

- Израда теориских задатака траје 5 часова. Постоје 3 задатка који укупно вреде 30 бодова. Уочите да број бодова по задатку није исти. Постоји само један ЛИСТ СА БРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА за сва три задатка.
- Не смете отворати браон коверту са задацима пре него што звучни сигнал означи почетак такмичења (звиздук).
- За сваки задатак постоји одговарајући Лист за одговоре (погледајте број и боју у заглављу). Напишите своја решења у за то предвиђена поља у одговарајућем листу за одговоре.
- За детаљне прорачуне користите званичне IPhO папире за писање (writing paper) или IPhO папире за графике (graph paper). **ПОПУНИТЕ СВА ПОЉА У ЗАГЛАВЉУ и ПИШИТЕ САМО НА ПРЕДЊОЈ СТРАНИ ПАПИРА** (задња страна неће бити скенирана). Користите што је могуће мање текста: покушајте да објасните своје речење користећи једначине, бројеве, симболе и дијаграме. Ако сте на неком листу написали нешто што не желите да буде прегледано, прецртајте то.
- Није дозвољено да напуштате своје радно место без дозволе. Ако вам је потребна било каква врста помоћи (калкулатор који не ради, потребно вам је више папира, треба да идете у тоалет итд.) подигните руку и држите је подигнуту док водич не дође.
- Крај израде задатака ће бити назначен звучним сигналом (звиздуком) и тада морате одмах да престанете са писањем. Ако завршите са израдом задатака пре звучног сигнала, подигните руку.
- Сложите своје папире следећим редом, **ТАКО ДА ИМ ПРЕДЊА СТРАНА БУДЕ ОКРЕНУТА НА ГОРЕ**, и ставите их у своју браон коверту.
 1. Лист за одговоре Т1 иза којег следе детљи израчунавања за Т1
 2. Лист за одговоре Т2 иза којег следе детљи израчунавања за Т2
 3. Лист за одговоре Т3 иза којег следе детљи израчунавања за Т3
- Није дозвољено да изнесете иједан лист папира ван просторије

Лист са бројним вредностима: Табела са константама и потребним физичким величинама

Брзина светлости у вакууму	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Планкова константа подељена са 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Гравитациона константа	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Гравитационо убрзање	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Елементарно наелектрисање	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Диелектрична пропустљивост вакуума	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Маса електрона	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Авогадров број	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Болцманова константа	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Камени метеорит, специфична топлота	$c_{sm} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Камени метеорит, топлотна проводност	$k_{sm} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Камени метеорит, густина	$\rho_{sm} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Камени метеорит, температура топљења	$T_{sm} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Камени метеорит, латентна топлота топљења	$L_{sm} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Сребро, моларна маса	$M_{Ag} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Сребро, густина	$\rho_{Ag} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Сребро, специфична топлота	$c_{Ag} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Вода, моларна маса	$M_{wa} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Вода, густина	$\rho_{wa} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Вода, специфична топлота	$c_{wa} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Вода, латентан топлота испаравања	$L_{wa} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Вода, температура кључања	$T_{100} = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K}$
Лед, густина глечера	$\rho_{ice} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Водена пара, специфична топлота	$c_{st} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Земља, маса	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Земља, полупречник	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Сунце, маса	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Сунце, полупречник	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Средње растојање Сунце-Земља	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Увод

Метеор је мали део (обично мањи од 1 m) комете или астероида. Метеор који удари у тло се назива метеорит.

У ноћи, 17. јануара 2009. много људи у близини Балтичког мора је видело светлећи траг или ужарену лопту насталу од метеора који је падао кроз атмосферу Земље. Камера за надзор у Шведској је забележила овај догађај, видите слику 1.1(a). На основу ових слика и изјава сведока било је могуће сузити подручје удара и шест недеља касније метеорит масе 0,025 kg је пронађен у близини места Марибо (Maribo) у јужној Данској. Мерења извршена на метеориту, који се сада зове Марибо, и његовој орбити на небу су показала интересантне резултате. Његова брзина приликом уласка у атмосферу је била врло велика. Старост од $4,567 \times 10^9$ година показује да је метеор оформљен убрзо након настанка Сунчевог система. Могуће је да је метеорит Марибо део комете Енке (Encke).

Брзина метеора Марибо

Ужарена лопта се кретала западно, заклапајући угао од 285° са правцем југ север, према месту где је метеорит касније био пронађен, као што је скицирано на Слици 1.1. Метеорит је пронађен на растојању 195 km од камере за надзор у правцу који заклапа угао од 230° са правцем југ север.

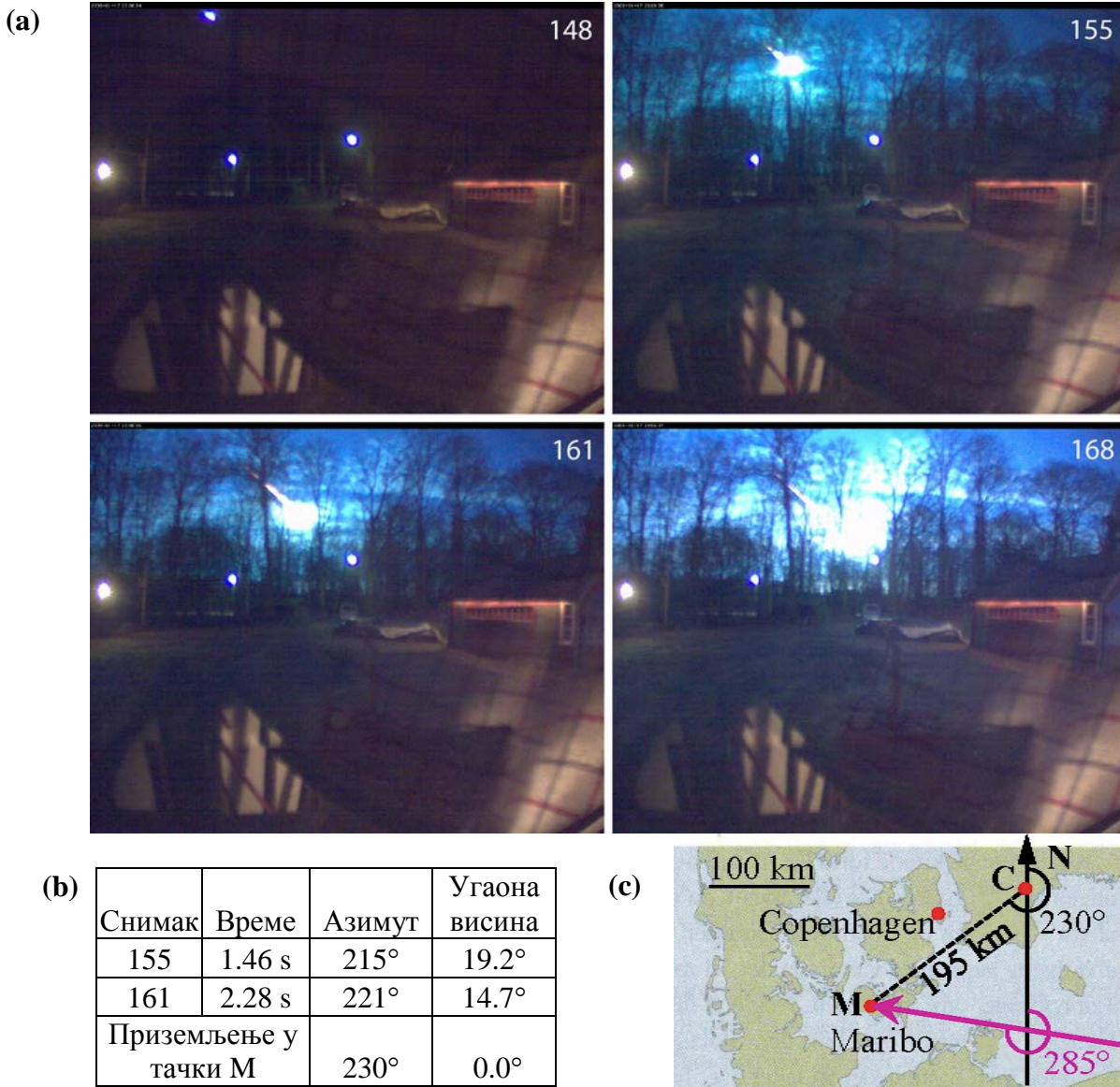
1.1	Искористите дате податке и податке са Слике 1.1 да израчунате средњу брзину метеора Марибо у временском интервалу између снимака 155 и 161. Закривљеност Земље и гравитациона сила која делује на метеор се могу занемарити.	1.3
-----	--	-----

Кретање кроз атмосферу и топљење?

Сила отпора ваздуха која делује на метеор приликом кретања кроз горње слојеве атмосфере зависи на сложен начин од облика и брзине метеора, као и од температуре и густине атмосфере. Сила отпора ваздуха F у горњим слојевима атмосфере се може апроксимирати изразом $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$, где су k константа, ρ_{atm} густина ваздуха, A површина попречног пресека метеора у равни нормалној на правац кретања и v брзина.

Направљене су следеће претпоставке да би се поједноставила анализа: приликом уласка у атмосферу објекат је био сферног облика масе $m_M = 30$ kg, полупречника $R_M = 0,13$ m, температуре $T_0 = 200$ K и брзине $v_M = 2,91 \times 10^4$ m/s. Густина атмосфере је константна и претпоставља се да је једнака њеној вредности на 40 km изнад површине Земље $\rho_{\text{atm}} = 4,1 \times 10^{-3}$ kg/m³, док је $k = 0,60$.

1.2a	Процените колико је времена потребно да се након уласка у атмосферу брзина метеора смањи за 10 %, од v_M до $0,90 v_M$. Можете занемарити утицај гравитационе силе на метеор и претпоставити да се маса и облик не мењају.	0.7
1.2b	Израчунајте колико пута је кинетичка енергија E_{kin} метеора који улази у атмосферу већа од енергије E_{melt} неопходне да би се он у потпуности истопио (погледајте лист са бројним вредностима).	0.3



Слика 1.1 (а) Азимут је угао у хоризонталној равни који неки правац заклапа са правцем југ север гледано у смеру казаљке на сату, а угаона висина је угао под којим се неко тело види у односу на хоризонт. Серија снимака забележених камером за надзор у Шведској који показују кретање метеора Марибо као ужарене лопте на свом путу кроз атмосферу. **(b)** Подаци два снимка који показују време, правац (азимут) у степенима и висину изнад хоризонта (угаона висина) у степенима. **(c)** Скица правца Марибове путање (роза стрелица) у односу на правац југ север (N) и места приземљења (M) у Данској виђено камером (C).

Загревање метеора Марибо приликом његовог проласка кроз атмосферу

Када је камени метеор Марибо ушао у атмосферу надзвучном брзином изгледао је као ужарена лопта јер је околни ваздух светлео. Без обзира на то, само спољашњи део метеора је био загрејан. Претпоставите да је Марибо хомогена сфера густине ρ_{sm} , специфичне топлоте c_{sm} и топлотне проводности k_{sm} (погледати лист са бројним вредностима). Осим тога, у тренутку уласка у атмосферу његова температура је била $T_0 = 200$ K. За време проласка кроз

атмосферу температура на површини метеора је била константна $T_s = 1000$ K због отпора ваздуха. Услед овога се унутрашњост метеора постепено загревала.

Након што је падао кроз атмосферу током времена t , спољашњи слој метеора дебљине x се загрејао до температуре која је значајно виша од T_0 . Ова дебљина се може проценити помоћу димензионе анализе као једноставан производ степена термодинамичких параметара:

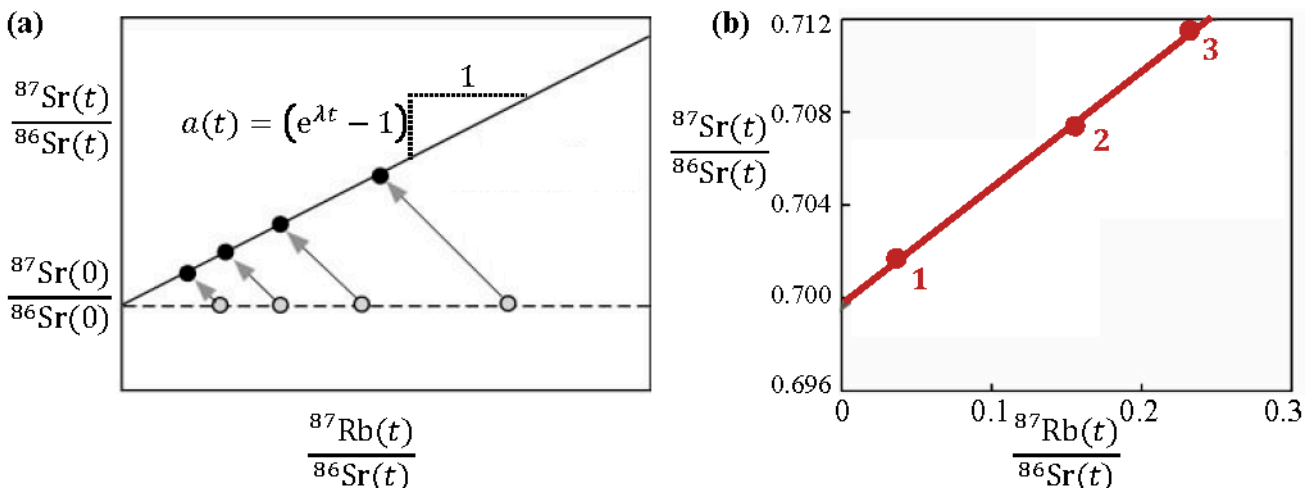
$$x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$$

1.3a	На основу димензионе анализе (јединица) одредити вредности четири експонента α, β, γ и δ .	0.6
1.3b	Одредити дебљину x након времена падања $t = 5$ s и одредити однос x/R_M .	0.4

Старост метеорита

Хемијске особине радиоактивних елемената могу бити различите тако да ће за време кристализације у метеориту једни минерали имати висок садржај одређених радиоактивних елемената, а други низак. Ова разлика се може искористити за одређивање старости метеорита.

Као посебан пример, размотрићемо изотоп ^{87}Rb (редни број 37 у периодном систему елемената), који се распада у стабилни изотоп ^{87}Sr (редни број 38 у периодном систему елемената) са временом полураспада $T_{1/2} = 4,9 \times 10^{10}$ година, при чему је изотоп ^{86}Sr стабилан. У тренутку кристализације однос $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ је био исти за све минерале, док је однос $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ био различит. Како време пролази, количина ^{87}Rb се смањује услед распада и услед тога се количина ^{87}Sr увећава. Као резултат, однос $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ је другачији данас него што је био у време кристализације. На Слици 1.2 (а), тачке на хоризонталној линији одговарају односу $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ у различитим минералима у тренутку кристализације.



