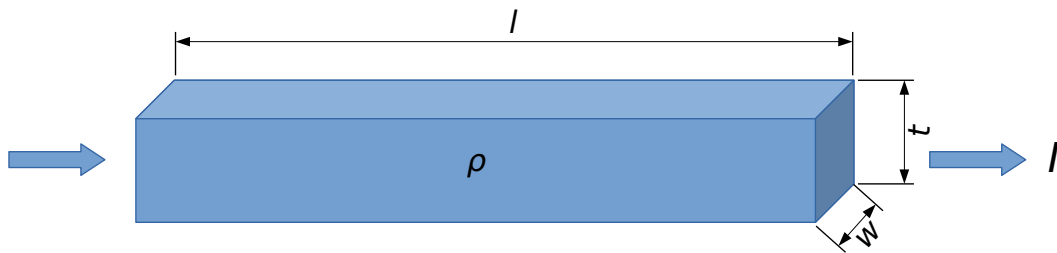
<b>A.1</b>	Мерење помоћу методе 4 тачке (М4Т): Измерити пад напона $V$ дуж средишњег сегмента дужине $s$ као функцију јачине струје $I$ која пролази овај сегмент. Узети бар 4 вредности, направити табелу и нацртати график зависности пада напона $V$ од јачине струје $I$ на <b>Графику А.1</b> .	0.6pt
------------	---	-------

<b>A.2</b>	Одредити ефективну електричну отпорност $R = \frac{V}{I}$ целог листа папира са <b>Графика А.1</b> .	0.2pt
------------	--	-------

<b>A.3</b>	Користећи <b>График А.1</b> одредити грешку одређивања отпорности $\Delta R$ .	0.4pt
------------	--	-------

## Део В. Специфична отпорност листа папира (0.3 поена)

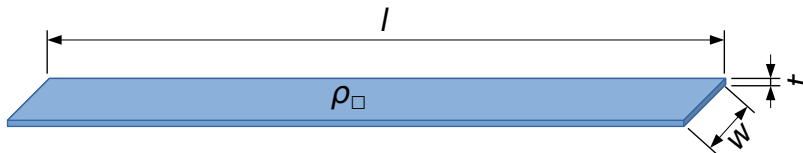
Специфична отпорност  $\rho$  представља карактеристику материјала, помоћу које се отпорност 3D проводника датих димензија може израчунати. Овде разматрамо материјал облика паралолепипеда дужине  $l$ , ширине  $w$ , и дебљине  $t$ :



Електрична отпорност  $R$  проводника представљеног на горњој слици је дата једначином:

$$R = R_{3D} = \rho \cdot \frac{l}{w \cdot t} \quad (1)$$

Истим резонавањем може се дефинисати отпорност 2D проводника дебљине  $t$ , при чему је  $t \ll w$  и  $t \ll l$ :



$$R = R_{2D} = \rho_{\square} \cdot \frac{l}{w}, \quad (2)$$

користећи специфичну отпорност листа (*sheet resistivity*)  $\rho_{\square} \equiv \rho/t$  ("rho box"). Јединица овако дефинисане величине је Ом:  $[\rho_{\square}] = 1 \Omega$ .

**Важно:** Једначина 2 важи само за константну густину струје и константан потенцијал на попречним пресецима проводника. У случају тачкастих контаката са површином, ова једначина не важи. Уместо тога, може се показати да је специфична отпорност листа повезана са отпорношћу преко једначине

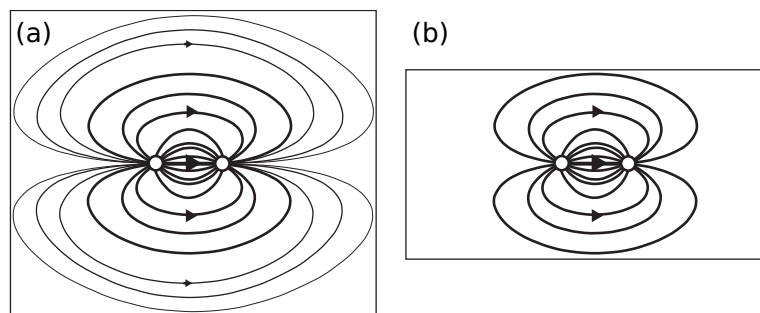
$$\rho_{\square} = \frac{\pi}{\ln(2)} \cdot R \quad (3)$$

за  $l, w \gg t$ .

- B.1** Израчунати специфичну отпорност листа папира  $\rho_{\square}$  помоћу мерења извршених у делу А. Добијену вредност ћемо означити са  $\rho_{\infty}$  (а измерену отпорност у делу А са  $R_{\infty}$ ) јер су димензије целог папира много веће од растојања  $s$  између контаката :  $l, w \gg s$ . 0.3pt

## Део С. Мерења на узорцима различитих димензија (3.2 поена)

До сада није узимано да су димензије папира  $w$  и  $l$  коначне. Уколико се узорак смањи, он може да пренесе мање струје за исти напон: Уколико применимо напон између два контакта (бели кружићи на слици), струја ће тећи дуж свих могућих не пресецајућих путева кроз узорак (као што је представљено линијама): што је дужа линија, мања је струја (што је приказано дебелином линије). За мањи узорак (б) и исти напон, укупна струја се смањује пошто постоји мањи број могућих путева. Због тога ће се измерена отпорност повећати:



Специфична отпорност листа се неће мењати као функција величине узорка. Стога, како би помоћу измерене отпорности могли да израчунамо специфичну отпорност помоћу једначине 3, потребно је увести корекциони фактор  $f(w/s)$ :

$$\rho_{\square} = \frac{\pi}{\ln(2)} \cdot \frac{R(w/s)}{f(w/s)}. \quad (4)$$

За узорак дужине  $l \gg s$ , фактор  $f$  зависи само од односа  $w/s$  и увек је већи или је једнак јединици:  $f(w/s) \geq 1$ . Због једноставности, ми ћемо се фокусирати на зависност од ширине  $w$  притом водећи рачуна да је узорак довољно дуг за сва мерења. Претпоставићемо да се вредност отпорности приближава вредности  $R_{\infty}$  за велике димензије:

$$R(w/s) = R_{\infty} \cdot f(w/s) \quad f(w/s \rightarrow \infty) \rightarrow 1.0. \quad (5)$$

**C.1** Користећи М4Т метод, измерити отпор  $R(w, s)$  за 4 вредности  $w/s$  у интервалу од 0.3 до 5.0 и мерења уписати у **Табелу С.1**. Водити рачуна да дужина узорка буде више него пет пута дужа од растојања између контаката:  $l > 5s$  и да узорак увек има исту оријентацију (да је дужа страница папира увек паралелна са линијом коју образују четири контакта). За сваку од вредности  $w/s$  измерити напон за 4 различите јачине струја и израчунати средњу отпорност  $R(w/s)$  ова четири мерења. Резултате уписати у **Табелу С.1**. 3.0pt

**C.2** Израчунати  $\hat{R} = f(w/s)$  за сва мерења. 0.2pt

## Део D. Геометријски корекциони фактор: закон скалирања (1.9 поена)

Видели смо у делу С да измерена специфична отпорност зависи од односа ширине и растојања

између контаката  $w/s$ . Ова зависност је дата помоћу следеће формуле:

$$f(w/s) = 1.0 + a \cdot \left(\frac{w}{s}\right)^b \quad (6)$$

Обратити пажњу да за веома велике вредности  $w/s$ ,  $f(w/s)$  мора бити једнака јединици.

<b>D.1</b>	Како би фитовали измерене податке у делу С овом зависношћу, одабрати одговарајући папир (линеарни <b>График D.1a</b> , полу-логаритамски <b>График D.1b</b> , или двоструко-логаритамски <b>График D1.c</b> ) за цртање графика $(f(w/s) - 1)$ у зависности од одговарајуће величине.	1.0pt
------------	---	-------

<b>D.2</b>	Одредити параметре $a$ и $b$ .	0.9pt
------------	--------------------------------	-------

## Део Е. Узорак хрома са силицијумском основом и van der Pauw-ов метод (3.4 поена)

У полупроводничкој индустрији, познавање електричне отпорности (танког филма) полупроводника и танких металних слојева је веома важно јер су тиме одређене остале карактеристике уређаја. У овом делу експериментна ће се користити полупроводна "основа" од силицијума која је превучена танким слојем метала хрома (сјајна страна узорка).

Отворити кутију са силицијумом обложеним танким слојем метала (ротирати у правцу стрелице "RELEASE") и извадити узорак. Будите пажљиви да не испустите, не оштетите и не пипнете сјајну површину. У току мерења поставити узорак на сто са сјајном површином окренутом на горе.

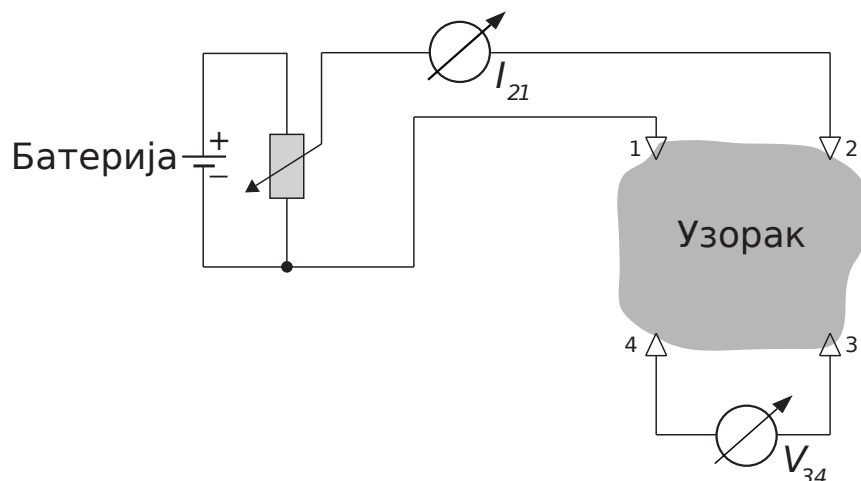
**E.1** Користити исту М4Т поставку апаратуре за мерење напона  $V$  у функцији јачине струје  $I$ . Записати референтни број узорка на страници за одговоре. Овај број се може наћи на кутији узорка. 0.4pt

**E.2** Нацртати график (**График Е.2**) на основу података из дела Е.1 и одредити отпорност  $R_{4PP}$ . 0.4pt

**E.3** Како би одредили корекцију кружног узорка, апроксимираћемо ефективну дужину узорка  $w$  пречником узорка  $D = 100 \text{ mm}$ . Користећи ову претпоставку израчунати однос  $w/s$ . Користећи функцију дату једначином 6 и параметре  $a$  и  $b$  одредити корекциони фактор  $f(w/s)$  за овај узорак. 0.2pt

**E.4** Израчунати специфичну отпорност листа  $\rho_{\square}$  (М4Т) направљеног од слоја хрома користећи једначину 4. 0.1pt

Како би измерио специфичну отпорност листа, без потребе за геометријским корекцијама, инжењер L.J. van der Pauw је развио следећи метод: Четири контакта су распоређена на обиму узорка са произвољним обликом као што је приказано на слици (означено ознакама од 1 до 4). Струја тече кроз два суседна контакта, нпр. кроз контакте 1 и 2, док се напон мери између контаката 3 и 4. Овим поступком се добија вредност отпорности  $R_{I,V} = R_{21,34}$ .



Због симетрије следи да је  $R_{21,34} = R_{34,21}$  и  $R_{14,23} = R_{23,14}$ . Van der Pauw је показао да за произвољан али једноставан облик (без рупа на узорку) и са тачкастим контактима важи следећа једначина:

$$e^{-\pi R_{21,34}/\rho_{\square}} + e^{-\pi R_{14,23}/\rho_{\square}} \equiv 1. \quad (7)$$



Слика 3: М4Т уређај на узорку (силицијумска основа обложена металом хрома). Обратите пажњу на усек на десној страни кружног узорка. Овај усек се назива "flat".

У овом делу користити четири контакта који чине квадрат. Повезати два суседна контакта на струјни извор са амперметром, а преостала два контакта са волтметром. Ротирати квадрат док једна од ивица не постане паралелна са "flat"-ом.

<b>E.5</b>	Скицирати оријентацију контаката кроз које протиче струја у односу на "flat". Мерити напон $V$ за бар шест различитих вредности струја $I$ (отприлике једнако раздвојених), Резултате уписати у <b>Табелу E.5</b> .	0.6pt
<b>E.6</b>	Поновити поступак након што су контакти са струјом премештени нормално у односу на претходно мерење. Уписати резултате у <b>Табелу E.6</b> .	0.6pt
<b>E.7</b>	Представити резултате из последња два сета мерења на графику <b>График E.7</b> користећи различите боје/симболе. Израчунати средњу вредност отпорности $\langle R \rangle$ за ове две праве.	0.5pt
<b>E.8</b>	Заменом свих отпорности $R_{kl,mn}$ са $\langle R \rangle$ , решити једначину 7 и израчунати специфичну отпорност листа $\rho_{\square}$ са слојем хрома.	0.4pt
<b>E.9</b>	Упоредити резултате мерења добијених помоћу линеарне конфигурације контаката <b>E.4</b> и резултате добијене помоћу van der Pauw метода <b>E.8</b> . Израчунати релативну грешку ова два мерења у процентима.	0.1pt
<b>E.10</b>	Слој хрома (Cr) има дебљину од $8 \text{ nm}$ . Користећи ову вредност и коначан резултат добијен van der Pauw-овим методом израчунати специфичну отпорност Хрома користећи једначине 1 и 2.	0.1pt

## Задатак 1: Електрична проводност у две димензије (10 поена)

Напишите бројеве од 0 до 9 у следећу табелу:

<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>

### Део А. Мерења методом четири тачке (M4T) (1.2 поена)

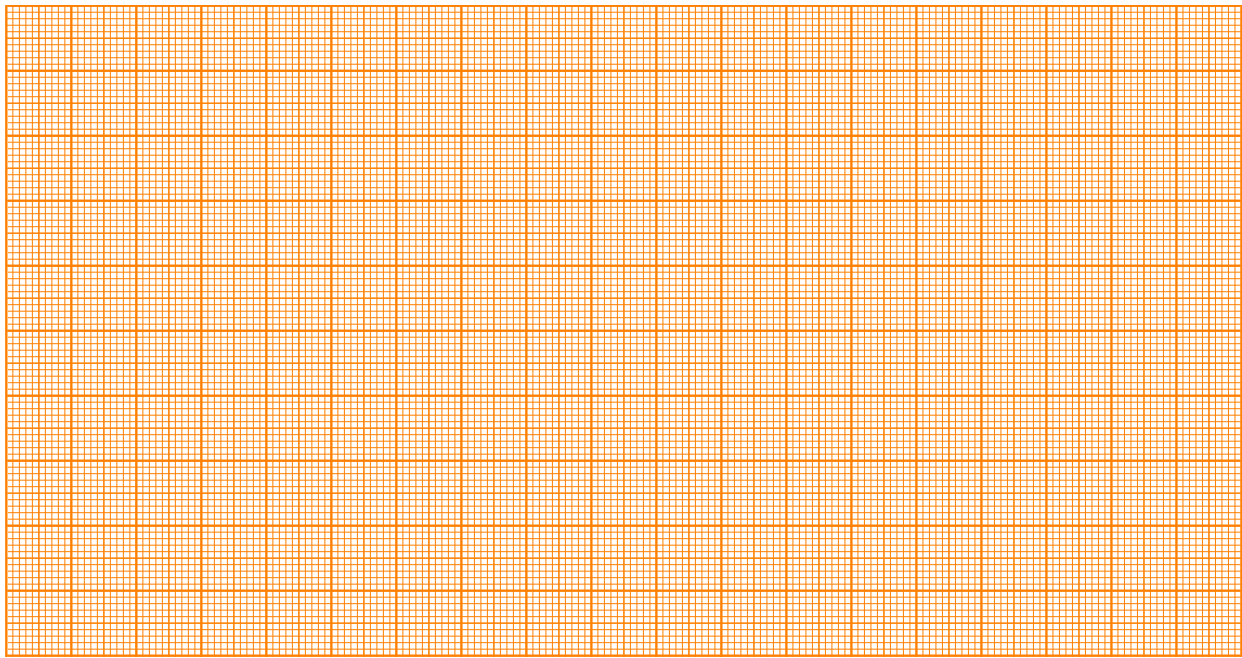
**A.1 (0.6 pt)**

$s =$

$I$	$V$	$I$	$V$

Нацртајте податке на **График А.1**.

График А.1:  $I$  у зависности од  $V$



**A.2 (0.2 pt)**

$$R =$$

**A.3 (0.4 pt)**

$$\Delta R =$$

## Део В. Специфична отпорност листа папира (0.3 поена)

**B.1 (0.3 pt)**

$$\rho_{\square} \equiv \rho_{\infty} =$$



## Део D. Геометријски корекциони фактор (1,9)

### D.1 (1.0 pt)

Уцртајте податке на одговарајући папир: линеарни (График D.1 а), полу-логаритамски (D. 1b) или двоструки логаритамски (D. 1c) на следећим странама.

### D.2 (0.9 pt)

$a =$

$b =$

График D.1a: Линеарна скала:

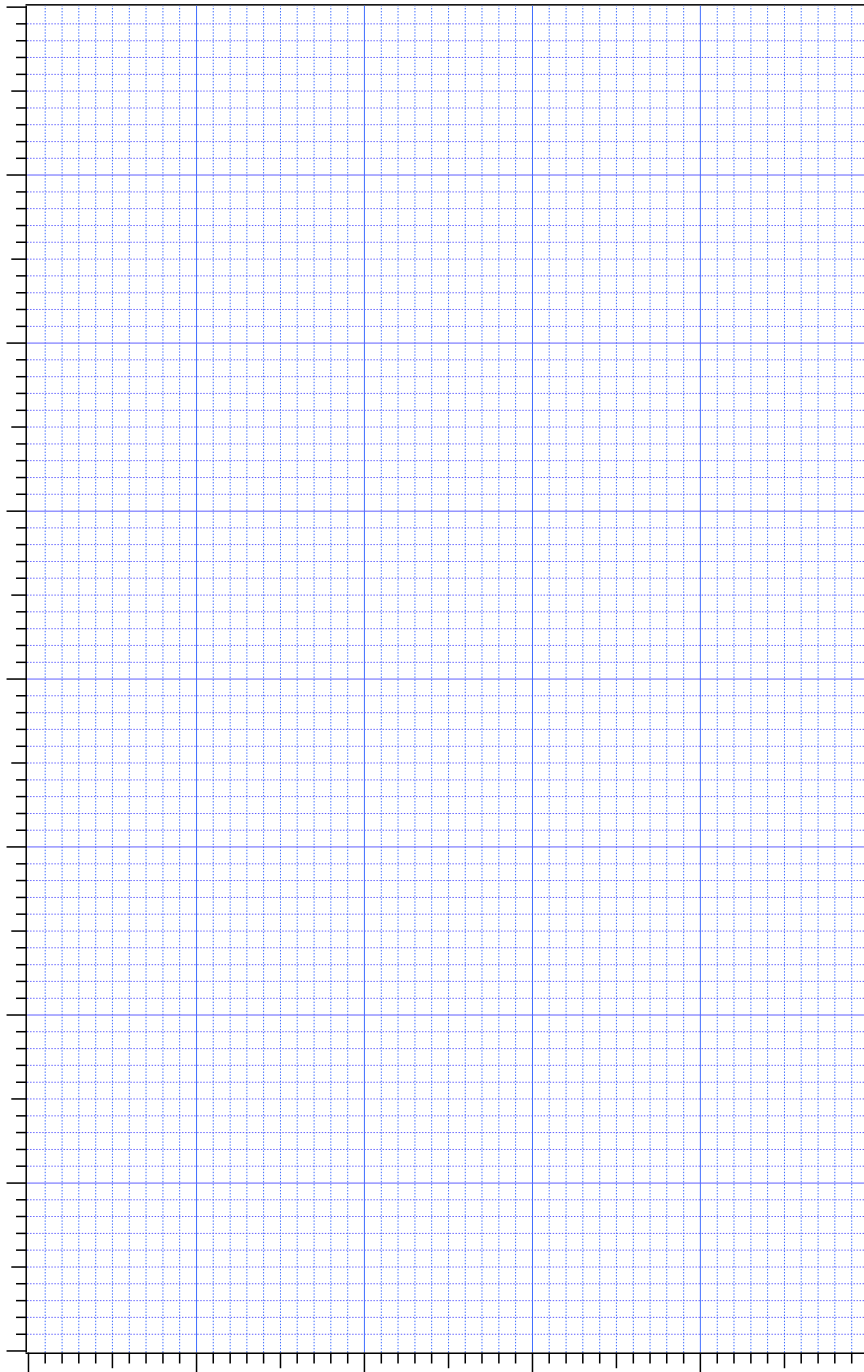


График D.1b: полу-логаритамска скала:

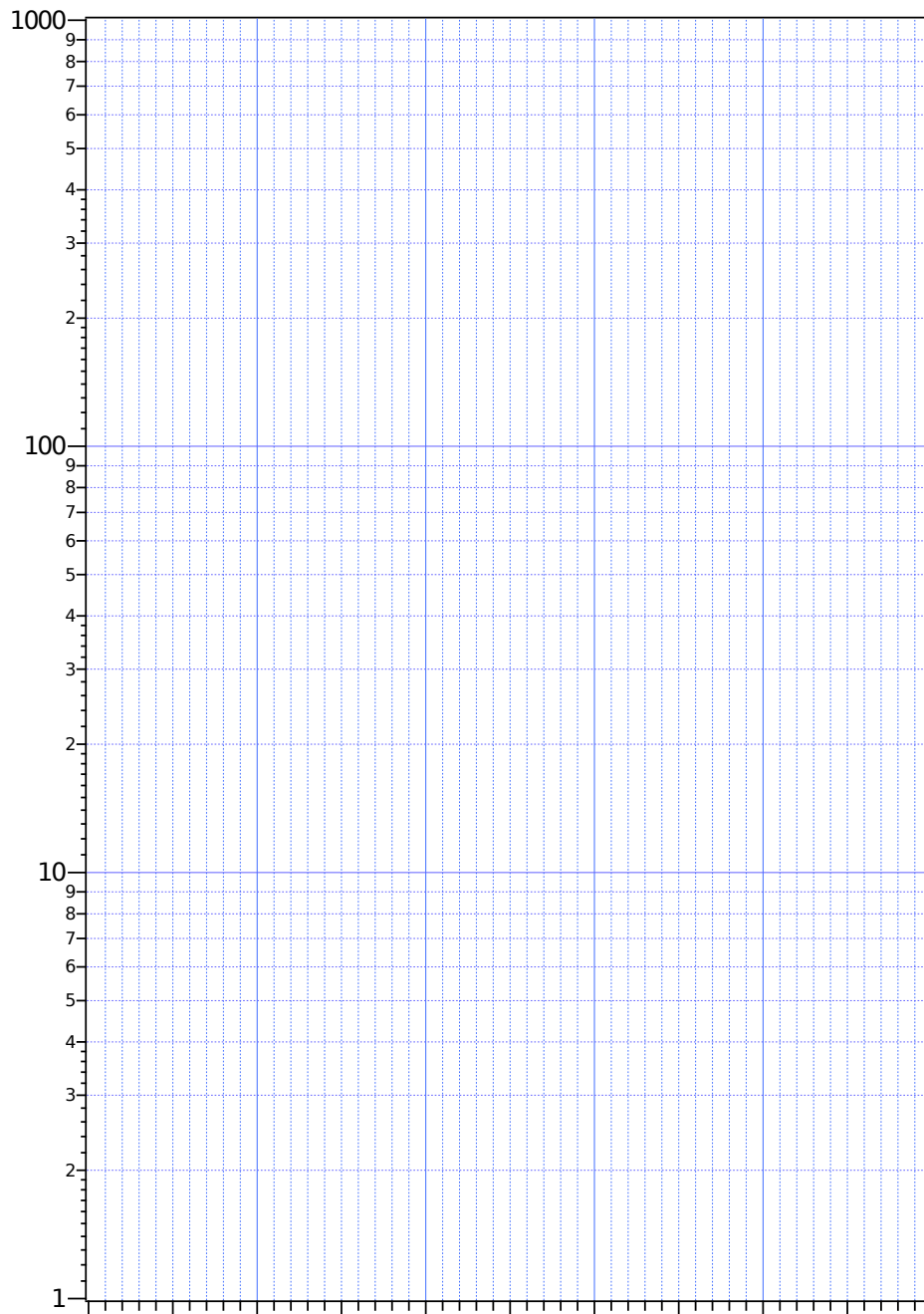
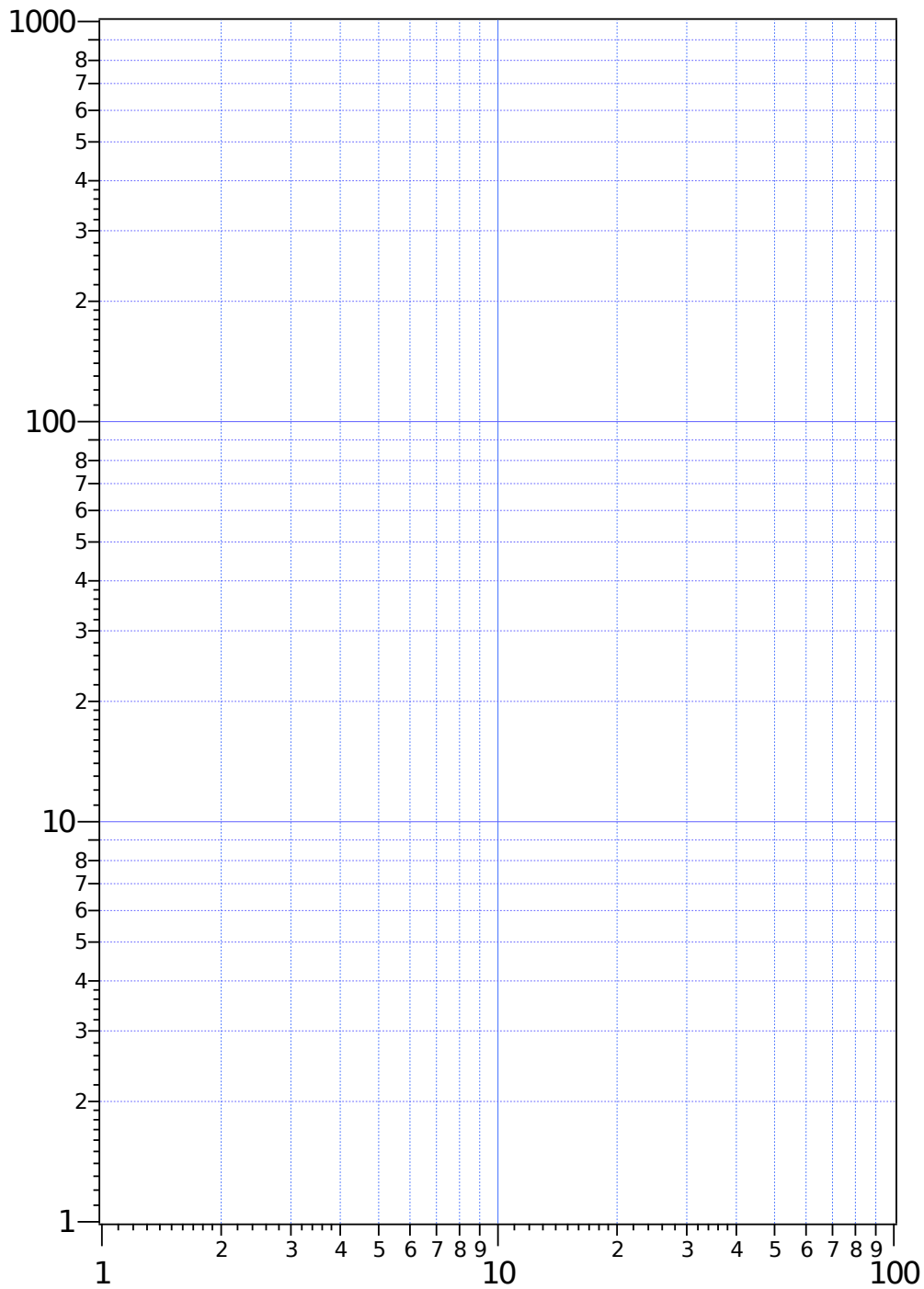


График D1c: двоструко-логаритамска скала:



**Део Е. Узорак хрома са силицијумском основом и van der Pauw-ов метод (3.4 поена)**

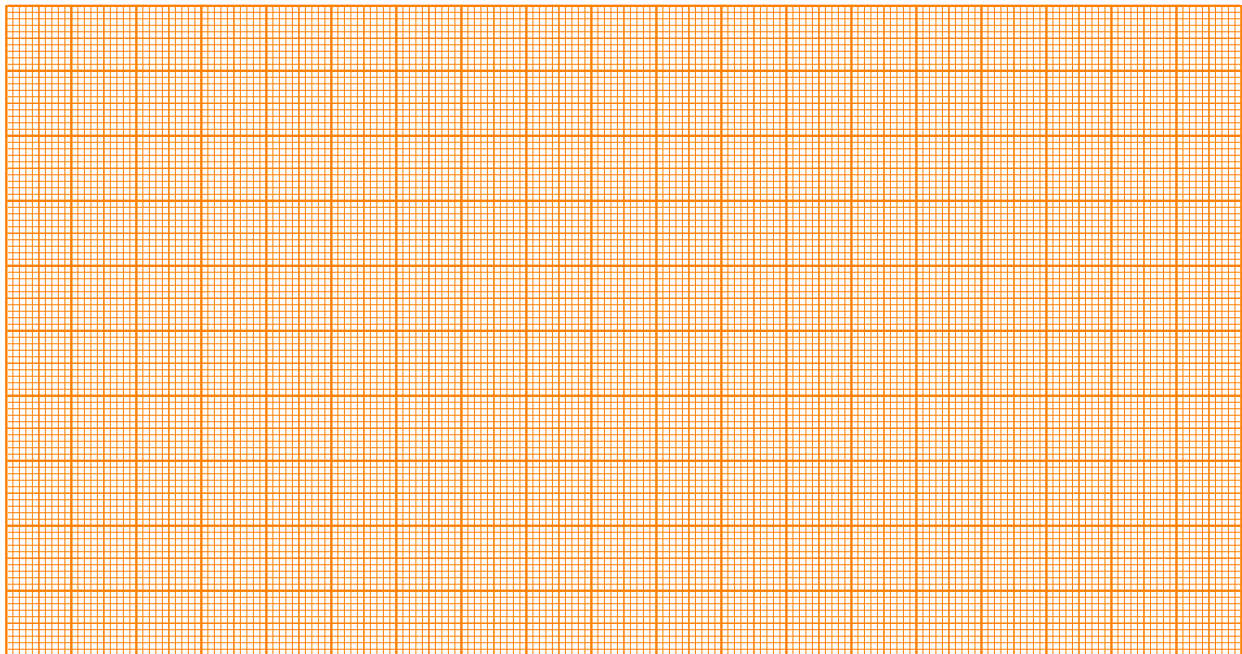
Запишите број узорка:

**Е.1 (0.4 pt)**

$I$	$V$	$I$	$V$

**Е.2 (0.4 pt)**

**График Е.2:**  $I$  у зависности од  $V$



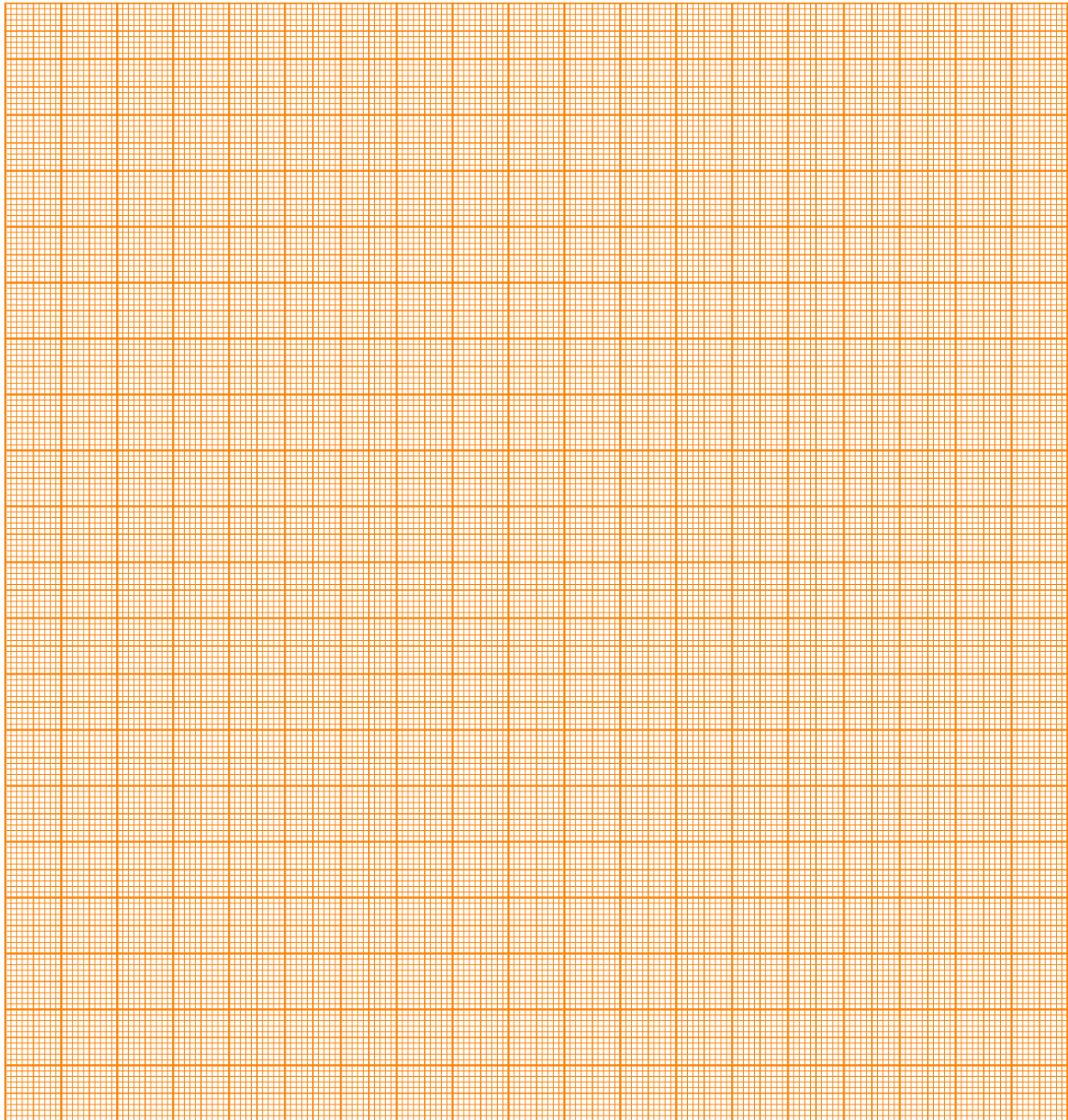
$R_{4PP} =$





**E.7 (0.5 pt)**

**График E.7:**  $I$  у зависности од  $V$



$\langle R \rangle =$

**E.8 (0.4 pt)**  
Израчунавање:

**E.9 (0.1 pt)**

$$\frac{\Delta \rho_{\square}}{\rho_{\square}(\text{vdP})} = \quad = \quad \%$$

**E.10 (0.1 pt)**

Специфична отпорност танког Cr филма  $\rho =$

## Перлице које скачу - Модел фазних прелаза и нестабилности (10 поена)

Молимо вас да прочитате општа упутства из посебног коверта пре него што почнете са задатком.

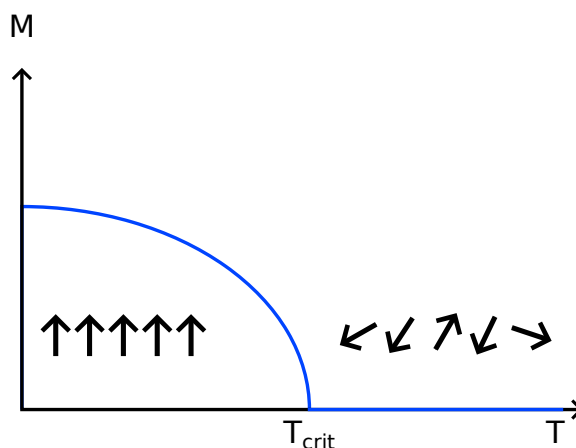
### Увод

Фазни прелази су добро познати у свакодневном животу, на пример, вода може да буде у различитим стањима: чврстом, течном и гасовитом. Ова стања су раздвојена фазним прелазима при којима се колективно понашање молекула у материјалу мења. Таквим фазним прелазима је увек придружена температура прелаза, на којој се стање мења. Пример температуре прелаза је температура мржњења и температура кључања воде.

Фазни прелази су ипак много распрострањенији и јављају се такође у другим системима, као што су магнети или суперпроводници, где се испод температуре прелаза макроскопско стање мења од парамагнета у феромагнет и од нормалног метала у суперпроводник, респективно.

Сви параметри се могу описати на исти начин када се уведе такозвани параметар поретка. На пример, у магнетизму параметар поретка је придружен уређивању магнетних момената атома у правцу макроскопске магнетизације.

У случају такозваног континуалног фазног прелаза параметар поретка је увек једнак нули изнад критичне температуре и непрекидно расте испод ње, као што је схематски приказано на слици 1 испод. Температура прелаза континуалног фазног прелаза се назива критична температура. Слика такође садржи и схематски приказ микроскопског уређења или неуређености у случају магнета, где се појединачни магнетни моменти уређују у феромагнетној фази утичући тако на повећавање макроскопске магнетизације, док су у парамагнетној фази случајно орјентисани дајући нулу за макроскопску магнетизацију.



Слика 1: Схематски приказ температурске зависности параметра поретка  $M$  приликом фазног прелаза. Испод критичне температуре  $T_{crit}$ , параметар поретка расте и различит је од нуле, док је једнак нули на температурама изнад  $T_{crit}$ .

За континуалне фазне прелазе, у општем случају важи да се параметар поретка близу прелаза понаша по степенском закону, на пример у магнетизму магнетизација  $M$  испод критичне температуре

$T_{\text{crit}}$  је дата са:

$$M \begin{cases} \sim (T_{\text{crit}} - T)^b, & M < T_{\text{crit}} \\ = 0, & M > T_{\text{crit}} \end{cases} \quad (1)$$

где је  $T$  температура. Оно што је задивљујуће је да је овакво понашање универзално: експонент у овој степеној зависности је исти за многе различите фазне прелазе.

### Задатак

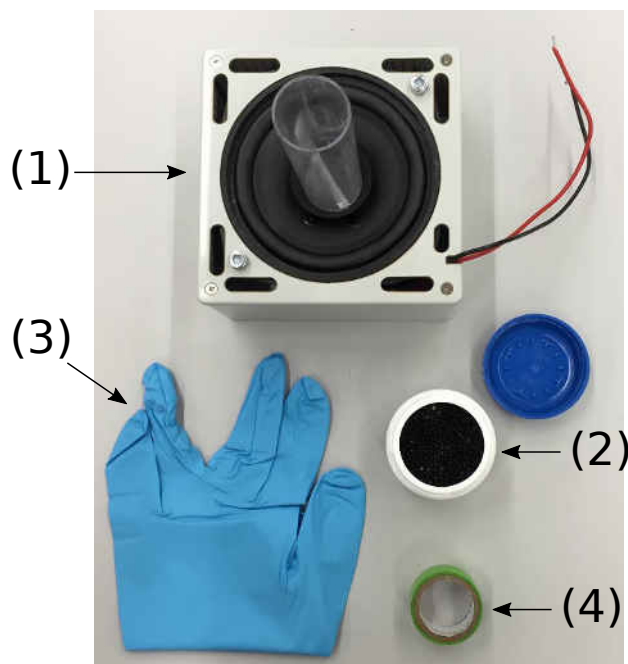
Проучаваћемо једноставан пример у коме неке особине континуалних фазних прелаза могу да се испитују, као на пример како нестабилност води ка колективном поншању честица и даље ка фазном прелазу, као и како макроскопска промена зависи од побуђења честица.

У обичним фазним прелазима ово побуђење је проузроковано променом температуре. У нашем примеру побуђење се састоји од кинетичке енергије честица убрзане звучником. Макроскопске промене које одговарају фазном прелазу који овде проучавамо се састоје од груписања перли у једној половини цилиндра, који је подељен малим зидом.

Повећавањем амплитуде од оне при којој су честице у једној половини цилиндра, наћи ћете коначно ону при којој су честице подједнако распоређене у обе половине. Ово одговара загревању преко критичне температуре.

Ваш задатак је да одредите критични експонент за модел фазног прелаза који се овде проучава.

### Списак прибора



Слика 2: Додатни прибор за овај експеримент.

1. Уређај са звучником на чијем је врху причвршћен пластични цилиндар.
2. Око 100 перлица (у пластичној посуди).
3. Рукавица
4. Лепљива трака

### Мере предострожности

- Немојте деловати прекомерном бочном силом на пластични цилиндар који је причвршћен на звучник. Неће бити омогућена замена у случају оштећења мембрана звучника или откидања пластичног цилиндра.
- Искључите уређај са звучником кад год га не користите, да би сте избегли непотребно трошење батерије.
- У овом експерименту тестерасти сигнал од 4 Hz је на излазу крајева звучника који се налазе са стране генератора сигнала.
- Амплитуда тестерастог сигнала се подешава коришћењем одговарајућег потенциометра означеног са *амплитуда сигнала* (4). Једносмерни напон пропорционалан амплитуди сигнала је на прикључку (6) контрола *амплитуде сигнала* (прикључак за уземљење је (7)). Бројеви означавају делове на фотографији (Слика 2) приказаној у општим упутствима.
- Мембрана звучника је нежна. Водите рачуна да је не притискате непотребно у било ком правцу.

## Део А. Критична амплитуда побуђења (3,3 поена)

Пре него што почнете са основним задатком, повежите звучник са крајевима на страни генератора сигнала (водите рачуна о поларитету). Сипајте (око 50) перлице у цилиндар на звучнику и исеците део рукавице којим ћете затворити врх цилиндра, како бисте спречили испадање перлица. Укључите уређај са звучником и подешавајте амплитуду окретањем одговарајућег дугменцета означеног са *амплитуда сигнала* (4) уз помоћ приложеног шрафцигера. Посматрајте расподелу перлица за различите амплитуде сигнала.

Први задатак је да одредите критичну амплитуду побуђења за овај прелаз. Да бисте ово урадили потребно је да одредите број перлица  $N_1$  и  $N_2$  у два дела цилиндра (нека вам на пример увек буде  $N_1 \leq N_2$ ) у зависности од амплитуде  $A_D$ , што одговара напону измереном на прикључку *амплитуда сигнала* (6). Напон је пропорционалан амплитуди тестерастог сигнала који производи звучник. За сваку вредност напона извршите најмање 5 мерења.

Помоћ:

- Да би се перлице увек кретале мерите за амплитуде које одговарају напонима већим од 0.7 V. Почните са посматрањем система тако што ћете лагано мењати напон, без бројања перлица. Може да се деси да нека перлица остане залепљена за подлогу, због електростатичких разлога. Немојте бројати те перлице.

<b>A.1</b>	Упишите вредности мерења бројева перлица $N_1$ и $N_2$ у обе половине цилиндра за различите вредности амплитуде $A_D$ у <b>табелу А. 1.</b>	1.2pt
<b>A.2</b>	Израчунајте стандардно одступање за мерења $N_1$ и $N_2$ , и резултате упишите у <b>табелу А. 1.</b> Нацртајте $N_1$ и $N_2$ у зависности од амплитуде $A_D$ у пољу <b>график А. 2.</b> , укључујући и грешке.	1.1pt
<b>A.3</b>	Користећи график одредите критичну амплитуду $A_{D,crit}$ , за коју ће $N_1 = N_2$ , после довољно времена чекања да се успостави стационарно стање.	1pt

## Део В. Калибрација (3,2 поена)

Очитана амплитуда  $A_D$ , одговара напону на коме је звучник. Ипак, занимљива је и величина амплитуде осциловања звучника, пошто је повезана са тим колико јако су перлице побуђене. Потребно је да калибришете очитане амплитуде. За ову сврху можете да искористе било шта од приложеног материјала и прибора.

<b>B.1</b>	Скицирајте шему коју сте искористили да бисте одредили амплитуду осциловања $A$ (у mm) звучника током једног периода осциловања.	0.5pt
<b>B.2</b>	Одредите амплитуду осциловања $A$ у довољно тачака, односно прикажите $A$ у функцији амплитуде сигнала $A_D$ у <b>табели В. 2.</b> , процените и објасните грешку мерења.	0.8pt
<b>B.3</b>	Прикажите податке на графику у пољу <b>график В. 3.</b> , укључујући и грешке мерења.	1.0pt

**B.4**    Одредите параметре добијене криве, користећи одговарајући фит да одредите калибрациону функцију  $A(A_D)$ .    0.8pt

**B.5**    Одредите критичну амплитуду побуђења  $A_{\text{crit}}$  перлица.    0.1pt

### Део С. Критични експонент (3.5 поена)

У нашем систему, температура одговара кинетичкој енергији коју честице добијају побуђивањем. Ова енергија је пропорционална квадрату брзине добијене од звучника, односно  $v^2 = A^2 f^2$ , где је  $f$  фреквенција осцилација. Сада ћете проверити ову зависност и одредити експонент  $b$  из степеног закона који описује понашање параметра поретка (једначина 1).

**C.1**    Неуравнотеженост броја перлица је добар кандидат за параметар поретка нашег система, она је једнака нули изнад критичне амплитуде сигнала, а једнака 1 за мала побуђења. Одредите овај параметар поретка у зависности од амплитуде осциловања звучника  $A$ . Прикажите резултате у **табели С. 1**.    1.1pt

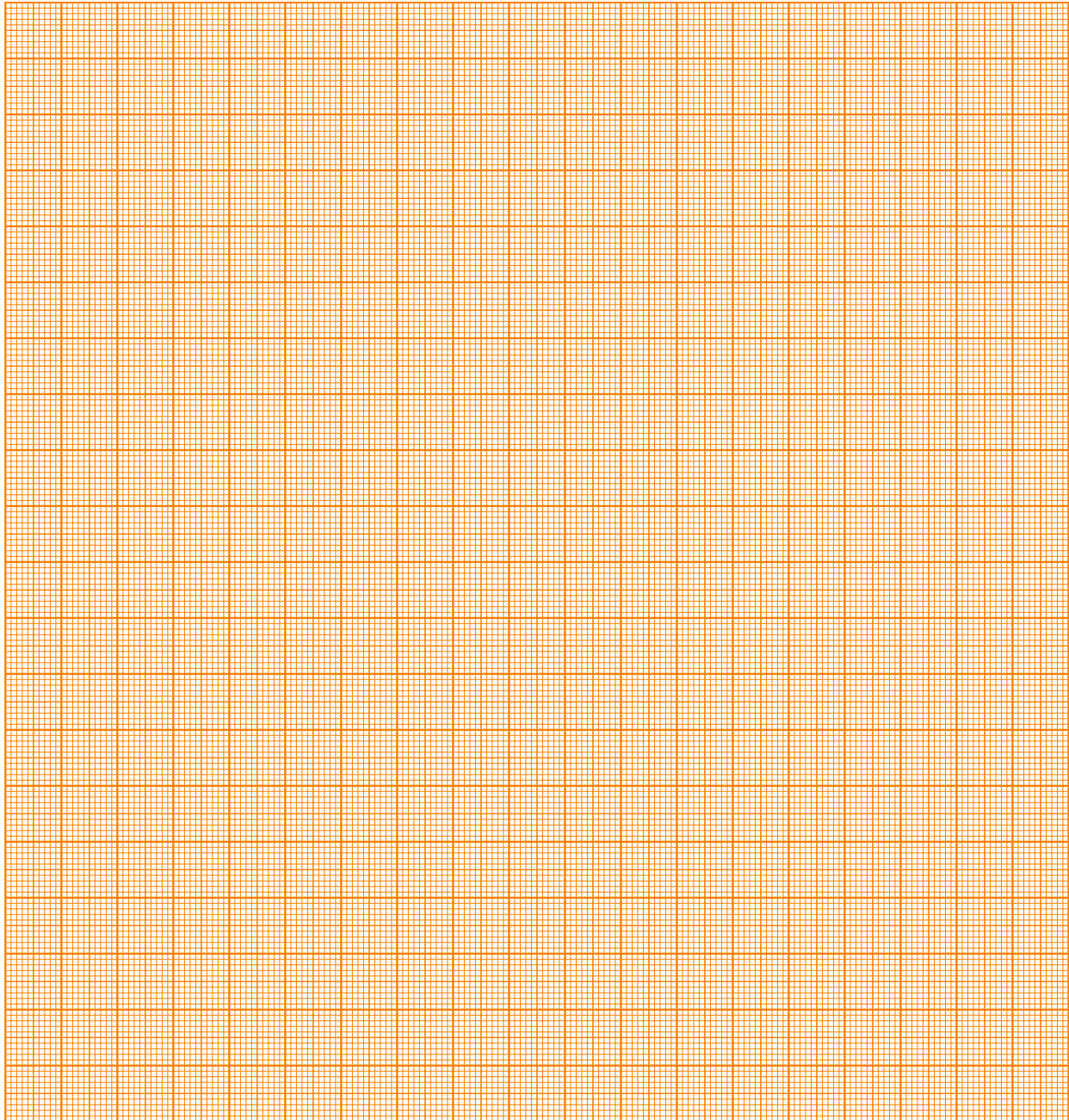
**C.2**    Нацртајте зависност неуравнотежености  $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$  од  $|A_{\text{crit}}^2 - A^2|$ , на папиру са обе логаритамске скале (двоструко логаритамском) у пољу **график С. 2**. Можете да користите **табелу С. 1**. за рачун. Уцртане тачке могу да одступају од линерне зависности, али да бисте добили израз за критични експонент ипак узмите линерно опадање.    1pt

**C.3**    Одредите експонент  $b$  и процените грешку.    1.4pt



**A.2 (1.1 pt)**

**График А. 2:**  $N_1, N_2$  у зависности од  $A_D$



**A.3 (1.0 pt)**

$A_{D, \text{crit.}} =$

## Део В. Калибрација (3.2 поена)

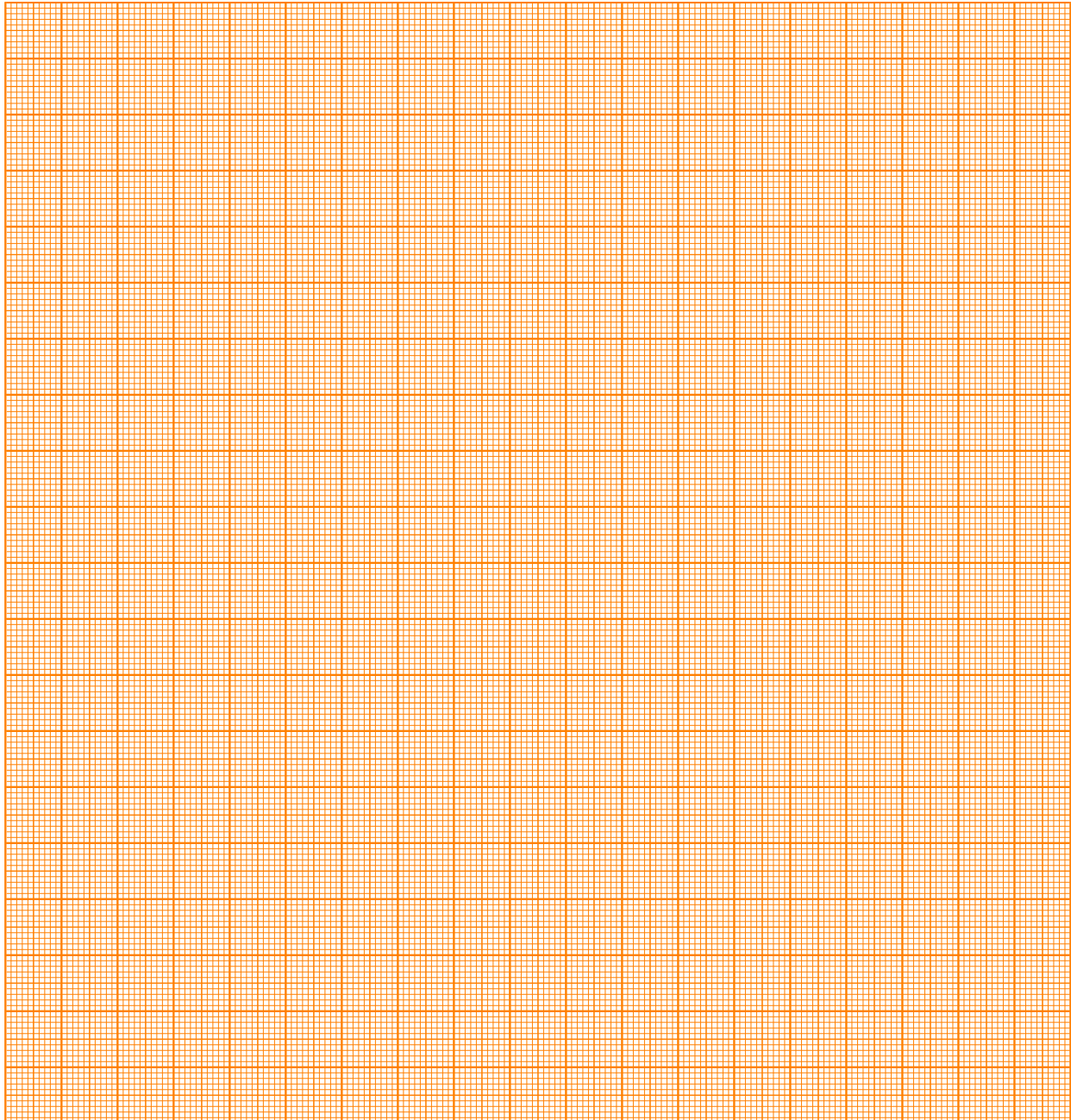
### **V.1 (0.5 pt)**

Скица поставке за мерење:



**B.3 (1.0 pt)**

**График В. 3.:**  $A$  у зависности од  $A_D$



**B.4 (0.8 pt)**

Зависност  $A(A_D)$ :

Параметри криве:

**B.5 (0.1 pt)**

$A_{\text{crit.}} =$



График С.2а двоструки логаритамски папир

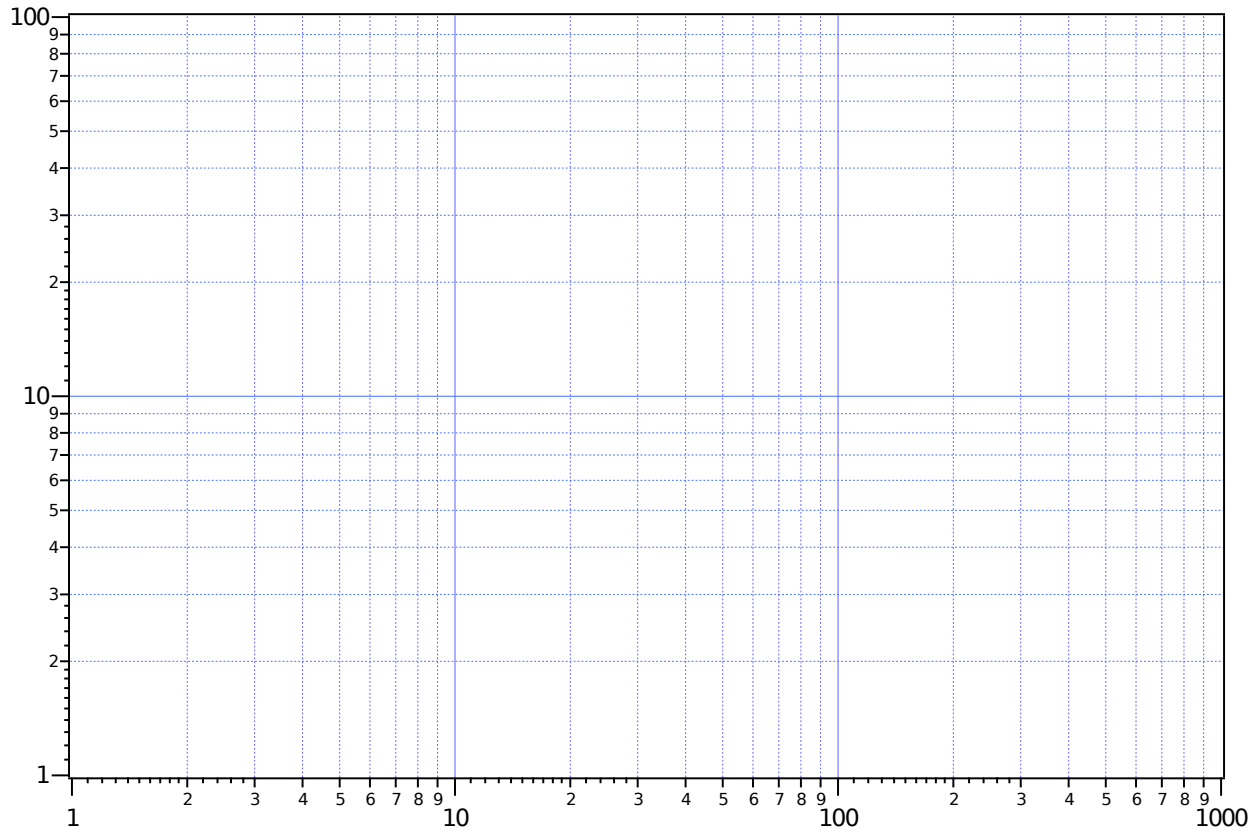
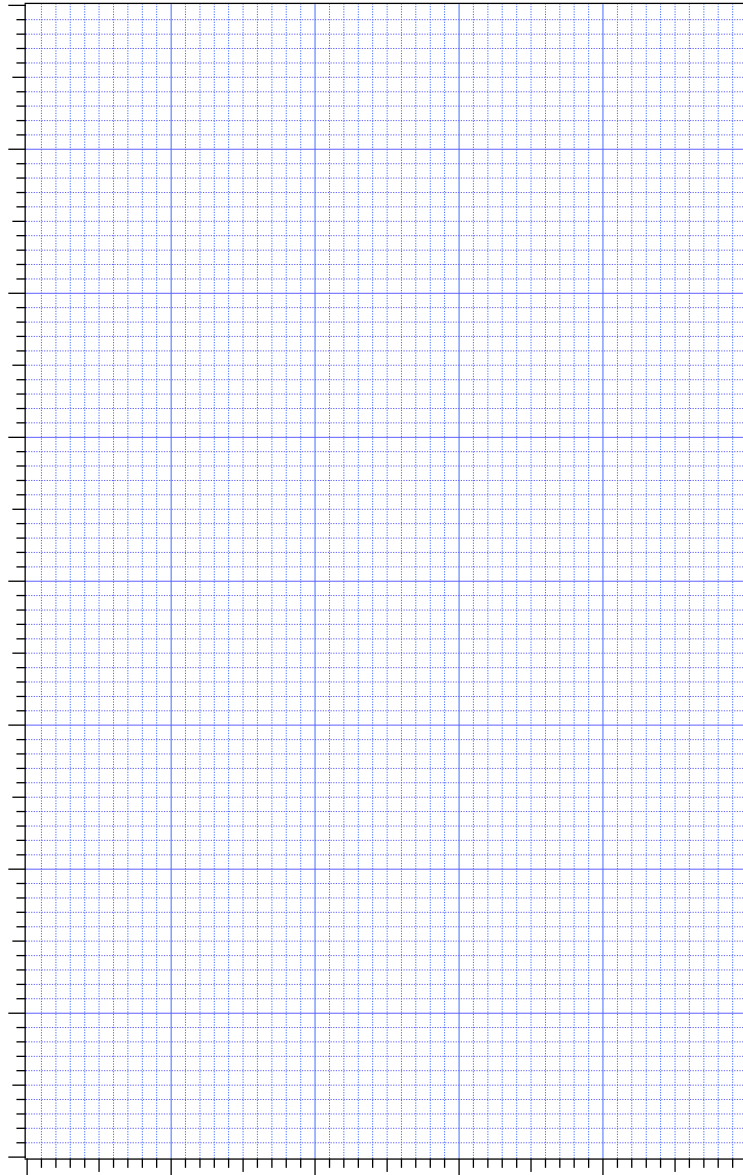


График С.26 линерни папир



**C.3 (1.4 pt)**

$b =$

$\Delta b =$

## Општа упутства: теоријски задатак

14. јули 2016.

Теоријски тест траје 5 сати и носи 30 поена.

### Пре теста

- Не смете да отворате коверте са задацима пре звучног сигнала који означава почетак такмичења.
- Почетак и крај теста ће бити означен звучним сигналом. Такође, биће обавештења на сваки сат о времену које је преостало за рад, као и петнаест минута пре краја теста (пре звучног сигнала).

### Током теста

- Обезбеђени су посебни листови предвиђени за писање одговора. Унесите коначне одговоре у одговарајућа поља на одговарајућем листу за одговоре (означеном са A). За сваки задатак имате посебан празан папир за детаљнији рад (означен са W). Водите рачуна да увек користите папир за рад који припада задатку који тренутно радите (проверите број задатка у заглављу). Ако сте на било ком папиру написали нешто што не желите да буде прегледано, прецртајте то.
- Трудите се да будете што је могуће сажетији у одговорима: користите једначине, логичке операције и скице да представите ваша размишљања, кад год је то могуће. Избегавајте дугачке реченице.
- Молимо вас да дате прихватљив број значајних цифара када наводите бројне вредности.
- Требало би да сте у стању да често решите касније делове задатка иако претходни делови нису решени.
- Списак физичких константи је дат на следећој страни.
- Није дозвољено напуштање радног места без дозволе. Ако вам је потребна било каква помоћ (допуњавање боце са водом, покварени калкулатор, потреба за тоалетом итд.), привуците пажњу водичу тима тако што ћете поставити једну од три заставице у држач, који се налази на вашем одељењу ("Допуните ми боцу, молим вас", "Морам да идем у тоалет, молим вас" или "Треба ми помоћ, молим вас" у свим осталим ситуацијама).

### На крају теста

- На крају теста морате да престанете са писањем.
- За сваки задатак, сложите одговарајуће листове у следећем редоследу: омот (C), питања (Q), одговори (A), радни листови (W).
- Ставите све листове везане за један задатак у исти коверат. Ставите општа упутства (G) у преостали посебан коверат. Будите сигурни да се ваша шифра види кроз прозорчић на сваком коверту. Предајте и празне листове. Није дозвољено да изнесете било који лист са теста.
- Оставите плави калкулатор, који су обезбедили организатори, на столу.

- Узмите ваш прибор за писање (2 хемијске оловке, 1 фломастер, 1 оловку, 1 маказе, 1 лењир, 2 пара чепова за уши) као и ваш лични калкулатор (ако га имате) и понесите са собом. Понесите, такође, и боцу са водом.
- Сачекајте за вашим столом док не покупе ваше коверте. Када се сви коверти сакупе ваш водич ће вас извести из сале за тест.

## Општи подаци

Брзина светлости у вакууму	$c$	$=$	$299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Магнетна пермеабилност вакуума (магнетна константа)	$\mu_0$	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Диелектрична константа вакуума (пропуштљивост вакуума)	$\epsilon_0$	$=$	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Елементарно наелектрисање	$e$	$=$	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\text{ A} \cdot \text{s}$
Маса електрона	$m_e$	$=$	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\text{ kg}$ $= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Маса протона	$m_p$	$=$	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$ $= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Маса неутрона	$m_n$	$=$	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$ $= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Атомска јединица масе	$u$	$=$	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\text{ kg}$
Ридбергова константа	$R_\infty$	$=$	$10\,973\,731.568\,508(65)\text{ m}^{-1}$
Универзална гравитациона константа	$G$	$=$	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Гравитационо убрзање (у Цириху)	$g$	$=$	$9.81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Планкова константа	$h$	$=$	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Авогадров број	$N_A$	$=$	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
Универзална гасна константа	$R$	$=$	$8.314\,4598(48)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Константа моларне масе	$M_u$	$=$	$1 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Болцманова константа	$k_B$	$=$	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Штефан-Болцманова константа	$\sigma$	$=$	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

## Два проблема из Механике

Молимо вас да прочитате општа упутства која се налазе у посебној коверти пре него што почнете са решавањем задатака.

### Део А. Скривени диск (3.5 поена)

У овом делу задатка разматрамо крути дрвени цилиндар радијуса  $r_1$  и дебљине  $h_1$ . Негде унутар дрвеног цилиндра, дрво је замењено металним диском радијуса  $r_2$  и дебљине  $h_2$ . Метални диск је смештен тако да је његова оса симетрије  $B$  паралелна оси симетрије дрвеног цилиндра  $S$ , и налази се на средини у односу на базисе дрвеног цилиндра (слика 1б). Растојање између оса  $S$  и  $B$  износи  $d$ . Густина дрвета је  $\rho_1$ , а густина метала  $\rho_2$  ( $\rho_2 > \rho_1$ ). Укупна маса овог система (дрвени део и метални диск) је  $M$ .

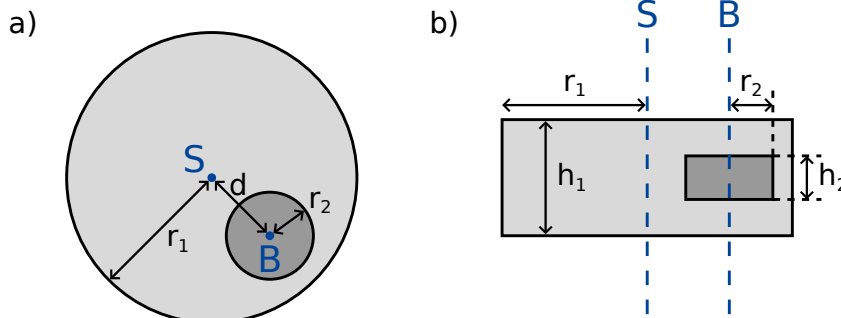
У овом делу задатка, дрвени цилиндар је постављен на подлогу тако да се може слободно котрљати. Видети слику 1. за изглед диска са стране и одозго.

Циљ овог задатка је одредити величину и позицију металног диска.

За све даље рачуне у делу А овог задатка, резултате изразити преко следећих познатих величина:

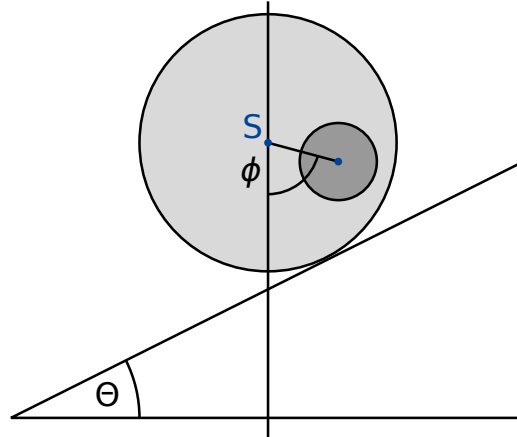
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Циљ је одредити  $r_2, h_2$  и  $d$ , помоћу индиректних мерења.



Слика 1: а) поглед са стране б) поглед одозго

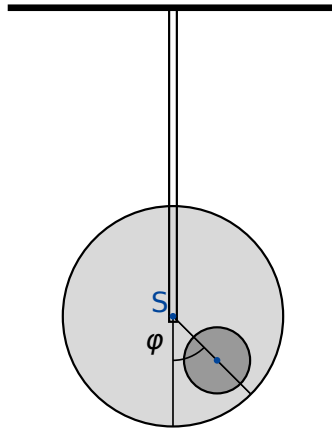
Величина  $b$  представља растојање између центра масе  $C$  целог система и осе симетрије  $S$  дрвеног цилиндра. Како би одредили ово растојање, постављен је следећи експеримент: Дрвени цилиндар је постављен на хоризонталну подлогу тако да се налази у стабилној равнотежи. Један крај подлоге се затим полако подиже, тако да настаје стрма равна нагибног угла  $\theta$  (слика 2.) Као резултат статичког трења, дрвени цилиндар се може слободно окретати без клизања. Он ће се откотрљати мало низ стрму равну и затим остати у стању мировања, након ротације за познати угао  $\phi$ .



Слика 2. Цилиндар на стрмој равни.

**A.1** Наћи израз за растојање  $b$  као функцију величина (1), угла  $\phi$  и нагибног угла  $\Theta$  стрме равни  $\Theta$ . 0.8pt

Од сада надаље, величину  $b$  сматрати познатом.



Слика 3: Систем који осцилује.

Следећа величина коју желимо да измеримо је момент инерције  $I_S$  цилиндра у односу на осу симетрије  $S$ . Ово ћемо урадити тако што ћемо цилиндар пустити да осцилује око осе симетрије  $S$ . Ово је урађено тако што је цилиндар (слика 3.) изведен из равнотежног положаја за мали угао  $\varphi$ . Цилиндар ће у овом случају описивати периодично кретање са периодом  $T$ .

- A.2** Наћи једначину кретања за  $\varphi$ . Изразити момент инерције  $I_S$  система око осе симетрије  $S$  преко величина  $T$ ,  $b$  и осталих познатих величина (1). Може се претпоставити да је цилиндар изведен из равнотежног положаја за малу вредност угла, тако да је угао отклона  $\varphi$  у сваком тренутку мали. 0.5pt

Помоћу мерења из делова **A.1** и **A.2** сада желимо да одредимо радијус и положај металног диска унутар дрвеног цилиндра.

- A.3** Наћи израз за растојање  $d$  као функцију величине  $b$  и познатих величина (1). У коначном изразу за овај део задатка користити и величине  $r_2$  и  $h_2$  (пошто ће оне бити израчунате у делу **A.5**). 0.4pt

- A.4** Наћи израз за момент инерције  $I_S$  преко величине  $b$  и познатих величина (1). У коначном изразу за овај део задатка користити и величине  $r_2$  и  $h_2$  (пошто ће оне бити израчунате у делу **A.5**). 0.7pt

- A.5** Користећи све претходне резултате, написати израз за  $h_2$  и  $r_2$  преко величина  $b$ ,  $T$  и осталих познатих величина (1). Величину  $h_2$  у крајњем изразу можете оставити као функцију  $r_2$  (уколико је израз за  $r_2$  дат експлицитно преко познатих величина). 1.1pt

## Део В. Ротирајућа свемирска станица (6.5 поена)

Ана је астронаут која живи на свемирској станици. Свемирска станица је огроман точак радијуса  $R$  који ротира око своје осе и тако обезбеђује вештачку гравитацију астронаутима. Астронаути живе на унутрашњој страни обода точка. Сматрати да је свемирска станица довољно мале масе, тако да се њено гравитационо привлачење може занемарити. Такође, занемарити и закривљеност пода.

- V.1** Којом угаоном фреквенцом  $\omega_{ss}$  се окреће свемирска станица уколико астронаути осећају исто гравитационо убрзање  $g_E$  као и на површини Земље? 0.5pt

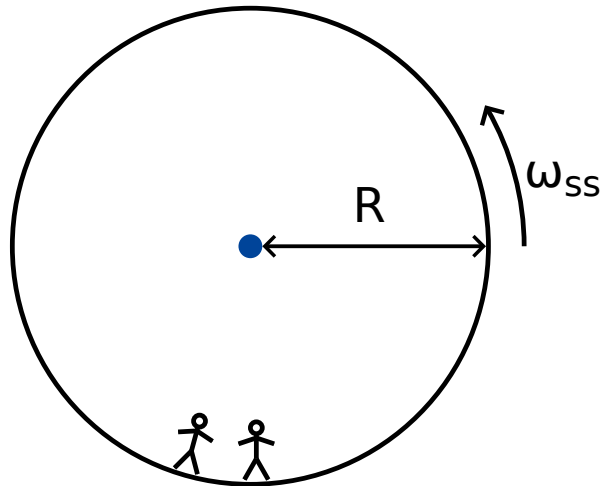
Ана и њен друг, астронаут Бојан имају следећу дискусију. Бојан не верује да они заправо живе на свемирској станици и тврди да се они налазе на Земљи. Ана жели да докаже Бојану да они заиста живе на ротирајућој свемирској станици користећи законе физике. Због тога, она качи тег масе  $m$  на опругу константе еластичности  $k$  и пушта га да осцилује. Тег осцилује само у вертикалном правцу, и не може да се креће у хоризонталном правцу.

- V.2** Претпостављајући да је на Земљи гравитационо убрзање константно и износи  $g_E$ , коју угаону фреквенцу би тег имао на Земљи? 0.2pt

- V.3** Коју угаону фреквенцу осциловања  $\omega$  би Ана измерила на свемирској станици? 0.6pt

Ана је убеђена да њен експеримент доказује да се они налазе на ротирајућој свемирској станици. Бојан и даље не верује. Он тврди да уколико се узме да гравитационо убрзање на Земљи није константно, већ се урачуна промена гравитационог убрзања са променом висине, добиће се сличан

ефекат. У следећем делу задатка испитујемо да ли је Бојан у праву.



Слика 4: Свемирска станица

- B.4** Извести израз за гравитационо убрзање  $g_E(h)$  у функцији висине  $h$  (за мале вредности висине изнад Земљине површине) и израчунајте угаону фреквенцу осциловања тега (линеарна апроксимација је довољна). Радијус Земље  $R_E$  сматрати познатим. Занемарити утицај ротације Земље. 0.8pt

Заиста, Ана је сада убеђена да тег осцилује са фреквенцом коју је Бојан предвидео.

- B.5** За коју вредност радијуса  $R$  свемирске станице се фреквенца осцилација  $\omega$  на свемирској станици поклапа са фреквенцијом осцилација  $\tilde{\omega}_E$  на површини Земље? Решење изразити преко  $R_E$ . 0.3pt

Огорчена Бојановом тврдоглавошћу, Ана је дошла до следеће идеје за експеримент. Покушаће да искористи Кориолисову силу како би доказала да је она у праву. Како би то урадила, попела се на кулу висине  $H$  изнад основе свемирске станице и бацила тег. Овај експеримент се може разматрати како у ротирајућем систему референце, тако и у инерцијалном систему референце.

У систему референце који ротира константном угаоном брзином, на астронаута делује Кориолисова сила. Кориолисова сила  $\vec{F}_C$  делује на тег масе  $m$ , који се креће брзином  $\vec{v}$  у ротирајућем систему референце. Уколико систем референце ротира константном угаоном брзином  $\vec{\omega}_{ss}$ , Кориолисова сила је дата следећим изразом

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

Интензитет ове силе се може изразити на следећи начин

$$F_C = 2m\omega_{ss} v \sin \phi , \quad (3)$$

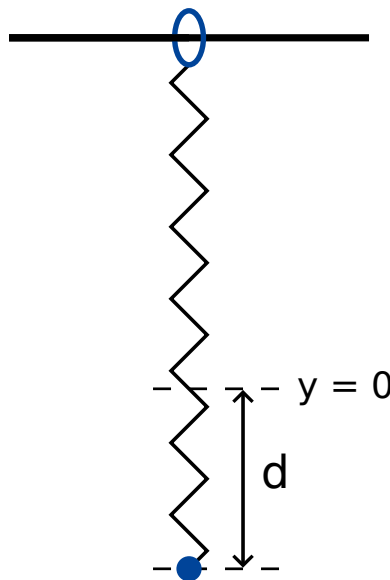
где је  $\phi$  угао између вектора брзине тега и осе ротације. Сила ће бити нормална на вектор брзине  $v$  и на осу ротације. Смер силе се може одредити правилом десне руке (мада у овом задатку се може изабрати произвољно).

- B.6** Израчунати хоризонталну компоненту брзине  $v_x$  и хоризонтални померај  $d_x$  (у односу на подножје куле у правцу нормалном на кулу) тега у тренутку када тег падне на под. Може се претпоставити да је висина куле  $H$  мала, тако да је убрзање тега ка поду током пада константно. Такође, може се претпоставити да је  $d_x \ll H$ . 1.1pt

Како би проверила резултат, Ана одлучује да понови експеримент али овог пута са много више куле. На њено изненађење, тег је пао на под на истом месту где је подножје куле, тј. тако да је  $d_x = 0$ .

- B.7** Наћи најмању висину куле за коју се може догодити да је  $d_x = 0$ . 1.3pt

Ана је спремна да покуша још једном да убеди Бојана. Овога пута ће користити тег на опрузи да би показала утицај Кориолисове силе. Поставка експеримента сада се мења. Опруга је у овом случају закачена за прстен који може слободно да клизи по хоризонталној жици у правци  $x$  осе. Опруга све време остаје хоризонтална и осцилује у правцу  $y$  осе. Жица на којој је закачен прстен је паралелна подлози и нормална у односу на осу ротације свемирске станице.  $xy$  раван је тако нормална на осу ротације, при чему је смер  $y$  осе ка центру ротације станице.



Слика 5. Поставка експеримента.

- B.8** Ана истеже тег за дужину  $d$  у односу на тачку равнотеже  $x = 0, y = 0$ , и пушта га да слободно осцилује (Слика 5.). 1.7pt
- Наћи изразе за  $x(t)$  и  $y(t)$ . Можете претпоставити да је  $\omega_{ss}d$  мала величина. Занемарити Кориолисову силу која утиче на кретање дуж  $y$ -осе.
  - Скицирати трајекторију тега ( $x(t), y(t)$ ) и означити све релевантне тачке и растојања на слици (као што су амплитуда итд.).

Ана и Бојан настављају дискусију...

## Два проблема из механике (10 поена)

### Део А. Скривени диск (3.5 поена)

**A.1** (0.8 pt)

$$b =$$

**A.2** (0.5 pt)

Једначина кретања за  $\varphi =$

$$I_S =$$

**A.3** (0.4 pt)

$$d =$$

**A.4** (0.7 pt)

$$I_S =$$

**A.5** (1.1 pt)

$$h_2 =$$

$$r_2 =$$

**Део Б. Ротирајућа свемирска станица (6.5 поена)**

**B.1** (0.5 pt)

$$\omega_{ss} =$$

**B.2** (0.2 pt)

$$\omega_E =$$

**B.3** (0.6 pt)

$$\omega =$$

**B.4** (0.8 pt)

$$g_E(h) =$$

$$\tilde{\omega}_E =$$

**B.5** (0.3 pt)

$$R =$$

**B.6** (1.1 pt)

$$v_x =$$

$$d_x =$$

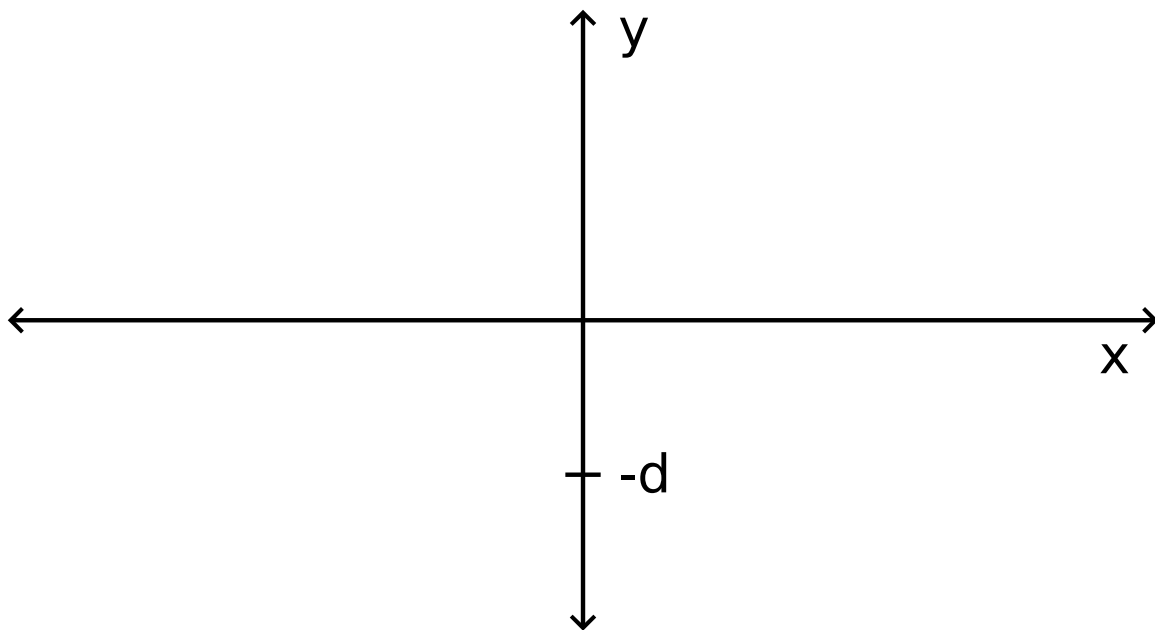
**B.7** (1.3 pt)

$$H \geq$$

**B.8** (1.7 pt)

$$x(t) =$$

$$y(t) =$$



## Нелинеарна динамика електричних кола (10 поена)

Молимо вас да прво прочитате општа упутства која се налазе у посебној коверти пре него почнете да решавате задатак.