Слика 1.2 (а) Однос $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ у различитим минералима у тренутку $t = 0$ кристализације (празни кружићи) и у садашњем тренутку (пуни кружићи). **(б)** Изохрона линија за три различита узорка минерала узета из метеорита у садашњем тренутку.

1.4a	Написати шему распада $^{87}_{37}\text{Rb}$ у $^{87}_{38}\text{Sr}$	0.3
------	---	-----

1.4b	Показати да однос $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ у садашњем тренутку нацртан у зависности од односа $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ у садашњем тренутку за различите узорке минерала из истог метеорита образује праву линију, такозвану изохрону линију, нагиба $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Овде је t време протекло од формирања минерала, а λ је константа распада обрнуто сразмерна времену полуживота $T_{1/2}$.	0.7
1.4c	Одредити старост τ_M метеорита користећи изохрону линију са Сlike 1.2(b).	0.4

Комета Енке (Енке), од које Марибо можда потиче

У орбити комете Енке око Сунца, најмање и највеће растојање између комете и Сунца су $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10} \text{ m}$ и $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11} \text{ m}$, редом.

1.5	Израчунати период t_{Encke} ротације комете Енке око Сунца.	0.6
-----	--	-----

Последице удара астероида на Земљу

Пре 65 милиона година Земљу је ударио велики астероид густине $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, полупречника $R_{\text{ast}} = 5,0 \text{ km}$ и коначне брзине $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$. Овај удар је изазвао истребљење већине живих бића на Земљи и настанак огромног Чиксулуб (Chicxulub) кратера. Претпоставите да се идентичан астероид потпуно нееластично судари са Земљом данас и узмите да је момент инерције Земље 0,83 од момента инерције хомогене лопте исте масе и полупречника. Момент инерције хомогене лопте масе M и полупречника R је $\frac{2}{5}MR^2$. Занемарити било какве промене у орбити земље.

1.6a	Нека је астероид ударио у северни пол. Наћи највећу промену угла за који се променио правац Земљине осе након удара.	0.7
1.6b	Нека је астероид ударио у екватор у правцу полупречника Земље. Наћи промену $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ времена трајања периода обртања Земље око своје осе након удара.	0.7
1.6c	Нека је астероид ударио у Земљу у правцу тангенте на екватор. Наћи промену $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ времена трајања периода обртања Земље око своје осе након удара.	0.7

Највећа брзина удара

Посматрајмо небеско тело, везано гравитационом силом у соларном систему, које удара у површину Земље брзином v_{imp} . У почетку утицај гравитационог поља Земље на тело се може занемарити. Није потребно урачунавати силу отпора ваздуха, утицај осталих небеских тела и ротацију Земље.

1.7	Израчунати v_{imp}^{\max} , највећу могућу вредност v_{imp} .	1.6
-----	---	-----

Лист за
одговоре

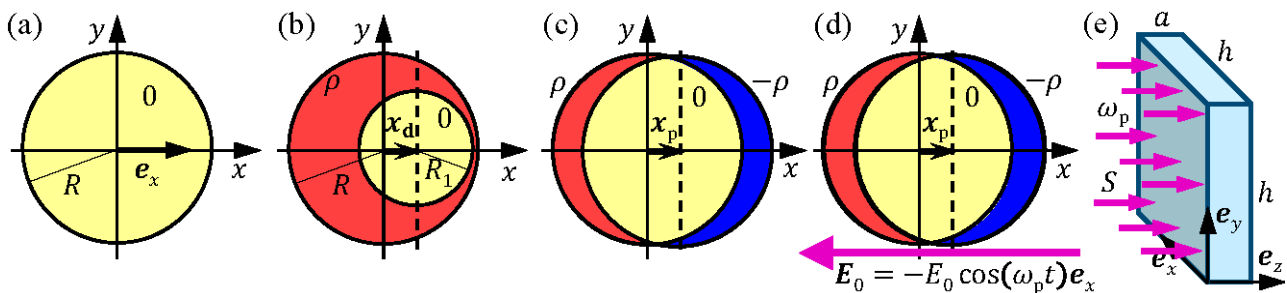
Код земље (2 слова)

Студент број (1-5)

1.1	Средња брзина $v =$	1.3
1.2a	Време $t_{10\%}$ за које се брзина смањи за 10 %: $t_{10\%} =$	0.7
1.2b	$E_{\text{kin}}/E_{\text{melt}} =$	0.3
1.3a	Простирање топлоте: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) =$	0.6
1.3b	$x(5 \text{ s}) =$ $x/R_M =$	0.4
1.4a	Rb-Sr шема распада:	0.3
1.4b	Доказ да је нагиб $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$:	0.7
1.4c	Старост метеорита, $\tau_M =$	0.4
1.5	$t_{\text{Encke}} =$	0.6
1.6a	$\max \Delta\theta =$	0.7
1.6b	$\Delta\tau_{\text{vrt}} =$	0.7
1.6c	$\Delta\tau_{\text{tan}} =$	0.7
1.7	Највећа брзина удара $v_{\text{imp}}^{\text{max}} =$	1.6
	Укупно	9.0

Увод

У овом задатку ћемо разматрати ефикасан процес производње водене паре који је и експериментално реализован. Водени раствор сферичних честица сребра нанометарских димензија (наночестице), којих има око 10^{13} по литри, се осветљава усмереним снопом светлости. Наночестице апсорбују део светлости, тиме се греју и ствара се водена пара само у њиховој околини при чему се не греје цео водени раствор. Пара се ослобађа из система у облику мехурића. Физика целог процеса се још увек у потпуности не разуме, али зна се да је основа процеса апсорпција светлости кроз такозване колективне електронске осцилације металних наночестица. Описани уређај се зове плазмонски генератор паре.



Слика 2.1 (a) Сферична електронеутрална наночестица полупречника R чији је центар у координатном почетку. (b) Лопта са позитивном хомогеном густином наелектрисања ρ (црвена боја) унутар које се налази мања сферична електронеутрална област (0, жута боја) полупречника R_1 , чији је центар померен за $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$. (c) Сфера са позитивном густином наелектрисања ρ јона сребра чији је центар у координатном почетку. Центар сферне области са негативном густином наелектрисања $-\rho$ (плава боја) је померен за \mathbf{x}_p , где је $x_p \ll R$. (d) Спољашње хомогено електрично поље $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$. У случају временски зависног \mathbf{E}_0 , електронски облак се креће брзином $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. (e) Суд облика квадра ($h \times h \times a$) који садржи водени раствор наночестица осветљен монохроматском светлошћу која се простире дуж z -осе и има кружну учестаност ω_p и интензитет S .

Сферична сребрна наночестица

У овом задатку ћемо разматрати сферичну сребрну наночестицу полупречника $R = 10,0 \text{ nm}$ чији се центар налази у координатном почетку, видети слику 2.1(a). Сви помераји, брзине и силе су паралелне x -оси (чији је јединични вектор \mathbf{e}_x). Наночестица садржи слободне (проводне) електроне који се крећу по запремини наночестице при чему нису везани ни за један атом сребра. Сваки атом сребра тако постаје позитивни јон који је отпустио један такав слободни електрон.

2.1	<p>Наћи следеће величине: запремину V и масу M једне наночестице, број N и гуштину наелектрисања ρ сребрних јона у једној наночестици, као и коцентрацију n слободних електрона, њихово укупно наелектрисање Q, и њихову укупну масу m_0.</p>	0.7
-----	---	-----

Електрично поље у електронеутралној области унутар наелектрисане сфере

У остатку овог задатка претпоставите да је релативна диелектрична пропустљивост свих материјала $\epsilon = 1$. Унутар наелектрисане сфере полупречника R са хомогеном густином наелектрисиња ρ се налази сферична електронеутрална област полупречника R_1 која је настала тако што је додато негативно наелектрисињање густине $-\rho$, чији је центар померен за $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ од центра сфере полупречника R , видети слику 2.1(b).

2.2	Показати да је електрично поље унутар електронеутралне области хомогено и дато изразом $\mathbf{E} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$. Одредити префактор A .	1.2
-----	---	-----

Сила која враћа електронски облак у равнотежни положај

Надаље ћемо разматрати колективно кретање слободних електрона при чему ћемо их моделовати као једну негативно наелектрисувану лопту хомогене густине наелектрисиња $-\rho$. Центар те лопте је на позицији \mathbf{x}_p и она може да се креће дуж x -осе, док је позитивно наелектрисувана лопта (јони сребра) учвршћена у координатном почетку, видети слику 2.1(c). Претпоставити да спољашња сила \mathbf{F}_{ext} помера електронски облак на нову равнотежну позицију $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$, при чему је $|x_p| \ll R$. Притом највећи део унутрашњости наночестице остаје остаје електронеутралан, осим малих наелектрисиња на супротним крајевима наночестице.

2.3	Изразити у зависности од \mathbf{x}_p и n следеће две величине: силу \mathbf{F} која делује на електронски облик и враћа га у равнотежни положај и рад W_{el} који се изврши над електронским облаком приликом померања до положаја \mathbf{x}_p .	1.0
-----	---	-----

Сферична сребрна наночестица у константном спољашњем електричном пољу

Наночестица се налази у вакууму и на њу делује спољашња сила \mathbf{F}_{ext} која потиче од примењеног статичког хомогеног електричног поља $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$, које помера електронски облак на мало растојање $|x_p|$, где је $|x_p| \ll R$.

2.4	Наћи померај x_p електронског облака у зависности од E_0 и n . Наћи и количину $-\Delta Q$ електронског наелектрисиња која притом прође кроз yz -раван у центру наночестице у зависности од n , R и x_p .	0.6
-----	---	-----

Еквивалентни капацитет и индуктивност сребрних наночестица

У случају временски непроменљивог, као и у случају временски зависног електричног поља \mathbf{E}_0 , наночестица се може моделовати еквивалентним електричним колом. Еквивалентни капацитет се може наћи повезивањем рада W_{el} који се изврши да се раздвоје наелектрисиња ΔQ са енергијом кондензатора који има наелектрисиња $\pm \Delta Q$. Раздвајање наелектрисиња доводи и до извесног еквивалентног напона V_0 на еквивалентном кондензатору.

2.5a	Изразити еквивалентну капацитивност система C у зависности од ϵ_0 и R , и израчунати њену вредност.	0.7
2.5b	Користећи овај резултат, одредити у зависности од E_0 и R еквивалентни напон V_0 који треба довести на еквивалентни кондензатор да би се на њему акумулирало наелектрисање ΔQ .	0.4

У случају временски зависног поља \mathbf{E}_0 , електронски облак се креће брзином $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, слика 2.1(d). Електронски облак има кинетичку енергију W_{kin} и формира електричну струју I која тече кроз фиксирану yz -раван. Кинетичка енергија електронског облака се може приписати енергији еквивалентне завојнице индуктивности L кроз коју тече струја I .

2.6a	Изразити W_{kin} и I у зависности од брзине v .	0.7
2.6b	Изразити еквивалентну индуктивност L у зависност од полупречника наночестице R , наелектрисања електрона e , масе електрона m_e и концентрације електрона n . Израчунати њену бројну вредност.	0.5

Плазмонска резонанца сребрне наночестице

Из претходне анализе следи да се кретање које настаје ако се електронски облак помери из свог равнотежног положаја и затим пусти, може моделовати еквивалентним идеалним LC -колом које осцилује на резонантној фреквенцији. Ово динамичко кретање електронског облака се назива плазмонска резонанца, а кружна фреквенца осцилација је такозвана плазмонска кружна фреквенца ω_p .

2.7a	Наћи израз за кружну плазмонску фреквенцу ω_p електронског облака у зависности од наелектрисања електрона e , његове масе m_e , концентрације електрона n и пермитивности вакуума ϵ_0 .	0.5
2.7b	Израчунати ω_p (у rad/s) и таласну дужину λ_p (у nm) у вакууму светлости која има кружну фреквенцу $\omega = \omega_p$.	0.3

Сребрна наночестица осветљена светлошћу плазмонске фреквенције

У остатку задатка, разматраћемо наночестицу осветљену монохроматском светлошћу плазмонске кружне фреквенције ω_p и упадног интензитета $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$. Пошто је таласна дужина велика, $\lambda_p \gg R$, може се сматрати да се наночестица налази у просторно хомогеном пољу које се хармонијски мења са временом по закону $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$. Под дејством поља \mathbf{E}_0 , центар $\mathbf{x}_p(t)$ електронског облака осцилује на истој фреквенцији, креће се брзином $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$, а амплитуда осцилација је константа x_0 . Ово осцилаторно кретање електрона доводи до апсорпције светлости. Енергија коју зароби честица се или претвори у Џулову грејање унутар честице или је честица реемитује у виду расејане светлости.

Џулово грејање је узроковано случајним нееластичним сударима где слободни електрон удари јон сребра и изгуби сву своју кинетичку енергију, која се претвара у вибрације јона сребра (топлоту). Средње време између судара је $\tau \gg 1/\omega_p$, где је за сребрну наночестицу $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$.

2.8a	Наћи израз за временски усредњену снагу Џуловог грејања P_{heat} у наночестици, као и за временски усредњени квадрат струје $\langle I^2 \rangle$. У тим изразима треба да се експлицитно јавља временски усредњени квадрат брзине $\langle v^2 \rangle$ електронског облака.	1.0
2.8b	Наћи израз за еквивалентну омску отпорност R_{heat} кад се наночестица моделује еквивалентним отпорником снаге Џуловог грејања P_{heat} услед струје електронског облака I . Израчунати бројну вредност R_{heat} .	1.0

Упадни сноп светлости губи и временски усредњену снагу P_{scat} услед расејања на електронском облаку који осцилује (реемисија). P_{scat} зависи од амплитуде x_0 извора расејања, наелектрисања Q , кружне фреквенције ω_p и основним параметара светлости (брзина светлости c и пермитивност вакуума ϵ_0). У зависности од те 4 величине P_{scat} је дато са
$$P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

2.9	Користећи израз за P_{scat} , наћи израз за еквивалентну отпорност услед расејања R_{scat} (аналогну са R_{heat}) у моделу еквивалентног отпорника и израчунати њену бројну вредност.	1.0
-----	---	-----

Од претходно одређених еквивалентних елемената кола формирано је еквивалентно редно LCR -коло које моделује сребрну наночестицу. Коло је прикључено на еквивалентни напон $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ који хармонијски осцилује, а одређен је електричним пољем E_0 упадне светлости.

2.10a	Одредити изразе за временски усредњене снаге губитака P_{heat} и P_{scat} у којима се јавља амплитуда E_0 електричног поља упадне светлости чија је кружна фреквенција једнака фреквенцији плазмонске резонанце, $\omega = \omega_p$.	1.2
2.10b	Израчунати нумеричке вредности E_0 , P_{heat} и P_{scat} .	0.3

Генерација паре помоћу светлости

Концентрација сребрних наночестица у воденом раствору је $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$. Раствор се налази у прозачном суду облика квадра димензија $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ и осветљен је светлошћу чија је фреквенција једнака плазмонској фреквенцији, има исти интензитет од $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ и упада под правим углом, видети слику 2.1(е). Температура воде је $T_{\text{wa}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ и претпостављамо да, у сагласности са опсервацијама, у стационарном стању сво Џулово грејање наночестица доводи до стварања паре температуре $T_{\text{st}} = 110 \text{ }^\circ\text{C}$, при чему не долази до пораста температуре воде.