### Увод

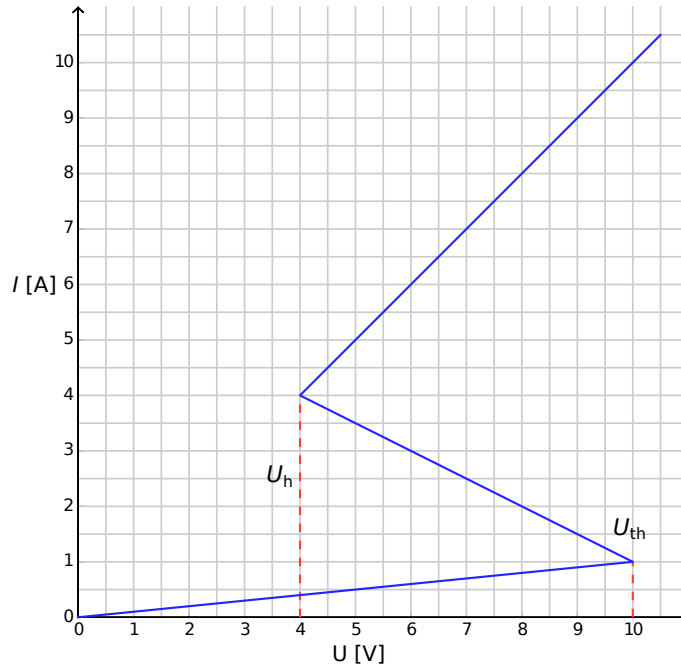
Бистабилни (значи има два стабилна-равнотежна стања) полупроводнички елементи (нпр. тиристор) се користе у електроници као прекидачи или као генератори електромагнетних осцилација. Главна област примене тиристора је контрола наизменичних струја у енергетској електроници, на пример као исправљач наизменичне у једносмерну струју при снагама које су реда мегавата. Бистабилни елементи могу да послуже и као пример самоорганизованих појава у физици (овај пример ће бити разматран у делу Б овог задатка), у биологији (погледај део Ц), као и у другим областима савремене нелинеарне науке.

### Циљеви

Циљ је да анализирамо нестабилности и нетривијалну динамику електричних кола која садрже елементе који имају нелинеарну  $I - V$  карактеристику. Други циљ је да откријемо могућу примену таквих кола у инжењерству и моделовању биолошких система.

### Део А. Стационарна стања и нестабилности (3 поена)

На слици 1. је приказана  $I - V$  карактеристика нелинеарног елемента  $X$ , која личи на латинично **слово S**. У опсегу напона између  $U_h = 4.00 \text{ V}$  (назовимо га holding напон) и  $U_{th} = 10.0 \text{ V}$  (назовимо га threshold напон)  $I - V$  карактеристика је вишезначна, има више вредности струје за исти напон. Ради једноставности график на Слици 1. је представљен као изломљена линија (свака грана графика је права линија). Вреди поменути да горња линија пролази кроз координатни почетак, ако се продужи. Оваква апроксимација на добар начин описује стварно понашање тиристора.



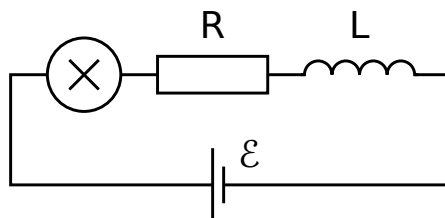
Слика 1.  $I - V$  карактеристика нелинеарног елемента  $X$ .

- A.1** Користећи се графиком одредите отпор  $R_{\text{on}}$  елемента  $X$  на горњој грани  $I - V$  карактеристике, као и отпор  $R_{\text{off}}$  на доњој грани. Средња грана  $I - V$  карактеристике је дата једначином 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Нађите вредности параметара  $I_0$  и  $R_{\text{int}}$ .

Елемент  $X$  је повезан редно (погледај Сliku 2) са отпором  $R$ , калемом индуктивности  $L$  и идеалним извором напона  $\mathcal{E}$ . Каже се да је коло у стационарном стању ако струја не зависи од времена  $I(t) = \text{const.}$



Слика 2. Коло које садржи елемент  $X$ , отпор  $R$ , калем индуктивности  $L$ , и извор напона  $\mathcal{E}$ .

**A.2** Који је број могућих стационарних стања кола са Сlike 2. при фиксираној вредности  $\mathcal{E}$  и за отпор  $R = 3.00 \Omega$ ? Како ће се променити одговор уколико ставите да је  $R = 1.00 \Omega$ ? 1pt

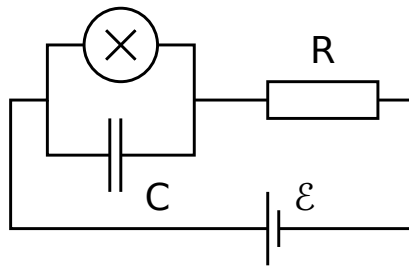
**A.3** Нека је за коло са Сlike 2.  $R = 3.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \mu\text{H}$ , и  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ . Одредите вредност струје  $I_{\text{stationary}}$  и напона  $V_{\text{stationary}}$  на нелинеарном елементу  $X$  у стационарном стању. 0.6pt

Коло са Сlike 2. је у стационарном стању при чему је  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . Стационарно стање је стабилно ако се после малог одступања (повећавања или смањивања струје), струја враћа у стационарно стање. Ако систем наставља да се креће од стационарног стања, каже се да је оно нестабилно.

**A.4** Користећи бројне вредности из питања **A.3** анализирајте стабилност стационарног стања при  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . Да ли је оно стабилно или нестабилно? 1pt

### Део Б. Бистабилни нелинеарни елементи у физици: радио одашиљач (5 поена)

Анализирајмо сада другачије електрично коло (види Сliku 3.). Овога пута нелинеарни елемент  $X$  је повезан паралелно са кондензатором капацитета  $C = 1.00 \mu\text{F}$ . Тај блок се затим редно веже са отпором  $R = 3.00 \Omega$  и са идеалним извором напона  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ . Испоставља се да сада електрично коло осцилује тако што нелинеарни елемент  $X$  наизменично прелази са једне на другу грану  $I - V$  карактеристике током једног циклуса осцилације.



Слика 3. Коло које садржи елемент  $X$ , кондензатор  $C$ , отпор  $R$ , и извор напона  $\mathcal{E}$ .

**B.1** Нацртајте један циклус осцилација на  $I - V$  графику, укључујући и смер (да ли осцилује у смеру казаљке на сату или супротно). Образложите одговор уз помоћ једначина и скица. 1.8pt

**B.2** Нађите изразе за времена  $t_1$  и  $t_2$  која систем проводи на свакој од грана  $I - V$  графика током једног циклуса осцилација. Израчунајте и њихове бројне вредности. Израчунајте бројну вредност периода осцилација  $T$  претпостављајући да је време неопходно систему да скочи са једне на другу грану  $I - V$  графика занемарљиво. 1.9pt

**B.3** Процените снагу  $P$  која се ослобађа на нелинеарном елементу током једног циклуса осцилација. Довољно је да дате ред величине. 0.7pt

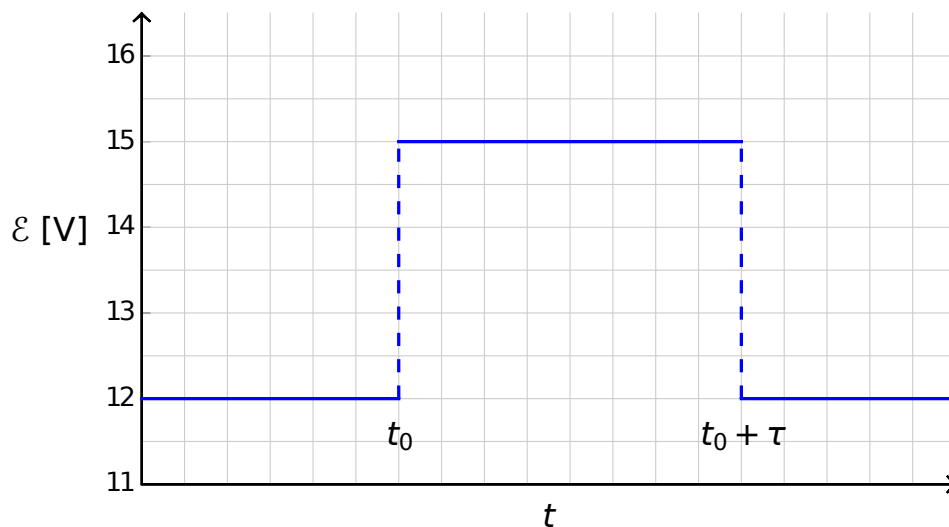
Коло са Сlike 3. се користи за конструкцију радио одашиљача. У ту сврху елемент  $X$  се прикачи за један крај линеарне антене (права дугачка жица) дужине  $s$ . Други крај жице је слободан. У антени се формирају стојећи електромагнетни таласи. Брзина електромагнетних таласа дуж антене је иста као у вакууму. Одашиљач користи основни хармоник система, који има период  $T$  из питања Б.2.

**B.4** Која је оптимална дужина  $s$  претпостављајући да та дужина не може бити дужа од 1 km? 0.6pt

### Део Ц. Бистабилни нелинеарни елементи у биологији: неуристор (2 поена)

У овом делу задатка размотрићемо примену бистабилних нелинеарних елемената за моделовање биолошких процеса. Неурон у људском мозгу има следеће особине: када се побуди неким спољашњим сигналом, он направи само једну осцилацију и затим се врати у почетно стање. Такву особину називамо екситабилност. Због ове особине импулси могу да путују (пропагирају) дуж мреже повезаних неурона који чине нервни систем. Полупроводнички чип који је дизајниран тако да имитира екситабилност и пропагацију импулса се назива *неуристор* (комбинација речи неурон и транзистор).

Покушаћемо да моделујемо једноставни неуристор користећи коло са нелинеарним елементом  $X$  које смо претходно анализирали. У том циљу напон  $\mathcal{E}$  са Сlike 3. смо смањили на вредност  $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ . Тада осцилације престају и систем се налази у стационарном стању. Онда напон нагло повећамо на вредност  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ , а након неког временског интервала  $\tau$  (при чему је  $\tau < T$ ) напон нагло падне на вредност  $\mathcal{E}'$  (види Сliku 4.). Испоставља се да постоји одређена критична вредност  $\tau_{\text{crit}}$ , таква да се систем квалитативно различито понаша за  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  и за  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ .



Слика 4. Напон који даје извор напона као функција времена.

**C.1** Скицирајте график временске зависности струје  $I_X(t)$  која пролази кроз не-линеарни елемент  $X$  за  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  и за  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ . 1.2pt

**C.2** Нађите израз и израчунајте бројну вредност за критично време  $\tau_{\text{crit}}$  за које долази до промене понашања система. 0.6pt

**C.3** Да ли је коло са  $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$  s неуристор? 0.2pt

## Нелинеарна динамика у електричним колима (10 поена)

### Део А. Стационарна стања и нестабилности (3 поена)

**A.1** (0.4 pt)

$$R_{\text{on}} =$$

$$R_{\text{off}} =$$

$$I_0 =$$

$$R_{\text{int}} =$$

**A.2** (1 pt)

Могући број стационарних стања за  $R = 3.00 \Omega$ :

Могући број стационарних стања за  $R = 1.00 \Omega$ :

**A.3** (0.6 pt)

$$I_{\text{stationary}} =$$

$$V_{\text{stationary}} =$$

**A.4** (1 pt)

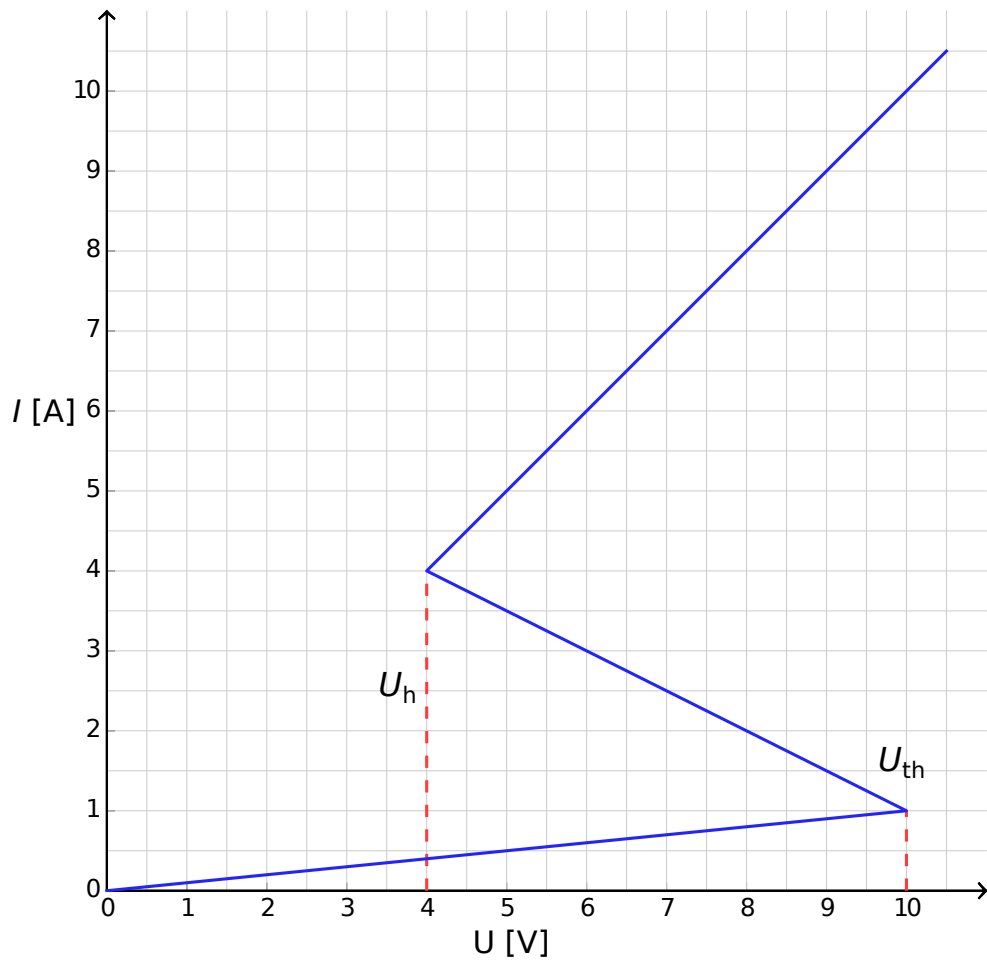
Понашање у случају  $I(t = 0) > I_{\text{stationary}}$  :

Понашање у случају  $I(t = 0) < I_{\text{stationary}}$  :

Да ли је стационарно стање :  стабилно?  нестабилно?

## Део Б. Бистабилни нелинеарни елементи у физици: радио одашиљач (5 поена)

**B.1** (1.8 pt)



Образложење:

**B.2** (1.9 pt)

Израз за  $t_1 =$

Бројна вредност  $t_1 =$

Израз за  $t_2 =$

Бројна вредност  $t_2 =$

Бројна вредност  $T =$

**B.3** (0.7 pt)

$P \approx$

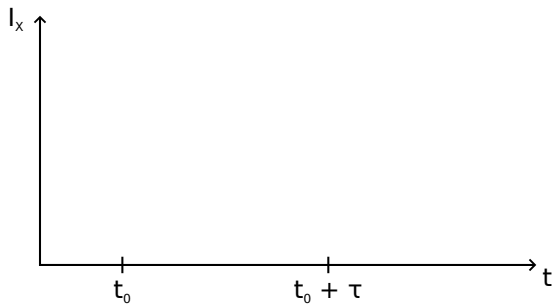
**B.4** (0.6 pt)

$s =$

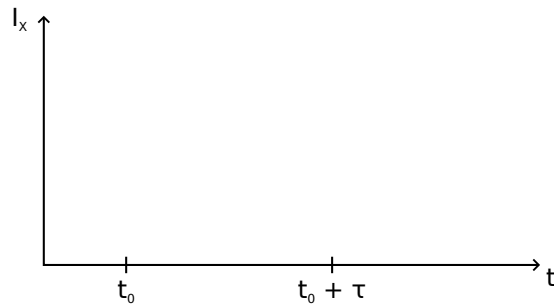
## Део Ц. Бистабилни нелинеарни елементи у биологији: неуристор (2 поена)

**C.1** (1.2 pt)

Скица за  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  :



Скица за  $\tau > \tau_{\text{crit}}$  :



**C.2** (0.6 pt)

Израз за  $\tau_{\text{crit}} =$

Бројна вредност  $\tau_{\text{crit}} =$

**C.3** (0.2 pt)

Да ли је коло неуристор?  Да  Не

## Велики хадронски сударац (10 поена)

Молимо вас да прочитате општа упутства која се налазе у посебном коверту, пре него што почнете са радом.

Тема овог задатка је физика која описује процесе у ЛХЦ (LHC -Large Hadron Collider) акцелератору (убрзивачу) честица који се налази у ЦЕРН-у. ЦЕРН је највећа лабораторија за физику елементарних честица на свету. Основни циљ ове лабораторије је потпуни увид у основне законе природе. Два снопа честица високих енергија се крећу унутар прстена акцелератора вођена јаким магнетним пољем, да би се коначно сударила, један са другим. Протони нису хомогено распоређени у снопу, него су груписани у такозване гроздове. Честице које настану у оваквим сударима се виде уз помоћ великих детектора. Неки од параметара ЛХЦ-а су дати у табели 1.

ЛХЦ прстен	
Обим прстена	26659 m
Број гроздова честица у снопу протона	2808
Број протона у грозду	$1.15 \times 10^{11}$
Снопови протона	
Енергија протона	7.00 TeV
Енергија у систему центра масе	14.0 TeV

Табела 1: Типичне бројне вредности значајних параметара ЛХЦ-а.

У физици елементарних честица се користе подесне јединице за енергију, импулс и масу: енергија се изражава у електрон-волтима [eV]. По дефиницији, 1 eV је количина енергије коју добија честица елементарног наелектрисања,  $e$ , која се креће кроз разлику потенцијала од једног волта ( $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ ).

Импулс се изражава у јединицама  $eV/c$  а маса у  $eV/c^2$ , где је  $c$  брзина светлости у вакууму. Пошто је 1 eV веома мала количина енергије, користе се чешће MeV ( $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ ), GeV ( $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ ) или TeV ( $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ ).

Део А се бави убрзавањем протона или електрона. Део В је посвећен идентификацији честица насталих приликом судара у ЦЕРН-у.

### Део А. ЛХЦ акцелератор (6 поена)

#### Убрзање:

Претпоставите да су протони убрзани напоном  $V$  тако да им је брзина врло блиска брзини светлости. Занемарите све губитке енергије услед зрачења или судара са осталим честицама.

**A.1** Изведите израз за коначну брзину  $v$  протона у зависности од напона  $V$  и физичких константи. 0.7pt

План за будући експеримент у ЦЕРН-у је да се протони добијени из ЛХЦ-а сударају са електронима енергија од 60.0 GeV.

- A.2** За честице високих енергија и малих маса мировања релативно одступање коначне брзине од брзине светлости  $\Delta = (c - v)/c$ , је врло мало. Нађите погодну апроксимацију за  $\Delta$  и израчунајте  $\Delta$  за електроне енергија 60.0 GeV, користећи напон и физичке константе. 0.8pt

Вратимо се на протоне у ЛХЦ-у. Претпоставите да је извор снопа кружног облика.

- A.3** Изведите израз за густину флукса хомогеног магнетног поља  $B$  које је неопходно да одржава протоне на кружној путањи. Израз треба да садржи само енергију протона  $E$ , обим  $L$ , основне константе и бројеве. Можете да користите прикладне апроксимације ако је њихов ефекат мањи од тачности одређене најмањим бројем значајних цифара. Израчунајте густину магнетног флукса  $B$  за протоне енергије  $E = 7.00 \text{ TeV}$ , занемарујући интеракцију између протона. 1.0pt

### Израчена снага:

Наелектрисане честице које се крећу убрзано зраче енергију у облику електромагнетних таласа. Израчена снага  $P_{\text{rad}}$  наелектрисане честице која кружи константном угаоном брзином зависи само од убрзања  $a$ , наелектрисања  $q$ , брзине светлости  $c$ , као и од диелектричне константе вакуума  $\epsilon_0$ .

- A.4** Користећи димензиону анализу нађите израз за израчену снагу  $P_{\text{rad}}$ . 1.0pt

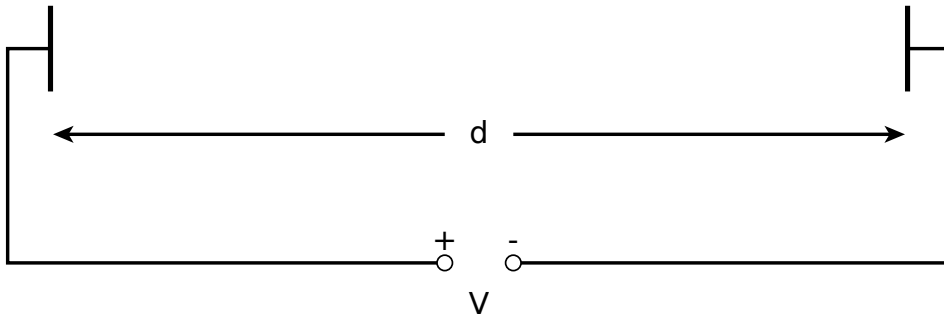
Прави израз за израчену снагу садржи фактор  $1/(6\pi)$ ; такође извођење које у потпуности користи релативистичке ефекте даје додатни мултипликативни фактор  $\gamma^4$ , где је  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

- A.5** Израчунајте укупну изрчену снагу  $P_{\text{tot}}$  ЛХЦ-а за протоне енергије  $E = 7.00 \text{ TeV}$  (погледајте табелу 1). Можете да користите прикладне апроксимације. 1.0pt

### Линеарно убрзавање:

У ЦЕРН-у протони се убрзавају у линеарном акцелератору дужине  $d = 30.0 \text{ m}$ . Крећу из мировања кроз разлику потенцијала  $V = 500 \text{ MV}$ . Претпоставите да је електрично поље хомогено. Линеарни акцелератор се састоји од две плоче као што је приказано на слици 1.

- A.6** Одредите време  $T$  које је потребно протонима да прођу кроз електрично поље. 1.5pt



Слика 1: Скица акцелератора

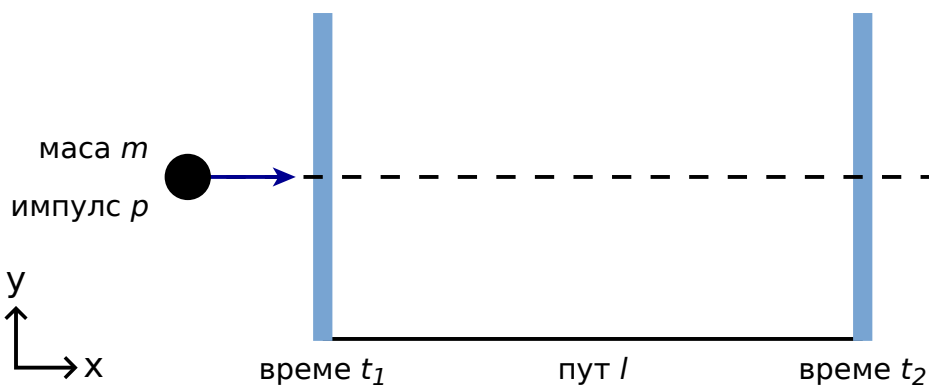
## Део Б. Идентификација честица (4 поена)

### Време лета:

Важно је идентификовати честице високих енергија које се стварају приликом судара да би се протумачио процес интеракције. Једноставан начин је да се измери време  $t$  потребно честици познатог импулса да пређе пут  $l$ , такозваним детектором времена лета (Time-of-Flight (ToF) detector). Типичне честице идентификоване у детектору су приказане у табели 2., у којој су дате и њихове масе.

Честица	маса [MeV/c <sup>2</sup> ]
Деутерон	1876
Протон	938
наелектрисани Каон	494
наелектрисани Пион	140
Електрон	0.511

Табела 2. Честице и њихове масе.

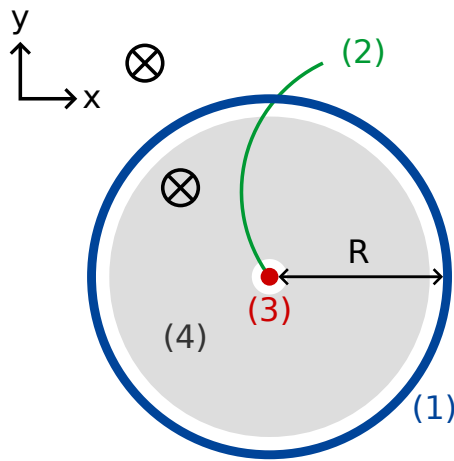


Схематски приказ детектора времена лета.

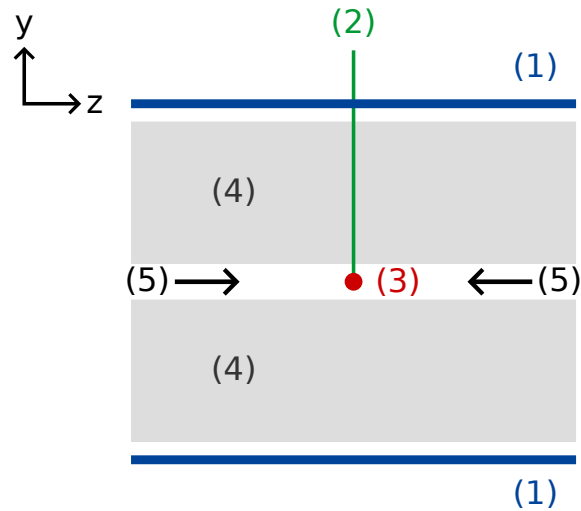
- В.1** Изразити масу  $m$  у зависности од импулса  $p$  дужине лета  $l$  и времена лета  $t$  претпостављајући да се честице елементарног наелектрисања  $e$  крећу брзином блиском брзини светлости, правим путањама унутар детектора, и да се крећу нормално на две плоче детектора (слика 2). 0.8pt

- B.2** Израчунајте најмању дужину детектора времена лета  $l$  која омогућава поуздано разликовање наелектрисаног каона од наелектрисаног пиона, при чему обе честице имају импулс од  $1.00 \text{ GeV}/c$ . За добро раздвајање је потребно да разлика у времену лета буде три пута већа од временске резолуције детектора. Стандардна резолуција детектора времена лета је  $150 \text{ ps}$  ( $1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$ ). 0.7pt

Честице настале у стандардном ЛХЦ детектору се идентификују у двостепеном детектору који се састоји од детектора трагова и детектора времена лета. На слици 3 је приказана поставка у две равни, трансверзалној и лонгитудиналној у односу на сноп протона. Оба детектора су у облику цеви које окружују област интеракције, и сноп пролази по средини цеви. Детектор трагова мери путању наелектрисаних честица које пролазе кроз магнетно поље које је паралелно снопу протона. Ако се зна полупречник путање  $r$  може да се одреди трансверзална компонента импулса  $p_T$  честице. Пошто се зна време судара, за детектор времена лета је потребна само једна цев да би се измерило време лета (време протекло од судара до детекције у цеви детектора). Овакав детектор времена лета је постављен одмах до детектора трагова. У овом задатку претпоставите да се све честице настале у судару крећу нормално на протонски сноп, што значи да настале честице немају компоненту импулса дуж правца снопа протона.



трансверзална раван



попречни пресек  
бочне стране  
цеви дуж снопа

- (1) - Цев детектора времена лета
- (2) - траг
- (3) - место судара
- (4) - детектор трагова
- (5) - снап протона
- ⊗ - магнетно поље

Слика 3 : Поставка експеримента за идентификацију честица, са комором за трагове и детектором времена лета. Оба детектора су цеви које окружују место судара у средини. Слика лево: поглед на трансверзалну раван нормалну на снап протона. Слика десно: поглед на лонгитудинлну раван паралелну снопу. Честица се креће нормално на снап.

**B.3** Изразите масу честица у зависности од густине магнетног флукса  $B$ , полупречника цеви са детектором времена лета  $R$  и измерених величина: полупречника  $r$  путање (трага) и времена лета  $t$ . 1.7pt

Детектоване су четири честице и треба их идентификовати. Густина магнетног флукса у детектору трага је била  $B = 0.500 \text{ T}$ . Полупречник  $R$  цеви са детектором времена лета је била  $3.70 \text{ m}$ . Резултати мерења су ( $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ ):

Честица	Полупречник трајекторије $r$ [m]	Време лета $t$ [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

**B.4** Идентификујте ове четири честице на основу израчунате масе.

0.8pt

## Велики хадронски сударач (10 поена)

### Део А. ЛХЦ акцелератор (6 поена)

**A.1** (0.7 pt)

$v =$

**A.2** (0.8 pt)

апроксимирани израз:  $\Delta =$

бројна вредност:  $\Delta =$

**A.3** (1.0 pt)

израз:  $B =$

бројна вредност:  $B =$

**A.4** (1.0 pt)

$P_{\text{rad}} \propto$

**A.5** (1.0 pt)

$P_{\text{tot}} =$

**A.6** (1.5 pt)

$T =$

## Део Б. Идентификација честица (4 поена)

**B.1** (0.8 pt)

$m =$

**B.2** (0.7 pt)

$l =$

**B.3** (1.7 pt)

$m =$

**B.4** (0.8 pt)

Честица	Измерена маса; јединца за масу [     ] :	Идентификована као:
A		
B		
C		
D		

## General instructions: Experimental Examination (20 points)

July 12, 2016

The experimental examination lasts for 5 hours and is worth a total of 20 points.

### Before the exam

- You must not open the envelopes containing the problems before the sound signal indicating the beginning of the competition.
- The beginning and end of the examination will be indicated by a sound signal. There will be announcements every hour indicating the elapsed time, as well as fifteen minutes before the end of the examination (before the final sound signal).

### During the exam

- Dedicated answer sheets are provided for writing your answers. Enter the observations into the appropriate tables, boxes or graphs in the corresponding answer sheet (marked A). For every problem, there are extra blank work sheets for carrying out detailed work (marked W). Be sure to always use the work sheets that belong to the problem you are currently working on (check the problem number in the header). If you have written something on any sheet which you do not want to be graded, cross it out. Only use to front side of every page.
- In your answers, try to be as concise as possible: use equations, logical operators and sketches to illustrate your thoughts whenever possible. Avoid the use of long sentences.
- Explicit error calculation is not required unless explicitly asked for. However, you are asked to give an appropriate number of significant digits when stating numbers. Also, you should decide on the appropriate number of data points or measurement repetitions unless specific instructions are given.
- You may often be able to solve later parts of a problem without having solved the previous ones.
- You are not allowed to leave your working place without permission. If you need any assistance (need to refill your drinking water bottle, broken calculator, need to visit a restroom, etc), please draw the attention of a team guide by putting one of the three flags into the holder attached to your cubicle ("Refill my water bottle, please", "I need to go to the toilet, please", or "I need help, please" in all other cases).

### At the end of the exam

- At the end of the examination you must stop writing immediately.
- For every problem, sort the corresponding sheets in the following order: cover sheet (C), questions (Q), answer sheets (A), work sheets (W).
- Put all the sheets belonging to one problem into the same envelope. Also put the general instructions (G) into the remaining separate envelope. Make sure your student code is visible in the viewing window of each envelope. Also hand in empty sheets. You are not allowed to take any sheets of paper out of the examination area.

- Put your writing equipment (2 ball point pens, 1 felt tip pen, 1 pencil, 1 pair of scissors, 1 ruler, 2 pairs of earplugs) as well as the provided calculator and your personal calculator (if applicable) back into the transparent zip bag.
- Wait at your table until your envelopes are collected. Once all envelopes are collected your guide will escort you out of the examination area. Take your writing equipment bag with you and hand it in at the exit. Also take your water bottle with you.

## Topics

<b>Experiment E-I:</b>	Electrical conductivity in two dimensions	10 marks
<b>Experiment E-II:</b>	Jumping beads - A model for phase transitions and instabilities	10 marks

Experiments E-I and E-II share some of the same equipment. Among others, the same power supply and signal generator are used for both experiments, but with different settings.

Attention: when unpacking the box, do not lift the loudspeaker assembly by the plastic cylinder attached to the membrane.

## Material used in both experiments

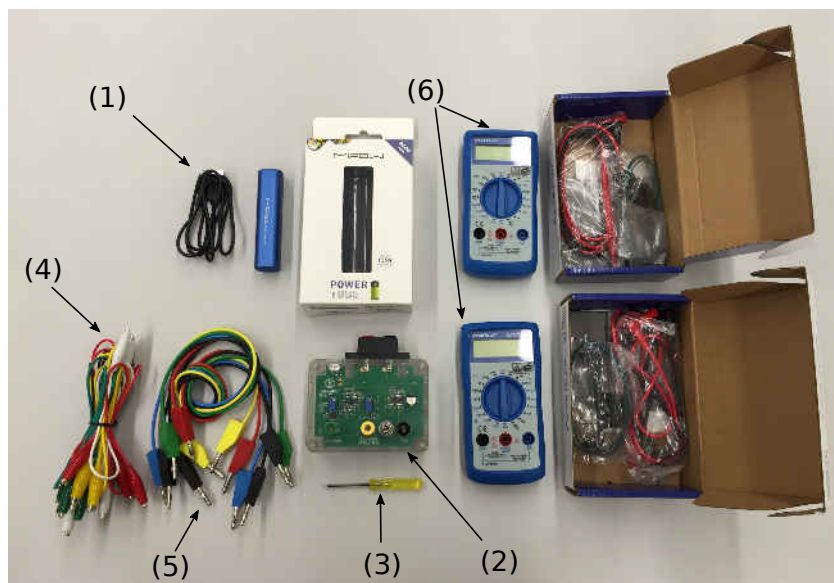


Figure 1: Common material for both experiments.

1. Battery pack with USB cable
2. Adjustable signal generator powered by the battery pack
3. Small screwdriver
4. Ten cables with crocodile clips
5. Six cables with 4 mm plugs
6. Two digital multimeters

You may also use any of the supplied stationary items to conduct the practical tasks.

## Signal generator

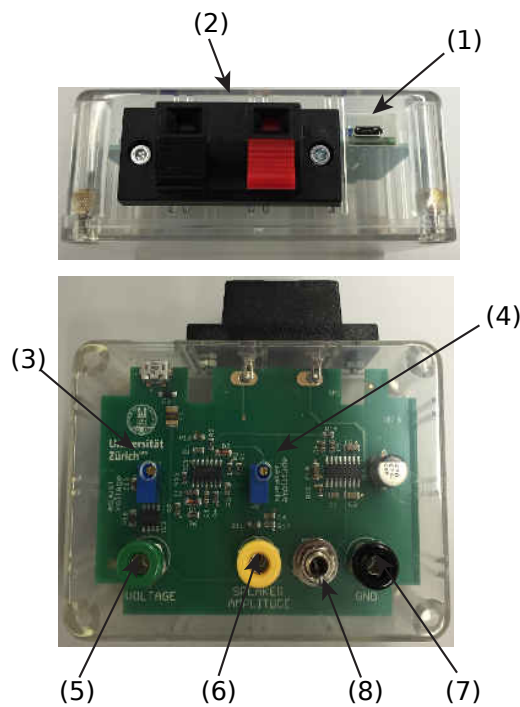


Figure 2.

1. USB connector for powering the signal generator
2. Loudspeaker terminals (only used in E-II)
3. Potentiometer for adjusting the constant voltage (only used in E-I)
4. Potentiometer for adjusting the speaker amplitude (only used in E-II)
5. DC voltage output socket (only used in E-I)
6. Monitor output socket for the loudspeaker drive amplitude (only used in E-II)
7. Common ground socket
8. Switch to turn the loudspeaker terminals and monitor output for the loudspeaker amplitude on / off

To power the signal generator, plug the battery pack using the USB cable to the USB connector of the signal generator (1).

Note that several turns of the potentiometer are required to go from one end of the range to the other. The potentiometers do not have mechanical stops at the end of their range.

## Digital multimeters

The digital multimeters can be used for current and voltage measurements. Always connect the two leads to the sockets labeled "VmAΩ" and "GND" and choose current/voltage and the measurement range

by means of the selector.

## Electrical conductivity in two dimensions (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

### Introduction

In the quest to develop next generation devices based on semi-conductor technology like computer chips or solar cells, researchers are looking for materials which exhibit outstanding transport properties, e.g. low electrical resistivity. Measurements of these properties are carried out using samples of finite size, contacts with finite contact resistance and in a special geometry. These effects have to be taken into account in order to extract the true material properties. Moreover, a thin film of the material may behave differently than bulk material.

In this task, we will investigate the measurement of electrical properties. We will use two different definitions:

- **Resistance  $R$ :** The resistance is the electrical property of a sample or device. It is the quantity which we actually measure on a specific sample with given dimensions.
- **Resistivity  $\rho$ :** The resistivity is the material property which determines the resistance. It depends on the material itself and on external parameters like the temperature, but it does not depend on the geometry of the sample.

In particular, we will measure the so-called *sheet resistivity*. This is the resistivity divided by the thickness of the very thin sheet.

We will explore the influence of the following parameters on the measurement of the electrical resistance of thin layers of material:

- the measurement circuitry,
- the measurement geometry,
- and the sample dimensions.

A sheet of conductive paper and a metal coated silicon wafer will serve as samples.

## List of materials

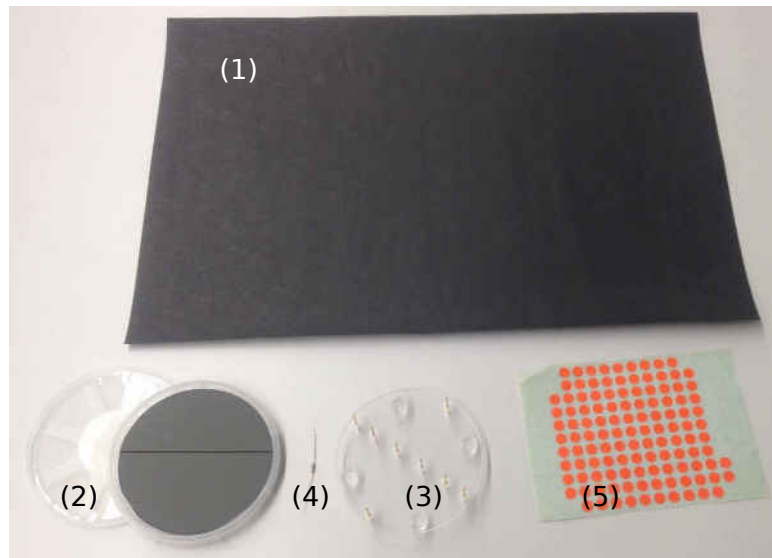


Figure 1: Additional equipment for this experiment.

1. Graphite coated conductive paper
2. A silicon wafer coated with a thin chromium film (stored in a wafer holder)
3. Plexiglas plate with 8 spring-loaded pins
4. An ohmic resistor
5. Color stickers

## Important precautions

- The silicon wafer provided can easily be broken if dropped or bent. Do not touch or scratch the shiny metallic surface.

## Instructions

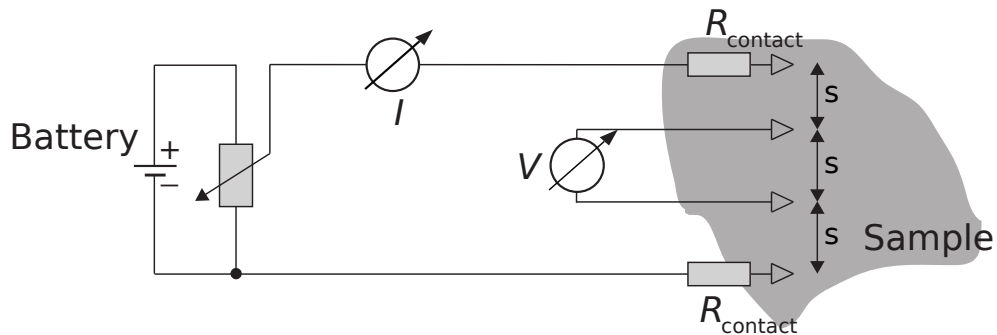
- In the experiment, the signal generator will be used as a DC voltage source. In this mode, the signal generator outputs a constant voltage between the *voltage* socket (5) and the *GND* socket (7). The numbers refer to the photograph shown in the general instructions.
- The voltage (range: 0- 5 V) can be adjusted on the left potentiometer labeled *adjust voltage* (3) using the screwdriver.
- When performing this experiment, make sure that the loudspeaker drive section of the signal generator is turned off using the toggle switch (8). This can be checked by measuring the voltage between the *speaker amplitude* monitor socket (6) and the *GND* socket (7). If the loudspeaker drive section is off, the voltage between these two terminals is zero.

## Part A. Four-point-probe (4PP) measurements (1.2 points)

In order to measure the resistivity of a sample precisely, the contacts used for the voltage measurement and the contacts used for current injection should be separated.

This technique is called four-point-probe technique (4PP). The four contacts are arranged into a symmetric geometry that is as simple as possible: The current  $I$  flows into the sample through one of the outer contacts (called source), then on all possible paths through the sample and out of the sample through the other contact (drain). In between, the voltage  $V$  is measured over a certain path length  $s$  on the sample.

Everything becomes quite simple if we have a symmetric setup, i.e. the same distance  $s$  between all contacts and the contacts in the center of the sample as shown in following sketch:



The curve  $I$  versus  $V$  represents the  $I - V$ -characteristics of the sample and allows the resistance of this sample segment to be determined. In the following we will only use the 4PP technique. To start, we will use the linear *equidistant* arrangement of four out of the eight probes (contacts) shown in the photograph.

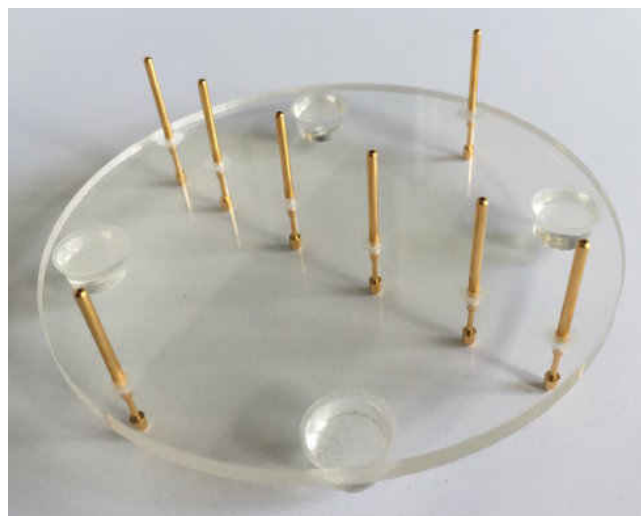


Figure 2: Acrylic glass plate for 4PP measurements, with the four rubber feet and the eight contacts or probes.

For the following measurement, use the whole sheet of conducting paper.

**Important hints for all following measurements:**

- The long side of the sheet of paper is the reference side. The four probes should be aligned parallel to this side.
- Be careful to use the coated side (black), not the brown back side of the paper! You may mark the correct orientation with color stickers.
- Check that there are no holes or cuts in the paper.
- For these measurements, place the contacts as close to the center of the sample as possible.
- Press the contacts with enough force to ensure good contact for each of them. The plastic feet should just touch the surface.

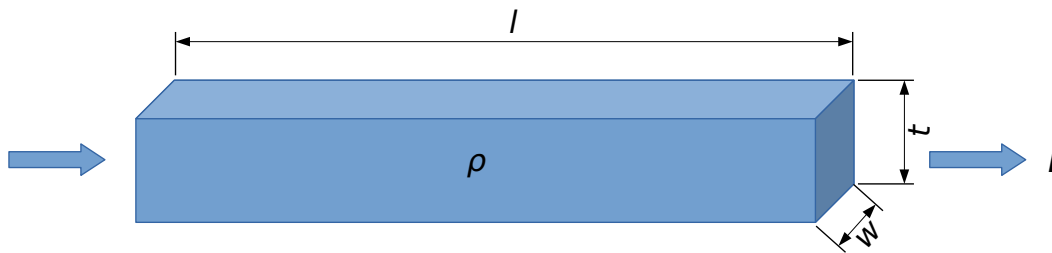
<b>A.1</b>	Four-point-probe (4PP) measurement: Measure the potential drop $V$ over a segment of length $s$ as function of current $I$ passing through this segment. Take in total at least 4 values, make a table and plot the voltage drop $V$ versus the current $I$ in <b>Graph A.1</b> .	0.6pt
------------	---	-------

<b>A.2</b>	Determine the effective electrical resistance $R = \frac{V}{I}$ that you obtained from <b>Graph A.1</b> .	0.2pt
------------	---	-------

<b>A.3</b>	Use <b>Graph A.1</b> to determine the uncertainty $\Delta R$ on the resistance $R$ for the 4PP measurement.	0.4pt
------------	---	-------

## Part B. Sheet resistivity (0.3 points)

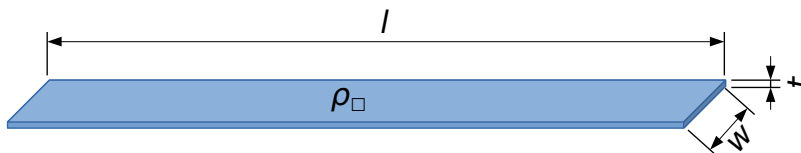
The resistivity  $\rho$  represents a material property, by means of which the resistance of a 3D conductor of given dimensions and geometry is calculated. Here we consider a bar of dimensions length  $l$ , width  $w$ , and thickness  $t$ :



The electrical resistance  $R$  of the upper, thick conductor is given by:

$$R = R_{3D} = \rho \cdot \frac{l}{w \cdot t} \quad (1)$$

On the same basis we may define the resistance of the 2D conductor of thickness  $t \ll w$  and  $t \ll l$



$$R = R_{2D} = \rho_{\square} \cdot \frac{l}{w}, \quad (2)$$

using the *sheet resistivity*  $\rho_{\square} \equiv \rho/t$  ("rho box"). Its unit is given in Ohms:  $[\rho_{\square}] = 1 \Omega$ .

**Important:** Eq. 2 is only valid for a homogeneous current density and constant potential in the cross-sectional plane of the conductor. In the case of point-like contacts on the surface this does not hold. Instead one can show that the sheet resistivity is related to the resistance in that case by

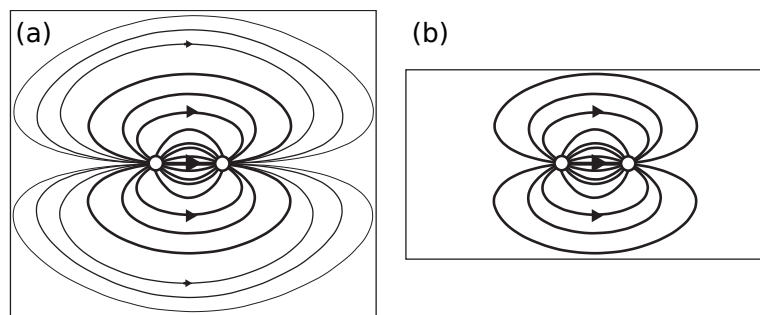
$$\rho_{\square} = \frac{\pi}{\ln(2)} \cdot R \quad (3)$$

for  $l, w \gg t$ .

- |            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>B.1</b> | Calculate the sheet resistivity $\rho_{\square}$ of the paper from the 4PP measurement in part A. We will call this particular value $\rho_{\infty}$ (and the measured resistance from part A $R_{\infty}$ ) because the sample dimensions of the whole sheet are much larger than the spacing of the contacts $s$ : $l, w \gg s$ . | 0.3pt |
|------------|---|-------|

### Part C. Measurements for different sample dimensions (3.2 points)

Up to now, the finite sample dimensions  $w$  and  $l$  were not taken into account. If the sample becomes smaller, it can carry less current if the voltage is kept constant: If we apply a voltage between the two point contacts (white circles), current will flow on all possible, non-crossing paths through the sample as visualized by the lines: the longer the line, the smaller the current as indicated by the line thickness. For a small sample (b) and the same applied voltage, the total current decreases because there are less possible pathways. Thus, the measured resistance will increase:



The (sheet) resistivity will not change as function of sample size. Thus, in order to convert the measured resistance into a resistivity using Eq. 3, we need to introduce a correction factor  $f(w/s)$ :

$$\rho_{\square} = \frac{\pi}{\ln(2)} \cdot \frac{R(w/s)}{f(w/s)}. \quad (4)$$

For a sample of length  $l \gg s$  the factor  $f$  only depends on the ratio  $w/s$  and is larger than 1:  $f(w/s) \geq 1$ . For the sake of simplicity we will focus on the dependence on the width  $w$  and only ensure that the sample is long enough for our measurements. We assume that the value approaches the correct result  $\rho_{\square}$  for large dimensions:

$$R(w/s) = R_{\infty} \cdot f(w/s) \quad \text{with} \quad f(w/s \rightarrow \infty) \rightarrow 1.0. \quad (5)$$

<b>C.1</b>	Using the 4PP-method, measure the resistance $R(w, s)$ for 4 values $w/s$ within the range 0.3 to 5.0 and record your results in <b>Table C.1</b> . Ensure that the sample length is larger than five times the probe spacing: $l > 5s$ and that the length $l$ of the samples is always taken along the same (long) side of the sheet of paper. For each value of $w/s$ measure the voltage for 4 different current values and calculate the average resistance $R(w/s)$ out of the 4 measurements. Enter your results in <b>Table C.1</b> .	3.0pt
------------	---	-------

<b>C.2</b>	Compute $f(w/s)$ for each of these measurements.	0.2pt
------------	--	-------

### Part D. Geometrical correction factor: scaling law (1.9 points)

You have seen in part C that the measured resistivity scales with the ratio of width to probe distance  $w/s$ . Starting from the data acquired in part C we choose the following generic function to describe the data

in the range of the measurements:

$$\text{Generic fit function: } f(w/s) = 1.0 + a \cdot \left(\frac{w}{s}\right)^b \quad (6)$$

Note that for very large  $w/s$ ,  $f(w/s)$  must be 1.0.

<b>D.1</b>	In order to fit a model curve using Eq. 6 and the data $f(w/s)$ , taken in part C, choose the most appropriate graph paper (linear <b>Graph D.1a</b> , semi-logarithmic <b>Graph D.1b</b> , or double-logarithmic <b>Graph D.1.c</b> ) to plot the data.	1.0pt
------------	--	-------

<b>D.2</b>	Deduce the parameters $a$ and $b$ from your fit.	0.9pt
------------	--	-------

## Part E. The silicon wafer and the van der Pauw-method (3.4 points)

In the semi-conductor industry, knowledge of the electrical (sheet) resistance of semi-conductors and thin metal layers is very important because it determines the properties of devices. In the following you will work with the silicon wafer. The semi-conducting wafer is coated with a very thin layer of chromium metal (on the shiny side).

Open the wafer container (rotate in the sense of the arrow RELEASE) and take the wafer out. Be careful not to drop or to break it nor to scratch or touch the shiny surface. For the measurements place it on the table with the shiny side point up towards you.

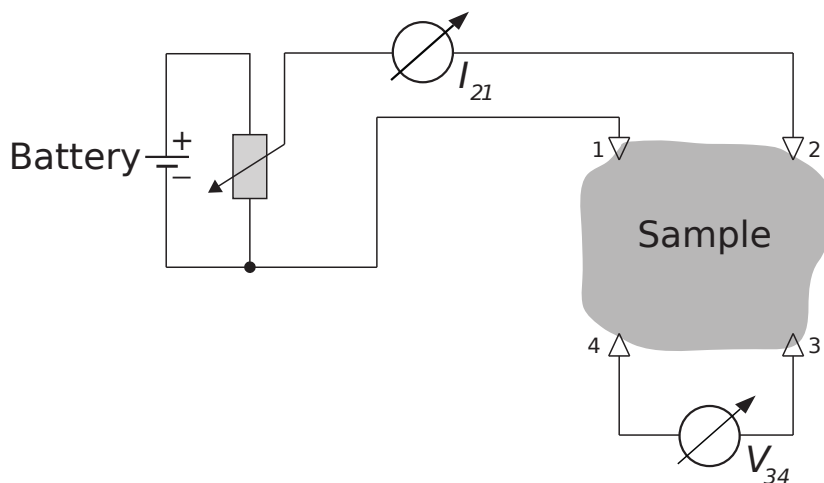
**E.1** Use the same 4PP setup as previously to measure the voltage  $V$  as function of current  $I$ . Write down the reference number of your wafer in the Answer Sheet. You find this number on the plastic wafer holder. 0.4pt

**E.2** Plot the data in **Graph E.2** and determine the resistance  $R_{4PP}$ . 0.4pt

**E.3** In order to determine the correction for a circular sample like the wafer, we will approximate the effective width  $w$  of the sample by the diameter  $D = 100$  mm of the wafer. Under this assumption calculate the ratio  $w/s$ . Use the fit function in Eqn. 6 and your parameters  $a$  and  $b$  to determine the correction factor  $f(w/s)$  for the wafer measurement. 0.2pt

**E.4** Calculate the sheet resistivity  $\rho_{\square}$  of the chromium layer using Eq. 4. 0.1pt

In order to measure the sheet resistivity precisely without need for geometrical corrections, Philips engineer L.J. van der Pauw developed a simple measurement scheme: The four probes are mounted at the circumference of a sample of arbitrary shape as shown in the figure (numbered 1 through 4). The current flows through two adjacent probes, e.g. probes 1 and 2, and the voltage is measured between probes 3 and 4. This yields a resistance value  $R_{I,V} = R_{21,34}$ .



For symmetry reasons  $R_{21,34} = R_{34,21}$  and  $R_{14,23} = R_{23,14}$ . Van der Pauw showed that for an arbitrary but

simply connected shape (no holes) of the sample and point-like contacts the following equation holds:

$$e^{-\pi R_{21,34}/\rho_{\square}} + e^{-\pi R_{14,23}/\rho_{\square}} \equiv 1. \quad (7)$$

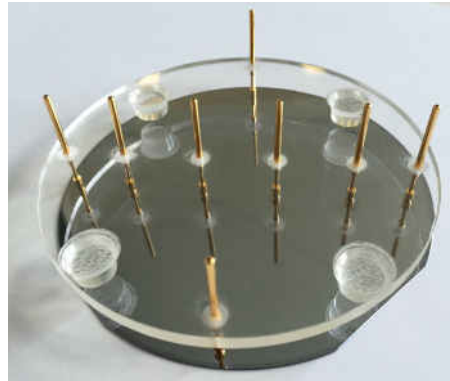


Figure 3: 4PP device on the metal coated silicon wafer. Note the cut on the right-hand-side of the circular wafer. This cut is called flat.

Connect the four spring contacts such that the measurement probes form a square. Connect two adjacent contacts to the current source with the amperemeter, and connect the two remaining spring contacts with the voltmeter. Rotate the square until one of its edges is parallel to the flat of the wafer.

<b>E.5</b>	Sketch the orientation of the current carrying contacts and the orientation of the flat of the wafer. Measure the voltage $V$ for at least in total 6 different values of current $I$ , roughly equally spaced. Enter the results into <b>Table E.5</b> .	0.6pt
<b>E.6</b>	Repeat the procedure arranging the current carrying contacts perpendicular to those used in the first step. Enter the results into <b>Table E.6</b> .	0.6pt
<b>E.7</b>	Plot all the data together in a single graph <b>Graph E.7</b> using different colors and/or symbols. Determine the mean value $\langle R \rangle$ from the two curves.	0.5pt
<b>E.8</b>	Replacing all resistances $R_{kl,mn}$ by $\langle R \rangle$ , solve Eqn. 7 for $\rho_{\square}$ and calculate the sheet resistivity $\rho_{\square}$ of the chromium layer.	0.4pt
<b>E.9</b>	Compare the result of the measurement taken with the linear arrangement ( <b>E.4</b> ) and the result of the van der Pauw method ( <b>E.8</b> ). Give the difference of the two measurements as relative error in percent.	0.1pt
<b>E.10</b>	The chromium (Cr) layers have a nominal thickness of 8 nm. Use this value and the final results of the van der Pauw method to calculate the resistivity of Cr using Eqns. 1 and 2.	0.1pt

## Problem 1: Electrical conductivity in two dimensions (10 points)

Write the numbers from 0 to 9 in the following table:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

### Part A. Four-point-probe (4PP) measurements (1.2 points)

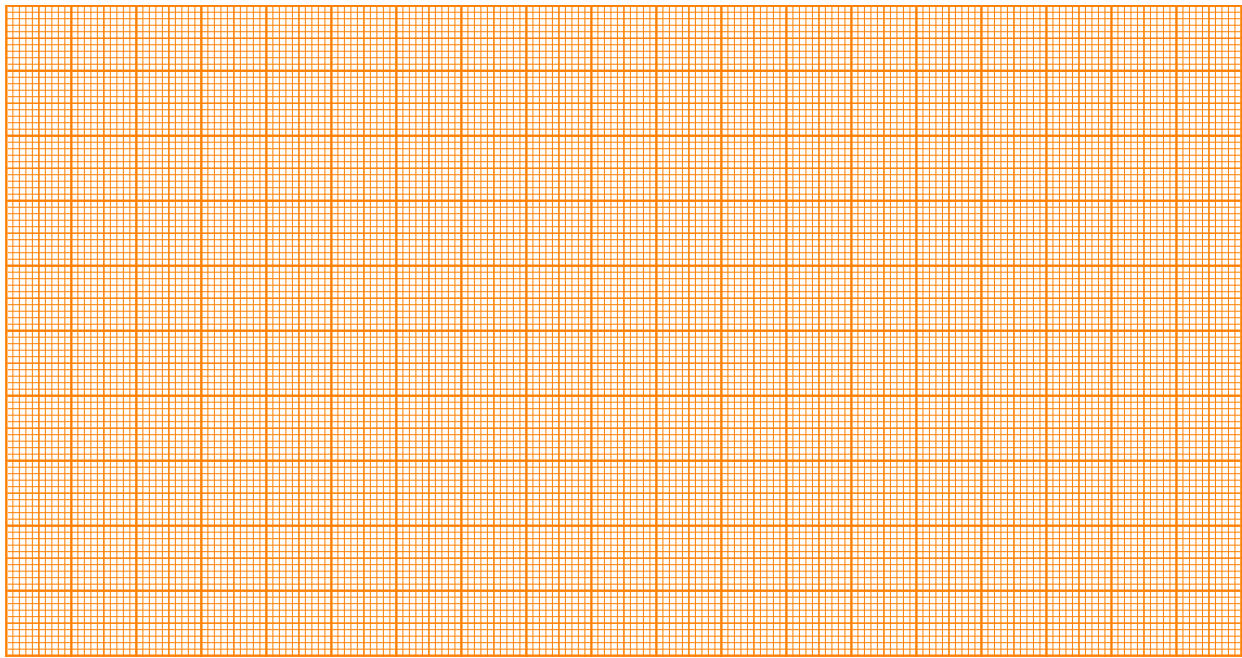
**A.1 (0.6 pt)**

$s =$

$I$	$V$	$I$	$V$

Plot your data into **Graph A.1**.

**Graph A.1:**  $I$  vs.  $V$



**A.2 (0.2 pt)**

$$R =$$

**A.3 (0.4 pt)**

$$\Delta R =$$

## Part B. Sheet resistivity (0.3 points)

**B.1 (0.3 pt)**

$$\rho_{\square} \equiv \rho_{\infty} =$$



## Part D. Geometrical correction factor (1.9 points)

### D.1 (1.0 pt)

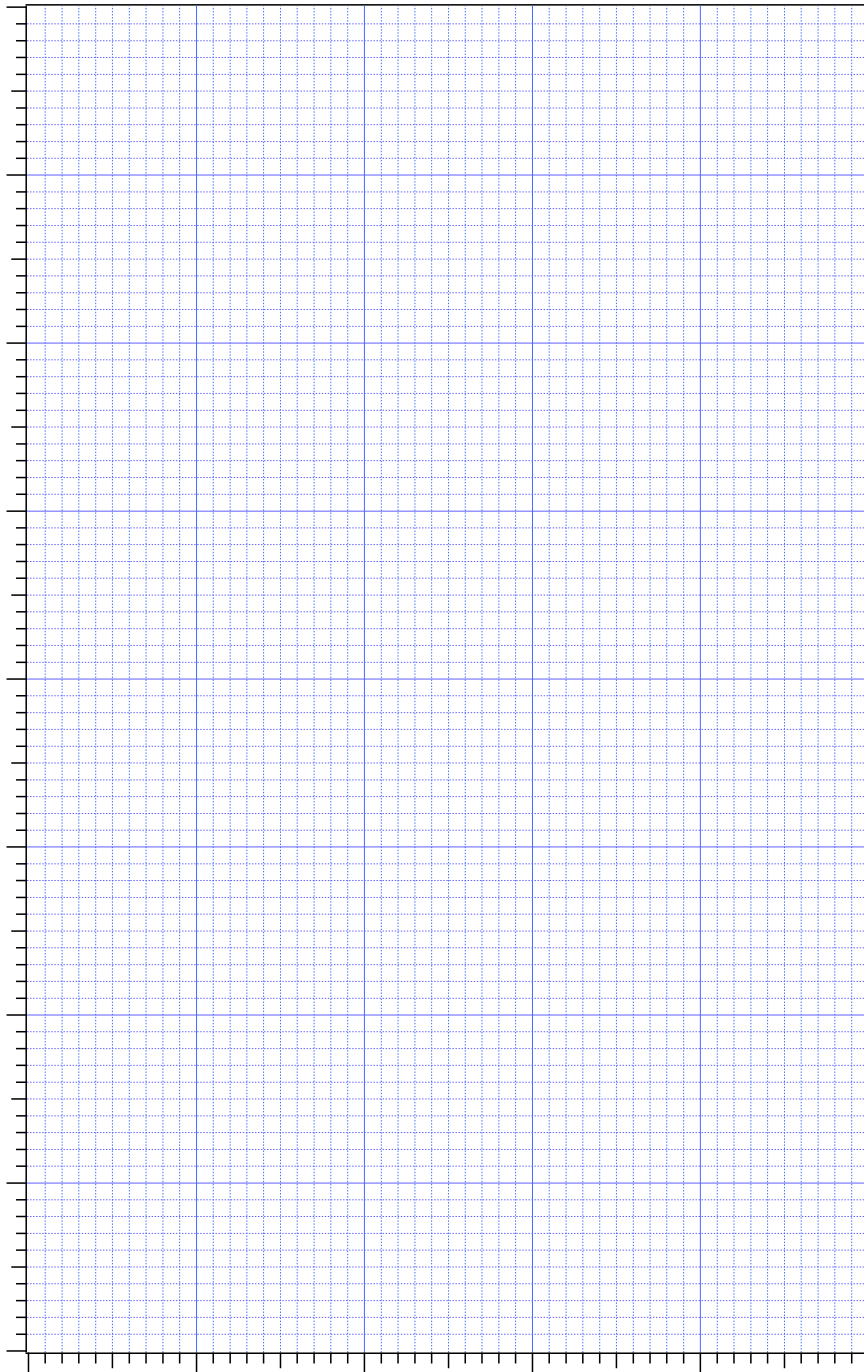
Plot your data on the appropriate graph paper: linear (Graph **D.1a**), semi-logarithmic (**D.1b**) or double-logarithmic (**D.1c**) on the following pages.

### D.2 (0.9 pt)

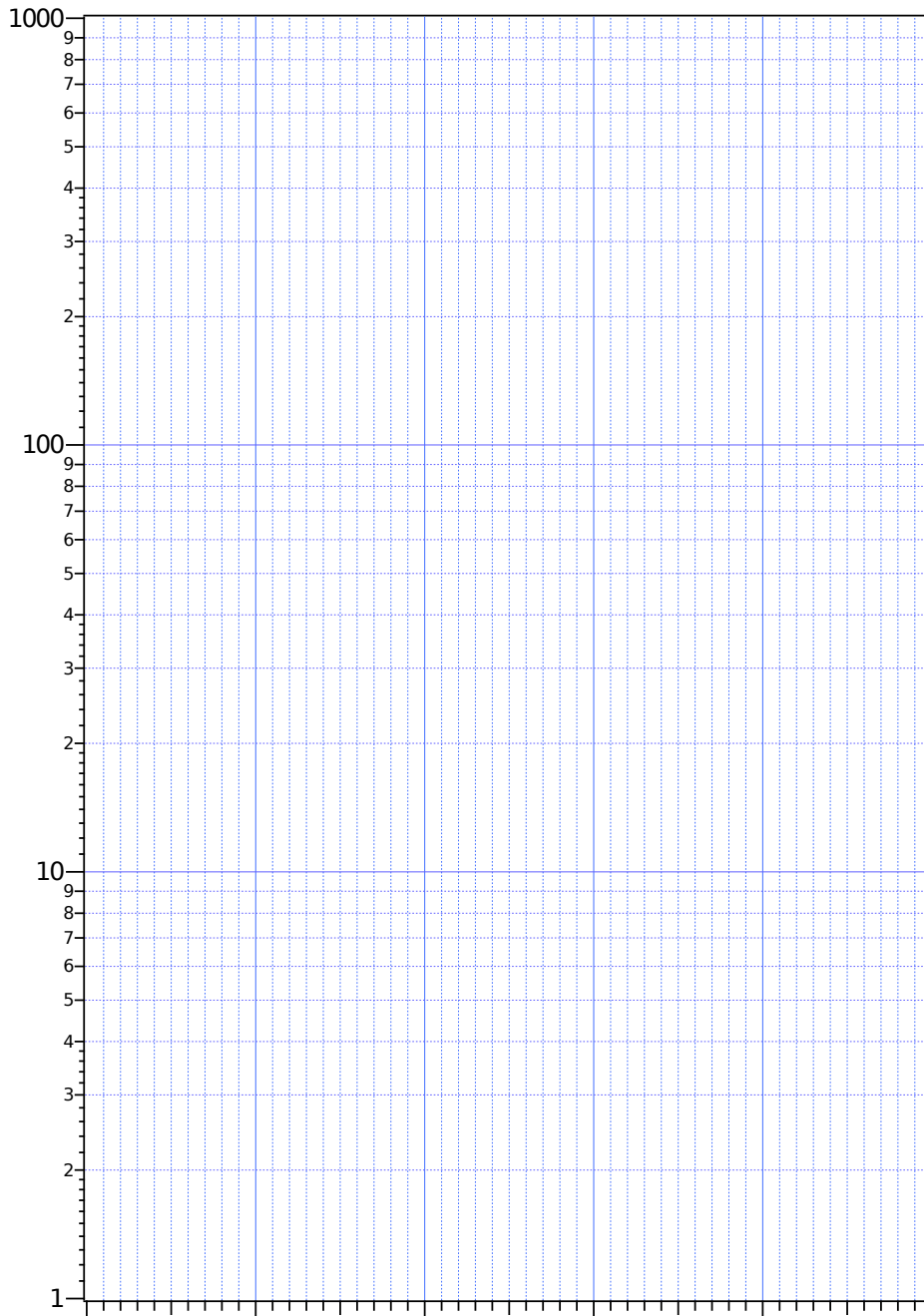
$a =$

$b =$

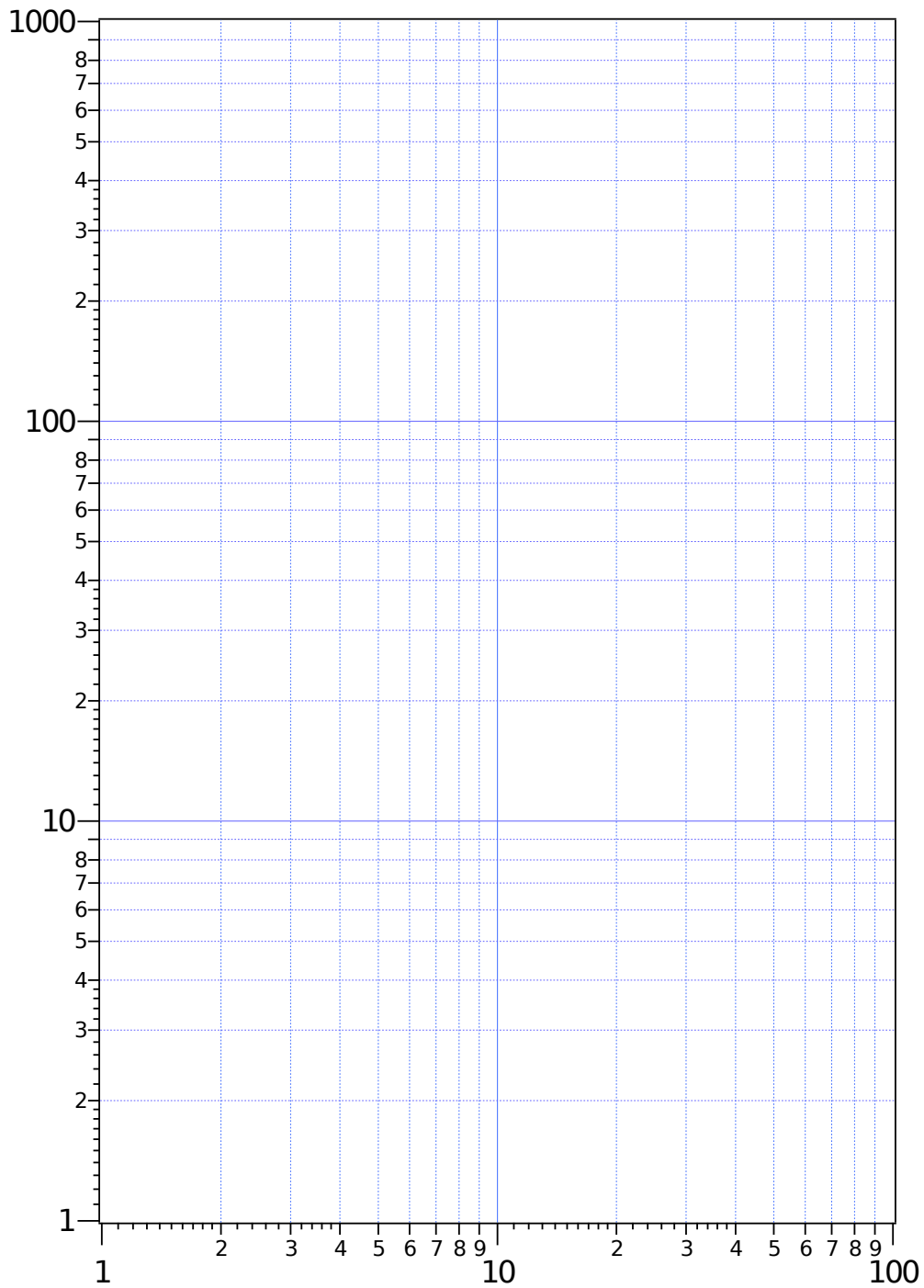
**Graph D.1a: linear scale:**



Graph D.1b: semi-log scale:



Graph D1c: double-log scale:



**Part E. The silicon wafer and the van der Pauw-method (3.4 points)**

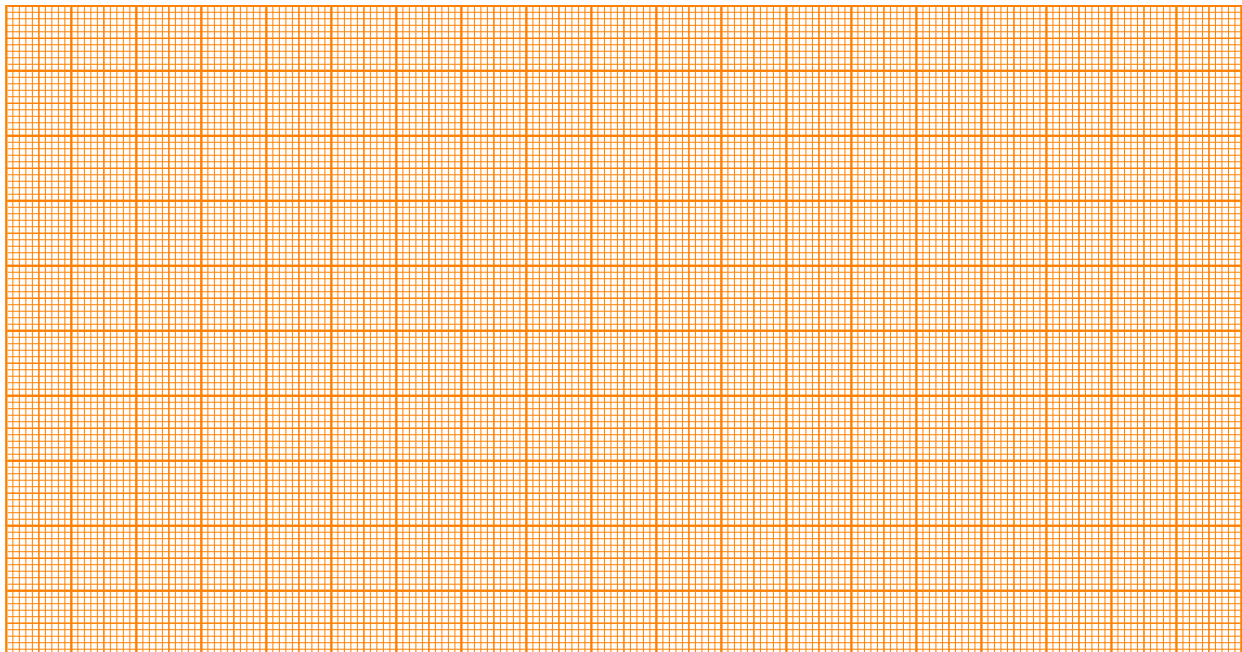
Note the number of your wafer here:

**E.1 (0.4 pt)**

$I$	$V$	$I$	$V$

**E.2 (0.4 pt)**

**Graph E.2:**  $I$  vs  $V$



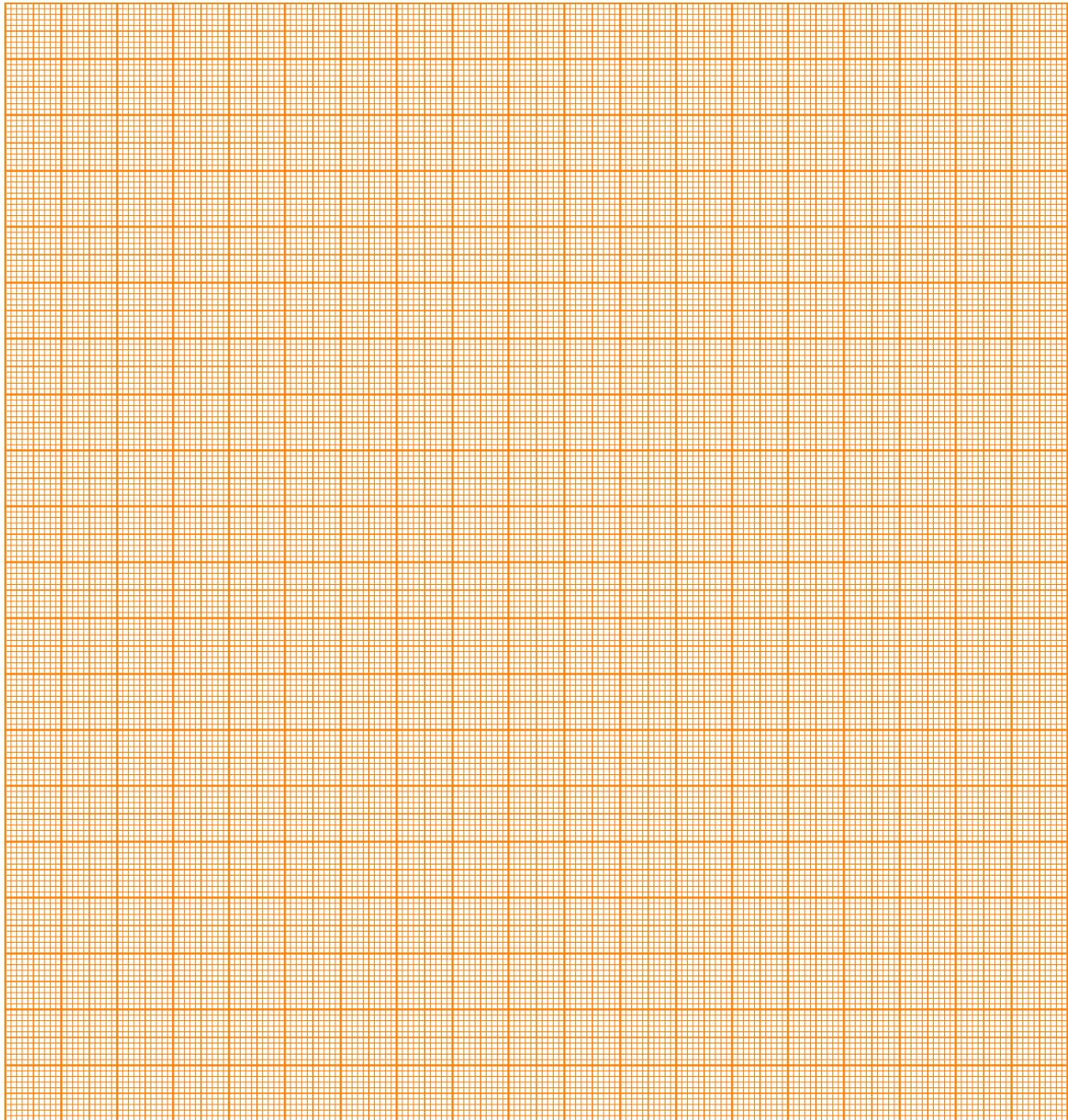
$R_{4PP} =$





**E.7 (0.5 pt)**

**Graph E.7:**  $I$  vs.  $V$



$\langle R \rangle =$

**E.8 (0.4 pt)**

Calculation:

$$\rho_{\square}(\text{vdP}) =$$

**E.9 (0.1 pt)**

$$\frac{\Delta \rho_{\square}}{\rho_{\square}(\text{vdP})} = \quad = \quad \%$$

**E.10 (0.1 pt)**

Resistivity of the Cr thin film  $\rho =$

## Jumping beads - A model for phase transitions and instabilities (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

### Introduction

Phase transitions are well known from every day life, e.g. water takes different states like solid, liquid and gaseous. These different states are separated by phase transitions, where the collective behaviour of the molecules in the material changes. Such a phase transition is always associated with a transition temperature, where the state changes, i.e. the freezing and boiling temperatures of water in the above examples.

Phase transitions are however even more wide-spread and also occur in other systems, such as magnets or superconductors, where below a transition temperature the macroscopic state changes from a paramagnet to a ferromagnet and a normal conductor to a superconductor, respectively.

All of these transitions can be described in a common framework when introducing a so-called order-parameter. For instance, in magnetism the order parameter is associated with the alignment of the magnetic moments of the atoms with a macroscopic magnetisation.

In the so-called continuous phase transitions, the order parameter will always be zero above the critical temperature and then grow continuously below it, as shown in the schematic for a magnet in figure 1 below. The transition temperature of a continuous phase transition is called the critical temperature. The figure also contains a schematic representation of the microscopic order or disorder in the case of a magnet, where the individual magnetic moments align in the ferromagnetic state to give rise to a macroscopic magnetization, whereas they are randomly oriented in the paramagnetic phase yielding a macroscopic magnetization of zero.

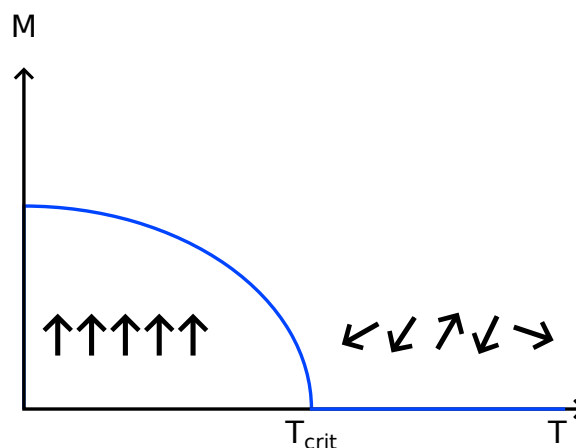


Figure 1: Schematic representation of the temperature dependence of an order parameter  $M$  at a phase transition. Below the critical temperature  $T_{\text{crit}}$ , the order parameter grows and is non-zero, whereas it is equal to zero at temperatures above  $T_{\text{crit}}$ .

For continuous phase transitions, one generally finds that the order parameter close to a transition follows a power-law, e.g. in magnetism the magnetization  $M$  below the critical temperature,  $T_{\text{crit}}$ , is given

by:

$$M \begin{cases} \sim (T_{\text{crit}} - T)^b, & T < T_{\text{crit}} \\ = 0, & T > T_{\text{crit}} \end{cases} \quad (1)$$

where  $T$  is temperature. What is even more stunning is that this behaviour is universal: the exponent of this power-law is the same for many different kinds of phase transition.

## Task

We will study a simple example where some of the features of continuous phase transitions can be investigated, such as how an instability leads to the collective behaviour of the particles and thus to the phase transition as well as how the macroscopic change depends on an excitation of the particles.

In common phase transitions this excitation is usually driven by temperature. In our example, the excitation consists of the kinetic energy of the particles accelerated by the loudspeaker. The macroscopic change corresponding to the phase transition that we study here consists of the sorting of beads into one half of a cylinder, which is separated by a small wall.

Increasing the amplitude from where particles have sorted into one half of the cylinder, you will find that eventually the particles distribute equally between the two halves. This corresponds to having heated past the critical temperature.