Термодинамичка ефикасност η плазмонског генератора паре се дефинише као однос $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$, где је P_{st} снага која се троши на производњу паре у целом суду, док је P_{tot} укупна снага упадне светлости која улази у суд.

Наночестица је претежно окружена паром, а не водом и зато се може сматрати да је окружена вакуумом.

2.12a	Израчунати укупну масу у јединици времена μ_{st} паре коју производи плазмонски генератор паре током осветљавања светлошћу плазмонске фреквенције и интензитета S .	0.6
2.12b	Израчунати нумеричку вредност термодинамичке ефикасности η плазмонског генератора паре.	0.2

Лист за
одговоре

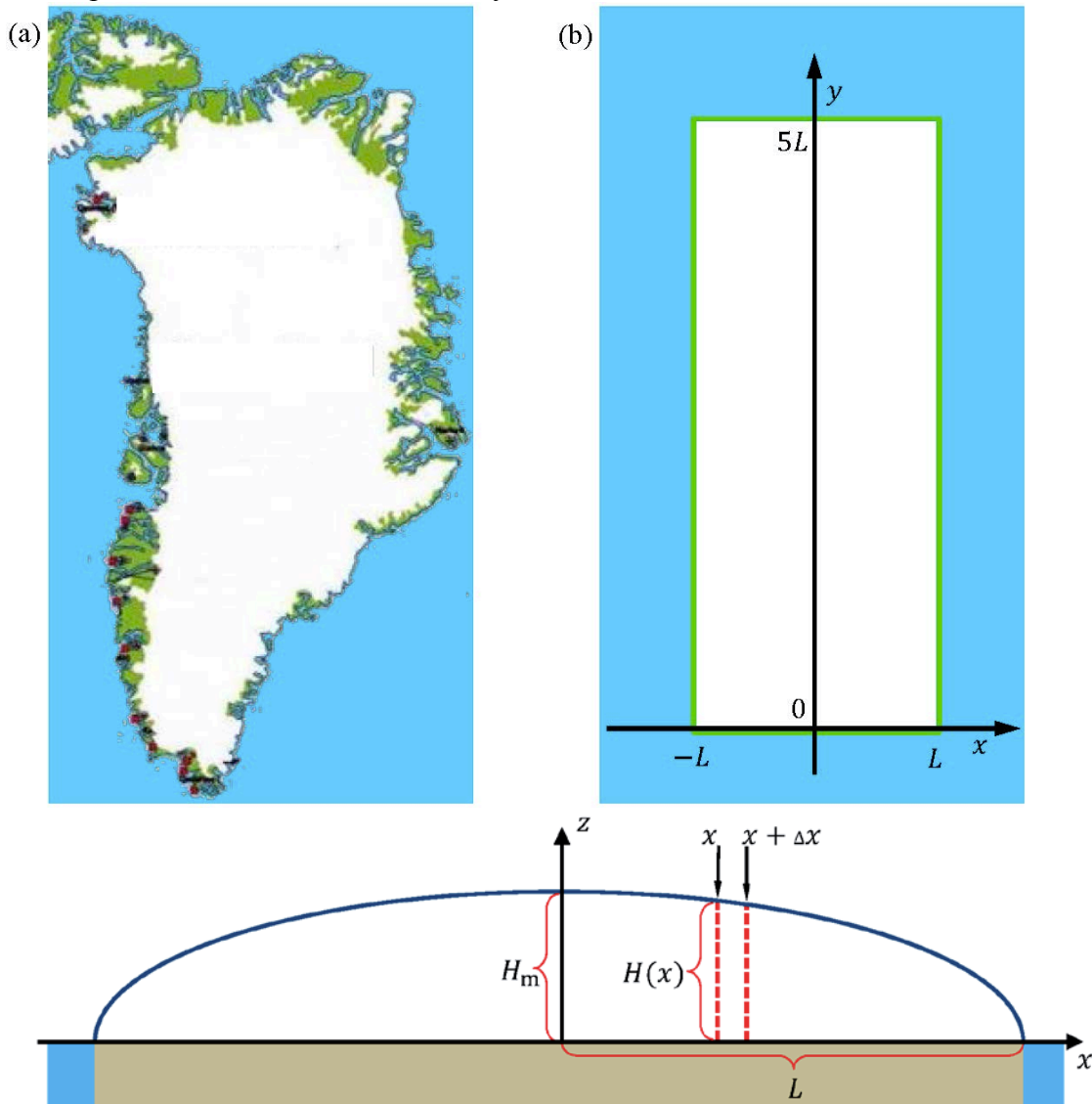
Код земље (2 слова)

Студент број (1-5)

2.1	Запремина $V =$ Број $N =$ Концентрација $n =$ Маса електронског облака $m_0 =$	Маса $M =$ Густина наелектрисиња $\rho =$ Наелектрисиња $Q =$	0.7
2.2	У изразу $\mathbf{E} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$, префактор је $A =$		1.2
2.3	$\mathbf{F} =$	$W_{el} =$	1.0
2.4	Померај $x_p =$	Наелектрисиња $-\Delta Q =$	0.6
2.5a	Израз $C =$	Бројна вредност $C =$	0.7
2.5b	Израз $V_0 =$		0.4
2.6a	Израз $W_{kin} =$	Израз $I =$	0.7
2.6b	Израз $L =$	Бројна вредност $L =$	0.5
2.7a	Израз $\omega_p =$		0.5
2.7b	Бројна вредност $\omega_p =$	Бројна вредност $\lambda_p =$	0.4
2.8a	Израз $P_{heat} =$	Израз $\langle I^2 \rangle =$	1.0
2.8b	Израз $R_{heat} =$	Бројна вредност $R_{heat} =$	1.0
2.9	Израз $R_{scat} =$	Бројна вредност $R_{scat} =$	1.0
2.10a	Израз $P_{heat} =$	Израз $P_{scat} =$	1.2
2.10b	Бројна вредност: $E_0 =$, $P_{heat} =$, $P_{scat} =$	0.3
2.11a	Бројна вредност $\mu_{st} =$		0.6
2.11b	Бројна вредност $\eta = P_{st}/P_{tot} =$		0.2
	Укупно		12.0

Увод

Овај задатак говори о физици гренландског леденог покривача, који је други највећи глечер на свету, Слика 3.1 (а). Да би се поједноставио модел, претпоставити да је Гренланд правоугаоно острво ширине $2L$ и дужине $5L$ чија је површина на нивоу мора. Сматрати да је његова површина у потпуности покривена нестишљивим ледом (константне густине ρ_{ice}), видети Сliku 3.1(b). Профил висине $H(x)$ леденог покривача не зависи од y координате и увећава се од нуле на обалама $x = \pm L$ до највеће висине H_m на средишту острва (y оса), које је познато као разделница леда, видети Сliku. 3.1(c).



Слика 3.1 (а) Мапа Гренланда која показује простирање леденог покривача (бело) приобалне области на којима нема леда (зелено) и околни океан (плаво). (b) Упошћен модел гренландског леденог покривача који предствља правоугаону област у xy равни са страницама $2L$ и $5L$. Разделница леда, линија где је висина леденог покривача једнака H_m , простире се дуж y осе. (c) Вертикални попречни пресек (xz раван) кроз ледени покривач где се види профил висине $H(x)$ (тамно плава линија). $H(x)$ је независно од y координате за $0 < y < 5L$, а нагло пада на нулу када је $y = 0$ и $y = 5L$. Оса z означава положај разделнице леда. Да би све било боље уочљиво, вертикалне димензије на слици су увећане у односу на хоризонталне. Густина ρ_{ice} леда је константна.

Две корисне формуле

У овом задатку можете да користите интеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

И апроксимацију $(1+x)^a \approx 1+ax$ која важи када је $|ax| \ll 1$.

Профил висине леденог покривача

На краткој временској скали глечер је нестишљиви хидростатички систем са сталним профилем висине $H(x)$.

3.1	Напишите израз за притисак $p(x, z)$ унутар леденог покривача у функцији од висине z у односу на земљу и растојања x од разделнице леда. Занемарити атмосферски притисак.	0.3
-----	---	-----

Разматрати дати вертикални слој леденог покривача у равнотежи, чија је површина основе $\Delta x \Delta y$ и покрива област између x и $x + \Delta x$, погледати црвене испрекидане линије на Слици 3.1(c). Димензија Δy је притом небитна. ΔF је укупна хоризонтална компонента разлике сила које делују на две вертикалне стране слоја. Разлика у овим силама настаје услед раличитих висина две вертикалне стране слоја. Та сила је уравнотежена силом трења између леденог покривача и подлоге која настаје на површини $\Delta x \Delta y$, па је $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ где је $S_b = 100 \text{ kPa}$.

3.2a	За дату вредност x , показати да када $\Delta x \rightarrow 0$ важи $S_b = kH dH/dx$ и одредити k .	0.9
3.2b	Одредити израз за профил висине $H(x)$ у зависности од $\rho_{\text{ice}}, g, L, S_b$ и растојања x од разделнице. Испоставиће се да H_m зависи од L као $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Одредити експонент γ у релацији $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$ где је V_{ice} укупна запремина леденог покривача, а A површина правоуганог острва.	0.5

Динамика леденог покривача

На дужој временској скали, лед је вискозни нестишљиви флуид, који услед дејства гравитације тече од централног дела ка обалама. У овом моделу, ледени покривач задржава свој профил $H(x)$ у стационарном стању, при чему се топљење леда на обалама надокнађује новим ледом који настаје услед падања снега у централној области. Поред претпоставки везаних за геометрију са Слика 3.1(b) и (c) искористити следеће претпоставке у моделу:

- 1) Лед тече у xz равни удаљавајући се од разделнице леда (y оса).
- 2) Брзина c (m/години) накупљања леда у средишњим деловима је стална.
- 3) Лед може нестајати са глечера једино топљењем у близини обала на $x = \pm L$.
- 4) Хоризонтална (x) компонента $v_x(x) = dx/dt$ брзине течења леда не зависи од z .
- 5) Вертикална (z) компонента $v_z(z) = dz/dt$ брзине течења леда не зависи од x .

Размотрити само средишњи део $|x| \ll L$ леденог покривача где су промене у висини леденог покривача веома мале и могу се у потпуности занемарити, односно $H(x) \approx H_m$.

3.3	Користећи закон одржања масе наћи израз за хоризонталну компоненту $v_x(x)$ брзине течења леда у зависности од c, x и H_m .	0.6
-----	---	-----

Из претпоставке нестишљивости, односно константности густине ρ_{ice} леда и закона одржања масе следи да компоненте брзине течења задовољавају следећу релацију:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Написати израз за зависност вертикалне компоненте $v_z(z)$ брзине течења леда.	0.6
-----	--	-----

Мала честица леда чија је почетна позиција на површини (x_i, H_m) ће као део леденог покривача, ићи по трајекторији $z(x)$ у вертикалној xz равни.

3.5	Извести израз за трајекторију $z(x)$.	0.9
-----	--	-----

Индикатори старости леденог покривача и климе из његове динамике

На основу компонентата брзине течења леда $v_x(x)$ и $v_z(z)$, може се проценити старост $\tau(z)$ леда на одређеној дубини $(H_m - z)$ испод површине леденог покривача.

3.6	Наћи израз за старост $\tau(z)$ леда у зависности од висине z изнад земље, на разделници леда $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

Направљена је бушотина која пролази кроз све слојеве нападалог снега из прошлости и из ње су извучени узорци леда са различитих дубина. Анализа тих узорака може да нам да податке о климатским променама у прошлости. Један од најбољих индикатора је такозвани $\delta^{18}\text{O}$, који се дефинише као

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{ ‰},$$

где $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ представља међусобни однос присуства два стабилна изотопа кисеоника ^{18}O и ^{16}O . Референтна вредност R_{ref} се односи на изотопски састав кисеоника у океанима у околини екватора. Мерења на гренландском леденом покривачу показују да $\delta^{18}\text{O}$ у снегу мења приближно линеарно са температуром, Слика 3.2(а). Претпостављајући да је то одувек био случај, вредност $\delta^{18}\text{O}$ за лед са дубине $(H_m - z)$ омогућава да се процени температура T у близини Гренланда у тренутку $\tau(z)$ у прошлости.

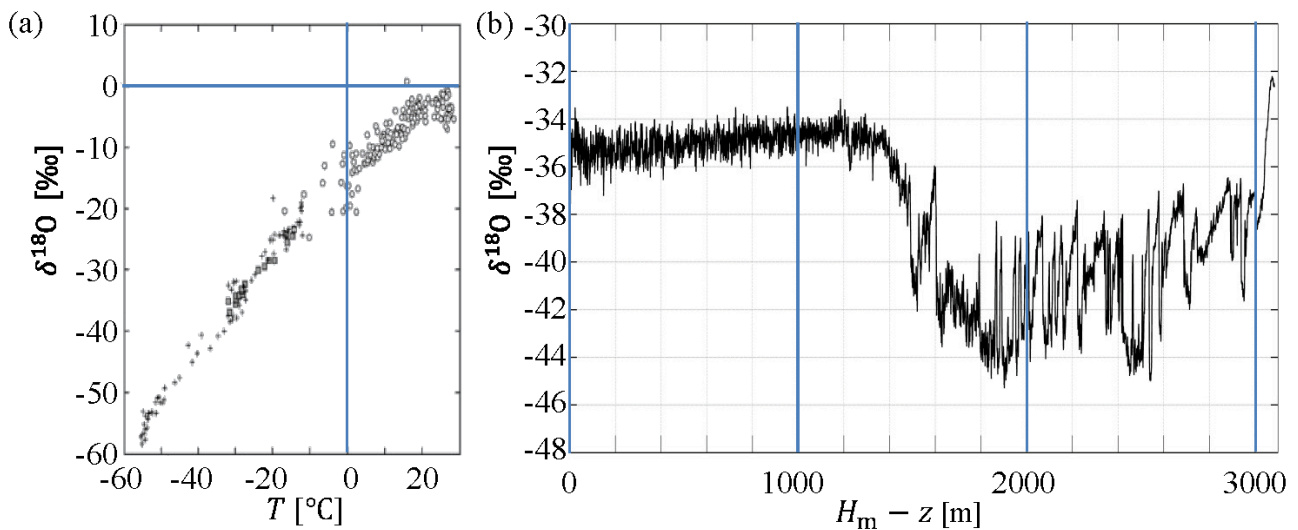


Figure 3.2 (a) Измерена веза између $\delta^{18}\text{O}$ у снегу и средње годишње температуре T на површини. **(b)** Мерења зависности $\delta^{18}\text{O}$ од дубине ($H_m - z$) испод површине, добијена из узорка леда извађеног из бушотине, која се простире од површине леденог покривача до земље, на одређеном месту на гренландској разделници где је $H_m = 3060$ m.

Мерења $\delta^{18}\text{O}$ на 3060 m дубокој бушотини у гренландском леду показују наглу промену вредности $\delta^{18}\text{O}$ на дубини од 1492 m, Слика 3.2(b), која означава крај последњег леденог доба. Ледено доба је почело пре 120 000 година, што одговара дубини од 3040 m, а текуће међуледено (интергласијално) доба је почело пре 11 700 година, што одговара дубини од 1492 m. Претпоставити да се та два периода могу описати са две различите брзине накупљања леда c_{ia} (ледено доба) и c_{ig} (међуледено доба). Претпоставите да је H_m било константно током ових 120 000 година.

3.7a	Одредити брзине накупљања c_{ia} и c_{ig} .	0.8
3.7b	Користећи податке са Сlike 3.2, наћи промену температуре на прелазу из леденог у међуледено доба.	0.2

Подизање нивоа мора услед топљења гренландског леденог покривача

Потпуно топљење гренландског леденог покривача ће узроковати пораст нивоа воде у глобалном океану. За грубу процену овог пораста нивоа воде, може се једноставно претпоставити да ће доћи до униформног пораста нивоа воде у целом глобалном океану површине $A_0 = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

3.8	Израчунати пораст нивоа воде у глобалном океану који би настао потпуним отопљавањем гренландског леденог покривача, чија је тренутна површина $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ и $S_b = 100 \text{ kPa}$.	0.6
-----	---	-----

Масивни гренландски ледени покривач врши гравитационо повлачење околног океана. Гравитационо повлачење је ефекат локалног подизања нивоа воде у океану услед дејства гравитационе силе. Ако би се ледени покривач отопио, ово локално подизање нивоа воде у

близини Гренланда би се смањило. Тај ефекат делују супротно од подизања нивоа воде услед ефекта израчунатог у делу 3.8.

Да бисмо проценили јачину овог гравитационог повлачења воде, моделоваћемо гренландски ледени покривач као тачкасту масу која се налази на нивоу земље и има укупну масу једнаку маси гренландског леденог покривача. Копенхаген се налази на растојању од 3500 km од поменуте тачкасте масе, мерећи растојање по закривљеној површини Земље. Можете сматрати да је Земља, не рачунајући ову тачкасту масу, сферно симетрична и да се глобални океан простире по целој површини $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{m}^2$ Земље. Сви ефекти ротације Земље могу се занемарити.

3.9	У оквиру овог модела одредити разлику $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$ између нивоа мора у Копенхагену (h_{CPH}) и у тачки дијаметрално супротној Гренланду (h_{OPP}).	1.8
-----	---	-----

Лист за
одговоре

Код земље (2 слова)

Студент број (1-5)

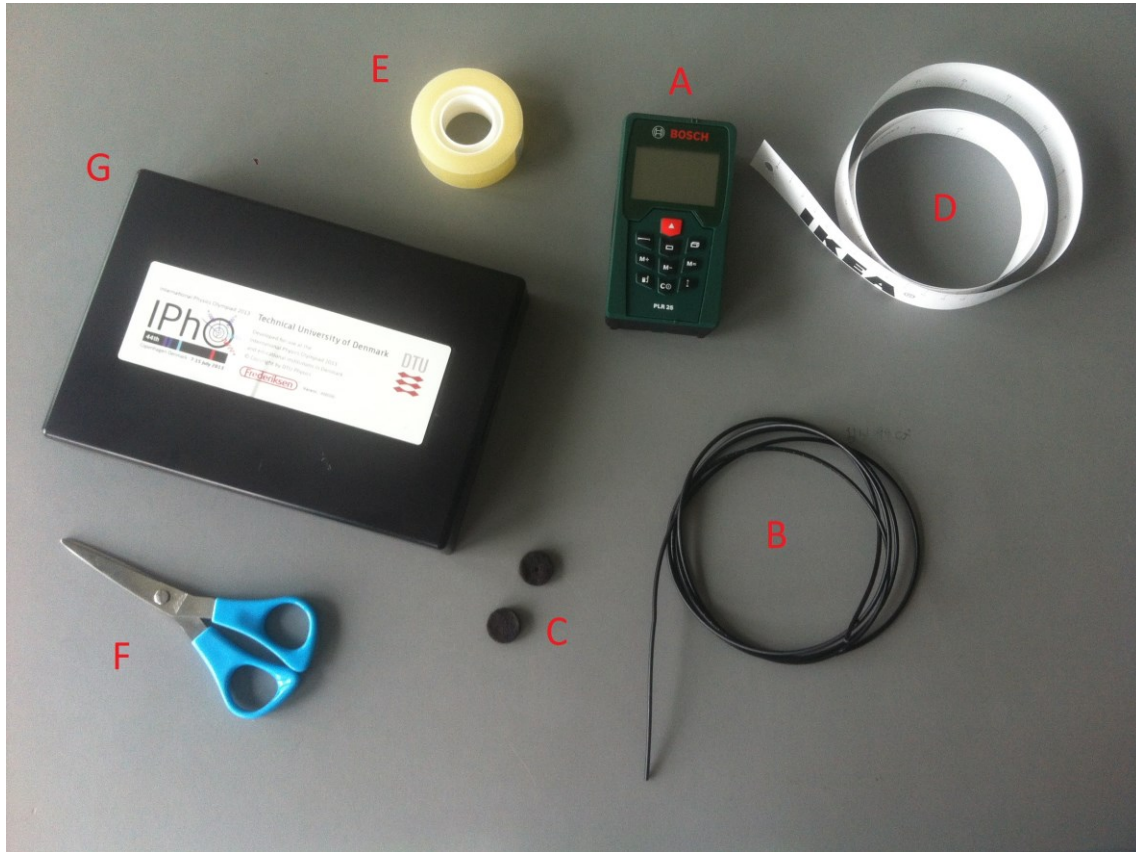
3.1	$p(x, z) =$	0.3
3.2a	$k =$	0.9
3.2b	$H(x) =$	0.8
3.2c	$\gamma =$	0.5
3.3	$v_x(x) =$	0.6
3.4	$v_z(z) =$	0.6
3.5	$z(x) =$	0.9
3.6	Старост леда на датом растојању изнад земље: $\tau(z) =$	1.0
3.7a	$c_{ia} =$ $c_{ig} =$	0.8
3.7b	$\Delta T =$	0.2
3.8	Подизање глобалног нивоа воде због топљења гренландског леда =	0.6
3.9	Разлика нивоа воде: $h_{CPH} - h_{OPP} =$	1.8
	Укупно	9.0

- Израда експерименталних задатака траје 5 часова. Постоје 2 задатка који укупно вреде 20 бодова. Уочите да број бодова по задатку није исти.
- Не смете отворати ни браон коверту са задацима ни кутију са прибором и материјалом пре него што звучни сигнал означи почетак такмичења (звиждук).
- За сваки задатак постоји одговарајући Лист за одговоре (погледајте број и боју у заглављу). Напишите своја решења у за то предвиђена поља у одговарајућем листу за одговоре.
- За детаљне прорачуне користите званичне IPhO папире за писање (writing paper) или IPhO папире за графике (graph paper). **И НА ПАПИРИМА ЗА ПИСАЊЕ И НА ПАПИРИМА ЗА ГРАФИКЕ ПОПУНИТЕ СВА ПОЉА У ЗАГЛАВЉУ и ПИШИТЕ САМО НА ПРЕДЊОЈ СТРАНИ ПАПИРА** (задња страна неће бити скенирана). Користите што је могуће мање текста: покушајте да објасните своје решење користећи једначине, бројеве, симболе и/или дијаграме. Ако сте на неком листу написали нешто што не желите да буде прегледано, прецртајте то.
- Није дозвољено да напуштате своје радно место без дозволе. Ако вам је потребна било каква врста помоћи (калкулатор који не ради, потребно вам је више папира, треба да идете у тоалет итд.) подигните руку и држите је подигнуту док водич не дође. Ако вас случајно заболи рука слободно је спустите и подигните је поново када бол престане.
- **Крај израде** задатака ће бити назначен **ЗВУЧНИМ СИГНАЛОМ** (звиждуком) и тада морате одмах да престанете са писањем, **АЛИ ОСТАНИТЕ НА СВОЈИМ МЕСТИМА**. Ако завршите са израдом задатака пре звучног сигнала, подигните руку.
- **НУМЕРИШИТЕ И СЛОЖИТЕ** своје папире, **ТАКО ДА ИМ ПРЕДЊА СТРАНА БУДЕ ОКРЕНУТА НА ГОРЕ**, и ставите их у своју браон коверту следећим редом:
 1. Лист за одговоре E1 иза којег следе папире са детаљима израчунавања и графицима за E1
 2. Лист за одговоре E2 иза којег следе папире са детаљима израчунавања и графицима за E2
 3. Све остале папире укључујући и прецртане листове.
- Када чујете **СЛЕДЕЋИ ЗВУЧНИ СИГНАЛ** (звиждук) **МОЖЕТЕ НАПУСТИТИ ПРОСТОРИЈУ**.
- Није дозвољено да изнесете иједан лист папира ван просторије.

Важно обавештење: Сва мерења и израчунате вредности физичких величина морају бити написани у јединицама SI система са одговарајућим бројем значајних цифара. Грешке мерења треба процењивати само тамо где се то изразито тражи.

1.0 Увод

Експерименти са ласерским даљиномером (LDM)



Слика 1.1 Део прибора и материјала за експеримент

- А:** Ласерски даљиномер
- Б:** Оптички кабал (светловод) (приближно 1 m)
- С:** Самолепиви црни филцани подметачи са отвором
- Д:** Мерна трака
- Е:** Лепљива трака
- Ф:** Маказе
- Г:** Поклопац црне кутије

Ласерски даљинар (LDM, види Сliku 1.2 и Сliku 1.3) се састоји од одашиљача и пријемника. Одашиљач је диодни ласер чији је ласерски сноп модулисан, односно ласерски сноп чији се интензитет мења у времену са одређеном учестаношћу. Када ласерски сноп погоди у неки предмет, светлост се одбија у свим правцима из тачке у коју је погодио сноп. Део ове светлости долази до пријемника инструмента који се налази непосредно поред одашиљача. Телескопски оптички систем пријемника је фокусиран на тачку предмета у коју је погодио ласер. Електронски систем инструмента мери фазну разлику између одлазног и

одбијеног снопа. Ова фазна разлика је управо сразмерна времену t које је је потребно да светлост пређе пут од одашиљача до пријемника. Измерено време се користи да би се израчунала величина

$$y = \frac{1}{2}ct + k$$

која се приказује на екрану инструмента, где је $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$ брзина светлости. Константа k зависи од подешавања инструмента; на инструменту можете изабрати мерење даљине од предње стране или од задње стране инструмента. Када се ласерски даљинар укључи подешен је тако да мери од задње ивице. **Ово подешавање не треба мењати током свих мерења.**

Због паралаксе, LDM не може да мери даљине мање од 5 cm. Максимална даљина која може да се измери је приближно 25 m. Облик инструмента је такав да су и предња и задња страна нормалне на ласерски сноп. Када се инструмент постави хоризонтално, поларизација ласерског снопа је у вертикалној равни (нормално на раван екрана)

Диодни ласер је класе 2, снаге $< 1 \text{ mW}$ и таласне дужине 635 nm. Грешка мерења по спецификацији произвођача је $\pm 2\text{mm}$.

Упозорење: Диодни ласер који се налази у инструменту може да оштети очи. Не гледајте директно у ласерски сноп и не уперујте сноп у неког другог!

Подешавања на LDM

У претходној једначини за раздаљину y узима се да је брзина светлости c . На нивоу тачности овог експеримента, није потребно правити разлику између брзине светлости у вакууму од брзине светлости у ваздуху с обзиром да је индекс преламања ваздуха у атмосферским условима $1.00029 \approx 1.000$



Слика 1.2 Шест необележених дугмади су небитни за експеримент (користе се за израчунавање површине и запремине). Дугмад од интереса у овом експерименту су:

- A:** Укључивање и искључивање (On/off)
- B:** Прелазак са мерења од задње стране инструмента на мерење од предње стране и обрнуто.
- C:** Индикатор за претходну функцију
- D:** Укључивање ласера и отпочињање мерења
- E:** Континуално мерење
- F:** Индикатор за укључено континуално мерење.



Слика 1.3 Изглед предње стране ласерског даљиномера:

- A:** Пријемник: Предње сочиво телескопа
- B:** Одашиљач: Не гледајте у ласерски сноп!

1.1 Мерење ласерским даљиномером

Инструмент ће извршити мерење када притиснете дугме **D**, видите Сliku 1.2.

1.1a	Измерите растојање H од врха стола до пода помоћу ласерског даљиномера. Напишите грешку мерења. Скицирајте начин на који сте урадили ово мерење.	0.4
------	--	-----

1.2 Експеримент са оптичким каблом



Слика 1.4 Приказ слојева оптичког кабла.

Добили сте оптички кабал дужине приближно 1 m и пречника приближно 2 mm. Кабал се састоји од два оптичка материјала. Језгро (пречника приближно 1 mm) је направљено од пластике великог индекса преламања. Језгро је окружено омотачем направљеним од пластике нешто нижег индекса преламања и све то је окружено заштитном кошуљицом од црне пластике. Језгро и омотач служе као светловод за светлост која улази у кабал пошто на граници између њих одлази до потпуног унутрашњег одбијања. Због тога светлост не може да напусти језгро кабла све док је упадни угао на омотач мањи од граничног угла за потпуно унутрашње одбијање. Правац простирања светлости ће дакле следити осу језгра чак и ако се кабал савије, али не превише.

LDM треба сада подесити да мери континуално (**E**, видети Сliku 1.2). У том случају ће вредност у на екрану да се обнавља приближно сваког секунда. LDM улази у режим спавања (sleep mode) након неколико минута. Може се поново активирати притиском на црвено дугме за отпочињање мерења.

Пажљиво и нежно ставите један мали црни филцани подметач (други подметач је резерва) преко сочива пријемника даљиномера тако да отвор од 2mm буде приближно на средини сочива (сочиво је обележено са **A** на Слици 1.3). Окрените лепљиву страну подметача ка сочиву и лагано притегните јер ће касније у експерименту морати да се уклони.

Уметните оптички кабал дужине x у отвор на подметачу тако да додирне сочиво, видите Сliku 1.5.



Слика 1.5 (а) Филцани подметач и оптички кабал. (б) Постављање оптичког кабла.