Your objective is to determine the critical exponent for the model phase transition studied here.

## List of material

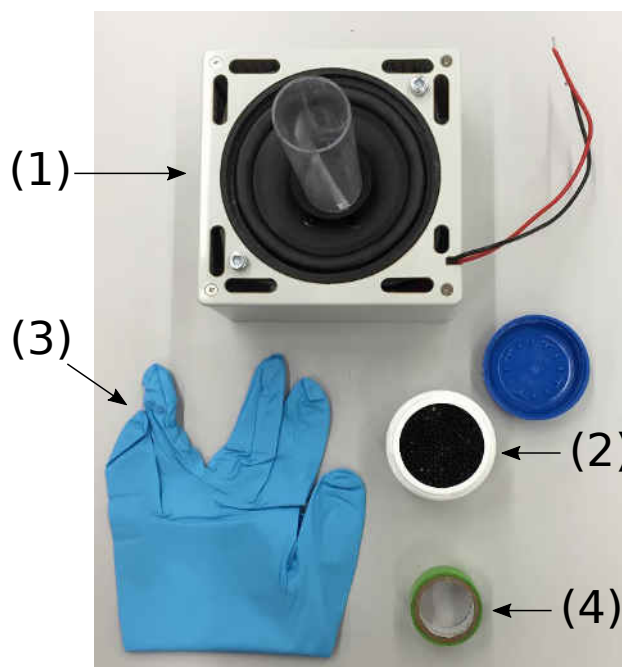


Figure 2: Additional equipment for this experiment.

1. Loudspeaker assembly with plastic cylinder mounted on top
2. About 100 poppy seeds (in a plastic container)
3. A glove
4. Sticky tape

### Important precautions

- Do not apply an excessive lateral force to the plastic cylinder mounted on the loudspeaker. Note that no replacements will be provided in case of torn loudspeaker membranes or torn off plastic cylinder.
- Turn off the loudspeaker assembly whenever not in use, in order to avoid unnecessary drain of the battery.
- In this experiment, a 4 Hz saw-tooth signal is output on the loudspeaker terminals located at the side of the signal generator.
- The amplitude of the saw-tooth signal can be adjusted using the right potentiometer labeled *speaker amplitude* (4). A DC voltage proportional to the signal amplitude is output on the *speaker amplitude* monitor socket (6) (with respect to the *GND* socket (7)). The numbers refer to the photograph (Figure 2) shown in the general instructions.
- The speaker membrane is delicate. Make sure that you do not apply unnecessary pressure on it by any means either vertically or laterally.

## Part A. Critical excitation amplitude (3.3 points)

Before you start the actual tasks of this problem, wire up the loudspeaker to the terminals on the side of the signal generator (make sure you use the correct polarity). Put some (e.g. 50) poppy seeds into the cylinder mounted on the loudspeaker and use a piece cut from the glove provided to close the cylinder at the top in order to keep the poppy seeds in the cylinder. Switch on the excitation using the toggle switch and adjust the amplitude by turning the right potentiometer labeled *speaker amplitude* (4) by means of the screwdriver provided. Observe the sorting of the beads by testing different amplitudes.

The first task is to determine the critical excitation amplitude of this transition. In order to do this, you have to determine the number of beads  $N_1$  and  $N_2$  in the two compartments (choosing the compartment labels such that  $N_1 \leq N_2$ ) as a function of the displayed amplitude  $A_D$ , which is the voltage measured at the *speaker amplitude* socket (6). This voltage is proportional to the amplitude of the saw-tooth waveform driving the loudspeaker. Make at least 5 measurements per voltage.

Hint:

- In order to always have a motion in the particles you study, only investigate amplitudes corresponding to *speaker amplitude* voltages exceeding 0.7 V. Start with watching the behaviour of the system just by varying the voltage slowly without any counting of the beads. It can be that some of the beads stick to the ground due to electrostatic reasons. Don't count these beads.

<b>A.1</b>	Record your measurements of the number of particles $N_1$ and $N_2$ in each half of the container for various amplitudes $A_D$ in <b>Table A.1</b> .	1.2pt
<b>A.2</b>	Calculate the standard deviation of your measurements of $N_1$ and $N_2$ and list your results in <b>Table A.1</b> . Plot $N_1$ and $N_2$ as a function of the displayed amplitude $A_D$ in <b>Graph A.2</b> , including their uncertainties.	1.1pt
<b>A.3</b>	Based on your graph, determine the critical displayed amplitude $A_{D,\text{crit}}$ at which $N_1 = N_2$ , after waiting until a stationary state is reached.	1pt

## Part B. Calibration (3.2 points)

The displayed amplitude  $A_D$ , corresponds to a voltage applied to the loudspeaker. However, the physically interesting quantity is the maximum displacement  $A$  of the oscillation of the loudspeaker, since this relates to how strongly the beads are excited. Therefore, you need to calibrate the displayed amplitude. For this purpose, you can use any of the provided material and tools.

<b>B.1</b>	Sketch the setup you use to measure the excitation amplitude, i.e. the maximum travel distance $A$ (in mm) of the loudspeaker in one period of oscillation.	0.5pt
<b>B.2</b>	Determine the amplitude $A$ in mm for a suitable number of points, i.e. record the amplitude $A$ as a function of displayed amplitude $A_D$ in <b>Table B.2</b> and indicate the uncertainties of your measurements.	0.8pt
<b>B.3</b>	Plot your data in <b>Graph B.3</b> , including the uncertainties.	1.0pt

<b>B.4</b>	Determine the parameters of the resulting curve, using an appropriate fit to determine the calibration function $A(A_D)$ .	0.8pt
------------	--	-------

<b>B.5</b>	Determine the critical excitation amplitude $A_{\text{crit}}$ of the poppy seeds.	0.1pt
------------	---	-------

### Part C. Critical exponent (3.5 points)

In our system, the temperature corresponds to the input kinetic energy of the excitation. This energy is proportional to the speed squared of the loudspeaker, i.e. to  $v^2 = A^2 f^2$ , where  $f$  is the frequency of the oscillation. We will now test this dependence and determine the exponent  $b$  of the power-law governing the behavior of the order parameter (see Eq. 1).

<b>C.1</b>	The imbalance $\left  \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right $ is a good candidate for an order parameter for our system in that it is zero above the critical amplitude and equal to 1 at low excitation. Determine this order parameter as a function of the amplitude $A$ . Record your results in the <b>Table C.1</b> .	1.1pt
------------	--	-------

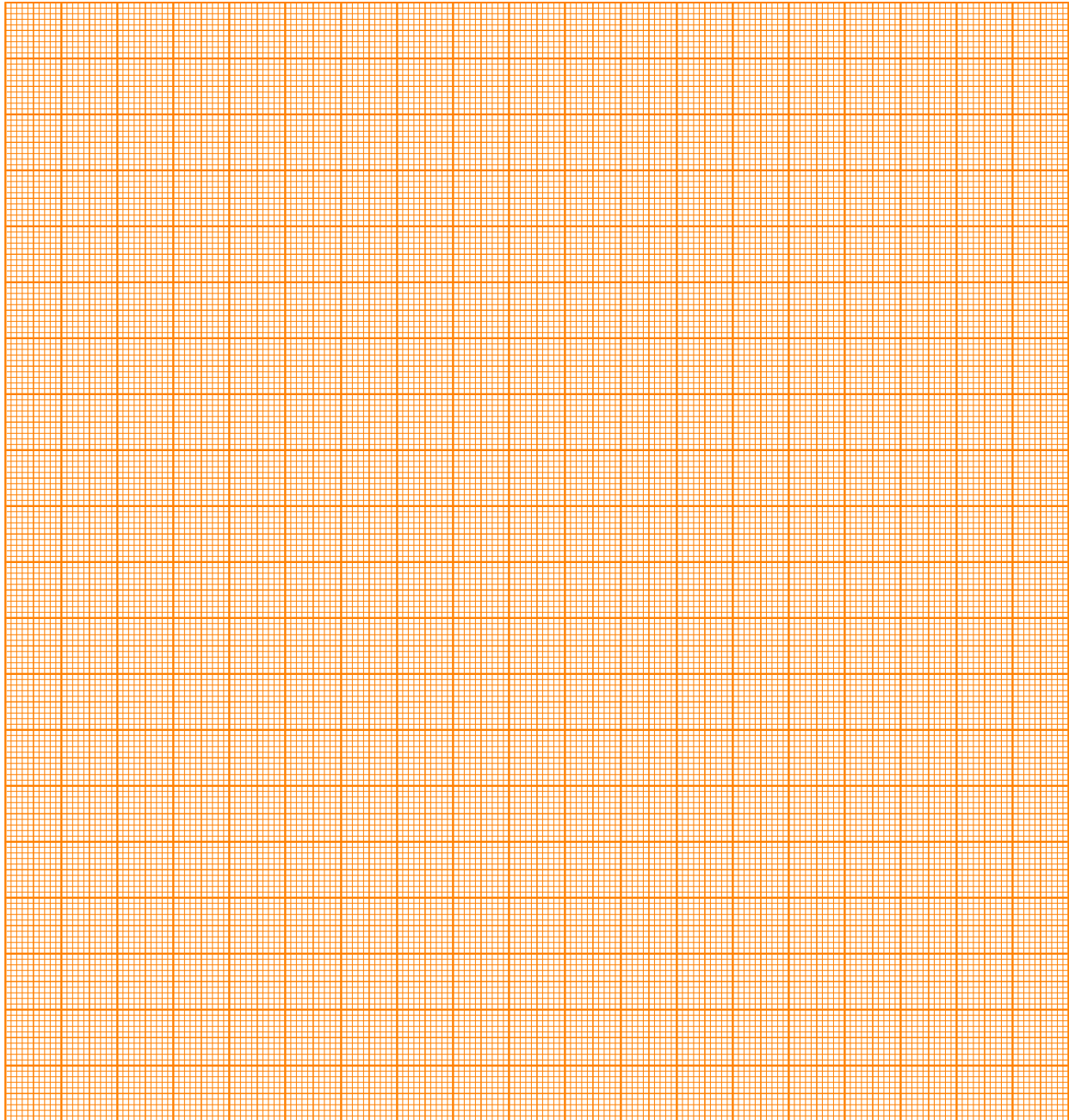
<b>C.2</b>	Plot the imbalance $\left  \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right $ as a function of $ A_{\text{crit}}^2 - A^2 $ , in <b>Graph C.2</b> , where both axes have logarithmic scales (double-logarithmic plot). You can use the <b>Table C.1</b> for your calculations. The points on the plot may seem not to obey a linear relation, but a linear regression should be made nevertheless, to match the critical exponent formula.	1pt
------------	---	-----

<b>C.3</b>	Determine the exponent $b$ and estimate the error.	1.4pt
------------	--	-------



**A.2 (1.1 pt)**

**Graph A.2:**  $N_1, N_2$  vs.  $A_D$



**A.3 (1.0 pt)**

$A_{D, \text{crit.}} =$

## Part B. Calibration (3.2 points)

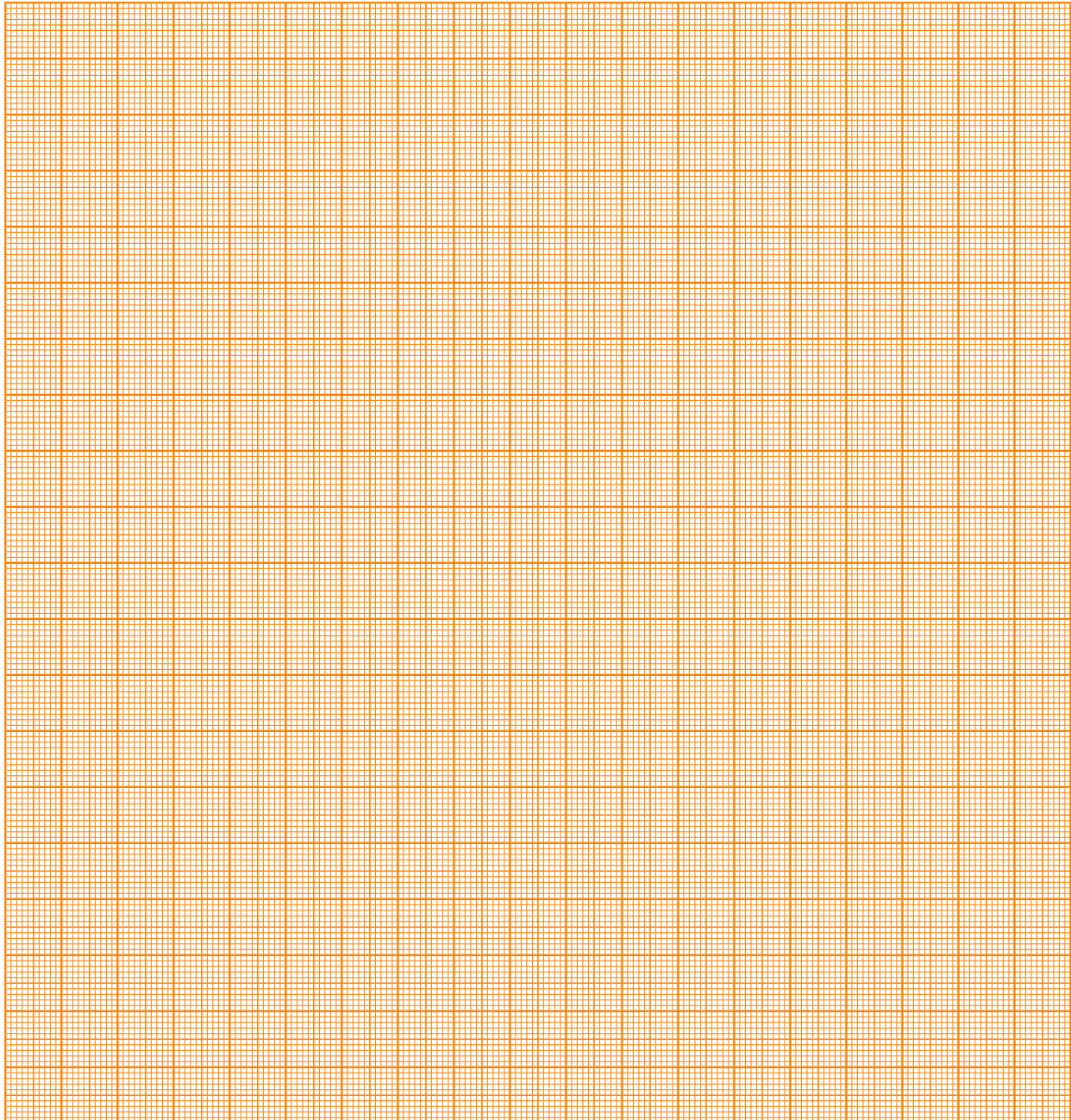
### B.1 (0.5 pt)

Sketch of the setup:



**B.3 (1.0 pt)**

**Graph B.3:**  $A$  vs.  $A_D$



**B.4 (0.8 pt)**

Function  $A(A_D)$ :

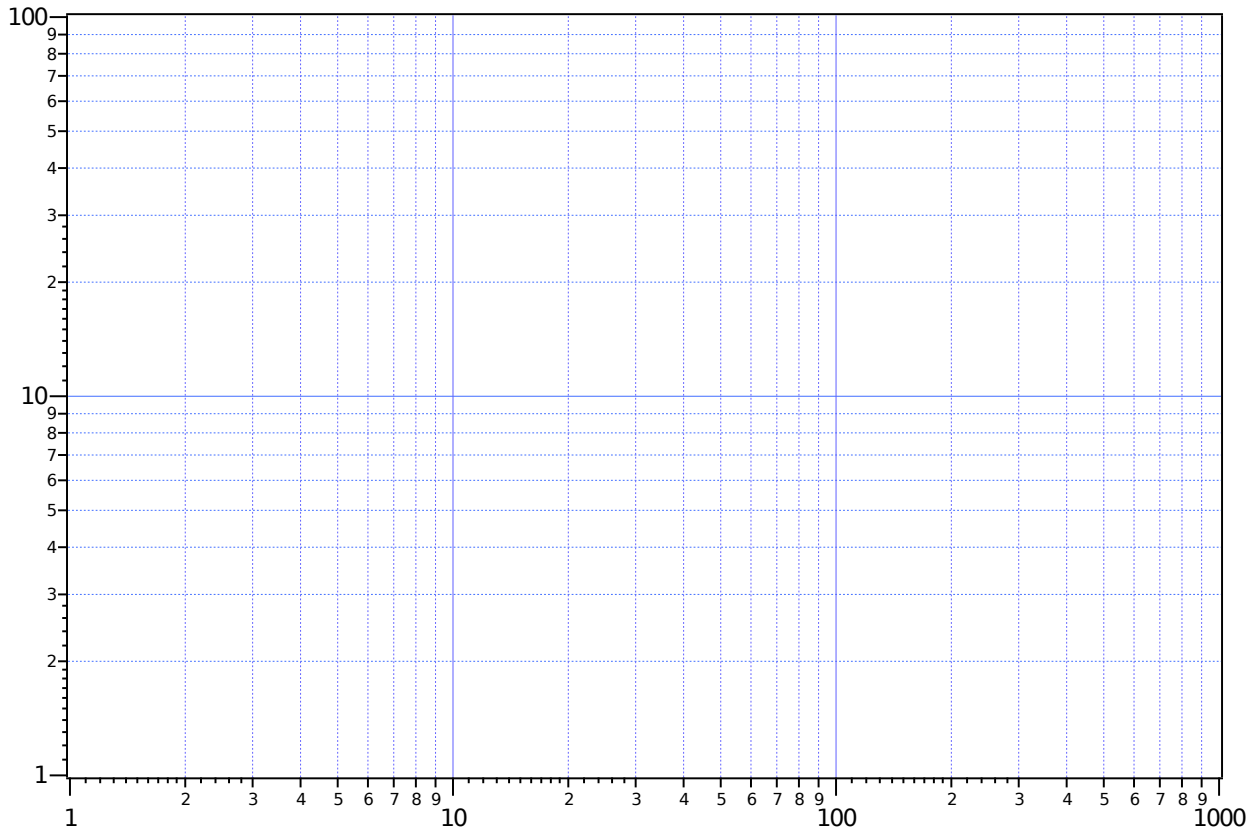
Parameters of the curve:

**B.5 (0.1 pt)**

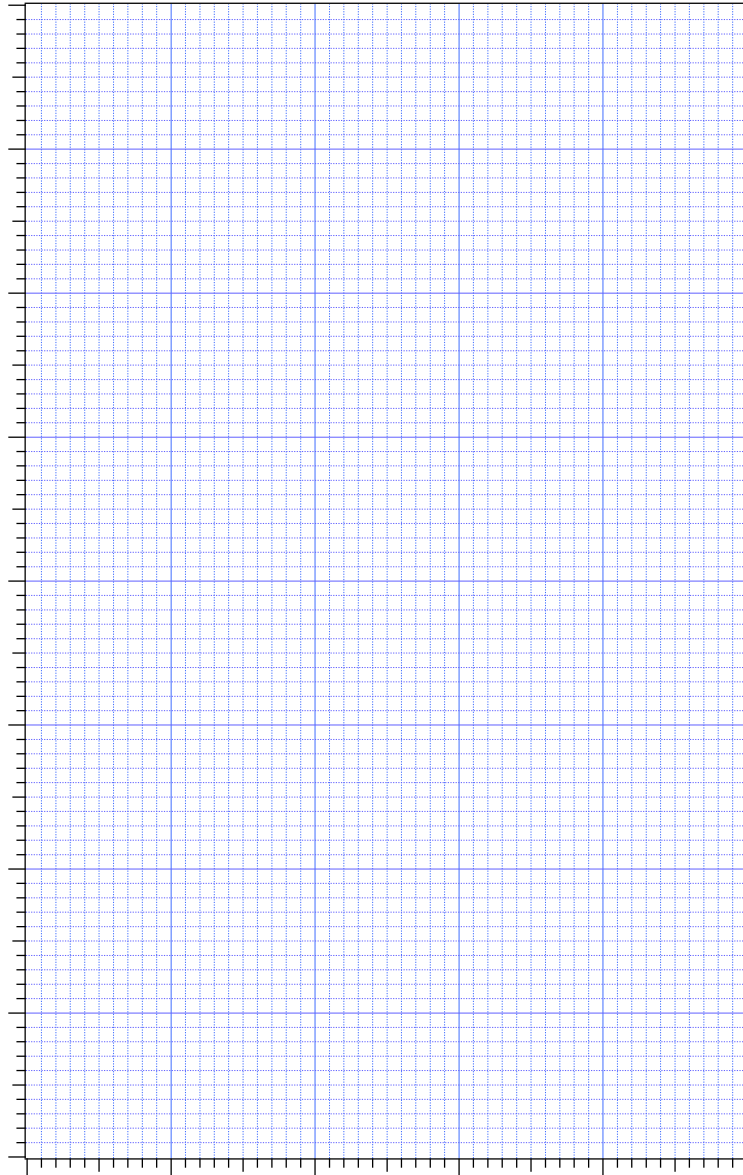
$A_{\text{crit.}} =$



**Graph C.2a double logarithmic paper**



**Graph C.2b linear paper**



**C.3 (1.4 pt)**

$b =$

$\Delta b =$

## Problem 1 : Electrical conductivity in two dimensions - Answer Sheet (10 points)

### Part A. Four-point-probe (4PP) measurements (1.2 points)

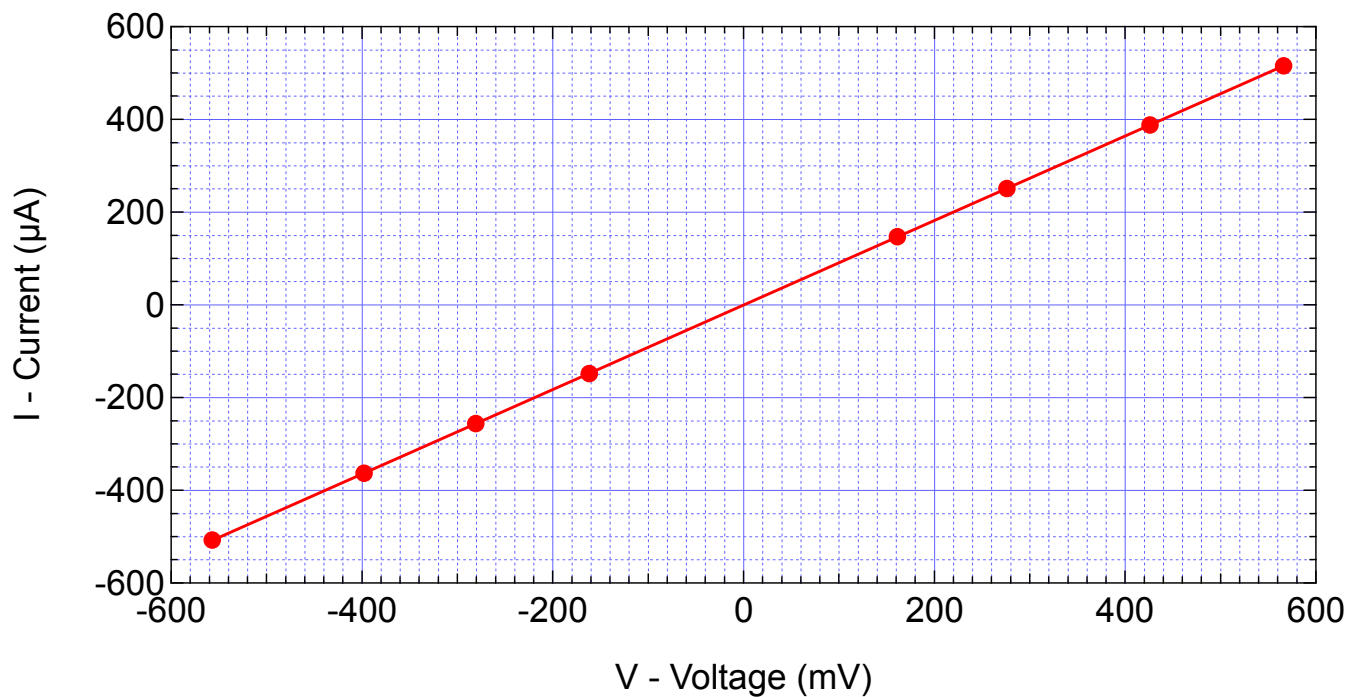
A1 (0.6 pts)

$s = 2 \text{ cm}$

$I \text{ } (\mu\text{A})$	$V \text{ (mV)}$	$I \text{ } (\mu\text{A})$	$V \text{ (mV)}$
251	276	-148	-162
516	566	-256	-281
388	426	-363	-398
147	161	-507	-557

Plot your data in the graph B1

Graph B1:  $I$  vs  $V$



A2 (0.2 pts)

$R = 1.08 \text{ k}\Omega$

A3 (0.4 pts)

$\Delta R = \pm 1 \Omega$

Part B. Sheet resistivity (0.3 points)

**B1 (0.3 pts)**

$$\rho_{\square} \equiv \rho_{\infty} = 4.89 \text{ k}\Omega$$

Part C. Measurements for different sample dimensions (3.2 points)

**C1 (3 pts) and C2 (0.2 pts)**

$s = 20 \text{ mm}$

$\rho_{\infty} = 4.89 \text{ k}\Omega$

$w/s$	I ( $\mu\text{A}$ )	V (mV)	R( $w/s$ ) ( $\text{k}\Omega$ )	R <sub>average</sub> ( $\text{k}\Omega$ )		$\hat{R}$
0.3	92	1477	16.1	15.9		14.7
0.3	74	1184	16			
0.3	57	914	16			
0.3	41	651	15.9			
0.3	23	358	15.6			
0.5	154	1306	8.5	8.5		7.8
0.5	127	1079	8.5			
0.5	97	824	8.5			
0.5	67	567	8.5			
0.5	38	321	8.4			
1	233	1071	4.6	4.6		4.3
1	174	799	4.6			
1	135	621	4.6			
1	101	465	4.6			
1	59	271	4.6			
2.5	389	749	1.9	1.9		1.8
2.5	319	635	2			
2.5	237	457	1.9			
2.5	151	291	1.9			
2.5	74	143	1.9			
5	467	648	1.4	1.4		1.3
5	419	577	1.4			
5	363	499	1.4			
5	289	398	1.4			
5	185	254	1.4			

Part D. Geometrical correction factor (1.9 points)

**D1 (1.0 pts)**

Plot your data on the appropriate graph paper: linear (Graph E1a), semi-logarithmic (D1b) **or** double-logarithmic (D1c) on the following pages.

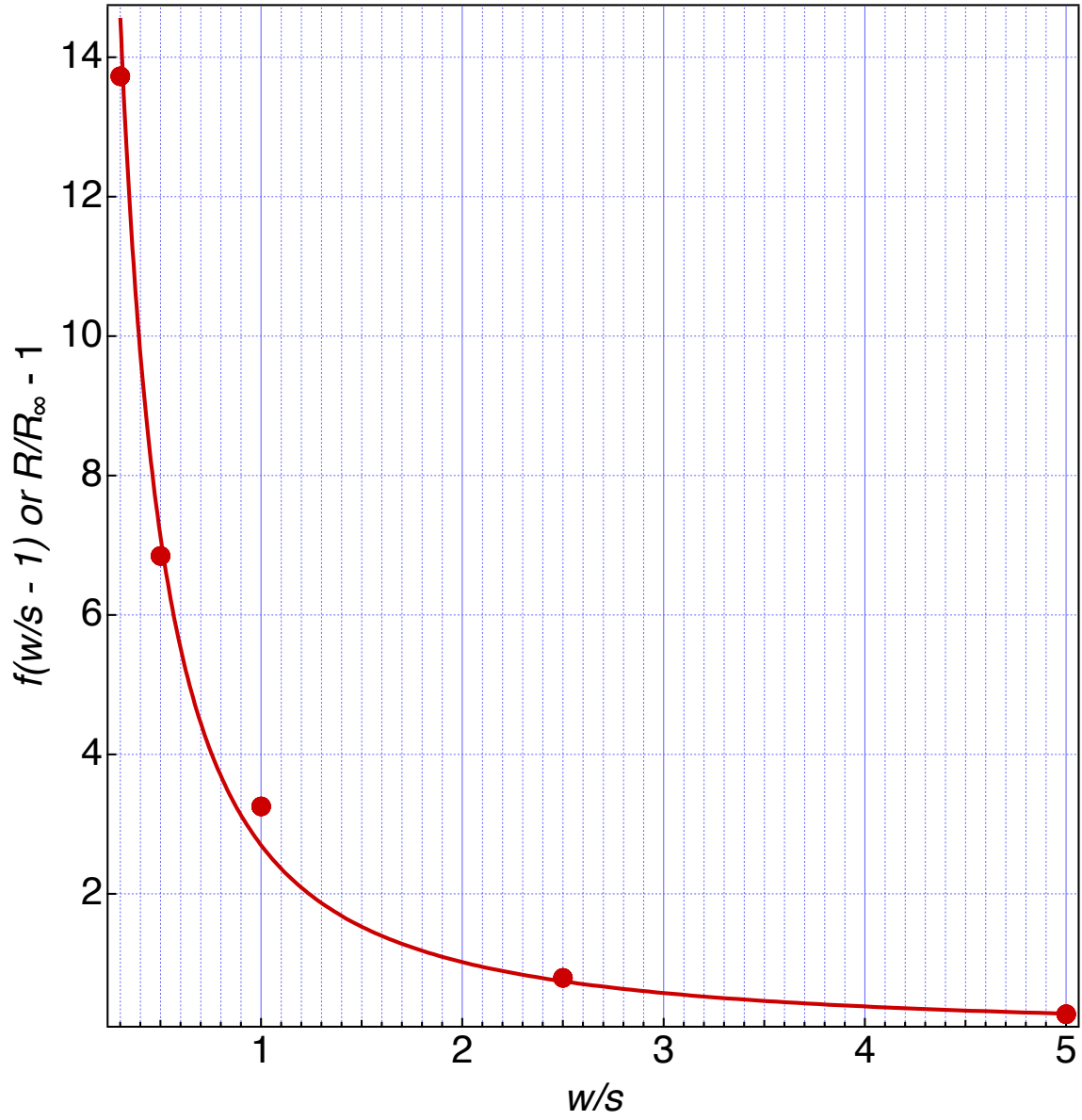
**D2 (0.9 pts)**

$$a = 2.7$$

$$b = -1.4$$

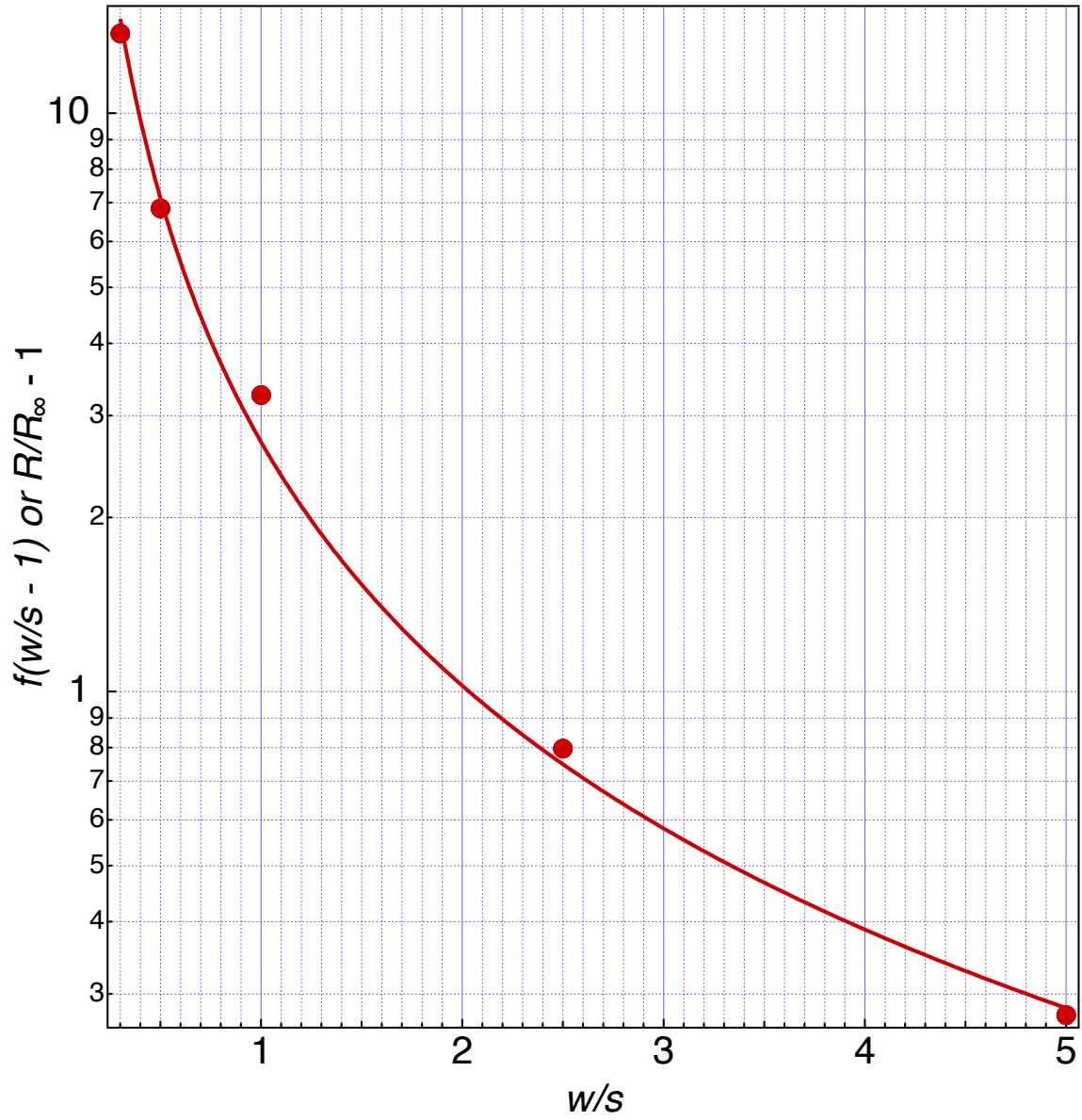
Graph D1a: linear scale:  $I$  vs  $V$

**Wrong.** The usage of linear scale does not allow for deduction of the parameters.



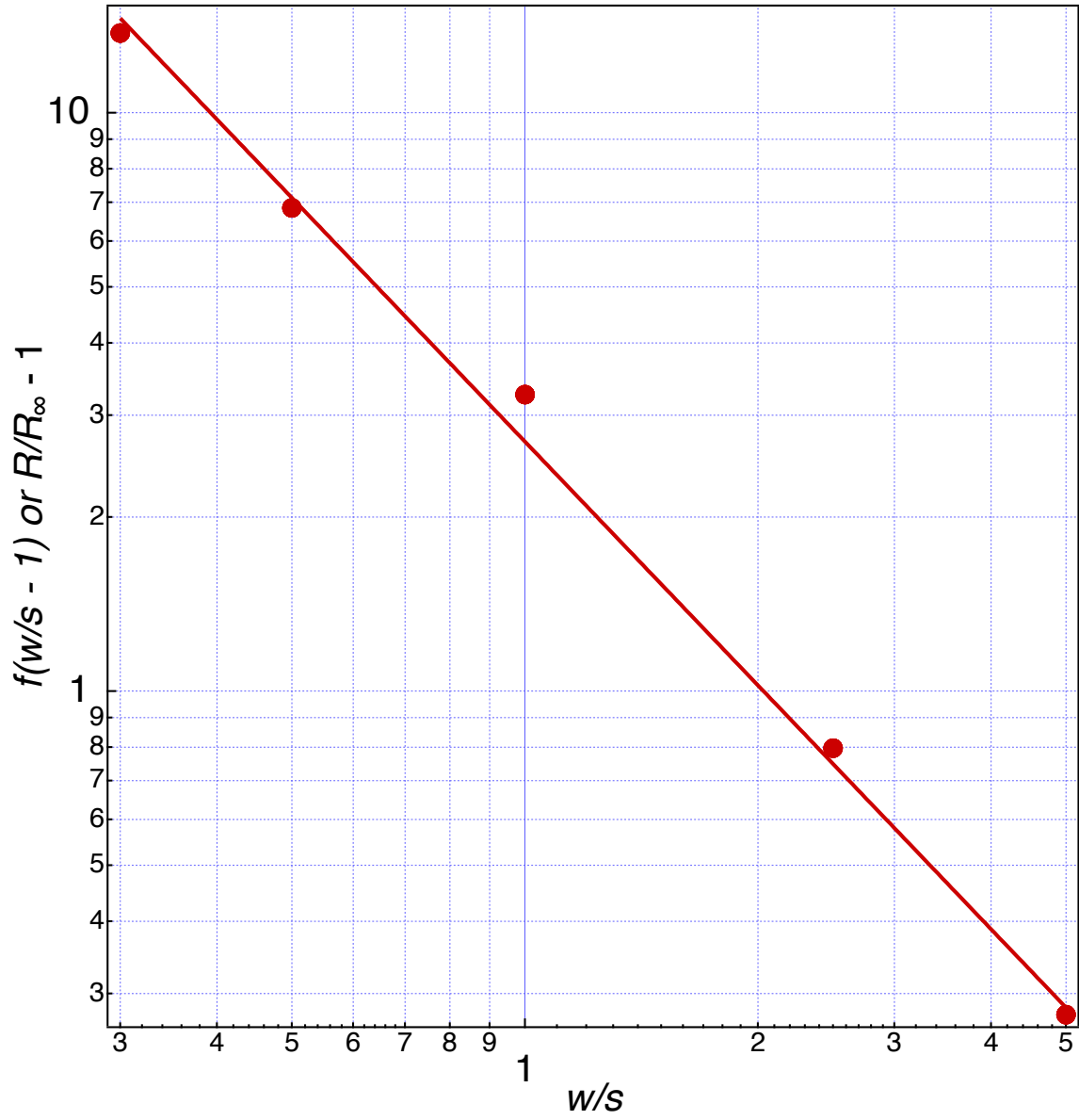
Graph D1b: semi-log scale:  $I$  vs  $V$

Wrong. The usage of semi-log scale does not allow for deduction of the parameters.



Graph D1c: double-log scale:  $I$  vs  $V$

Correct. The parameters can be deduced by fitting a line.