Супротни крај оптичког кабла треба држати руком тако да додирне заштитно стакло одашиљача и да се нађе у средини ласерског снопа. Сада можете да прочитате вредност y са екрана. Користите маказе да скратите оптички кабал на различите жељене дужине x .

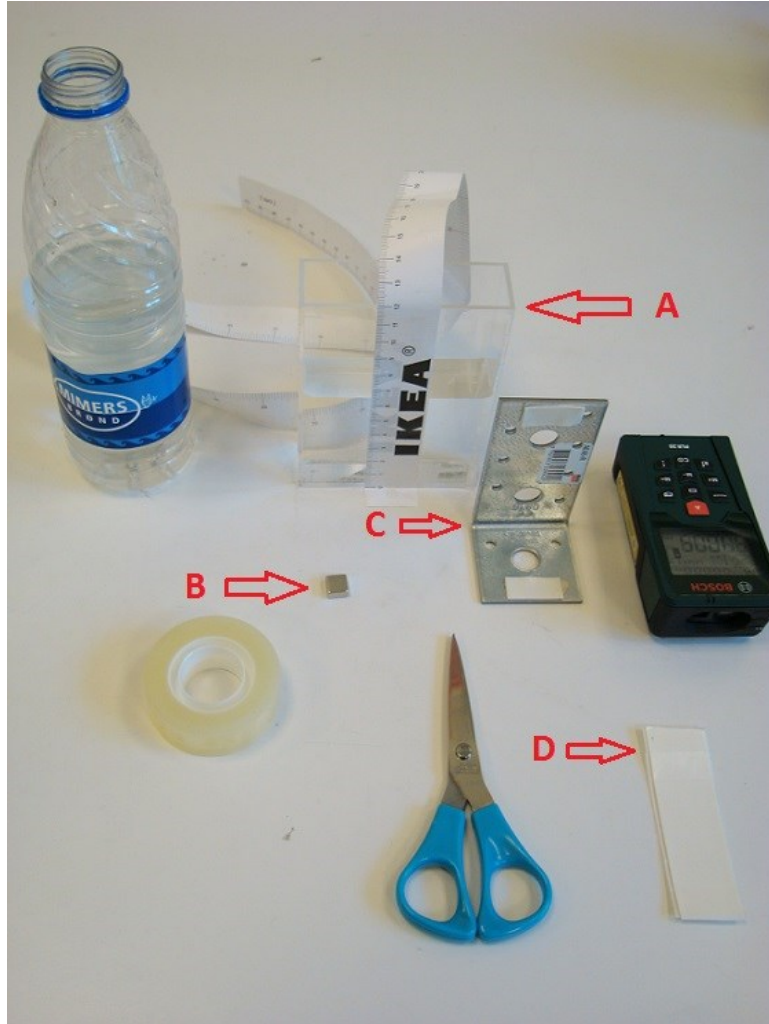
Добро размислите сваки пут пре него што пресечете оптички кабал јер не можете добити додатни кабал!!

Водите рачуна да се због прегревања након дужег рада у континуалном режиму на екрану даљиномера може појавити слика термометра. Ако се ово деси, искључите инструмент и оставите га тако неко време да се мало охлади.

1.2a	За различите дужине x кабла измерите одговарајуће вредности y . Направите табелу са мереним вредностима. Нацртајте график зависности показивања даљиномера y од дужине оптичког кабла x .	1.8
1.2b	Помоћу графика одредите индекс преламања n_{co} материјала од којег је направљено језгро оптичког кабла. Израчунајте брзину v_{co} простирања светлости кроз оптички кабал.	1.2

1.3 Ласерски даљиномер који се налази под углом у односу на вертикалу

У овом делу експеримента биће вам потребан прибор и материјал приказан на Слици 1.6.



Слика 1.6 Прибор и материјал приказан на слици:

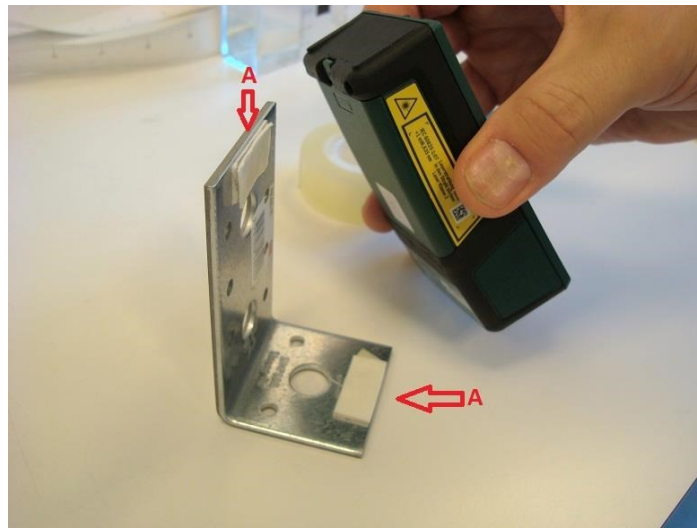
A: Правоугаона посуда са водом и мерна трака

B: Магнет за причвршћивање гвозденог угаоника на врх црне кутије. (Када отворите кутију са прибором и материјалом, магнет ћете наћи на угаонику).

C: Гвоздени угаоник са двоструко лепљивим тракама

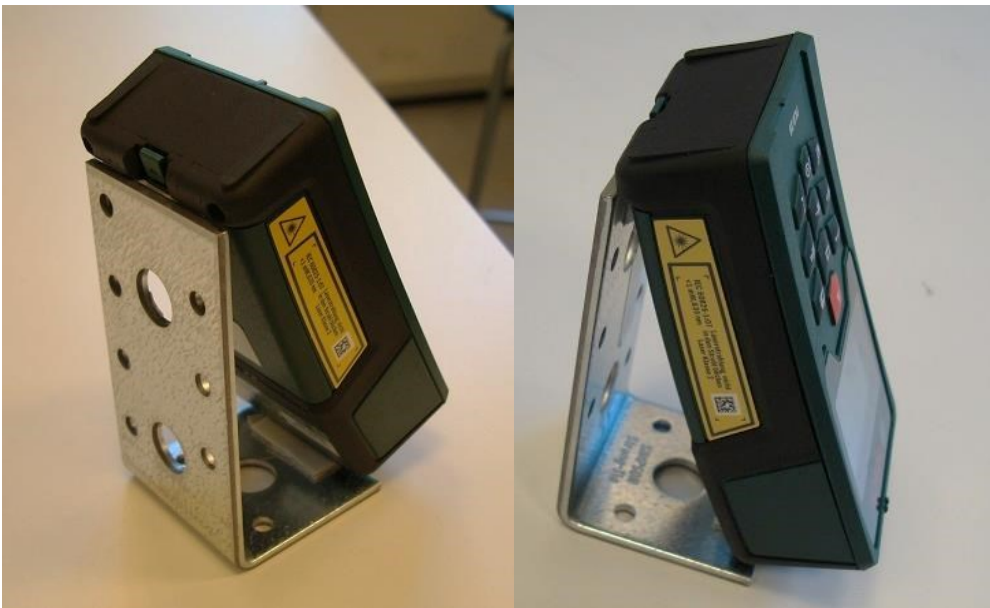
D: Двоструко лепљива трака

Уклоните црни филцани подемтач са сочива. LDM сада треба поставити на следећи начин: залепите две двоструко лепљиве траке на гвоздени угаоник као на Слици 1.7.



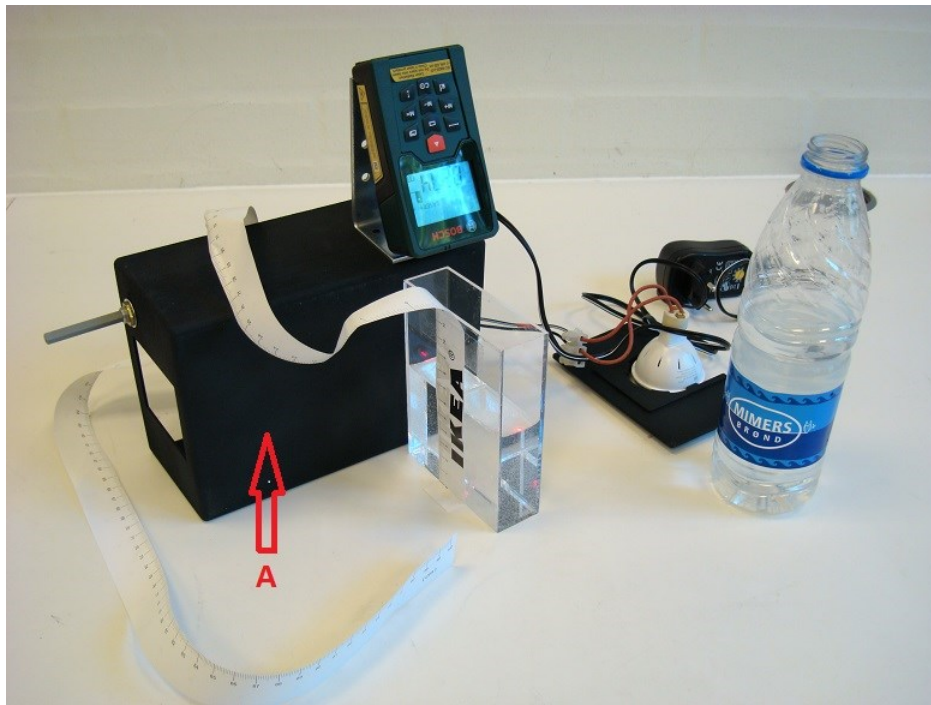
Слика 1.7 Правилно постављене двоструко лепљиве траке на гвозденим угаонику.

Сада треба пажљиво поставити LDM на гвоздени угаоник како је приказано на 1.8.



Слика 1.8 Правилно постављен ласерски даљиномер на гвозденим угаонику.

Гвоздени угаоник заједно са даљиномером сада треба ставити на црну кутију како је приказано на Слици 1.9. Причврстите гвоздени угаоник за кутију помоћу магнета који треба поставити на зид кутије са унутрашње стране у пределу испод угаоника (Мали магнет се налази на самом угаонику пре коришћења). Важно је да се LDM постави баш као што је приказано на слици јер је страна кутије која гледа навише и на коју треба ставити даљиномер благо нагнута, приближно за 4 степена. Ласерски снопа сада треба неометано да се простире на доле под одређеним углом.



Слика 1.9 Поставка експеримента. (Црна кутија служи само као постоље. Прибор који се види иза пластичне боце на слици се не користи у овом делу експеримента)

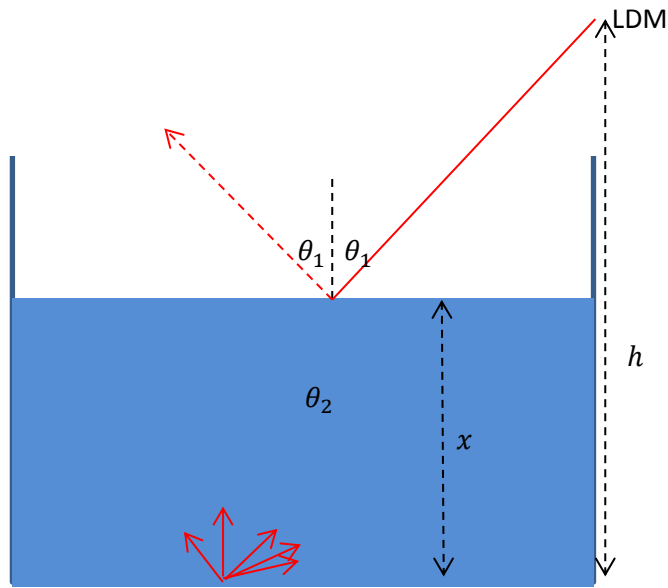
A: Важно: Ласерски даљинар мора бити постављен са стране где је дно црне кутије како је приказано. Страна кутије која је окренута навише и на којој је даљинар је благо нагнута, приближно за 4 степена према хоризонталу. Ако из неког разлога LDM отпадне или се помери и морате поново да га причврстите на угаоник и кутију то се мора урадити тако да угао θ_1 буде исти као што је био пре померања даљиномера.

Када је LDM постављен као што је објашњено и укључен, ласерски сноп ће заклапати угао θ_1 са вертикалом. Овај угао, који мора бити исти у току експеримента, треба да се одреди. Правоугаона посуда у овом делу није потребна и можете је ставити са стране.

1.3a	Измерити растојање y_1 до места где ласерски сноп удара у сто. Померити кутију са даљиномером хоризонтално према ивици стола све док ласерски сноп не удари у под. Измерити растојање y_2 до места где ласерски сноп удара у под. Наведите грешке мерења.	0.2
1.3b	Израчунати угао θ_1 користећи само резултате мерења за y_1 , y_2 и H (из дела 1.1a). Одредити $\Delta\theta_1$.	0.4

1.4 Експеримент са правоугаоном посудом

Поставите правоугаону посуду тако да ласерски сноп удара у дно посуде приближно на средини, видети Сliku 1.10. Сипајте воду у посуду. Дубина воде је x . Очитајте y са екрана даљиномера.



Слика 1.10 Скица праваца ласерских снопова у експерименту са правоугаоном посудом у којој је дубина воде x .

1.4a	Измерити одговарајуће вредности дубине воде x и показивања даљиномера u . Унети мерења у таблеу. Нацртати график зависности u од x .	1.6
1.4b	Употребити једначине да би се нашла зависност претходне две величине и да би се предвидело како треба да изгледа график.	1.2
1.4c	Одредити индекс преламања воде n_w помоћу графика нацртаног од мерених величина.	1.2

Лист за одговоре

Код земље (2 слова)

Такмичар број (1-5)

1.1a	Вредност $H =$	вредност $\Delta H =$	0.4
	Приложити скицу на посебном листу.		

1.2a	Табела:			1.8
Приложити график зависности y од x на посебном листу.				
1.2b	Вредност $n_{co} =$	вредност $v_{co} =$	1.2	
Приложити прорачуне на посебном листу.				