Part E. van der Pauw-method (3.4 points)

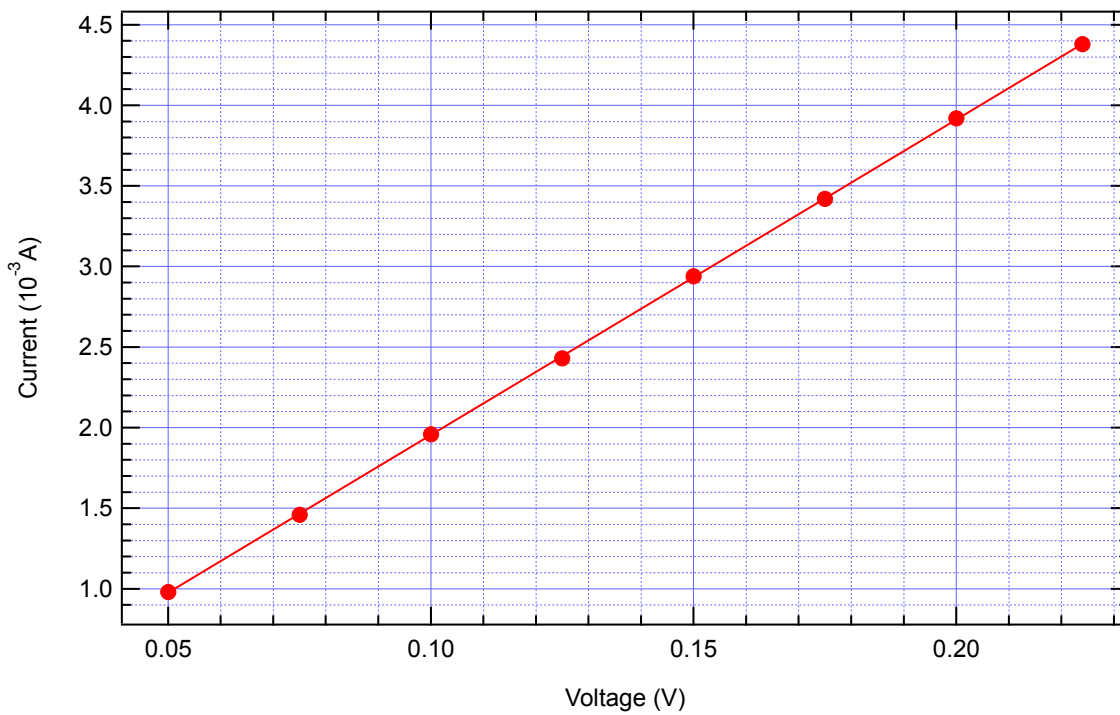
Note the number of your wafer here: 99 (between 1 - 450)

**E1 (0.4 pts)**

$I$ (mA)	$V$ (mV)	$I$ (mA)	$V$ (mV)
0.98	50	2.94	150
1.46	75	3.42	175
1.96	100	3.92	200
2.43	125	4.38	224

**E2 (0.4 pts)**

Graph F2:  $I$  vs  $V$



$$R_{4PP} = 51.1\Omega$$

**E3 (0.2 pts)**

$$w = 10 \text{ cm}$$

$$\rightarrow w/s = 5$$

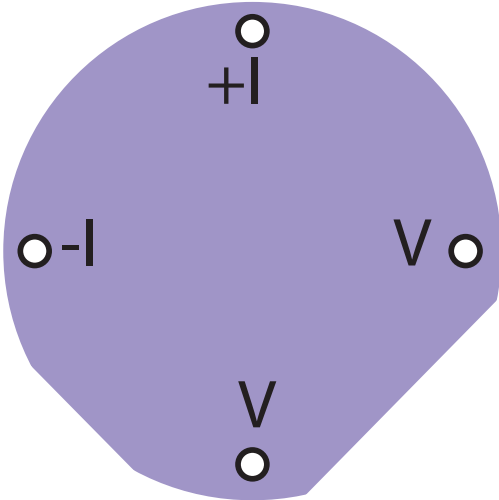
$$f(w/s) = 1.284$$

**E4 (0.1 pts)**

$$\rho_{\square} = 180 \Omega$$

**E5 (0.6 pts)**

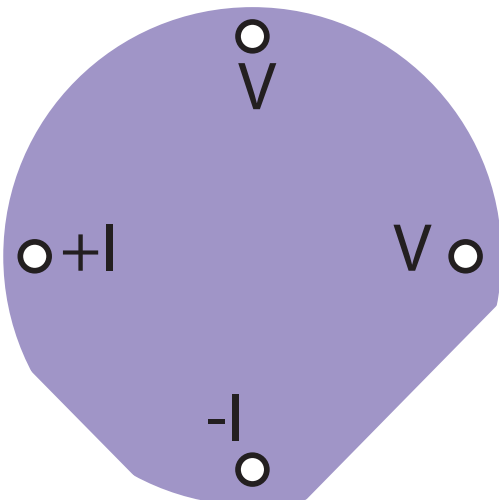
Sketch (orientation of the current):



$V$ mV	$I$ mA
140	3.71
120	3.18
100	2.66
80	2.12
60	1.58
40	1.06
20	0.53
-20	-0.54
-40	-1.06
-60	-1.61
-80	-2.13
-100	-2.68
-120	-3.2
-136	-3.62

**E6 (0.6 pts)**

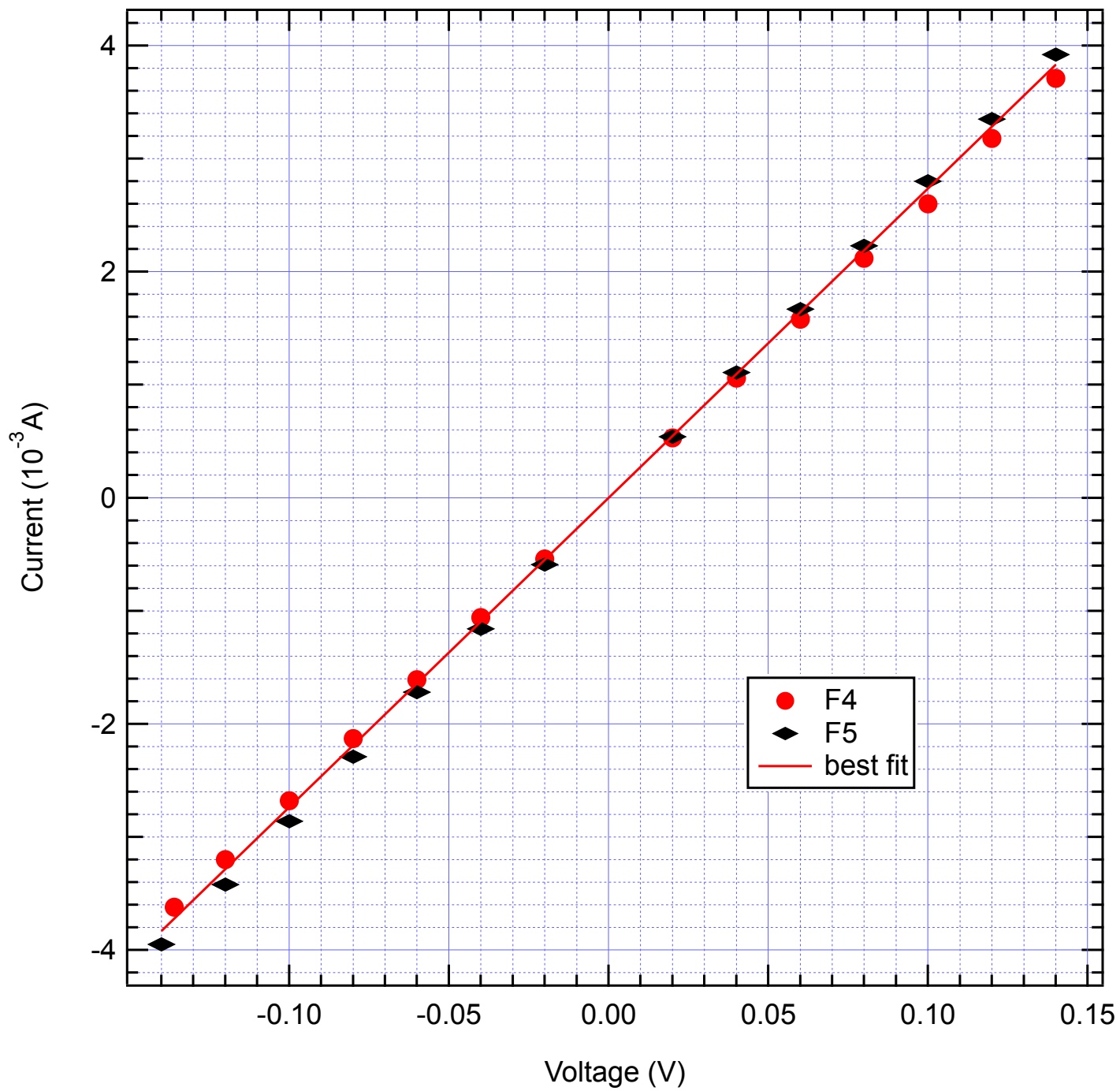
Sketch (orientation of the current):



$I$	$V$
140	3.92
120	3.35
100	2.8
80	2.23
60	1.67
40	1.11
20	0.54
-20	-0.59
-40	-1.16
-60	-1.72
-80	-2.29
-100	-2.86
-120	-3.42
-140	-3.95

E7 (0.5 pts)

Graph F6:  $I$  vs  $V$



$\langle R \rangle = 36.5 \Omega$

**E8 (0.4 pts)** Calculation:

$$2 \cdot e^{-\pi \cdot \langle R \rangle / \rho_{\square}} = 1 \quad e^{-\pi \cdot \langle R \rangle / \rho_{\square}} = 1/2$$
$$-\frac{\pi \cdot \langle R \rangle}{\rho_{\square}} = \ln(1/2) \quad \frac{\pi \cdot \langle R \rangle}{\rho_{\square}} = \ln(2)$$
$$\rho_{\square} = \frac{\pi \cdot \langle R \rangle}{\ln(2)}$$

$$\rho_{\square} = 165 \, \Omega$$

**E9 (0.1 pts)**

$$\frac{\Delta \rho_{\square}}{\rho_{\square}} = 0.091 = 9.1 \, \%$$

**E10 (0.1 pts)**

Resistivity of the Cr thin film  $\rho = 1.32 \cdot 10^{-6} \, \Omega \cdot \text{m}$

## Problem 2 : Solution – Jumping Beads - a model for phase transitions and instabilities (10 points)

### Part A. Critical driving amplitude (3.3 points)

#### A1 (1.2 pts)

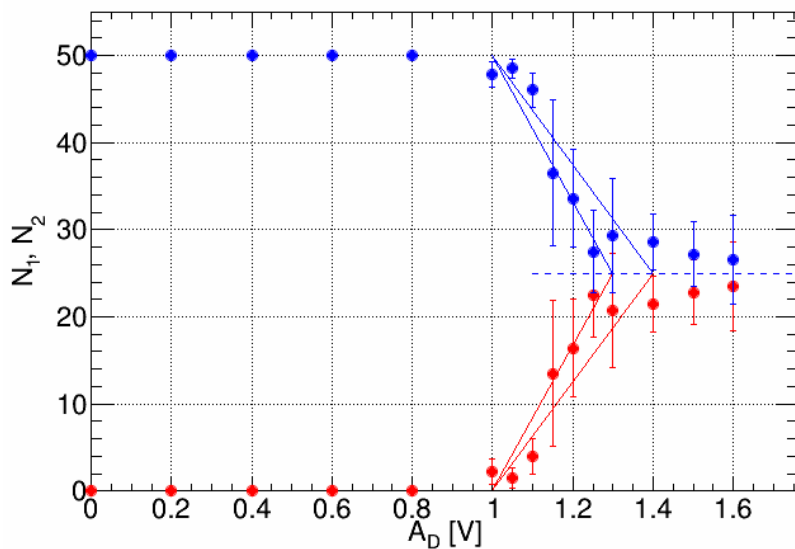
Total number of seeds:  $N_0 = 50$ .

Number of readings:  $n = 6$ .

$A_D$ , [V]	$N_1$						$\bar{N}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_1^i$	$\bar{N}_2 = N_0 - \bar{N}_1$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2}{n-1}}$	$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
1.00	1	5	2	1	2	2	2.2	47.8	1.5	0.6
1.05	1	0	2	3	1	2	1.5	48.5	1.1	0.5
1.10	4	4	1	7	3	5	4.0	46.0	2.0	0.8
1.15	26	5	18	7	18	7	13.5	36.5	8.4	3.4
1.20	13	16	27	12	17	13	16.4	33.7	5.6	2.3
1.25	26	28	22	22	14	23	22.5	27.5	4.8	2.0
1.30	27	24	8	22	22	21	20.7	29.3	6.6	2.7
1.40	22	18	17	23	23	25	21.4	28.7	3.2	1.3
1.50	19	27	27	24	19	21	22.8	27.2	3.7	1.5
1.60	27	15	23	23	23	30	23.5	26.5	5.1	2.1

Plot the data in the graph A2.

#### A2 (1.1 pts)



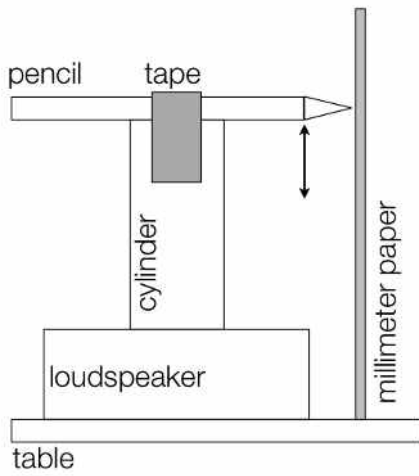
Error bars represent either standard deviation ( $\sigma$ ) or standard error (SE).

#### A3 (1.0 pts)

$A_{D,crit} = (1.25 \pm 0.05)$  V

Part B. Calibration (3.2 points)

**B1 (0.5 pts)**

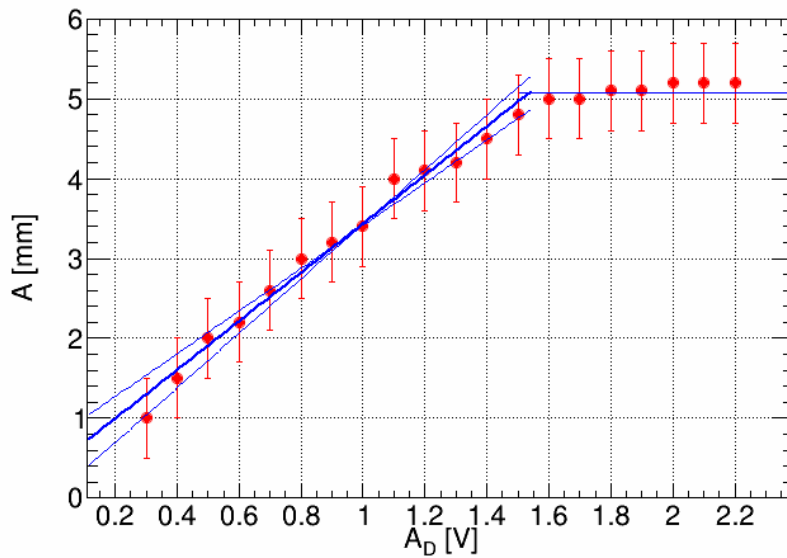


**B2 (0.8 pts)**

$A_D$ [V]	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1
$A$ [mm]	1.0	1.5	2.0	2.2	2.6	3.0	3.2	3.4	4.0	4.1	4.2	4.5	4.8	5.0	5.0	5.1	5.1	5.2	5.2

Instrumental error  $\pm 0.5$  mm.

**B3 (1.0 pts)**



**B4 (0.8 pts)**

$$A = k_0 + k_1 \times A_D,$$

where:

$$k_0 = 0.2 \text{ [mm]}, \quad k_1 = 3.1 \text{ [mm/V]}$$

**B5 (0.1 pts)**

$$A_{\text{crit}} = (4.4 \pm 0.1) \text{ mm}$$

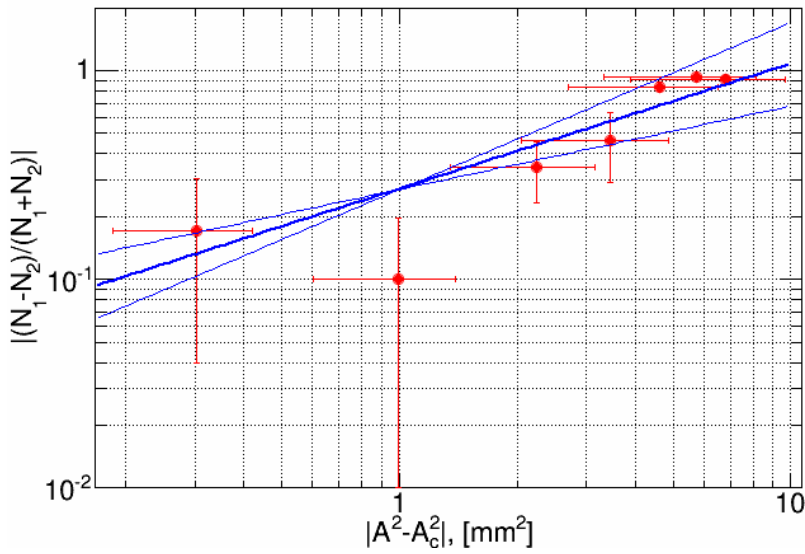
Part C. Critical exponent (3.5 points)

**C1 (1.1 pts)**

$A_D$ , [V]	$A$ , [mm]	$ \frac{N_1-N_2}{N_1+N_2} $	$ A^2 - A_0^2 $
1.00	3.5	0.91	6.8
1.05	3.6	0.94	5.7
1.10	3.8	0.84	4.6
1.15	3.9	0.46	3.5
1.20	4.1	0.35	2.2
1.25	4.2	0.10	1.0
1.30	4.4	0.17	0.3
1.40	4.7	0.15	
1.50	5.0	0.09	
1.60	5.3	0.06	

Plot the data in the graph C2.

**C2 (1.0 pts)**



**C3 (1.4 pts)**

$y = a \cdot x^b$ , where  $x = |A^2 - A_0^2|$ ,  $y = |\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}|$ .

Critical exponent  $b = 0.6 \pm 0.2$ .

## General instructions: Theoretical Examination (30 points)

July 14, 2016

The theoretical examination lasts for 5 hours and is worth a total of 30 points.

### Before the exam

- You must not open the envelopes containing the problems before the sound signal indicating the beginning of the examination.
- The beginning and end of the examination will be indicated by a sound signal. There will be announcements every hour indicating the elapsed time, as well as fifteen minutes before the end of the examination (before the final sound signal).

### During the exam

- Dedicated answer sheets are provided for writing your answers. Enter the final answers into the appropriate boxes in the corresponding answer sheet (marked A). For every problem, there are extra blank work sheets for carrying out detailed work (marked W). Always use the work sheets that belong to the problem you are currently working on (check the problem number in the header). If you have written something on any sheet which you do not want to be graded, cross it out. Only use the front side of every page.
- In your answers, try to be as concise as possible: use equations, logical operators and sketches to illustrate your thoughts whenever possible. Avoid the use of long sentences.
- Please give an appropriate number of significant digits when stating numbers.
- You may often be able to solve later parts of a problem without having solved the previous ones.
- A list of physical constants is given on the next page.
- You are not allowed to leave your working place without permission. If you need any assistance (need to refill your drinking water bottle, broken calculator, need to visit a restroom, etc), please draw the attention of a team guide by putting one of the three flags into the holder attached to your cubicle ("Refill my water bottle, please", "I need to go to the toilet, please", or "I need help, please" in all other cases).

### At the end of the exam

- At the end of the examination you must stop writing immediately.
- For every problem, sort the corresponding sheets in the following order: cover sheet (C), questions (Q), answer sheets (A), work sheets (W).
- Put all the sheets belonging to one problem into the same envelope. Also put the general instructions (G) into the remaining separate envelope. Make sure your student code is visible in the viewing window of each envelope. Also hand in empty sheets. You are not allowed to take any sheets of paper out of the examination area.
- Leave the blue calculator provided by the organizers on the table.

- Take the writing equipment (2 ball point pens, 1 felt tip pen, 1 pencil, 1 pair of scissors, 1 ruler, 2 pairs of earplugs) as well your personal calculator (if applicable) with you. Also take your water bottle with you.
- Wait at your table until your envelopes are collected. Once all envelopes are collected your guide will escort you out of the examination area.

## General Data Sheet

Speed of light in vacuum	$c$	$=$	$299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Vacuum permeability (magnetic constant)	$\mu_0$	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Vacuum permittivity (electrical constant)	$\varepsilon_0$	$=$	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Elementary charge	$e$	$=$	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\text{ A} \cdot \text{s}$
Mass of the electron	$m_e$	$=$	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\text{ kg}$ $= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Mass of the proton	$m_p$	$=$	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$ $= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Mass of the neutron	$m_n$	$=$	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$ $= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
Unified atomic mass unit	$u$	$=$	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\text{ kg}$
Rydberg constant	$R_\infty$	$=$	$10\,973\,731.568\,508(65)\text{ m}^{-1}$
Universal constant of gravitation	$G$	$=$	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Acceleration due to gravity (in Zurich)	$g$	$=$	$9.81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Planck's constant	$h$	$=$	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro number	$N_A$	$=$	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
Molar gas constant	$R$	$=$	$8.314\,4598(48)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molar mass constant	$M_u$	$=$	$1 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann constant	$k_B$	$=$	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma$	$=$	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

## Two Problems in Mechanics (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

### Part A. The Hidden Disk (3.5 points)

We consider a solid wooden cylinder of radius  $r_1$  and thickness  $h_1$ . Somewhere inside the wooden cylinder, the wood has been replaced by a metal disk of radius  $r_2$  and thickness  $h_2$ . The metal disk is placed in such a way that its symmetry axis  $B$  is parallel to the symmetry axis  $S$  of the wooden cylinder, and is placed at the same distance from the top and bottom face of the wooden cylinder. We denote the distance between  $S$  and  $B$  by  $d$ . The density of wood is  $\rho_1$ , the density of the metal is  $\rho_2 > \rho_1$ . The total mass of the wooden cylinder and the metal disk inside is  $M$ .

In this task, we place the wooden cylinder on the ground so that it can freely roll to the left and right. See Fig. 1 for a side view and a view from the top of the setup.

The goal of this task is to determine the size and the position of the metal disk.

In what follows, when asked to express the result in terms of known quantities, you may always assume that the following are known:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

The goal is to determine  $r_2, h_2$  and  $d$ , through indirect measurements.

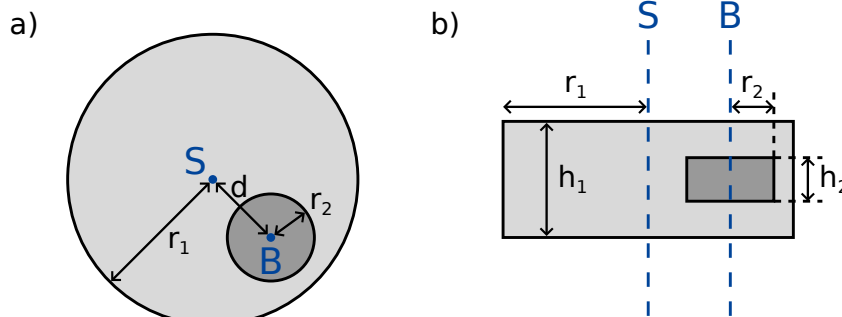


Figure 1: a) side view b) view from above

We denote  $b$  as the distance between the centre of mass  $C$  of the whole system and the symmetry axis  $S$  of the wooden cylinder. In order to determine this distance, we design the following experiment: We place the wooden cylinder on a horizontal base in such a way that it is in a stable equilibrium. Let us now slowly incline the base by an angle  $\Theta$  (see Fig. 2). As a result of the static friction, the wooden cylinder can roll freely without sliding. It will roll down the incline a little bit, but then come to rest in a stable equilibrium after rotating by an angle  $\phi$  which we measure.

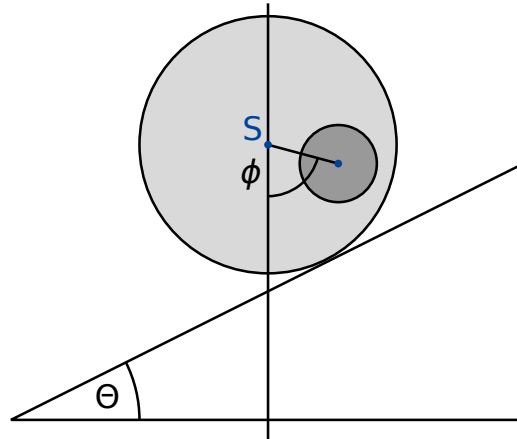


Figure 2: Cylinder on an inclined base.

- A.1** Find an expression for  $b$  as a function of the quantities (1), the angle  $\phi$  and the tilting angle  $\Theta$  of the base. 0.8pt

From now on, we can assume that the value of  $b$  is known.

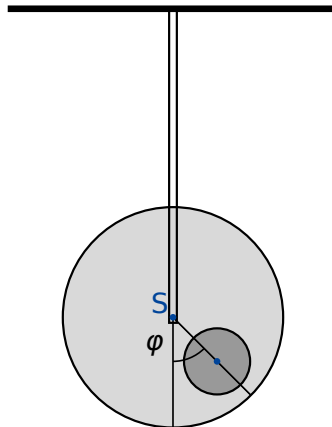


Figure 3: Suspended system.

Next we want to measure the moment of inertia  $I_S$  of the system with respect to the symmetry axis  $S$ . To this end, we suspend the wooden cylinder at its symmetry axis from a rigid rod. We then turn it away from its equilibrium position by a small angle  $\varphi$ , and let it go. See figure 3 for the setup. We find that  $\varphi$  describes a periodic motion with period  $T$ .

- A.2** Find the equation of motion for  $\varphi$ . Express the moment of inertia  $I_S$  of the system around its symmetry axis  $S$  in terms of  $T$ ,  $b$  and the known quantities (1). You may assume that we are only disturbing the equilibrium position by a small amount so that  $\varphi$  is always very small. 0.5pt

From the measurements in questions **A.1** and **A.2**, we now want to determine the geometry and the position of the metal disk inside the wooden cylinder.

- A.3** Find an expression for the distance  $d$  as a function of  $b$  and the quantities (1). You may also include  $r_2$  and  $h_2$  as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**. 0.4pt

- A.4** Find an expression for the moment of inertia  $I_S$  in terms of  $b$  and the known quantities (1). You may also include  $r_2$  and  $h_2$  as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**. 0.7pt

- A.5** Using all the above results, write down an expression for  $h_2$  and  $r_2$  in terms of  $b$ ,  $T$  and the known quantities (1). You may express  $h_2$  as a function of  $r_2$ . 1.1pt

## Part B. Rotating Space Station (6.5 points)

Alice is an astronaut living on a space station. The space station is a gigantic wheel of radius  $R$  rotating around its axis, thereby providing artificial gravity for the astronauts. The astronauts live on the inner side of the rim of the wheel. The gravitational attraction of the space station and the curvature of the floor can be ignored.

- B.1** At what angular frequency  $\omega_{ss}$  does the space station rotate so that the astronauts experience the same gravity  $g_E$  as on the Earth's surface? 0.5pt

Alice and her astronaut friend Bob have an argument. Bob does not believe that they are in fact living in a space station and claims that they are on Earth. Alice wants to prove to Bob that they are living on a rotating space station by using physics. To this end, she attaches a mass  $m$  to a spring with spring constant  $k$  and lets it oscillate. The mass oscillates only in the vertical direction, and cannot move in the horizontal direction.

- B.2** Assuming that on Earth gravity is constant with acceleration  $g_E$ , what would be the angular oscillation frequency  $\omega_E$  that a person on Earth would measure? 0.2pt

- B.3** What angular oscillation frequency  $\omega$  does Alice measure on the space station? 0.6pt

Alice is convinced that her experiment proves that they are on a rotating space station. Bob remains sceptical. He claims that when taking into account the change in gravity above the surface of the Earth, one finds a similar effect. In the following tasks we investigate whether Bob is right.

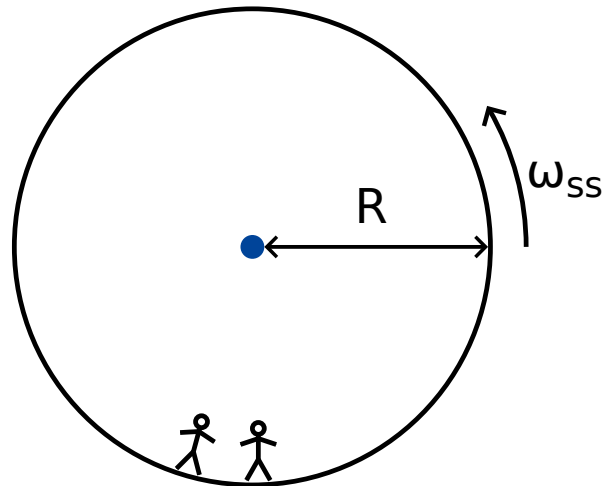


Figure 4: Space station

- B.4** Derive an expression of the gravity  $g_E(h)$  for small heights  $h$  above the surface of the Earth and compute the oscillation frequency  $\tilde{\omega}_E$  of the oscillating mass (linear approximation is enough). Denote the radius of the Earth by  $R_E$ . Neglect the rotation of Earth. 0.8pt

Indeed, for this space station, Alice does find that the spring pendulum oscillates with the frequency that Bob predicted.

- B.5** For what radius  $R$  of the space station does the oscillation frequency  $\omega$  match the oscillation frequency  $\tilde{\omega}_E$  on the Earth? Express your answer in terms of  $R_E$ . 0.3pt

Exasperated with Bob's stubbornness, Alice comes up with an experiment to prove her point. To this end she climbs on a tower of height  $H$  over the floor of the space station and drops a mass. This experiment can be understood in the rotating reference frame as well as in an inertial reference frame.

In a uniformly rotating reference frame, the astronauts perceive a fictitious force  $\vec{F}_C$  called the Coriolis force. The force  $\vec{F}_C$  acting on an object of mass  $m$  moving at velocity  $\vec{v}$  in a rotating frame with constant angular frequency  $\vec{\omega}_{ss}$  is given by

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

In terms of the scalar quantities you may use

$$F_C = 2m v \omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

where  $\phi$  is the angle between the velocity and the axis of rotation. The force is perpendicular to both the velocity  $v$  and the axis of rotation. The sign of the force can be determined from the right-hand rule, but in what follows you may choose it freely.

- B.6** Calculate the horizontal velocity  $v_x$  and the horizontal displacement  $d_x$  (relative to the base of the tower, in the direction perpendicular to the tower) of the mass at the moment it hits the floor. You may assume that the height  $H$  of the tower is small, so that the acceleration as measured by the astronauts is constant during the fall. Also, you may assume that  $d_x \ll H$ . 1.1pt

To get a good result, Alice decides to conduct this experiment from a much taller tower than before. To her surprise, the mass hits the floor at the base of the tower, so that  $d_x = 0$ .

- B.7** Find a lower bound for the height of the tower for which it can happen that  $d_x = 0$ . 1.3pt

Alice is willing to make one last attempt at convincing Bob. She wants to use her spring oscillator to show the effect of the Coriolis force. To this end she changes the original setup: She attaches her spring to a ring which can slide freely on a horizontal rod in the  $x$  direction without any friction. The spring itself oscillates in the  $y$  direction. The rod is parallel to the floor and perpendicular to the axis of rotation of the space station. The  $xy$  plane is thus perpendicular to the axis of rotation, with the  $y$  direction pointing straight towards the center of rotation of the station.

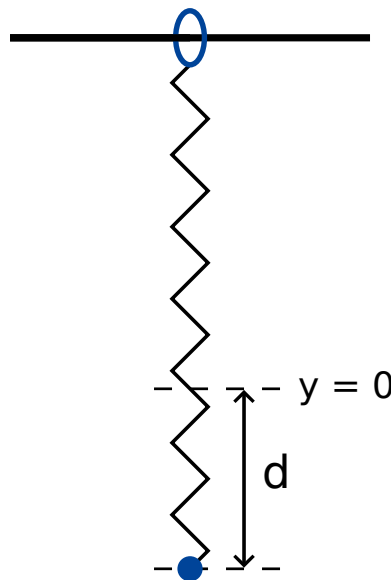


Figure 5: Setup.

- B.8** Alice pulls the mass a distance  $d$  downwards from the equilibrium point  $x = 0$ ,  $y = 0$ , and then lets it go (see figure 5). 1.7pt
- Give an algebraic expression of  $x(t)$  and  $y(t)$ . You may assume that  $\omega_{ss}d$  is small, and neglect the Coriolis force for motion along the  $y$ -axis.
  - Sketch the trajectory  $(x(t), y(t))$ , marking all important features such as amplitude.

Alice and Bob continue to argue.

## Two Problems in Mechanics (10 points)

### Part A. The Hidden Disk (3.5 points)

**A.1** (0.8 pt)

$$b =$$

**A.2** (0.5 pt)

Equation of motion for  $\varphi$  :

$$I_S =$$

**A.3** (0.4 pt)

$$d =$$

**A.4** (0.7 pt)

$$I_S =$$

**A.5** (1.1 pt)

$$h_2 =$$

$$r_2 =$$

## Part B. Rotating Space Station (6.5 points)

**B.1** (0.5 pt)

$$\omega_{ss} =$$

**B.2** (0.2 pt)

$$\omega_E =$$

**B.3** (0.6 pt)

$$\omega =$$

**B.4** (0.8 pt)

$$g_E(h) =$$

$$\tilde{\omega}_E =$$

**B.5** (0.3 pt)

$$R =$$

**B.6** (1.1 pt)

$$v_x =$$

$$d_x =$$

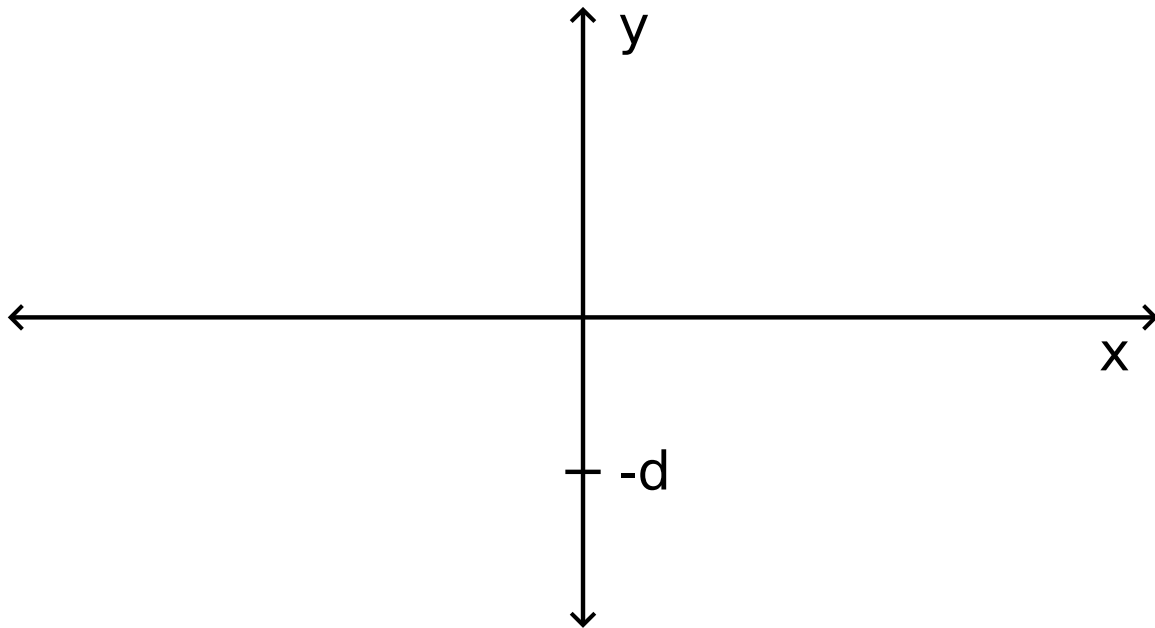
**B.7** (1.3 pt)

$$H \geq$$

**B.8** (1.7 pt)

$$x(t) =$$

$$y(t) =$$



## Nonlinear Dynamics in Electric Circuits (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

### Introduction

Bistable non-linear semiconducting elements (e.g. thyristors) are widely used in electronics as switches and generators of electromagnetic oscillations. The primary field of applications of thyristors is controlling alternating currents in power electronics, for instance rectification of AC current to DC at the megawatt scale. Bistable elements may also serve as model systems for self-organization phenomena in physics (this topic is covered in part B of the problem), biology (see part C) and other fields of modern nonlinear science.

### Goals

To study instabilities and nontrivial dynamics of circuits including elements with non-linear  $I - V$  characteristics. To discover possible applications of such circuits in engineering and in modeling of biological systems.

### Part A. Stationary states and instabilities (3 points)

Fig. 1 shows the so-called **S-shaped**  $I - V$  characteristics of a non-linear element  $X$ . In the voltage range between  $U_h = 4.00$  V (the holding voltage) and  $U_{th} = 10.0$  V (the threshold voltage) this  $I - V$  characteristics is multivalued. For simplicity, the graph on Fig. 1 is chosen to be piece-wise linear (each branch is a segment of a straight line). In particular, the line in the upper branch touches the origin if it is extended. This approximation gives a good description of real thyristors.

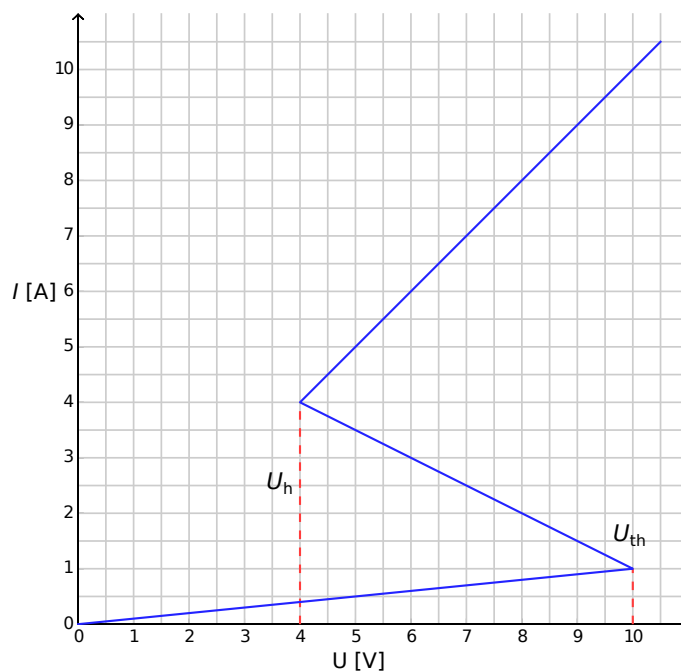


Figure 1:  $I - V$  characteristics of the non-linear element  $X$ .

- A.1** Using the graph, determine the resistance  $R_{\text{on}}$  of the element  $X$  on the upper branch of the  $I - V$  characteristics, and  $R_{\text{off}}$  on the lower branch, respectively. The middle branch is described by the equation 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Find the values of the parameters  $I_0$  and  $R_{\text{int}}$ .

The element  $X$  is connected in series (see Fig.2) with a resistor  $R$ , an inductor  $L$  and an ideal voltage source  $\mathcal{E}$ . One says that the circuit is in a stationary state if the current is constant in time,  $I(t) = \text{const}$ .

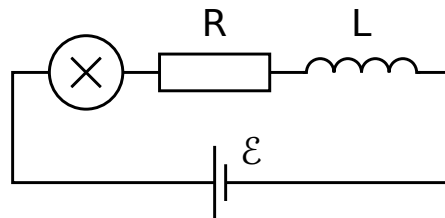


Figure 2: Circuit with element  $X$ , resistor  $R$ , inductor  $L$  and voltage source  $\mathcal{E}$ .

- A.2** What are the possible numbers of stationary states that the circuit of Fig. 2 may have for a fixed value of  $\mathcal{E}$  and for  $R = 3.00 \Omega$ ? How does the answer change for  $R = 1.00 \Omega$ ? 1pt

- A.3** Let  $R = 3.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \mu\text{H}$  and  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$  in the circuit shown in Fig. 2. Determine the values of the current  $I_{\text{stationary}}$  and the voltage  $V_{\text{stationary}}$  on the non-linear element  $X$  in the stationary state. 0.6pt

The circuit in Fig. 2 is in the stationary state with  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . This stationary state is said to be stable if after a small displacement (increase or decrease in the current), the current returns towards the stationary state. And if the system keeps moving away from the stationary state, it is said to be unstable.

- A.4** Use numerical values of the question **A.3** and study the stability of the stationary state with  $I(t) = I_{\text{stationary}}$ . Is it stable or unstable? 1pt

## Part B. Bistable non-linear elements in physics: radio transmitter (5 points)

We now investigate a new circuit configuration (see Fig. 3). This time, the non-linear element  $X$  is connected in parallel to a capacitor of capacitance  $C = 1.00 \mu\text{F}$ . This block is then connected in series to a resistor of resistance  $R = 3.00 \Omega$  and an ideal constant voltage source of voltage  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ . It turns out that this circuit undergoes oscillations with the non-linear element  $X$  jumping from one branch of the  $I - V$  characteristics to another over the course of one cycle.

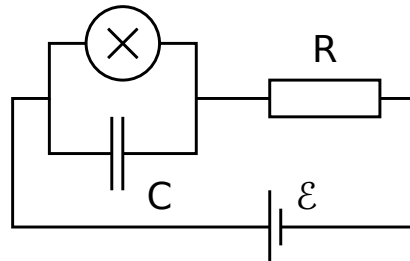


Figure 3: Circuit with element  $X$ , capacitor  $C$ , resistor  $R$  and voltage source  $\mathcal{E}$ .

- |            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>B.1</b> | Draw the oscillation cycle on the $I - V$ graph, including its direction (clockwise or anticlockwise). Justify your answer with equations and sketches.   | 1.8pt |
| <b>B.2</b> | Find expressions for the times $t_1$ and $t_2$ that the system spends on each branch of the $I - V$ graph during the oscillation cycle. Determine their numerical values. Find the numerical value of the oscillation period $T$ assuming that the time needed for jumps between the branches of the $I - V$ graph is negligible. | 1.9pt |
| <b>B.3</b> | Estimate the average power $P$ dissipated by the non-linear element over the course of one oscillation. An order of magnitude is sufficient.  | 0.7pt |

The circuit in Fig. 3 is used to build a radio transmitter. For this purpose, the element  $X$  is attached to one end of a linear antenna (a long straight wire) of length  $s$ . The other end of the wire is free. In the antenna, an electromagnetic standing wave is formed. The speed of electromagnetic waves along the antenna is the same as in vacuum. The transmitter is using the main harmonic of the system, which has period  $T$  of question **B.2**.