Лист за одговоре

Код земље (2 слова)

Такмичар број (1-5)

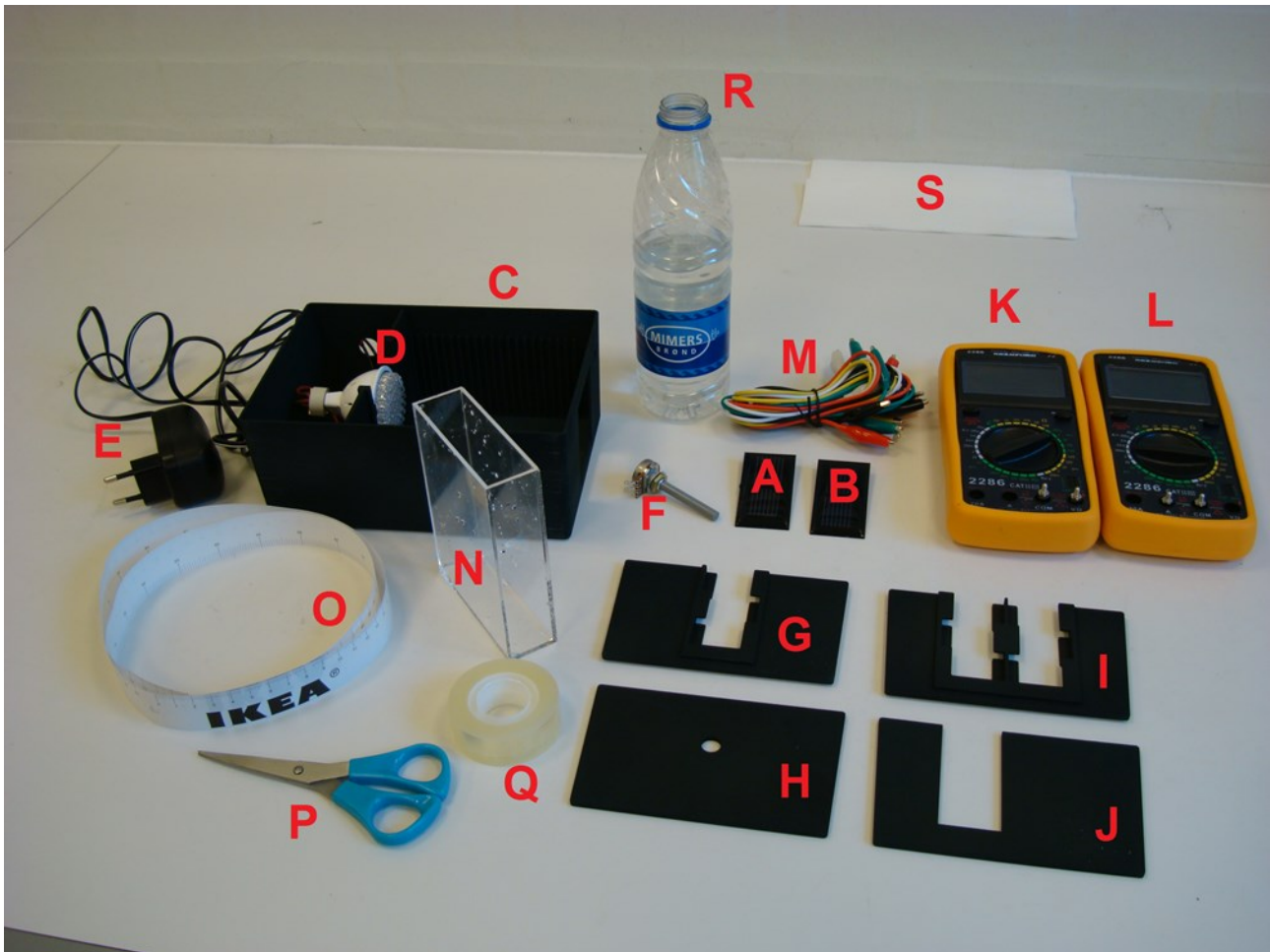
1.3a	Вредност $y_1 \pm \Delta y_1 =$	вредност $y_2 \pm \Delta y_2 =$	0.2
1.3b	Вредност $\theta_1 =$ Приложити прорачуне на посебном листу.	вредност $\Delta\theta_1 =$	0.4

1.4a	Табела:			1.6
Приложити график зависности y од x на посебном листу.				
1.4b	Приложити једначине на посебном листу		1.2	
1.4c	Вредност $n_w =$ Приложити прорачуне на посебном листу.		1.2	

	Укупно	8.0
--	---------------	------------

2.0 Увод

Апаратура која ће бити коришћена у овом експерименту је приказана на Слици 2.1.



Слика 2.1 Апаратура која ће бити коришћена у експерименту E2.

Списак прибора и материјала (видети Слику 2.1):

A: Соларна ћелија

B: Соларна ћелија

C: Кутија са преградама у које се могу поставити извор светлости, соларне ћелије итд.

D: Диода која емитује светлост (LED) (извор светлости) у одговарајућем држачу

E: Напајање за извор светлости D

F: Отпорник променљиве отпорности

G: Држач којим се може поставити једна соларна ћелија у кутију C

H: Преграда са кружним отвором која се може поставити у кутију C

I: Држач којим се могу поставити две соларне ћелије у кутију C

J: Преграда за заклањање која се може поставити у кутију C

K: Дигитални мултиметар

L: Дигитални мултиметар

M: Жице са “крокодилским” спојевима

N: Правоугаона посуда

O: Трака за мерење дужине

P: Маказе

Q: Лепљива трака

R: Вода којом се пуни правоугаона посуда N

S: Папирна салвета којом се може обрисати вода

T: Пластична чаша за воду из посуде N (није приказана на Слици 2.1)

U: Пластична пипета (није приказана на Слици 2.1)

V: Поклопац за кутију C (није приказан на Слици 2.1)

Табела са физичким константама

Брзина светлости у вакууму	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Наелектрисање електрона	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Болцманова константа	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

Соларна ћелија претвара део електромагнетне енергије упадне светлости у електричну енергију тако што раздваја носиоце наелектрисања који су настали у соларној ћелији. На овај начин се формира електрична струја. У експерименту E2 вршићете испитивања соларних ћелија коришћењем апаратуре коју имате на располагању. Апаратура се састоји од кутије са преградама у које се могу поставити извор светлости и соларне ћелије на различитим местима унутар кутије. Кутија се може затворити поклопцем. Отпорник променљиве отпорности треба да се постави у кутију, видите Сliku 2.2. Један од три прикључка отпорника је уклоњен јер само преостала два прикључка треба да се користе. Такође су вам на располагању жице са “крокодилским” спојевима и две соларне ћелије (обележене серијским бројем и словом А или В) са прикључцима са задње стране. Две соларне ћелије су сличне, али се њихове карактеристике могу благо разликовати. Два мултиметра су опремљена прикључцима који омогућавају да се користе као амперметар и волтметар, видети Сliku 2.3. У експерименту ће се користити и посуда која се може напунити водом из флашице.



Слика 2.2 (а) Кутија са извором светлости и отпорником који треба поставити. **(б)** Отпорник постављен у кутији. Отпорник треба поставити у одговарајући отвор и причврстити матицом са подлошком. Притом мала избочина у облику зуба треба да стане у мањи отвор који се налази поред главног отвора у који се ставља отпорник.



Слика 2.3 Мултиметри са прикључцима који омогућавају да се користе редом као амперметар (**лево**) и волтметар (**десно**). Мултиметар се укључује притискањем дугмета “POWER” у горњем левом углу. Инструмент се аутоматски искључује ако га неко време не користите. Може да мери једносмерну струју и напон (=), као и наизменичну струју и напон (~). Унутрашња отпорност волтметра је 10 MΩ у сваком мерном опсегу. Напон на амперметру је једнак 200 mV када амперметар читава максималну струју датог мерног опсега. Ово важи за сваки мерни опсег. У случају прекорачења максималне вредности датог мерног опсега, на екрану ће се појавити “1” и тада је потребно изабрати већи мерни опсег. Дугме “HOLD” (горњи десни угао) не треба притискати јер ће у том случају на екрану остати вредност мерења из тренутка кад сте притиснули дугме.

УПОЗОРЕЊЕ: *Немојте користити мултиметар као омметар да бисте мерили отпорност соларних ћелија јер тада соларна ћелија може да се оштети. Када мењате мерни опсег на мултиметрима, пажљиво окрећите преклопник јер може да буде нестабилан и да се поквари. Проверите да ли постоји број иза децималне тачке када вршите мерење – ако преклопник није на свом месту, мултиметар неће вршити мерење без обзира што на екрану постоје неке цифре.*

Обавештење: Немојте мењати напон на напајању. Тај напон треба да буде 12 V током целог експеримента. (Напајање за извор светлости треба да се стави у утичницу (230 V ~) на вашем столу.)

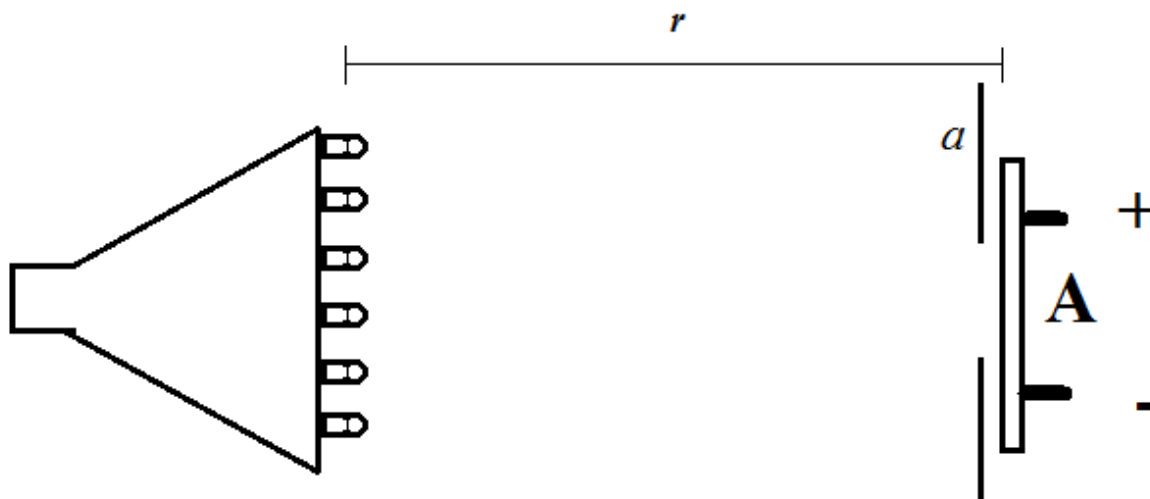
Обавештење: Одређивање грешака мерења треба да вршите само када се то од вас експлицитно тражи.

Обавештење: Све мерене и израчунате вредности треба да представите у SI јединицама.

Обавештење: При свим мерењима струје и напона у овом експерименту, LED извор светлости треба да буде укључен.

2.1 Зависност струје кроз соларну ћелију од растојања од извора светлости

У овом задатку ћете мерити струју I која се јавља у соларној ћелији када је она повезана у коло са амперметром и одредити како она зависи од растојања r до светлотног извора. Светлост настаје *унутар* појединачних диода, тако да растојање r треба мерити на начин приказан на Слици 2.4.



Слика 2.4 Поглед одозго поставке у задатку 2.1. Обратите пажњу да се кружни отвор (апертура) a налази непосредно испред соларне ћелије. Растојање се мери од унутрашњости диоде до површине соларне ћелије.

У овом експерименту немојте мењати мерни опсег амперметра: унутрашња отпорност амперметра зависи од мерног опсега и утиче на струју кроз соларну ћелију.

У лист за одговоре упишите серијске бројеве светлосног извора и соларне ћелије А. Поставите извор светлости у држач облика латиничног слова U (извор светлости не упада лако у држач, па треба да будете стрпљиви кад га постављате) Поставите соларну ћелију А у држач за једну соларну ћелију (G на Слици 2.1) и ставите преграду са кружним отвором непосредно испред соларне ћелије. Струја I у зависности од растојања r до светлосног извора, кад r није сувише мало, се може апроксимирати као

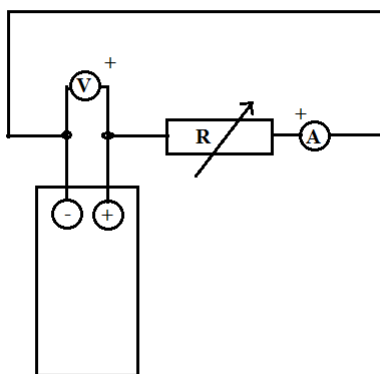
$$I(r) = \frac{I_a}{1 + \frac{r^2}{a^2}}$$

где су I_a и a константе.

2.1a	Измерити I у зависности од r , и попунити табелу резултатима ваших мерења.	1.0
2.1b	Одредити вредности I_a и a коришћењем прикладног графичког метода.	1.0

2.2 Карактеристика соларне ћелије

Склонити преграду са кружним отвором. Поставити отпорник променљиве отпорности у кутију као што је приказано на Слици 2.2. Поставити извор светлости у преграду 0 која је најдаља од отпорника. Поставити соларну ћелију А у држач за једну соларну ћелију (G на Слици 2.1) у преграду 10, при чему у овом случају *не треба користити преграду са кружним отвором*. Повезати коло приказано на Слици 2.5, помоћу којег ћете измерити карактеристику соларне ћелије, тј. зависност напона на соларној ћелији U од струје I у колу које се састоји од соларне ћелије, отпорника и амперметра.



Слика 2.5 Електрична шема која се користи за мерење карактеристике у задатку 2.2.

2.2a	Попуните табелу са одговарајућим мерењима U и I .	0.6
2.2b	Нацртати карактеристику соларне ћелије - график зависности U од I .	0.8

2.3 Теоријска карактеристика соларне ћелије

Карактеристику соларних ћелија у овом експерименту ћемо моделовати формулом

$$I = I_{\max} - I_0 \left(\exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right) - 1 \right)$$

где су параметри I_{\max} , I_0 и η константе при датом осветљењу. Узећемо да је температура једнака $T = 300$ K. Константе e и k_B су наелектрисање електрона и Болцманова константа.

2.3a	Коришћењем карактеристике из задатка 2.2b одредити I_{\max} .	0.4
------	---	-----

Можете претпоставити да параметар η може имати вредност из интервала од 1 до 4. За неке вредности напона U , формула се може апроксимирати са

$$I \approx I_{\max} - I_0 \exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right)$$

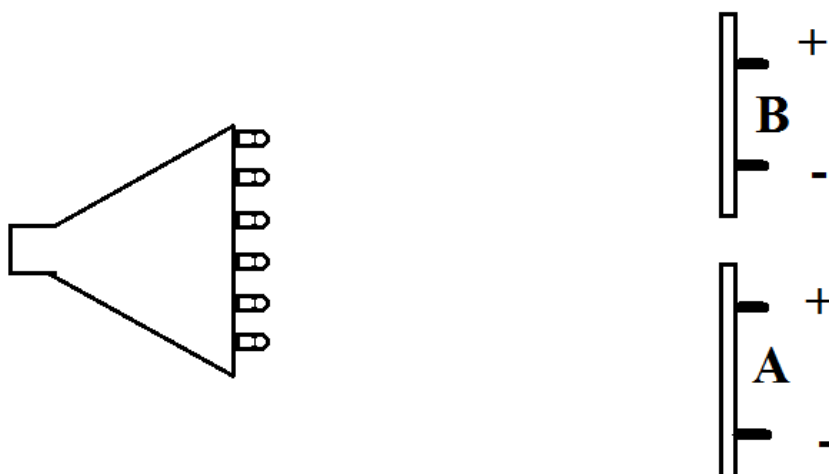
2.3b	Процените опсег вредности U за који је поменути апроксимација добра. Одредити графички вредности I_0 и η за вашу соларну ћелију.	1.2
------	---	-----

2.4 Максимална снага соларне ћелије

2.4a	Означићемо максималну снагу коју соларна ћелија може да преда спољашњем електричном колу са P_{\max} . Одредите P_{\max} за вашу соларну ћелију коришћењем одговарајућег броја мерења. (Можете користити нека од ваших претходних мерења из задатка 2.2)	0.5
2.4b	Процените оптималну отпорност потрошача R_{opt} , тј. спољашње отпорности повезане на соларну ћелију при којој соларна ћелија предаје максималну снагу потрошачу R_{opt} . Прикажите добијени резултат и одговарајућу грешку резултата и прикажите прорачуне којима сте дошли до резултата и одговарајуће грешке.	0.5

2.5 Поређење соларних ћелија

Поставите обе соларне ћелије (А и В) у држач за две соларне ћелије (I на Слици 2.1), који ћете поставити у преграду број 15, видети Сliku Fig. 2.6.

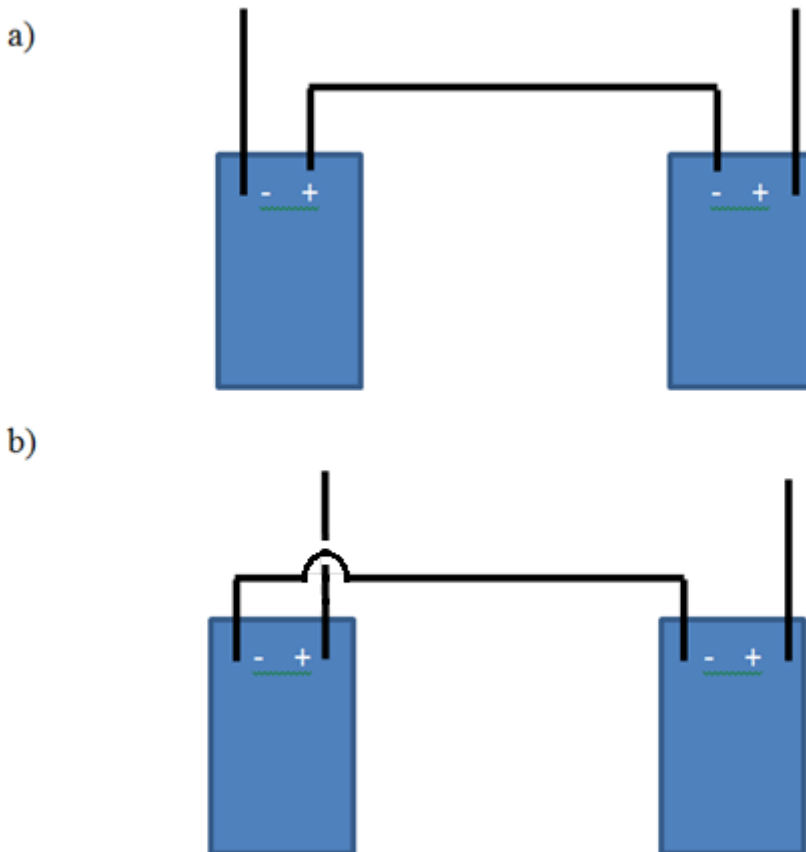


Слика 2.6 Поглед одозго извора светлости и соларних ћелија у задатку 2.5.

2.5a	Измерити при датом осветљењу: - Максималан напон U_A који се може измерити на соларној ћелији А. - Максималну струју I_A која се може измерити кроз соларну ћелију А. Урадите исто и за соларну ћелију В.	0.5
2.5b	Нацртати електричну шему кола које сте притом користили на коме је назначен начин повезивања соларних ћелија и мерних инструментата.	0.3

2.6 Повезивање више соларних ћелија

Две соларне ћелије се могу повезати редно на два различита начина приказана на Слици 2.7. Такође се на два различита могу повезати паралелно (која нису приказана на слици).

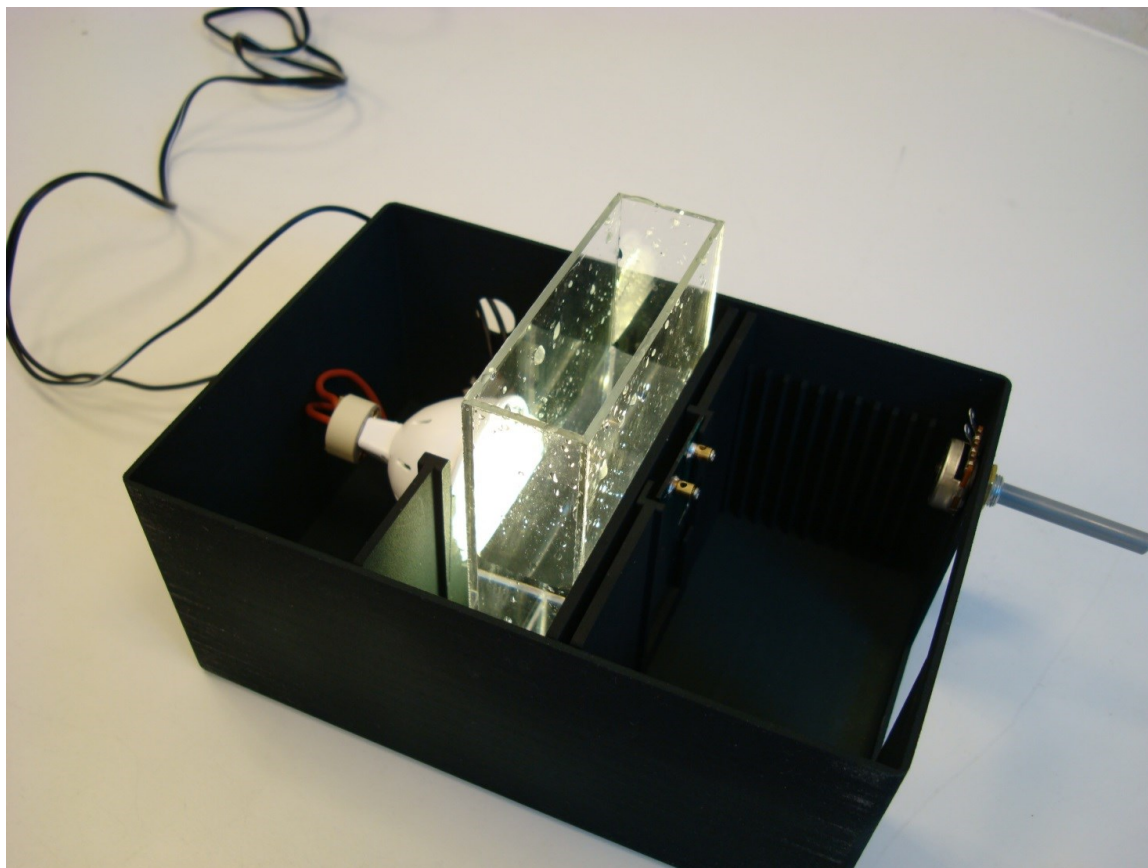


Слика 2.7 Два начина да се две соларне ћелије повежу редно у задатку 2.6. Два начина да се повежу паралелно нису приказана.

2.6	Одредити које од четири могућа повезивања две соларне ћелије даје највећу снагу у спољашњем колу кад се једна соларна ћелија закљони преградом за заклањање (која је означена са J на Слици 2.1). Упутство: Максималну снагу можете прилично добро проценити тако што ћете је израчунати из максималног напона и максималне струје измерене при датом начину повезивања. Нацртати одговарајући електрични дијаграм.	1.0
-----	---	-----

2.7 Ефекат посуде на струју кроз соларну ћелију

Поставите извор светлости у кутију и поставите соларну ћелију А у држач за једну соларну ћелију, при чему је преграда са кружним отвором непосредно испред ње тако да растојање између соларне ћелије и светлног извора буде око 50 mm. Поставите празну правоугаону посуду непосредно испред преграде са кружни отвором, као што је приказано на Слици 2.8.



Слика 2.8 Експериментална поставка у задатку 2.7.

2.7a	Измерите струју I , али сада у зависност од висине h воде у посуди, видите Сliku 2.8. Попунити табелу са мерењима и нацртати одговарајући график.	1.0
2.7b	Објаснити зашто график изгледа тако коришћењем само скица и симбола.	1.0

Поставите светлосни извор у кутију и поставите соларну ћелију А у држач за једну ћелију, тако да растојање између соларне ћелије и светлосног извора буде максимално. Поставите преграду са кружним отвором непосредно испред соларне ћелије.

2.7c	При овој поставци урадите следеће: - Измерите растојање r_1 између извора светлости и соларне ћелије и струју I_1 . - Поставите празну посуду непосредно испред преграде са кружним отвором и измерите струју I_2 . - Напуните посуду водом скоро до врха и измерите струју I_3 .	0.6
2.7d	Коришћењем ваших мерења из дела 2.7c одредити индекс преламања воде n_w . Објаснити метод који сте користили одговарајућим скицама и једначинама. Притом можете да извршите и додатна мерења ако је потребно.	1.6

Introduction

A meteoroid is a small particle (typically smaller than 1 m) from a comet or an asteroid. A meteoroid that impacts the ground is called a meteorite.

On the night of 17 January 2009 many people near the Baltic Sea saw the glowing trail or fireball of a meteoroid falling through the atmosphere of the Earth. In Sweden a surveillance camera recorded a video of the event, see Fig. 1.1(a). From these pictures and eyewitness accounts it was possible to narrow down the impact area, and six weeks later a meteorite with the mass 0.025 kg was found in the vicinity of the town Maribo in southern Denmark. Measurements on the meteorite, now named Maribo, and its orbit in the sky showed interesting results. Its speed when entering the atmosphere had been exceptionally high. Its age, 4.567×10^9 year, shows that it had been formed shortly after the birth of the solar system. The Maribo meteorite is possibly a part of Comet Encke.

The speed of Maribo

The fireball was moving in westerly direction, heading 285° relative to north, toward the location where the meteorite was subsequently found, as sketched in Fig. 1.1. The meteorite was found at a distance 195 km from the surveillance camera in the direction 230° relative to north.

1.1	Use this and the data in Fig. 1.1 to calculate the average speed of Maribo in the time interval between frames 155 and 161. The curvature of the Earth and the gravitational force on the meteoroid can both be neglected.	1.3
-----	--	-----

Through the atmosphere and melting?

The friction from the air on a meteoroid moving in the higher atmosphere depends in a complicated way on the shape and velocity of the meteoroid, and on the temperature and density of the atmosphere. As a reasonable approximation the friction force F in the upper atmosphere is given by the expression $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$, where k is a constant, ρ_{atm} the density of the atmosphere, A the projected cross-section area of the meteorite, and v its speed.

The following simplifying assumptions are made to analyze the meteoroid: The object entering the atmosphere was a sphere of mass $m_M = 30$ kg, radius $R_M = 0.13$ m, temperature $T_0 = 200$ K, and speed $v_M = 2.91 \times 10^4$ m/s. The density of the atmosphere is constant (its value 40 km above the surface of the Earth), $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3}$ kg/m³, and the friction coefficient is $k = 0.60$.

1.2a	Estimate how long time after entering the atmosphere it takes the meteoroid to have its speed reduced by 10 % from v_M to $0.90 v_M$. You can neglect the gravitational force on the meteoroid and assume, that it maintains its mass and shape.	0.7
1.2b	Calculate how many times larger the kinetic energy E_{kin} of the meteoroid entering the atmosphere is than the energy E_{melt} necessary for melting it completely (see data sheet).	0.3

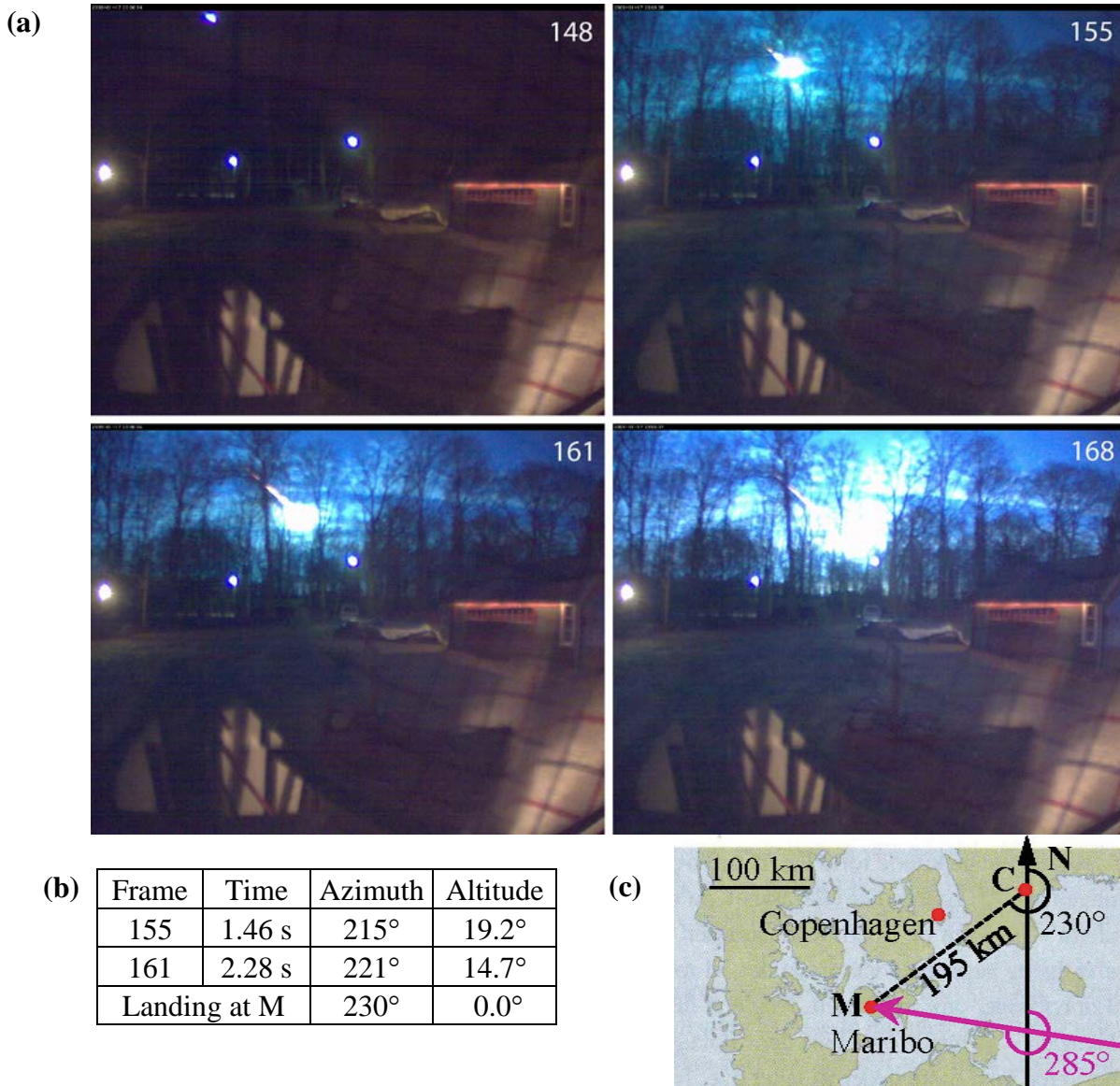


Figure 1.1 (a) Azimuth is the clockwise angular position from north in the horizontal plane, and altitude is the angular position above the horizon. A series of frames recorded by the surveillance camera in Sweden, showing the motion of Maribo as a fireball on its way down through the atmosphere. (b) The data from two frames indicating the time, the direction (azimuth) in degrees, as seen by the camera (C), and the height above the horizon (altitude) in degrees. (c) Sketch of the directions of the path (magenta arrow) of Maribo relative to north (N) and of the landing site (M) in Denmark as seen by the camera (C).