- |            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>B.4</b> | What is the optimal value of $s$ assuming that it cannot exceed 1 km? | 0.6pt |
|------------|---|-------|

### Part C. Bistable non-linear elements in biology: neuristor (2 points)

In this part of the problem, we consider an application of bistable non-linear elements to modeling of biological processes. A neuron in a human brain has the following property: when excited by an external signal, it makes one single oscillation and then returns to its initial state. This feature is called excitability. Due to this property, pulses can propagate in the network of coupled neurons constituting the nerve systems. A semiconductor chip designed to mimic excitability and pulse propagation is called a *neuristor* (from neuron and transistor).

We attempt to model a simple neuristor using a circuit that includes the non-linear element  $X$  that we investigated previously. To this end, the voltage  $\mathcal{E}$  in the circuit of Fig. 3 is decreased to the value  $\mathcal{E}' = 12.0$  V. The oscillations stop, and the system reaches its stationary state. Then, the voltage is rapidly increased back to the value  $\mathcal{E} = 15.0$  V, and after a period of time  $\tau$  (with  $\tau < T$ ) is set again to the value  $\mathcal{E}'$  (see Fig. 4). It turns out that there is a certain critical value  $\tau_{\text{crit}}$ , and the system shows qualitatively different behavior for  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  and for  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ .

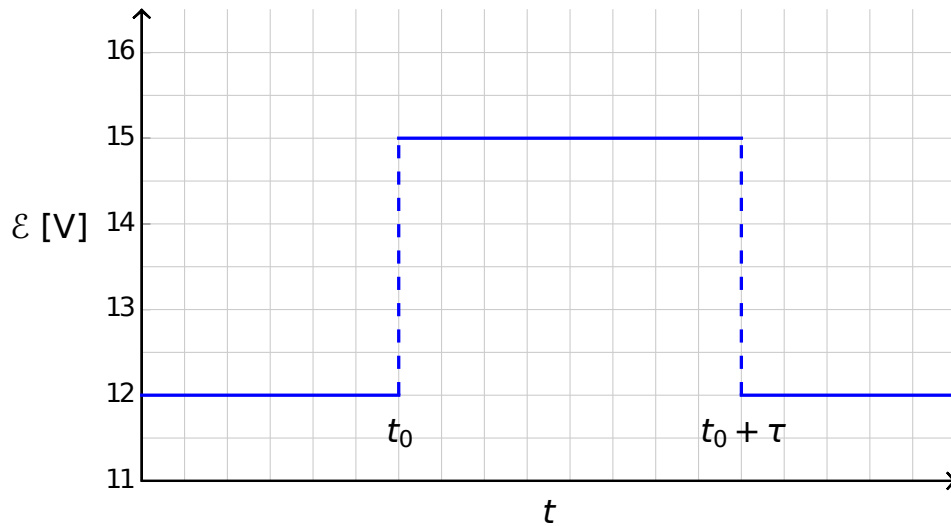


Figure 4: Voltage of the voltage source as a function of time.

- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>C.1</b> | Sketch the graphs of the time dependence of the current $I_X(t)$ on the non-linear element $X$ for $\tau < \tau_{\text{crit}}$ and for $\tau > \tau_{\text{crit}}$ . | 1.2pt |
| <b>C.2</b> | Find the expression and the numerical value of the critical time $\tau_{\text{crit}}$ for which the scenario switches.   | 0.6pt |
| <b>C.3</b> | Is the circuit with $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s a neuristor?  | 0.2pt |

## Nonlinear Dynamics in Electric Circuits (10 points)

### Part A. Stationary states and instabilities (3 points)

**A.1** (0.4 pt)

$$R_{\text{on}} =$$

$$R_{\text{off}} =$$

$$I_0 =$$

$$R_{\text{int}} =$$

**A.2** (1 pt)

Possible numbers of stationary states for  $R = 3.00 \, \Omega$  :

Possible numbers of stationary states for  $R = 1.00 \, \Omega$  :

**A.3** (0.6 pt)

$$I_{\text{stationary}} =$$

$$V_{\text{stationary}} =$$

**A.4** (1 pt)

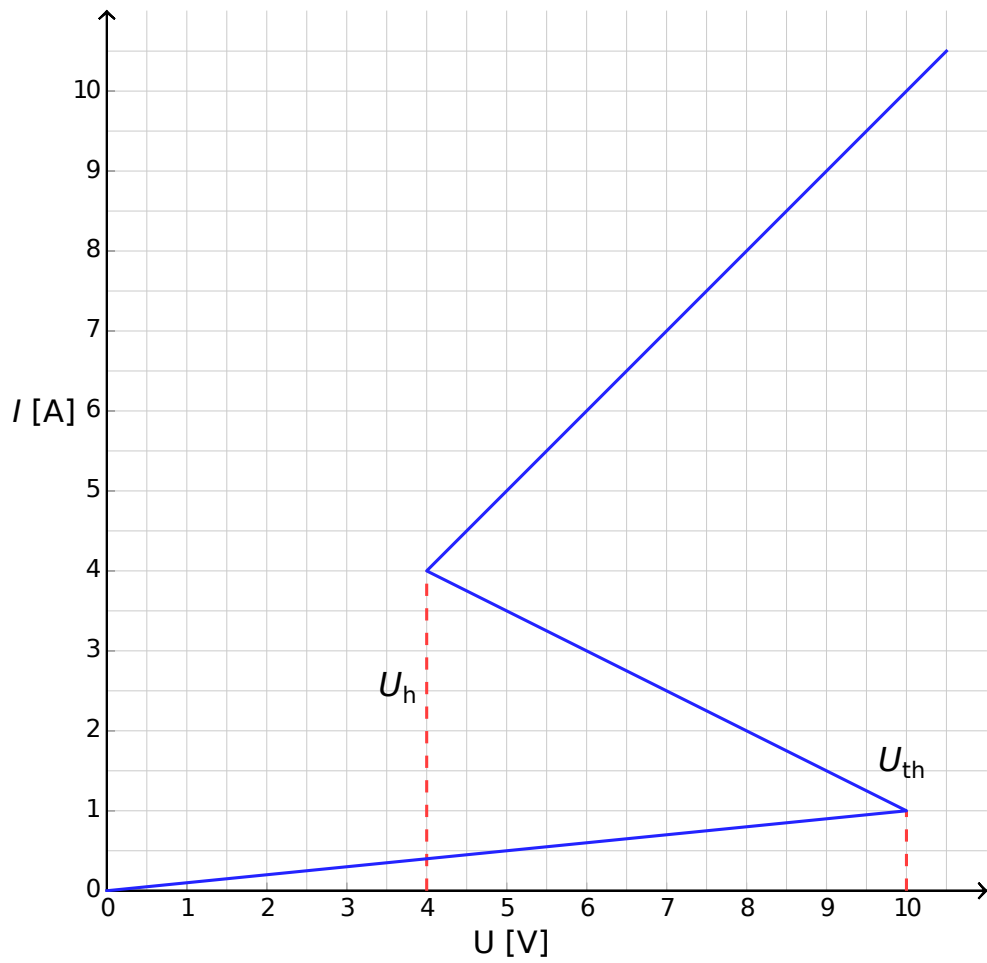
Behaviour for  $I(t = 0) > I_{\text{stationary}}$  :

Behaviour for  $I(t = 0) < I_{\text{stationary}}$  :

Is the stationary state:  stable?  unstable?

**Part B. Bistable non-linear elements in physics: radio transmitter (5 points)**

**B.1** (1.8 pt)



Justification:

**B.2** (1.9 pt)

Formula of  $t_1 =$

Numerical value of  $t_1 =$

Formula of  $t_2 =$

Numerical value of  $t_2 =$

Numerical value of  $T =$

**B.3** (0.7 pt)

$P \approx$

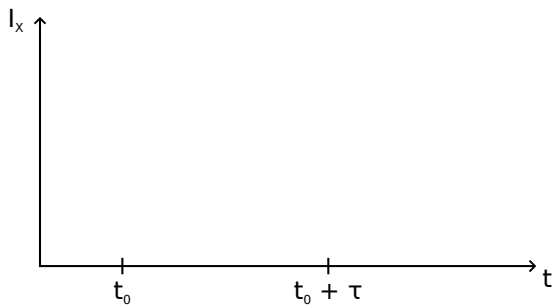
**B.4** (0.6 pt)

$s =$

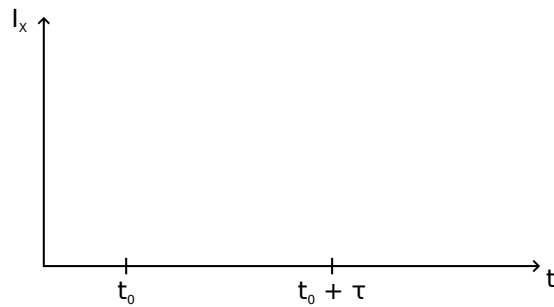
**Part C. Bistable non-linear elements in biology: neuristor (2 points)**

**C.1** (1.2 pt)

Sketch for  $\tau < \tau_{\text{crit}}$  :



Sketch for  $\tau > \tau_{\text{crit}}$  :



**C.2** (0.6 pt)

Formula of  $\tau_{\text{crit}} =$

Numerical value of  $\tau_{\text{crit}} =$

**C.3** (0.2 pt)

Is the circuit a neuristor?  Yes  No

## Large Hadron Collider (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

In this task, the physics of the particle accelerator LHC (Large Hadron Collider) at CERN is discussed. CERN is the world's largest particle physics laboratory. Its main goal is to get insight into the fundamental laws of nature. Two beams of particles are accelerated to high energies, guided around the accelerator ring by a strong magnetic field and then made to collide with each other. The protons are not spread uniformly around the circumference of the accelerator, but they are clustered in so-called bunches. The resulting particles generated by collisions are observed with large detectors. Some parameters of the LHC can be found in table 1.

LHC ring	
Circumference of ring	26659 m
Number of bunches per proton beam	2808
Number of protons per bunch	$1.15 \times 10^{11}$
Proton beams	
Energy of protons	7.00 TeV
Centre of mass energy	14.0 TeV

Table 1: Typical numerical values of relevant LHC parameters.

Particle physicists use convenient units for the energy, momentum and mass: The energy is measured in electron volts [eV]. By definition, 1 eV is the amount of energy gained by a particle with elementary charge,  $e$ , moved through a potential difference of one volt ( $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}$ ).

The momentum is measured in units of  $\text{eV}/c$  and the mass in units of  $\text{eV}/c^2$ , where  $c$  is the speed of light in vacuum. Since 1 eV is a very small quantity of energy, particle physicists often use MeV ( $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ ), GeV ( $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ ) or TeV ( $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ ).

Part A deals with the acceleration of protons or electrons. Part B is concerned with the identification of particles produced in the collisions at CERN.

### Part A. LHC accelerator (6 points)

#### Acceleration:

Assume that the protons have been accelerated by a voltage  $V$  such that their velocity is very close to the speed of light and neglect any energy loss due to radiation or collisions with other particles.

<p><b>A.1</b> Find the exact expression for the final velocity <math>v</math> of the protons as a function of the accelerating voltage <math>V</math>, and physical constants. <span style="float: right;">0.7pt</span></p>
---

A design for a future experiment at CERN plans to use the protons from the LHC and to collide them with electrons which have an energy of 60.0 GeV.

- A.2** For particles with high energy and low mass the relative deviation  $\Delta = (c-v)/c$  of the final velocity  $v$  from the speed of light is very small. Find a first order approximation for  $\Delta$  and calculate  $\Delta$  for electrons with an energy of 60.0 GeV using the accelerating voltage  $V$  and physical constants. 0.8pt

We now return to the protons in the LHC. Assume that the beam pipe has a circular shape.

- A.3** Derive an expression for the uniform magnetic flux density  $B$  necessary to keep the proton beam on a circular track. The expression should only contain the energy of the protons  $E$ , the circumference  $L$ , fundamental constants and numbers. You may use suitable approximations if their effect is smaller than precision given by the least number of significant digits. Calculate the magnetic flux density  $B$  for a proton energy of  $E = 7.00$  TeV, neglecting interactions between the protons. 1.0pt

### Radiated Power:

An accelerated charged particle radiates energy in the form of electromagnetic waves. The radiated power  $P_{\text{rad}}$  of a charged particle that circulates with a constant angular velocity depends only on its acceleration  $a$ , its charge  $q$ , the speed of light  $c$  and the permittivity of free space  $\epsilon_0$ .

- A.4** Use dimensional analysis to find an expression for the radiated power  $P_{\text{rad}}$ . 1.0pt

The real formula for the radiated power contains a factor  $1/(6\pi)$ ; moreover, a full relativistic derivation gives an additional multiplicative factor  $\gamma^4$ , with  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

- A.5** Calculate  $P_{\text{tot}}$ , the total radiated power of the LHC, for a proton energy of  $E = 7.00$  TeV (Note table 1). You may use suitable approximations. 1.0pt

### Linear Acceleration:

At CERN, protons at rest are accelerated by a linear accelerator of length  $d = 30.0$  m through a potential difference of  $V = 500$  MV. Assume that the electrical field is homogeneous. A linear accelerator consists of two plates as sketched in Figure 1.

**A.6** Determine the time  $T$  that the protons take to pass through this field.

1.5pt

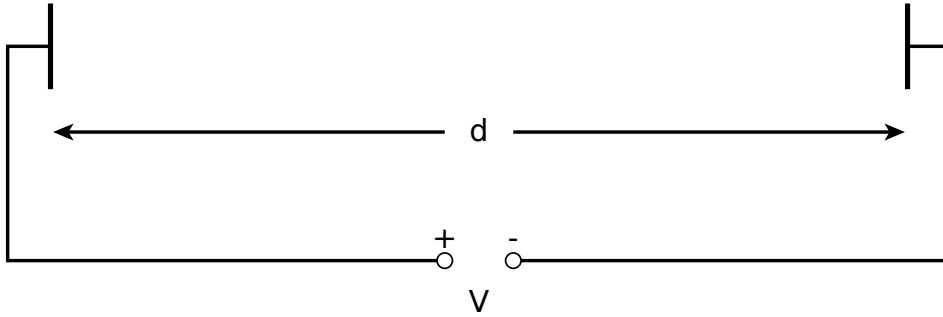


Figure 1: Sketch of an accelerator module.

## Part B. Particle Identification (4 points)

### Time of flight:

It is important to identify the high energy particles that are generated in the collision in order to interpret the interaction process. A simple method is to measure the time ( $t$ ) that a particle with known momentum needs to pass a length  $l$  in a so-called Time-of-Flight (ToF) detector. Typical particles which are identified in the detector, together with their masses, are listed in table 2.

Particle	Mass [MeV/c <sup>2</sup> ]
Deuteron	1876
Proton	938
charged Kaon	494
charged Pion	140
Electron	0.511

Table 2: Particles and their masses.

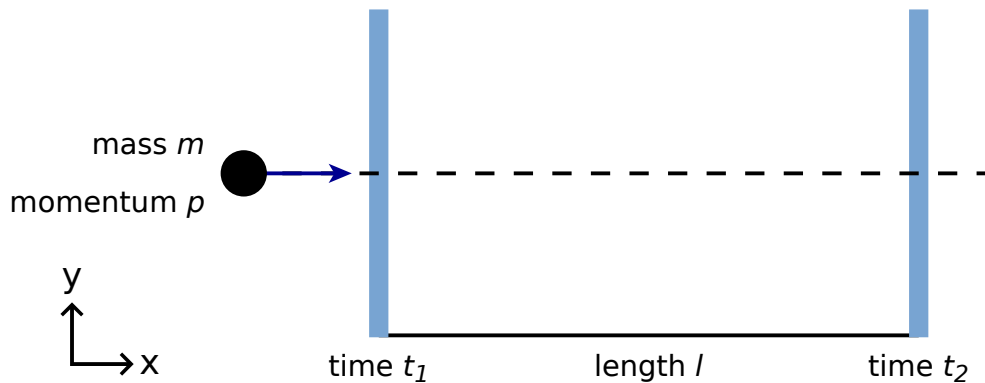
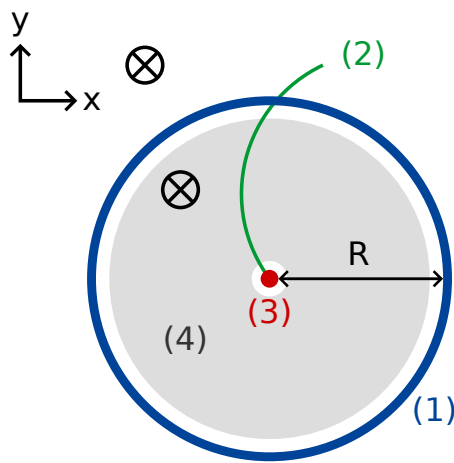


Figure 2: Schematic view of a time-of-flight detector.

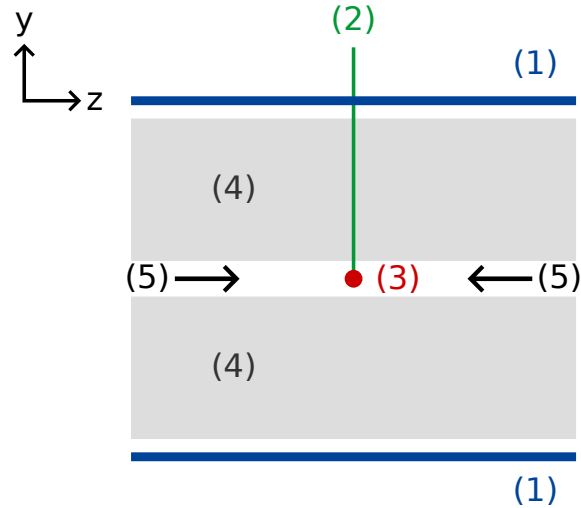
- B.1** Express the particle mass  $m$  in terms of the momentum  $p$ , the flight length  $l$  and the flight time  $t$ , assuming that particles have elementary charge  $e$  and travel with velocity close to  $c$  on straight tracks in the ToF detector and that they travel perpendicular to the two detection planes (see figure 2). 0.8pt

- B.2** Calculate the minimal length  $l$  of a ToF detector that allows to safely distinguish a charged kaon from a charged pion, given both their momenta are measured to be  $1.00 \text{ GeV}/c$ . For a good separation it is required that the difference in the time-of-flight is larger than three times the time resolution of the detector. The typical resolution of a ToF detector is  $150 \text{ ps}$  ( $1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$ ). 0.7pt

In the following, particles produced in a typical LHC detector are identified in a two stage detector consisting of a tracking detector and a ToF detector. Figure 3 shows the setup in the plane transverse and longitudinal to the proton beams. Both detectors are tubes surrounding the interaction region with the beam passing in the middle of the tubes. The tracking detector measures the trajectory of a charged particle which passes through a magnetic field whose direction is parallel to the proton beams. The radius  $r$  of the trajectory allows one to determine the transverse momentum  $p_T$  of the particle. Since the collision time is known the ToF detector only needs one tube to measure the flight time (time between the collision and the detection in the ToF tube). This ToF tube is situated just outside the tracking chamber. For this task you may assume that all particles created by the collision travel perpendicular to the proton beams, which means that the created particles have no momentum along the direction of the proton beams.



transverse plane



cross section of the  
longitudinal view at the center  
of the tube along the beamline

- (1) - ToF tube
- (2) - track
- (3) - collision point
- (4) - tracking tube
- (5) - proton beams
- ⊗ - magnetic field

Figure 3 : Experimental setup for particle identification with a tracking chamber and a ToF detector. Both detectors are tubes surrounding the collision point in the middle. Left : transverse view perpendicular to the beamline. Right : longitudinal view parallel to the beam line. The particle is travelling perpendicular to the beam line.

**B.3** Express the particle mass in terms of the magnetic flux density  $B$ , the radius  $R$  1.7pt of the ToF tube, fundamental constants and the measured quantities: radius  $r$  of the track and time-of-flight  $t$ .

We detected four particles and want to identify them. The magnetic flux density in the tracking detector was  $B = 0.500$  T. The radius  $R$  of the ToF tube was 3.70 m. Here are the measurements ( $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ ):

Particle	Radius of the trajectory $r$ [m]	Time of flight $t$ [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

**B.4** Identify the four particles by calculating their mass.

0.8pt

## Large Hadron Collider (10 points)

### Part A. LHC accelerator (6 points)

**A.1** (0.7 pt)

$v =$

**A.2** (0.8 pt)

approximation:  $\Delta =$

numeric:  $\Delta =$

**A.3** (1.0 pt)

formula:  $B =$

numeric:  $B =$

**A.4** (1.0 pt)

$P_{\text{rad}} \propto$

**A.5** (1.0 pt)

$P_{\text{tot}} =$

**A.6** (1.5 pt)

$T =$

## Part B. Particle Identification (4 points)

**B.1** (0.8 pt)

$m =$

**B.2** (0.7 pt)

$l =$

**B.3** (1.7 pt)

$m =$

**B.4** (0.8 pt)

Particle	Measured mass; mass unit [     ]:	Identified as:
A		
B		
C		
D		

**Problem 1 : Solution/marking scheme – Two Problems in Mechanics (10 points)**

**Part A. The Hidden Disk (3.5 points)**

**A1 (0.8 pt)** Find an expression for  $b$  as a function of the quantities (1), the angle  $\phi$  and the tilting angle  $\Theta$  of the base.

**Solution A1:**

[0.8]

Geometric solution: use that torque with respect to point of contact is 0  $\Rightarrow$  center of gravity has to be vertically above point of contact.

$$\sin \phi = \frac{D}{b}$$

0.3

$$\sin \Theta = \frac{D}{r_1}$$

0.3

Here  $D$  may be called another name. Solve this:

$$\sin \phi = \frac{r_1}{b} \sin \Theta \Rightarrow b = \frac{r_1 \sin \Theta}{\sin \phi}$$

0.2

---

**Alternative:** Torque and forces with respect to another point:

[0.8]

Correct equation for torque

0.3

Correct equation for force

0.3

Correct solution

0.2

**A2 (0.5 pt)** Find the equation of motion for  $\varphi$ . Express the moment of inertia  $I_S$  of the cylinder around its symmetry axis  $S$  in terms of  $T$ ,  $b$  and the known quantities (1). You may assume that we are only disturbing the equilibrium position by a small amount so that  $\varphi$  is always very small.

**Solution A2:**

[0.5]

Write some equation of the form  $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$

0.1

Writing an equation of the form  $\varphi = A \cos \omega t$  is also correct.

Two solutions:

1. Kinetic energy:  $\frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2$  and potential energy:  $-bMg \cos \varphi$ . Total energy is conserved, and differentiation w.r.t. time gives the equation of motion.

2. Angular equation of motion from torque,  $\tau = I_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi$ .

Correct equation (either energy conservation or torque equation of motion)

0.3

Final answer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_S}{Mgb}} \Rightarrow I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}$$

0.1

(Derivation:

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{bMg}{I_S} \sin \varphi \simeq -\frac{bgM}{I_S} \varphi$$

so that

$$\omega^2 = \frac{bgM}{I_S}$$

)

**A3 (0.4 pt)** Find an expression for the distance  $d$  as a function of  $b$  and the quantities (1). You may also include  $r_2$  and  $h_2$  as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**.

**Solution A3:**

[0.4]

Some version of the center of mass equation, e.g.

$$b = \frac{dM_2}{M_1 + M_2}$$

0.2

correct solution:

$$d = \frac{bM}{\pi h_2 r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}$$

0.2

**A4 (0.7 pt)** Find an expression for the moment of inertia  $I_S$  in terms of  $b$  and the known quantities (1). You may also include  $r_2$  and  $h_2$  as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**.

**Solution A4:**

[0.7]

correct answer for moment of inertia of homogeneous disk

$$I_1 = \frac{1}{2} \pi h_1 \rho_1 r_1^4$$

0.2

Mass wrong

-0.1

Factor 1/2 wrong in formula for moment of inertia of a disk

-0.1

Correct answer for moment of inertia of 'excess' disk:

$$I_2 = \frac{1}{2} \pi h_2 (\rho_2 - \rho_1) r_2^4$$

0.2

Using Steiner's theorem:

$$I_S = I_1 + I_2 + d^2 \pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1)$$

0.1

correct solution:

$$I_S = \frac{1}{2} \pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2} \pi h_2 (\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \frac{b^2 M^2}{\pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1)}$$

0.2

In terms of  $d$  rather than  $b$  gives 0.1pts rather than 0.2pts for the final answer:

0.1

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2 (\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + d^2 \pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1)$$

**A5 (1.1 pt)** Using all the above results, write down an expression for  $h_2$  and  $r_2$  in terms of  $b$ ,  $T$  and the quantities (1). You may express  $h_2$  as a function of  $r_2$ .

**Solution A5:**

[1.1]

It is not clear how exactly students will attempt to solve this system of equations. It is likely that they will use the following equation:

$$M = \pi r_1^2 h_1 \rho_1 + \pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1) .$$

0.3

solve  $I_S$  for  $r_2^2$ :

$$r_2^2 = \frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \left( I_S - \frac{1}{2} \pi h_1 \rho_1 r_1^4 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \right)$$

0.4

replace  $I_S$  by  $T$ :

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}$$

0.1

solve correctly for  $r_2$ :

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \left( M \frac{bgT^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2} \pi h_1 \rho_1 r_1^4 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \right)}$$

0.1

write down an equation for  $h_2$  along the lines of  $M = \pi r_1^2 \rho_1 h_1 + \pi r_2^2 (\rho_2 - \rho_1) h_2$  and solve it correctly:

$$h_2 = \frac{M - \pi r_1^2 \rho_1 h_1}{\pi r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}$$

0.2

### Part B. Rotating Space Station (6.5 points)

**B1 (0.5 pt)** At what angular frequency  $\omega_{ss}$  does the space station rotate so that the astronauts experience the same gravity  $g_E$  as on the Earth's surface?

**Solution B1:**

[0.5]

An equation for the centrifugal force along the lines of

$$F_{ce} = m\omega^2 r$$

0.1

Balancing the forces, correct equation

$$g_E = \omega_{ss}^2 R$$

0.2

Correct solution

$$\omega_{ss} = \sqrt{g_E/R}$$

0.2

**B2 (0.2 pt)** Assuming that on Earth gravity is constant with acceleration  $g_E$ , what would be the angular oscillation frequency  $\omega_E$  that a person on Earth would measure?

**Solution B2:**

[0.2]

Realize that result is independent of  $g_E$

0.1

Correct result:

$$\omega_E = \sqrt{k/m}$$

0.1

**B3 (0.6 pt)** What angular oscillation frequency  $\omega$  does Alice measure on the space station?

**Solution B3:**

[0.6]

some version of the correct equation for force

$$F = -kx \pm m\omega_{ss}^2 x$$

0.2

getting the sign right

$$F = -kx + m\omega_{ss}^2 x$$

0.2

Find correct differential equation

$$m\ddot{x} + (k - m\omega_{ss}^2)x = 0$$

0.1

Derive correct result

$$\omega = \sqrt{k/m - \omega_{ss}^2}$$

0.1

Using  $g_E/R$  instead of  $\omega_{ss}^2$  is also correct.

**B4 (0.8 pt)** Derive an expression of the gravity  $g_E(h)$  for small heights  $h$  above the surface of the Earth and compute the oscillation frequency  $\tilde{\omega}_E$  (linear approximation is enough). The radius of the Earth is given by  $R_E$ .

**Solution B4:**

[0.8]

$$g_E(h) = -GM/(R_E + h)^2$$

0.1

linear approximation of gravity:

$$g_E(h) = -\frac{GM}{R_E^2} + 2h\frac{GM}{R_E^3} + \dots$$

0.2

Realize that  $g_E = GM/R_E^2$ :

$$g_E(h) = -g_E + 2hg_E/R_E + \dots$$

0.1

Opposite sign is also correct, as long as it is opposite in both terms.

Realize what this means for force, i.e. that the constant term can be eliminated by shifting the equilibrium point:

$$F = -kx + 2xmg_E/R_E$$

0.2

Find correct differential equation

$$m\ddot{x} + (k - 2mg_E/R_E)x = 0$$

0.1

correct result

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{k/m - 2g_E/R_E}$$

0.1

No points are deducted if student answers with  $\tilde{\omega}_E/(2\pi)$  because "oscillation frequency" might also be interpreted as inverse period.

**B5 (0.3 pt)** For what radius  $R$  of the space station does the oscillation frequency  $\omega$  match the oscillation frequency  $\tilde{\omega}_E$  on the surface of the Earth? Express your answer in terms of  $R_E$ .

**Solution B5:**

[0.3]

Write down equation

$$\omega_{ss}^2 = 2g_E/R_E$$

0.1

Solve

$$R = R_E/2$$

0.2

If  $GM/R_E^2$  rather than  $g_E$  is used, give only 0.1pt.

**B6 (1.1 pt)** Calculate the horizontal velocity  $v_x$  and the horizontal displacement  $d_x$  (relative to the base of the tower, in the direction perpendicular to the tower) of the mass at the moment it hits the floor. You may assume that the height  $H$  of the tower is small, so that the acceleration as measured by the astronauts is constant during the fall. Also, you may assume that  $d_x \ll H$ .

**Solution B6:**

[1.1]

There are several possible solutions.

**Solution one – Using Coriolis force**

- Velocity  $v_x$

Equation for Coriolis force with correct velocity:

$$F_C(t) = 2m\omega_{ss}^2 R t \omega_{ss} = 2m\omega_{ss}^3 R t \quad 0.1$$

Integrate this, or realize that it is like uniform acceleration for the velocity:

$$v_x(t) = \omega_{ss}^3 R t^2 \quad 0.2$$

plug in correct value for

$$t = \sqrt{2H/\omega_{ss}^2 R} \quad 0.2$$

overall correct result

$$v_x = 2H\omega_{ss} \quad 0.1$$

- The displacement  $d_x$ :

Integrate  $v_x(t)$ :

$$d_x = \frac{1}{3} R \omega_{ss}^3 t^3 \quad 0.3$$

Instead of integrating, students may simply ‘average’ by taking  $\frac{1}{2}$  of the final velocity. This gives a factor of  $\frac{1}{2}$  instead of  $\frac{1}{3}$ . *Deduct a total of 0.1 pts for this.* -0.1

Plug in value for  $t$

$$d_x = \frac{1}{3} R \omega_{ss}^3 (2H/\omega_{ss}^2 R)^{3/2} = \frac{1}{3} 2^{3/2} H^{3/2} R^{-1/2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8H^3}{R}} \quad 0.2$$

**Solution two – Using inertial frame** This solution is similar to the way to solve B7, but needs more complicated approximations than Solution one.

- $v_x$

Here  $\phi$  denotes the angle swept by the mass and  $\alpha$  the angle the astronauts (and tower) has rotated when the mass lands on the floor, see

Initially the velocity of the mass in an inertial frame is  $v_x = \omega_{ss}(R - H)$ . 0.1

When the mass lands, the  $x$ -direction has been rotated by  $\phi$  so the new horizontal velocity component is then

$$\omega_{ss}(R - H) \cos \phi \quad 0.1$$

(Student may also write  $\cos \alpha$  instead of  $\cos \phi$ , since  $d_x \ll H$ .)

$$\cos \phi = \frac{R - H}{R} = 1 - \frac{H}{R} \quad 0.1$$

Transforming to the rotating reference frame, one needs to subtract  $\omega_{ss}R$ . 0.1

Finally in the reference frame of the astronauts

$$v_x = \omega_{ss}R \left(1 - \frac{H}{R}\right)^2 - \omega_{ss}R \approx \omega_{ss}R \left(1 - 2\frac{H}{R}\right) - \omega_{ss}R = -2\omega_{ss}H \quad 0.2$$

The sign of the velocity depend on the choice of reference direction, so a positive sign is also correct.

- $d_x$

With the notation from the calculation of  $v_x$

$$d_x = (\alpha - \phi)R$$

0.1

$$\phi = \arccos\left(1 - \frac{H}{R}\right)$$

$$\alpha = \omega_{ss}t$$

where  $t$  is the fall time of the mass, which is given by

$$t = \frac{\sqrt{R^2 - (R - H)^2}}{\omega_{ss}(R - H)}$$

0.1

(see solution to B7)

Writing  $\xi \equiv H/R$  this means

$$d_x = \left[ \frac{\sqrt{1 - (1 - \xi)^2}}{1 - \xi} - \arccos(1 - \xi) \right] R$$

0.3

which is a valid end answer to the problem. It is possible, but not necessary, to approximate this for small  $\xi$ :

$$\arccos(1 - \xi) \approx \sqrt{2\xi} \left(1 + \frac{\xi}{12}\right)$$

which after insertion into the equation for  $d_x$  and approximation of small  $\xi$  yields the same result as in Solution one:

$$d_x = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$

If this end answer misses the factor  $2/3$ , deduct 0.1 points.

-0.1

### **Solution three – Inertial frame with geometry trick**

This is an alternative solution to obtain  $d_x$

The mass travels the distance  $l$ , and during the fall the space station rotates by  $\phi$ , see Figure 2. According to the intersecting chord theorem,

$$l^2 = H(2R - H)$$

0.1

The rotated angle is  $\phi = \omega_{ss}t$  where

$$t = \frac{l}{R - H}$$

0.1

is the fall time. Thus

$$\phi = \frac{\sqrt{H(2R - H)}}{R - H}$$

0.1

$$\frac{d}{R} = \phi - \arcsin \frac{l}{R} = \frac{\sqrt{H(2R - H)}}{R - H} - \arcsin \sqrt{x(2 - x)}$$

0.1

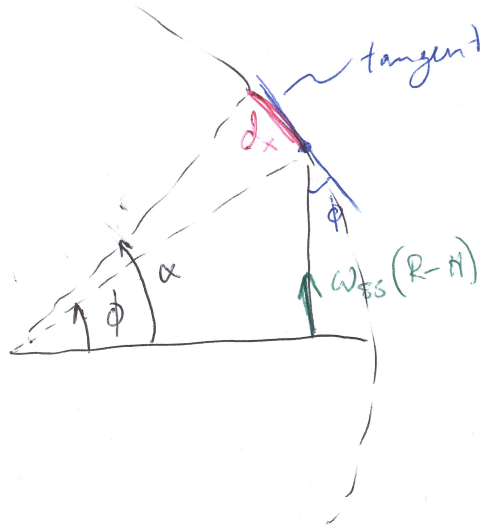


Figure 1: Notation for solution two

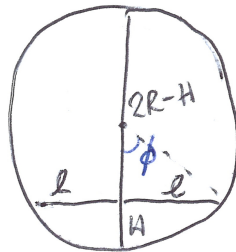


Figure 2: Notation for solution three.

Denote  $x \equiv H/R$  and  $y \equiv \sqrt{x(2-x)}$ . Since

$$\arcsin y \approx y + \frac{y^3}{6}$$

one gets

$$\frac{d}{R} \approx y(1+x) - y - y^3/6 = y(x - y^2/6) \approx 2xy/3 \approx 2x\sqrt{2x}/3 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$

Final answer

0.1

**B7 (1.3 pt)** Find a lower bound for the height of the tower for which it can happen that  $d_x = 0$ .

**Solution B7:**

[1.3]

The key is to use a non-rotating frame of reference. If the mass is released close enough

to the center, its linear velocity will be small enough for the space station to rotate more than  $2\pi$  before it hits the ground.

The velocity is given by

$$v = \omega_{ss}(R - H) \quad 0.1$$

distance  $d$  that the mass flies before hitting the space station

$$d^2 = R^2 - (R - H)^2 \quad 0.1$$

use non-rotating frame of reference to obtain time  $t$  until impact

$$t = d/v = \frac{\sqrt{R^2 - (R - H)^2}}{\omega_{ss}(R - H)} \quad 0.1$$

Now there are several possible ways to relate  $H$  and the rotated angle  $\phi$  of the space station:

**Solution one**

$$t = \frac{R \sin \phi}{\omega_{ss} R \cos \phi} \quad 0.2$$

This time must match  $t = \phi/\omega_{ss}$ . Obtain the equation

$$\phi = \tan \phi \quad 0.2$$

Realizing that there is an infinite number of solutions. 0.2

This equation has one trivial solution  $\phi = 0$ , next solution is slightly less than  $3\pi/2$  which corresponds to the case  $H > R$  (and is thus not correct). The one that gives a lower bound for  $H$  is the third solution

$$\phi \approx 5\pi/2$$

The equation  $\phi = \tan \phi$  can be solved graphically or numerically to obtain a close value ( $\phi = 7.725$  rad) which means

$$H/R = (1 - \cos \phi) \approx 0.871$$

Give points if the method is correct, depending on the value of  $H/R$  found, according to these intervals: 0.4

$0.85 \leq H/R \leq 0.88$ : 0.4 pts

$0.5 \leq H/R < 0.85$ : 0.3 pts

$0 < H/R < 0.5$  or  $H > 0.88$ : 0.2 pts

$H = 0$  or method is incorrect: 0 pts

**Solution two**

relation between  $H$  and rotated angle  $\phi$

$$\frac{R - H}{R} = \cos \phi \quad 0.2$$

obtain equation of the form

$$\frac{H}{R} = 1 - \cos \left( \frac{\sqrt{1 - (1 - H/R)^2}}{1 - H/R} \right) \quad 0.2$$

Figure 3 gives a plot of  $f(x) = 1 - \cos \left( \frac{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}{1 - x} \right)$ . The goal is to find an approximate solution for the second intersection. The first intersection is discarded – it is introduced because of  $\cos \phi = \cos(-\phi)$  and corresponds to a situation with  $H > R$ .

Realizing that there is an infinite number of solutions. 0.2

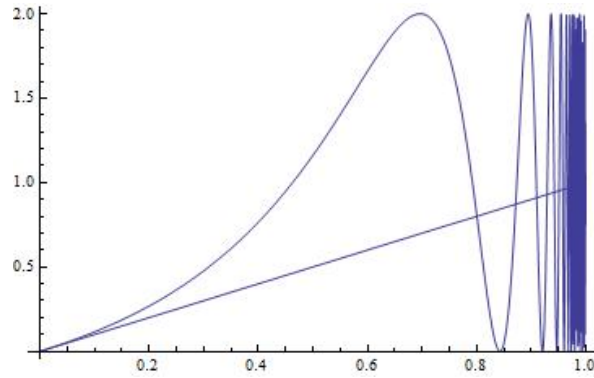


Figure 3: Plot of  $f(H/R)$  and  $H/R$

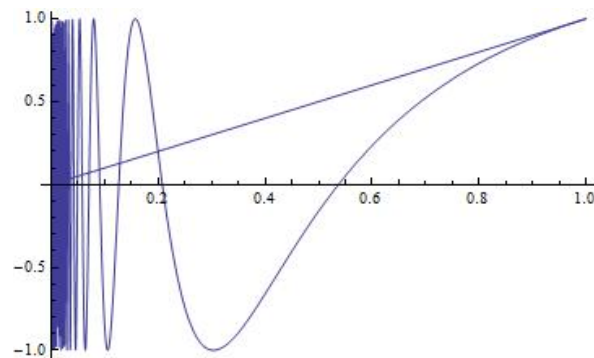


Figure 4: Plot of  $g(x)$  and  $x$

- introduce new variable  $x := 1 - H/R$ , so that the equation becomes

$$x = \cos(\sqrt{1-x^2}/x) =: g(x)$$

- $g(x)$  is then smaller than  $x$  up to the first solution. In particular it is negative in some region (see figure 4). Finding the third zero thus gives a lower bound for the solution:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 5\pi/2$$

- give lower bound

$$x = 1/\sqrt{25\pi^2/4 + 1} \Rightarrow H = R(1 - 1/\sqrt{25\pi^2/4 + 1}) \approx 0.874$$

Note: the actual result is  $H/R = 0.871\dots$

Use the same points for the numerical answer as was mentioned in solution one.

If the student plots  $f$  rather than  $g$ , find solution to  $f = 1$ : is equivalent to the solution above. *Give same number of points.*

It is also possible to use  $\cos\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sin(1/x)$ .

**0.4**

**B8 (1.7 pt)** Alice pulls the mass a distance  $d$  downwards from the equilibrium point  $x = 0$ ,  $y = 0$ , and then lets it go (see figure 4).

- Give an algebraic expression of  $x(t)$  and  $y(t)$ . You may assume that  $\omega_{ss}d$  is small.
- Sketch the trajectory  $(x(t), y(t))$ , marking all important features such as amplitude.

**Solution B8:**

[1.7]

Note: we did not specify the overall sign of the Coriolis force. Give same amount of points if using opposite convention, but it has to be consistent! Otherwise: subtract 0.1pt for each instance of inconsistency.

-0.1

Students are allowed to express everything in terms of  $\omega$ , they don't need to write  $\sqrt{k/m - \omega_{ss}^2}$  explicitly. Deduct 0.1pt however if they use  $k/m$  instead of  $\omega$ .

-0.1

Realize that  $y(t)$  is standard harmonic oscillation:

$$y(t) = A \cos \omega t + B$$

0.1

Give correct constants from initial conditions

$$y(t) = -d \cos \omega t$$

0.2

Correct expression for  $v_y(t)$ :

$$v_y(t) = -d\omega \sin \omega t$$

0.1

Coriolis force in  $x$ -direction

$$F_x(t) = 2m\omega_{ss}v_y(t) = -2m\omega_{ss}d\omega \sin \omega t$$

0.2

Realize that this implies that  $x(t)$  is also a harmonic oscillation...

0.1

... but with a constant movement term superimposed:  $vt$

0.1

getting the correct amplitude:

$$A = \frac{2\omega_{ss}d}{\omega}$$

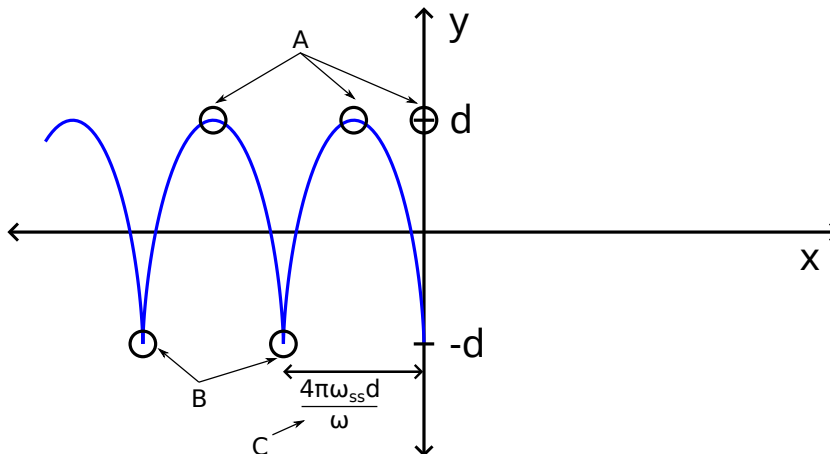
0.1

Correct answer with correct initial conditions:

$$x(t) = \frac{2\omega_{ss}d}{\omega} \sin \omega t - 2\omega_{ss}dt$$

0.2

Sketch:



Correct qualitative sketch:

periodic motion

**0.1**

overall constant movement

**0.1**

B): cusps

**0.1**

And additionally correct quantitative sketch:

A)+B): peaks and cusps are at  $y = \pm d$

**0.1**

C): cusps are at distance  $\Delta x = \frac{4\pi\omega_{ss}d}{\omega}$  from each other

**0.2**

**Problem 2 : Solution/marking scheme – Nonlinear Dynamics in Electric Circuits (10 points)**

Part A. Stationary states and instabilities (3 points)

**Solution A1:**

[0.4]

By looking at the  $I - V$  graph, we obtain

$$R_{\text{off}} = 10.0 \Omega,$$

0.1

$$R_{\text{on}} = 1.00 \Omega,$$

0.1

$$R_{\text{int}} = 2.00 \Omega,$$

0.1

$$I_0 = 6.00 A.$$

0.1

*Note: No penalty for the number of digits in this question*

**Solution A2:**

[1]

Kirchoff law for the circuit ( $U$  is the voltage of the bistable element):

$$\mathcal{E} = IR + U$$

0.1

This yields

$$I = \frac{\mathcal{E} - U}{R}$$

0.1

Hence, stationary states of the circuit are intersections of the line defined by this equation and the  $I - V$  graph of  $X$ .

0.2

For  $R = 3.00 \Omega$ , one always gets exactly one intersection.

0.2

For  $R = 1.00 \Omega$ , one gets 1, 2 or 3 intersections depending on the value of  $\mathcal{E}$ .

0.4

The following table summarizes the number of points granted for possible answers to the last subquestion with  $R = 1.00 \Omega$ :

Possible answer	1	2	3	1,3	1,2	2,3	1,2,3
Points	0	0	0.2	0.3	0	0.2	0.4

**Solution A3:**

[0.6]

The stationary state is on the intermediate branch, one can thus use the corresponding equation:

0.2

$$I_{\text{stationary}} = \frac{\mathcal{E} - R_{\text{int}}I_0}{R - R_{\text{int}}} \quad 0.1$$

$$= 3.00 \text{ A} \quad 0.1$$

$$U_{\text{stationary}} = R_{\text{int}}(I_0 - I) \quad 0.1$$

$$= 6.00 \text{ V} \quad 0.1$$

*Extra (non-physical) stationary states on the switched on and/or switched off branches lead to a penalty of 0.2 point.*

**Solution A4:**

[1]

Any correct modeling such as the following:

0.5

The Kirchoff law for the circuit reads

$$\mathcal{E} = IR + U_X + L \frac{dI}{dt} = IR + (I_0 - I)R_{\text{int}} + L \frac{dI}{dt}$$

This implies

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - I_0 R_{\text{int}} - (R - R_{\text{int}})I$$

The separation between two cases is of importance, especially because of the relative sign of  $dI/dt$ :

If  $I > I_{\text{stationary}}$ , we have  $dI/dt < 0$  and  $I$  decreases.

0.2

If  $I < I_{\text{stationary}}$ , we have  $dI/dt > 0$  and  $I$  increases.

0.2

*Note: Formulas with time derivatives are not essential, any other correct justification is accepted.*

We conclude that the stationary state is stable.

0.1

*Note: The checkbox gives 0.1 points if “stable” is checked, regardless of the previous reasoning (also if there is nothing). A wrong reasoning leading to check the “unstable” option doesn’t however give any point for the checkbox.*

Part B. Bistable non-linear elements in physics and engineering: radio transmitter (5 points)

**Solution B1:**

[1.8]

A correctly drawn cycle gives 1.2 points, distributed as follows:

- Switched on branch is part of the cycle 0.2
- Switched off branch is part of the cycle 0.2
- Jumps are vertical (constant  $U$ ) 0.2
- Jumps are positioned at  $U_h$  and  $U_{th}$  0.2
- The system moves to the left on the switched on branch 0.2

- The system moves to the right on the switched off branch

0.2

Each of the following observations individually gives up to 0.2 points, but their total cannot exceed 0.6:

- $U$  constant during jumps because the charge on the capacitor cannot change instantaneously
- The intermediate branch cannot be part of the cycle because there is a stationary state on it
- Jumps occur at corners of the IV graph because at those points the system has nowhere else to go
- The system moves to the left on the switched on branch because it approaches the stable stationary state (which is located outside the IV graph), or argument with the Kirchoff law
- The system moves to the right on the switched off branch because it approaches the stable stationary state (which is located outside the IV graph), or argument with the Kirchoff law

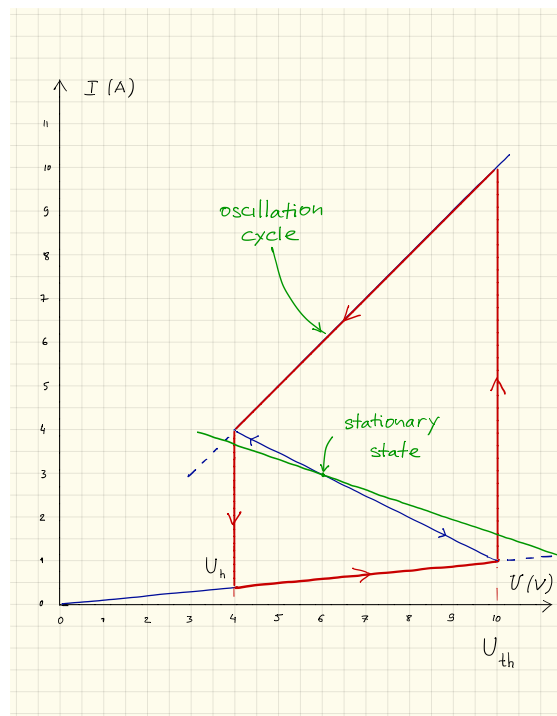
0.2

0.2

0.2

0.2

0.2



### Solution B2:

[1.9]

Since the non-linear element is oscillating between the switched on and switched off branches we can put  $U_X = R_{\text{on/off}} I_X$ . On either of the branches, the circuit behaves as a standard RC-circuit with conductance  $C$  and resistance  $R_{\text{on/off}} R / (R_{\text{on/off}} + R)$  (the resistor and the element  $X$  being connected in parallel). **Another way to express it is to**

0.5

write the Kirchhoff law for the switched on and switched off branches

$$R_{\text{on/off}}RC \frac{dI_X}{dt} = \mathcal{E} - (R_{\text{on/off}} + R)I_X$$

The time constant of the circuit is

$$\frac{R_{\text{on/off}}R}{R_{\text{on/off}} + R} C.$$

If the branch in question (switched on or switched off) extended indefinitely, after a long time the system would have landed in a stationary state with the voltage

$$U_{\text{on/off}} = \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R} \mathcal{E}.$$

Then, the time dependence of the voltage drop on the non-linear element is a sum of the constant term  $U_{\text{on/off}}$  and of the exponentially decaying term:

$$U_X(t) = \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R} \mathcal{E} + \left( U_{\text{on/off}} - \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R} \mathcal{E} \right) e^{-\frac{R_{\text{on/off}} + R}{R_{\text{on/off}}RC} t}$$

There are 0.5 points distributed as follow for  $U_X(t)$ :

- Correct exponential 0.2
- Correct constant term ( $t \rightarrow \infty$ ) 0.1
- Correct coefficient in front of the exponential 0.1
- Correct equation for  $U_X(t)$  0.1

Time spent by the system on the switched on branch during one cycle:

$$t_{\text{on}} = \frac{R_{\text{on}}R}{R_{\text{on}} + R} C \log \left( \frac{U_{\text{th}} - U_{\text{on}}}{U_{\text{h}} - U_{\text{on}}} \right) = 2.41 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$
0.4

Time spent by the system on the switched off branch during one cycle:

$$t_{\text{off}} = \frac{R_{\text{off}}R}{R_{\text{off}} + R} C \log \left( \frac{U_{\text{off}} - U_{\text{h}}}{U_{\text{off}} - U_{\text{th}}} \right) = 3.71 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$
0.4

The total period of oscillations:

$$T = t_{\text{on}} + t_{\text{off}} = 6.12 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$
0.1

*Note: Correct final answers give full points. One may earn points for intermediate steps (see above) for partial answers.*

**Solution B3:**

**[0.7]**

Neglect the energy consumed on the switched off branch. The energy consumed

on the switched on branch during the cycle is estimated by

$$E = \frac{1}{R_{\text{on}}} \left( \frac{U_h + U_{th}}{2} \right)^2 t_{\text{on}} = 1.18 \cdot 10^{-4} \text{ J.} \quad \mathbf{0.4}$$

For the power, this gives an estimate of

$$P \sim \frac{E}{T} = 19.3 \text{ W.} \quad \mathbf{0.3}$$

*Note:*

- *Formula + answer inside  $5 \text{ W} \leq P \leq 50 \text{ W}$  give full points*
- *Formula + answer outside the range above but inside  $1 \text{ W} \leq P \leq 100 \text{ W}$  give 0.5 points*
- *answer outside range but good formula gives 0.4 points*

*Also, the proposed formula is only an example, any other reasonable approximation of the integral of the upper branch should be accepted.*

#### **Solution B4:**

**[0.6]**

The wave length of the radio signal is given by  $\lambda = cT = 1.82 \cdot 10^3 \text{ m}$ .

**0.2**

The optimal length of the antenna is  $\lambda/4$  (or  $3\lambda/4, 5\lambda/4$  etc.)

**0.3**

The only choice which is below 1 km is  $s = \lambda/4 = 459 \text{ m}$ .

**0.1**

*Note: The correct answer  $s = \lambda/4 = 459 \text{ m}$  gives full points, and the mistake  $s = \lambda/2 = 918 \text{ m}$  only 0.4 pts.*

#### Part C. Bistable non-linear elements in biology: neuristor (2 points)

#### **Solution C1:**

**[1.2]**

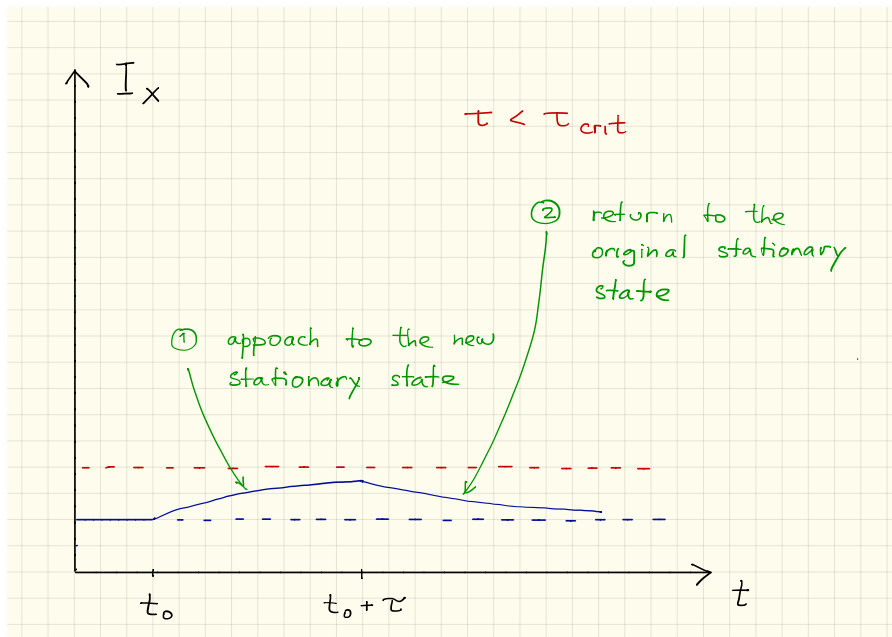
For  $\tilde{\mathcal{E}} = 12.0 \text{ V}$ , the steady state of the system is located on the switched off branch:

$$\tilde{U} = \frac{R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} \tilde{\mathcal{E}} = 9.23 \text{ V.}$$

When the voltage is increased to  $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ , the system starts moving to the right along the switched off branch (in the same way it did in task **B**).

If the voltage drops again before the system reaches the threshold voltage, it will simply return to the stationary state.

If system reaches the threshold voltage, it will jump to the switched on branch, and it will make one oscillations (since  $\tau < T$ ) before the voltage drops again and it returns to the stationary state.

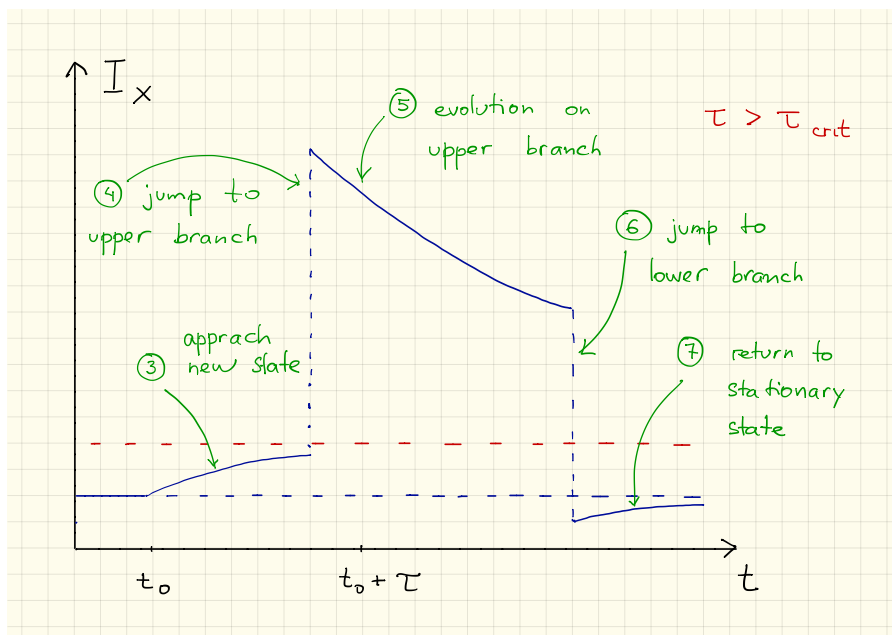


1. Approach to the new stationary state

0.2

2. Return to the old stationary state

0.2



3. Approach to the new stationary state

0.1

4. Jump to the upper branch before  $t_0 + \tau$

0.2

5. Evolution on the upper branch

0.2

6. Jump to the lower branch below the old stationary state

0.1

7. Return to the old stationary state (from below)

0.2

**Solution C2:****[0.6]**

The time needed to reach the threshold voltage is given by

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{R_{\text{off}}R}{R_{\text{off}} + R} C \log \left( \frac{U_{\text{off}} - \tilde{U}}{U_{\text{off}} - U_{\text{th}}} \right) = 9.36 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

Note: This is the same formula as for  $t_{\text{off}}$  in task **B2**, with  $U_h$  replaced by  $\tilde{U}$ .

- Correct time constant

**0.2**

- Correct choice of voltages

**0.2**

- Correct final formula

**0.1**

- Correct numerical value

**0.1**

*Note: Correct final answers give full points. One may earn points for intermediate steps (see above) for partial answers.*

**Solution C3:****[0.2]**

Since  $\tau > \tau_{\text{crit}}$ , the system will make one oscillation. We conclude that the system is a neuristor.

**0.2**

*Note: 0.2 are given only if “Yes” is checked, regardless of the development of the other tasks.*

**Problem 3 : Solution/marking scheme – Large Hadron Collider (10 points)**

**Part A. LHC Accelerator (6 points)**

**A1 (0.7 pt)** Find the exact expression for the final velocity  $v$  of the protons as a function of the accelerating voltage  $V$ , and fundamental constants.

**Solution A1:**

[0.7]

Conservation of energy:

$$m_p \cdot c^2 + V \cdot e = m_p \cdot c^2 \cdot \gamma = \frac{m_p \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

0.5

Penalties

No or incorrect total energy

-0.3

Missing rest mass

-0.2

Solve for velocity:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + V \cdot e} \right)^2}$$

0.2

without proton rest mass:

[0.5]

$$V \cdot e \simeq m_p \cdot c^2 \cdot \gamma = \frac{m_p \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

0.3

Solve for velocity:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{m_p \cdot c^2}{V \cdot e} \right)^2}$$

0.2

Classical solution:

[0.2]

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V}{m_p}}$$

0.2

**A2 (0.8 pt)** For particles with high energy and low rest mass the relative deviation  $\Delta = (c - v)/c$  of the final velocity  $v$  from the speed of light is very small. Find a suitable approximation for  $\Delta$  and calculate  $\Delta$  for electrons with an energy of 60.0 GeV.

**Solution A2:**

**[0.8]**

velocity (from previous question):

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{m_e \cdot c^2}{m_e \cdot c^2 + V \cdot e} \right)^2} \quad \text{or} \quad c \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{m_e \cdot c^2}{V \cdot e} \right)^2}$$

**0.1**

relative difference:

$$\Delta = \frac{c - v}{c} = 1 - \frac{v}{c}$$

**0.1**

$$\rightarrow \Delta \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{m_e \cdot c^2}{m_e \cdot c^2 + V \cdot e} \right)^2 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{m_e \cdot c^2}{V \cdot e} \right)^2$$

**0.4**

relative difference

$$\Delta = 3.63 \cdot 10^{-11}$$

**0.2**

---

**classical solution** gives no points

**0.0**

**A3 (1.0 pt)** Derive an expression for the uniform magnetic flux density  $B$  necessary to keep the proton beam on a circular track. The expression should only contain the energy of the protons  $E$ , the circumference  $L$ , fundamental constants and numbers. You may use suitable approximations if their effect is smaller than the precision given by the least number of significant digits. Calculate the magnetic flux density  $B$  for a proton energy of  $E = 7.00$  TeV.

**Solution A3:**

[1.0]

Balance of forces:

$$\frac{\gamma \cdot m_p \cdot v^2}{r} = \frac{m_p \cdot v^2}{r \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e \cdot v \cdot B$$

0.3

In case of a mistake, partial points can be given for intermediate steps (up to max 0.2).  
Examples:

Example: Lorentz force

0.1

Example:  $\frac{\gamma \cdot m_p \cdot v^2}{r}$

0.1

Energy:

$$E = (\gamma - 1) \cdot m_p \cdot c^2 \simeq \gamma \cdot m_p \cdot c^2 \rightarrow \gamma = \frac{E}{m_p c^2}$$

Therefore:

$$\frac{E \cdot v}{c^2 \cdot r} = e \cdot B$$

0.3

With

$$v \simeq c \text{ and } r = \frac{L}{2\pi}$$

follows:

$$\rightarrow B = \frac{2\pi \cdot E}{e \cdot c \cdot L}$$

0.2

Solution:

$$B = 5.50\text{T}$$

0.2

**Penalty** for  $< 2$  or  $> 4$  significant digits

-0.1

Calculation without approximations is also correct but does not give more points

$$B = \frac{2\pi \cdot m_p \cdot c}{e \cdot L} \cdot \sqrt{\left(\frac{E}{m_p \cdot c^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2}$$

0.5

Penalty for each algebraic mistake

-0.1

**Classical calculation** gives completely wrong result and maximum 0.3 pt

[0.3]

$$\frac{m_p \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$$

0.1

$$B = \frac{2\pi}{L \cdot e} \sqrt{2 \cdot m_p \cdot E}$$

0.1

$$B = 0.0901\text{T}$$

0.1

**Penalty** for < 2 or > 4 significant digits

-0.1

**A4 (1.0 pt)** An accelerated charged particle radiates energy in the form of electromagnetic waves. The radiated power  $P_{rad}$  of a charged particle that circulates with a constant angular velocity depends only on its acceleration  $a$ , its charge  $q$ , the speed of light  $c$  and the permittivity of free space  $\epsilon_0$ . Use a dimensional analysis to find an expression for the radiated power  $P_{rad}$ .

**Solution A4:**

[1.0]

Ansatz:

$$P_{rad} = a^\alpha \cdot q^\beta \cdot c^\gamma \cdot \epsilon_0^\delta$$

0.2

Dimensions:  $[a]=\text{ms}^{-2}$ ,  $[q]=\text{C}=\text{As}$ ,  $[c]=\text{ms}^{-1}$ ,  $[\epsilon_0]=\text{As}(\text{Vm})^{-1}=\text{A}^2\text{s}^2(\text{Nm}^2)^{-1}=\text{A}^2\text{s}^4(\text{kgm}^3)^{-1}$

All dimensions correct

0.3

Three dimensions correct

0.2

Two dimensions correct

0.1

if dimensions: N and Coulomb  $[\epsilon_0]=\text{C}^2(\text{Nm}^2)^{-1}$

$$\frac{\text{m}^\alpha}{\text{s}^{2\alpha}} \cdot \text{C}^\beta \cdot \frac{\text{m}^\gamma}{\text{s}^\gamma} \cdot \frac{\text{C}^{2\delta}}{\text{N}^\delta \cdot \text{m}^{2\delta}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

0.1

From this follows:

$$\text{N} : \rightarrow \delta = -1, \quad \text{C} : \rightarrow \beta + 2 \cdot \delta = 0, \quad \text{m} : \rightarrow \alpha + \gamma - 2\delta = 1, \quad \text{s} : \rightarrow 2 \cdot \alpha + \gamma = 1$$

0.2

Two equations correct

0.1

And therefore:

$$\rightarrow \alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -3, \delta = -1$$

0.1

if dimensions: N and As  $[\epsilon_0]=\text{A}^2\text{s}^2(\text{Nm}^2)^{-1}$

$$\frac{\text{m}^\alpha}{\text{s}^{2\alpha}} \cdot \text{A}^\beta \cdot \text{s}^\beta \cdot \frac{\text{m}^\gamma}{\text{s}^\gamma} \cdot \frac{\text{A}^{2\delta} \cdot \text{s}^{2\delta}}{\text{N}^\delta \cdot \text{m}^{2\delta}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

0.1

From this follows:

$$\text{N} : \rightarrow \delta = -1, \quad \text{A} : \rightarrow \beta + 2 \cdot \delta = 0, \quad \text{m} : \rightarrow \alpha + \gamma - 2\delta = 1, \quad \text{s} : \rightarrow -2 \cdot \alpha + \beta - \gamma + 2\delta = -1$$

0.2

Two equations correct

0.1

And therefore:

$$\rightarrow \alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -3, \delta = -1$$

0.1

if dimensions: kg and As  $[\epsilon_0]=\text{A}^2\text{s}^4(\text{kg} \cdot \text{m}^3)^{-1}$

$$\frac{\text{m}^\alpha}{\text{s}^{2\alpha}} \cdot \text{A}^\beta \cdot \text{s}^\beta \cdot \frac{\text{m}^\gamma}{\text{s}^\gamma} \cdot \frac{\text{A}^{2\delta} \cdot \text{s}^{4\delta}}{\text{kg}^\delta \cdot \text{m}^{3\delta}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

0.1

From this follows:

$$\text{kg} \rightarrow \delta = -1, \quad \text{A} \rightarrow \beta + 2 \cdot \delta = 0, \quad \text{m} \rightarrow \alpha + \gamma - 3\delta = 2, \quad \text{s} \rightarrow -2 \cdot \alpha + \beta - \gamma + 4\delta = -3$$

**0.2**

Two equations correct

**0.1**

And therefore:

$$\rightarrow \alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -3, \delta = -1$$

**0.1**

---

Radiated Power:

$$P_{rad} \propto \frac{a^2 \cdot q^2}{c^3 \cdot \epsilon_0}$$

**0.1**

**Other solutions with other units are possible and are accepted**

**No solution but realise that unit of charge must vanish  $\beta = 2\delta$**

**0.2**

**A5 (1.0 pt)** Calculate the total radiated power  $P_{tot}$  of the LHC for a proton energy of  $E = 7.00$  TeV (Note table 1). You may use appropriate approximations.

**Solution A5:**

[1.0]

Radiated Power:

$$P_{rad} = \frac{\gamma^4 \cdot a^2 \cdot e^2}{6\pi \cdot c^3 \cdot \epsilon_0}$$

0.1

Energy:

$$E = (\gamma - 1)m_p \cdot c^2 \quad \text{or equally valid} \quad E \simeq \gamma \cdot m_p \cdot c^2$$

0.2

Acceleration:

$$a \simeq \frac{c^2}{r} \quad \text{with} \quad r = \frac{L}{2\pi}$$

0.2

Therefore:

$$P_{rad} = \left(\frac{E}{m_p c^2} + 1\right)^4 \cdot \frac{e^2 \cdot c}{6\pi \epsilon_0 \cdot r^2} \quad \text{or} \quad \left(\frac{E}{m_p c^2}\right)^4 \cdot \frac{e^2 \cdot c}{6\pi \epsilon_0 \cdot r^2}$$

0.3

$$\text{(not required } P_{rad} = 7.94 \cdot 10^{-12} \text{W)}$$

Total radiated power:

$$P_{tot} = 2 \cdot 2808 \cdot 1.15 \cdot 10^{11} \cdot P_{rad} = 5.13 \text{kW}$$

0.2

**penalty** for missing factor 2 (for the two beams): **-0.1**

-0.1

**penalty** for wrong numbers 2808 and/or  $1.15 \cdot 10^{11}$  (numbers come from table 1): **-0.1**

-0.1

**A6 (1.5 pt)** Determine the time  $T$  that the protons need to pass through this field.

**Solution A6:**

[1.5]

2nd Newton's law

$$F = \frac{dp}{dt} \text{ leads to}$$

0.2

$$\frac{V \cdot e}{d} = \frac{p_f - p_i}{T} \text{ with } p_i = 0$$

0.3

Conservation of energy:

$$E_{tot} = m \cdot c^2 + e \cdot V$$

0.2

Since

$$E_{tot}^2 = (m \cdot c^2)^2 + (p_f \cdot c)^2$$

0.2

$$\rightarrow p_f = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(m \cdot c^2 + e \cdot V)^2 - (m \cdot c^2)^2} = \sqrt{2e \cdot m \cdot V + \left(\frac{e \cdot V}{c}\right)^2}$$

0.2

$$\rightarrow T = \frac{d \cdot p_f}{V \cdot e} = \frac{d}{V \cdot e} \sqrt{2e \cdot m_p \cdot V + \left(\frac{e \cdot V}{c}\right)^2}$$

0.3

$$T = 218\text{ns}$$

0.1

Alternative solution

[1.5]

2nd Newton's law

$$F = \frac{dp}{dt} \text{ leads to}$$

0.2

$$\frac{V \cdot e}{d} = \frac{p_f - p_i}{T} \text{ with } p_i = 0$$

0.3

velocity from A1 or from conservation of energy

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + V \cdot e}\right)^2}$$

0.2

and hence for  $\gamma$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{e \cdot V}{m_p \cdot c^2}$$

0.2

$$\rightarrow p_f = \gamma \cdot m_p \cdot v = \left(1 + \frac{e \cdot V}{m_p \cdot c^2}\right) \cdot m_p \cdot c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + V \cdot e}\right)^2}$$

0.2

$$\rightarrow T = \frac{d \cdot p_f}{V \cdot e} = \frac{d \cdot m_p \cdot c}{V \cdot e} \cdot \sqrt{\left(\frac{m_p \cdot c^2 + e \cdot V}{m_p \cdot c^2}\right)^2 - 1} = \frac{d}{V \cdot e} \sqrt{2e \cdot m_p \cdot V + \left(\frac{e \cdot V}{c}\right)^2}$$

0.3

$$T = 218\text{ns}$$

0.1

**Alternative solution: integrate time**

[1.5]

Energy increases linearly with distance x

$$E(x) = \frac{e \cdot V \cdot x}{d} \quad 0.2$$

$$t = \int dt = \int_0^d \frac{dx}{v(x)} \quad 0.2$$

$$v(x) = c \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d}} \right)^2} = c \cdot \frac{\sqrt{(m_p \cdot c^2 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d})^2 - (m_p \cdot c^2)^2}}{m_p \cdot c^2 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d}} \quad 0.2$$

$$= c \cdot \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d \cdot m_p \cdot c^2}\right)^2 - 1}}{1 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d \cdot m_p \cdot c^2}} \quad 0.2$$

Substitution :  $\xi = \frac{e \cdot V \cdot x}{d \cdot m_p \cdot c^2} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{e \cdot V}{d \cdot m_p \cdot c^2}$  0.2

$$\rightarrow t = \frac{1}{c} \int_0^b \frac{1 + \xi}{\sqrt{(1 + \xi)^2 - 1}} \frac{d \cdot m_p \cdot c^2}{e \cdot V} d\xi \quad b = \frac{e \cdot V}{m_p \cdot c^2} \quad 0.2$$

$$1 + \xi := \cosh(s) \quad \frac{d\xi}{ds} = \sinh(s) \quad 0.1$$

$$t = \frac{m_p \cdot c \cdot d}{e \cdot V} \int \frac{\cosh(s) \cdot \sinh(s) ds}{\sqrt{\cosh^2(s) - 1}} = \frac{m_p \cdot c \cdot d}{e \cdot V} [\sinh(s)]_{b_1}^{b_2} \quad 0.2$$

with  $b_1 = \cosh^{-1}(1), \quad b_2 = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{e \cdot V}{m_p \cdot c^2}\right)$  0.1

$$T = 218\text{ns} \quad 0.1$$

Alternative: differential equation

[1.5]

$$F = \frac{dp}{dt} \quad 0.2$$

$$\rightarrow \frac{V \cdot e}{d} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m \cdot a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + m \cdot a \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \gamma^3 \cdot m \cdot a \quad 0.4$$

$$a = \ddot{s} = \frac{V \cdot e}{d \cdot m} \left(1 - \frac{\dot{s}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad 0.3$$

Ansatz :  $s(t) = \sqrt{i^2 \cdot t^2 + k} - l$  with boundary conditions  $s(0) = 0, v(0) = 0$  0.1

$$\rightarrow s(t) = \frac{c}{V \cdot e} \left( \sqrt{e^2 \cdot V^2 \cdot t^2 + c^2 \cdot m^2 \cdot d^2} - c \cdot m \cdot d \right) \quad 0.2$$

$$s = d \rightarrow T = \frac{d}{V \cdot e} \sqrt{\left(\frac{V \cdot e}{c}\right)^2 + 2V \cdot e \cdot m} \quad 0.2$$

$$T = 218\text{ns} \quad 0.1$$

classical solution:

[0.4]

$$F = \frac{V \cdot e}{d} \rightarrow \text{acceleration } a = \frac{F}{m_p} = \frac{V \cdot e}{m_p \cdot d}$$

0.1

$$d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot T^2 \rightarrow T = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

0.1

And hence for the time

$$T = d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_p}{V \cdot e}}$$

0.1

$$T = 194\text{ns}$$

0.1

Part B. Particle identification (4 points)

**B1 (0.8 pt)** Express the particle rest mass  $m$  in terms of the momentum  $p$ , the flight length  $l$  and the flight time  $t$  assuming that the particles with elementary charge  $e$  travel with velocity close to  $c$  on straight tracks in the ToF detector and that it travels perpendicular to the two detection planes (see Figure 2).

**Solution B1:**

[0.8]

with velocity

$$v = \frac{l}{t}$$

0.1

relativistic momentum

$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

0.2

gets

$$p = \frac{m \cdot l}{t \cdot \sqrt{1 - \frac{l^2}{t^2 \cdot c^2}}}$$

0.2

→ mass

$$m = \frac{p \cdot t}{l} \cdot \sqrt{1 - \frac{l^2}{t^2 \cdot c^2}} = \frac{p}{l \cdot c} \cdot \sqrt{t^2 \cdot c^2 - l^2}$$

0.3

**Alternative**

[0.8]

with flight distance:  $l$ , flight time  $t$  gets:

$$t = \frac{l}{(c \cdot \beta)}$$

0.1

relativistic momentum

$$p = \frac{m \cdot \beta \cdot c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

therefore the velocity:

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{m^2 \cdot c^2 + p^2}}$$

0.2

insert into the expression for  $t$ :

$$t = l \frac{\sqrt{m^2 \cdot c^2 + p^2}}{c \cdot p}$$

0.2

→ mass:

$$m = \sqrt{\left(\frac{p \cdot t}{l}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2} = \frac{p}{l \cdot c} \sqrt{(t \cdot c)^2 - l^2}$$

0.3

**non-relativistic solution:**

[0.0]

flight time:  $t = l/v$  velocity:

$$v = \frac{p}{m} \rightarrow t = \frac{l \cdot m}{p} \quad \text{and} \quad m = \frac{p \cdot t}{l}$$

this solution gives no points

0.0

**B2 (0.7 pt)** Calculate the minimal length of a ToF detector that allows to safely distinguish a charged kaon from a charged pion given both their momenta are measured to be 1.00 GeV/c. For a good separation it is required that the difference in the time-of-flight is larger than three times the time resolution of the detector. The typical resolution of a ToF detector is 150 ps (1 ps = 10<sup>-12</sup> s).

**Solution B2:**

[0.7]

Flight time difference between kaon and pion

$$\Delta t = 450\text{ps} = 450 \cdot 10^{-12}\text{s}$$

0.1

Flight time difference between kaon and pion

$$\Delta t = \frac{l}{cp}(\sqrt{m_\pi^2 \cdot c^2 + p^2} - \sqrt{m_K^2 \cdot c^2 + p^2}) = 450\text{ps} = 450 \cdot 10^{-12}\text{s}$$

0.2

$$\rightarrow l = \frac{\Delta t \cdot p}{\sqrt{m_K^2 + p^2/c^2} - \sqrt{m_\pi^2 + p^2/c^2}}$$

0.2

$$\sqrt{m_K^2 + p^2/c^2} = 1.115 \text{ GeV}/c^2 \text{ and } \sqrt{m_\pi^2 + p^2/c^2} = 1.010 \text{ GeV}/c^2$$

$$l = 450 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1}{1.115 - 1.010} \text{ s GeV}c^2/(\text{GeV}c)$$

0.1

$$l = 4285.710^{-12}\text{s} \cdot c = 4285.7 \cdot 10^{-12} \cdot 2.998 \cdot 10^8\text{m} = 1.28\text{m}$$

0.1

**Penalty** for < 2 or > 4 significant digits

-0.1

---

**Non-relativistic solution:**

[0.3]

Flight time difference between kaon and pion

$$\Delta t = \frac{l}{p}(m_K - m_\pi) = 450\text{ps} = 450 \cdot 10^{-12}\text{s}$$

0.1

length:

$$l = \frac{\Delta t p}{m_K - m_\pi} = \frac{450 \cdot 10^{-12}\text{s} \cdot 1\text{GeV}/c}{(0.498 - 0.135)\text{GeV}/c^2}$$

0.1

$$l = 450 \cdot 10^{-12}/0.363 \cdot c\text{s} = 450 \cdot 10^{-12}/0.363 \cdot 2.998 \cdot 10^8\text{m}$$

$$l = 3716 \cdot 10^{-4}\text{m} = 0.372\text{m}$$

0.1

**Penalty** for < 2 or > 4 significant digits

-0.1

**B3 (1.7 pt)** Express the particle mass as a function of the magnetic flux density  $B$ , the radius  $R$  of the ToF tube, fundamental constants and the measured quantities: radius  $r$  of the track and time-of-flight  $t$ .

**Solution B3:**

[1.7]

Particle is travelling perpendicular to the beam line hence the track length is given by the length of the arc

Lorentz force  $\rightarrow$  transverse momentum, since there is no longitudinal momentum, the momentum is the same as the transverse momentum

Use formula from B1 to calculate the mass

track length: length of arc

$$l = 2 \cdot r \cdot \text{asin} \frac{R}{2 \cdot r}$$

0.5

penalty for just taking a straight track ( $l = R$ )

-0.4

partial points for intermediate steps, maximum 0.4

Lorentz force

$$\frac{\gamma \cdot m \cdot v_t^2}{r} = e \cdot v_t \cdot B \rightarrow p_T = r \cdot e \cdot B$$

0.4

partial points for intermediate steps, maximum 0.3

longitudinal momentum=0  $\rightarrow p = p_T$

0.1

momentum

$$p = e \cdot r \cdot B$$

0.1

$$m = \sqrt{\left(\frac{p \cdot t}{l}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2} = e \cdot r \cdot B \cdot \sqrt{\left(\frac{t}{2r \cdot \text{asin} \frac{R}{2r}}\right)^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2}$$

0.6

partial points for intermediate steps, maximum 0.5

**Non-relativistic:** track length: length of arc

[0.9]

$$l = 2 \cdot r \cdot \text{asin} \frac{R}{2 \cdot r}$$

0.5

penalty for just taking a straight track ( $l = R$ )

-0.4

partial points for intermediate steps, maximum 0.4

$$m = \frac{p \cdot t}{l} = \frac{e \cdot r \cdot B \cdot t}{2r \cdot \text{asin} \frac{R}{2r}} = \frac{e \cdot B \cdot t}{2 \cdot \text{asin} \frac{R}{2r}}$$

0.4

partial points for intermediate steps, maximum 0.3

**B4 (0.8 pt)** Identify the four particles by calculating their mass.

Particle	Radius r [m]	Time of flight [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.32	25

**Solution B4:**

[0.8]

Particle	arc [m]	p		pt/l		pt/l		Mass	
		$[\frac{MeV}{c}]$	$[\frac{mkg}{s}]$ $10^{-19}$	$[\frac{MeVs}{cm}]$ $10^{-6}$	$[\frac{MeV}{c^2}]$	[kg] $10^{-27}$	$[\frac{MeV}{c^2}]$	[kg] $10^{-27}$	
A	3.786	764.47	4.0855	4.038	1210.6	2.158	938.65	1.673	
B	4.002	440.69	2.3552	1.542	462.2	0.824	139.32	0.248	
C	3.760	908.37	4.8546	4.349	1303.7	2.324	935.10	1.667	
D	4.283	347.76	1.8585	2.030	608.6	1.085	499.44	0.890	

**Particles A and C are protons, B is a Pion and D a Kaon**

correct mass and identification: per particle

0.2

**penalty** for correct mass but no or wrong identification for 1 or 2 particles

-0.1

**penalty** for correct mass but no or wrong identification for 3 or 4 particles

-0.2

wrong mass, correct momentum: per particle

0.1

wrong momentum, correct arc for 3 or 4 particles

0.2

wrong momentum, correct arc for 1 or 2 particles

0.1

---

**non relativistic solution  $m = pt/l$  Particle identification is not possible**

[0.4]

Particle	arc [m]	p		$m = p \cdot t/l$		$m = p \cdot t/l$	
		$[\frac{MeV}{c}]$	$[\frac{mkg}{s}]$ $10^{-19}$	$[\frac{MeVs}{cm}]$ $10^{-6}$	$[\frac{MeV}{c^2}]$	[kg] $10^{-27}$	
A	3.786	764.47	4.0855	4.038	1210.6	2.158	
B	4.010	440.69	2.3552	1.542	462.2	0.824	
C	3.760	908.37	4.8546	4.349	1303.7	2.324	
D	4.283	347.76	1.8585	2.030	608.6	1.085	

correct mass or correct momentum: per particle

0.1

wrong momentum, correct arc for 3 or 4 particles

0.2

wrong momentum, correct arc for 1 or 2 particles

0.1