Heating of Maribo during its fall in the atmosphere

When the stony meteoroid Maribo entered the atmosphere at supersonic speed it appeared as a fireball because the surrounding air was glowing. Nevertheless, only the outermost layer of Maribo was heated. Assume that Maribo is a homogenous sphere with density ρ_{sm} , specific heat capacity c_{sm} , and thermal conductivity k_{sm} (for values see the data sheet). Furthermore, when entering the atmosphere, it had the temperature $T_0 = 200$ K. While falling through the atmosphere its surface temperature was constant $T_s = 1000$ K due to the air friction, thus gradually heating up the interior.

After falling a time t in the atmosphere, an outer shell of Maribo of thickness x will have been heated to a temperature significantly larger than T_0 . This thickness can be estimated by dimensional analysis as the simple product of powers of the thermodynamic parameters: $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$.

1.3a	Determine by dimensional (unit) analysis the value of the four powers α , β , γ , and δ .	0.6
1.3b	Calculate the thickness x after a fall time $t = 5$ s, and determine the ratio x/R_M .	0.4

The age of a meteorite

The chemical properties of radioactive elements may be different, so during the crystallization of the minerals in a given meteorite, some minerals will have a high content of a specific radioactive element and others a low content. This difference can be used to determine the age of a meteorite by radiometric dating of its radioactive minerals.

As a specific example, we study the isotope ^{87}Rb (element no. 37), which decays into the stable isotope ^{87}Sr (element no. 38) with a half-life of $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ year, relative to the stable isotope ^{86}Sr . At the time of crystallization the ratio $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ was identical for all minerals, while the ratio $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ was different. As time passes on, the amount of ^{87}Rb decreases by decay, while consequently the amount of ^{87}Sr increases. As a result, the ratio $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ will be different today. In Fig. 1.2(a), the points on the horizontal line refer to the ratio $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ in different minerals at the time, when they are crystallized.

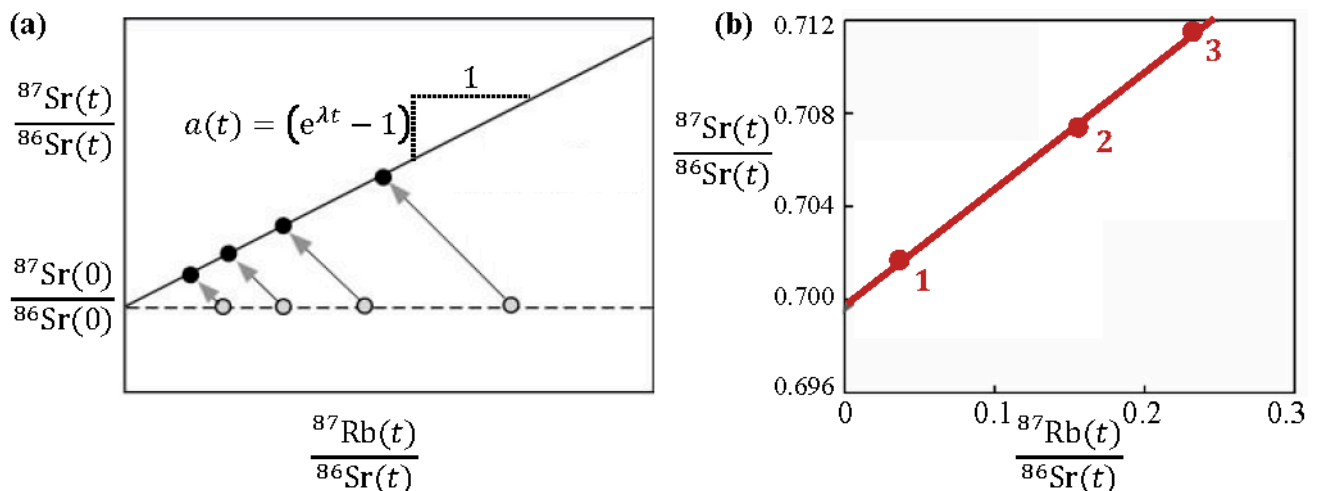


Figure 1.2 (a) The ratio $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ in different minerals at the time $t = 0$ of crystallization (open circles) and at present time (filled circles). (b) The isochron-line for three different mineral samples taken from a meteorite at present time.

1.4a	Write down the decay scheme for the transformation of $^{87}_{37}\text{Rb}$ to $^{87}_{38}\text{Sr}$.	0.3
1.4b	Show that the present-time ratio $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ plotted versus the present-time ratio $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ in different mineral samples from the same meteorite forms a straight line, the so-called isochron-line, with slope $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Here t is the time since the formation of the minerals, while λ is the decay constant inversely proportional to half-life $T_{1/2}$.	0.7
1.4c	Determine the age τ_M of the meteorite using the isochron-line of Fig. 1.2(b).	0.4

Comet Encke, from which Maribo may originate

In its orbit around the Sun, the minimum and maximum distances between comet Encke and the Sun are $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10}$ m and $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11}$ m, respectively.

1.5	Calculate the orbital period t_{Encke} of comet Encke.	0.6
-----	---	-----

Consequences of an asteroid impact on Earth

65 million years ago Earth was hit by a huge asteroid with density $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3$ kg m⁻³, radius $R_{\text{ast}} = 5.0$ km, and final speed of $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4$ m/s. This impact resulted in the extermination of most of the life on Earth and the formation of the enormous Chicxulub Crater. Assume that an identical asteroid would hit Earth today in a completely inelastic collision, and use the fact that the moment of inertia of Earth is 0.83 times that for a homogeneous sphere of the same mass and radius. The moment of inertia of a homogeneous sphere with mass M and radius R is $\frac{2}{5}MR^2$. Neglect any changes in the orbit of the Earth.

1.6a	Let the asteroid hit the North Pole. Find the maximum change in angular orientation of the axis of Earth after the impact.	0.7
1.6b	Let the asteroid hit the Equator in a radial impact. Find the change $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ in the duration of one revolution of Earth after the impact.	0.7
1.6c	Let the asteroid hit the Equator in a tangential impact in the equatorial plane. Find the change $\Delta\tau_{\text{tan}}$ in the duration of one revolution of Earth after the impact.	0.7

Maximum impact speed

Consider a celestial body, gravitationally bound in the solar system, which impacts the surface of Earth with a speed v_{imp} . Initially the effect of the gravitational field of the Earth on the body can be neglected. Disregard the friction in the atmosphere, the effect of other celestial bodies, and the rotation of the Earth.

1.7	Calculate v_{imp}^{\max} , the largest possible value of v_{imp} .	1.6
-----	--	-----

Introduction

In this problem we study an efficient process of steam production that has been demonstrated to work experimentally. An aqueous solution of spherical nanometer-sized silver spheres (nanoparticles) with only about 10^{13} particles per liter is illuminated by a focused light beam. A fraction of the light is absorbed by the nanoparticles, which are heated up and generate steam locally around them without heating up the entire water solution. The steam is released from the system in the form of escaping steam bubbles. Not all details of the process are well understood at present, but the core process is known to be absorption of light through the so-called collective electron oscillations of the metallic nanoparticles. The device is known as a plasmonic steam generator.

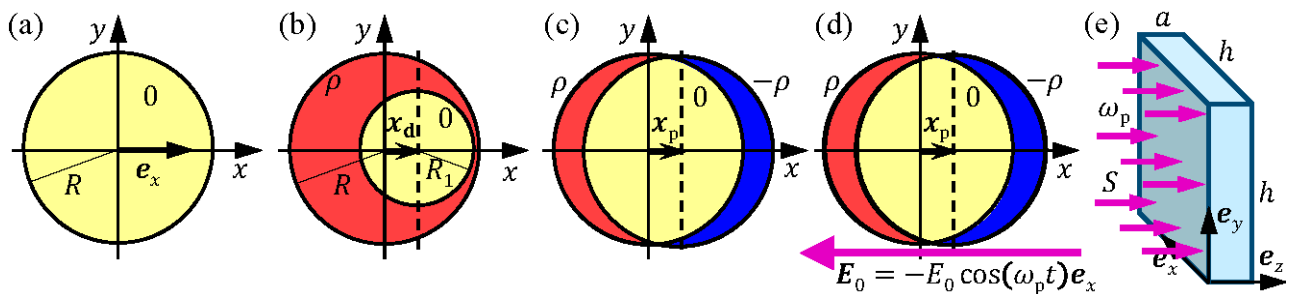


Figure 2.1 (a) A spherical charge-neutral nanoparticle of radius R placed at the center of the coordinate system. (b) A sphere with a positive homogeneous charge density ρ (red), and containing a smaller spherical charge-neutral region (0, yellow) of radius R_1 , with its center displaced by $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$. (c) The sphere with positive charge density ρ of the nanoparticle silver ions is fixed in the center of the coordinate system. The center of the spherical region with negative spherical charge density $-\rho$ (blue) of the electron cloud is displaced by \mathbf{x}_p , where $x_p \ll R$. (d) An external homogeneous electric field $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$. For time-dependent \mathbf{E}_0 , the electron cloud moves with velocity $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. (e) The rectangular vessel ($h \times h \times a$) containing the aqueous solution of nanoparticles illuminated by monochromatic light propagating along the z -axis with angular frequency ω_p and intensity S .

A single spherical silver nanoparticle

Throughout this problem we consider a spherical silver nanoparticle of radius $R = 10,0$ nm and with its center fixed at the origin of the coordinate system, see Fig. 2.1(a). All motions, forces and driving fields are parallel to the horizontal x -axis (with unit vector \mathbf{e}_x). The nanoparticle contains free (conduction) electrons moving within the whole nanoparticle volume without being bound to any silver atom. Each silver atom is a positive ion that has donated one such free electron.

2.1	Find the following quantities: The volume V and mass M of the nanoparticle, the number N and charge density ρ of silver ions in the particle, and for the free electrons their concentration n , their total charge Q , and their total mass m_0 .	0.7
-----	---	-----

The electric field in a charge-neutral region inside a charged sphere

For the rest of the problem assume that the relative dielectric permittivity of all materials is $\epsilon = 1$. Inside a charged sphere of homogeneous charge density ρ and radius R is created a small spherical charge-neutral region of radius R_1 by adding the opposite charge density $-\rho$, with its center displaced by $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ from the center of the R -sphere, see Fig. 2.1(b).

2.2	Show that the electric field inside the charge-neutral region is homogenous of the form $\mathbf{E} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$, and determine the pre-factor A .	1.2
-----	--	-----

The restoring force on the displaced electron cloud

In the following, we study the collective motion of the free electrons, and therefore model them as a single negatively charged sphere of homogeneous charge density $-\rho$ with a center position \mathbf{x}_p , which can move along the x -axis relative to the center of the positively charged sphere (silver ions) fixed at the origin of the coordinate system, see Fig. 2.1(c). Assume that an external force \mathbf{F}_{ext} displaces the electron cloud to a new equilibrium position $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ with $|x_p| \ll R$. Except for tiny net charges at opposite ends of the nanoparticle, most of its interior remains charge-neutral.

2.3	Express in terms of x_p and n the following two quantities: The restoring force \mathbf{F} exerted on the electron cloud and the work W_{el} done on the electron cloud during displacement.	1.0
-----	---	-----

The spherical silver nanoparticle in an external constant electric field

A nanoparticle is placed in vacuum and influenced by an external force \mathbf{F}_{ext} due to an applied static homogeneous electric field $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$, which displaces the electron cloud the small distance $|x_p|$, where $|x_p| \ll R$.

2.4	Find the displacement x_p of the electron cloud in terms of E_0 and n , and determine the amount $-\Delta Q$ of electron charge displaced through the yz -plane at the center of the nanoparticle in terms of n, R and x_p .	0.6
-----	--	-----

The equivalent capacitance and inductance of the silver nanoparticle

For both a constant and a time-dependent field \mathbf{E}_0 , the nanoparticle can be modeled as an equivalent electric circuit. The equivalent capacitance can be found by relating the work W_{el} , done on the separation of charges ΔQ , to the energy of a capacitor, carrying charge $\pm \Delta Q$. The charge separation will cause a certain equivalent voltage V_0 across the equivalent capacitor.

2.5a	Express the systems equivalent capacitance C in terms of ϵ_0 and R , and find its value.	0.7
2.5b	For this capacitance, determine in terms of E_0 and R the equivalent voltage V_0 that should be connected to the equivalent capacitor in order to accumulate the charge ΔQ .	0.4

For a time-dependent field \mathbf{E}_0 , the electron cloud moves with velocity $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, Fig. 2.1(d). It has the kinetic energy W_{kin} and forms an electric current I flowing through the fixed yz -plane. The kinetic energy of the electron cloud can be attributed to the energy of an equivalent inductor of inductance L carrying the current I .

2.6a	Express both W_{kin} and I in terms of the velocity v .	0.7
2.6b	Express the equivalent inductance L in terms of particle radius R , the electron charge e and mass m_e , the electron concentration n , and calculate its value.	0.5

The plasmon resonance of the silver nanoparticle

From the above analysis it follows that the motion, arising from displacing the electron cloud from its equilibrium position and then releasing it, can be modeled by an ideal LC -circuit oscillating at resonance. This dynamical mode of the electron cloud is known as the plasmon resonance, which oscillates at the so-called angular plasmon frequency ω_p .

2.7a	Find an expression for the angular plasmon frequency ω_p of the electron cloud in terms of the electron charge e and mass m_e , the electron density n , and the permittivity ϵ_0 .	0.5
2.7b	Calculate ω_p in rad/s and the wavelength λ_p in nm of light in vacuum having angular frequency $\omega = \omega_p$.	0.4

The silver nanoparticle illuminated with light at the plasmon frequency

In the rest of the problem, the nanoparticle is illuminated by monochromatic light at the angular plasmon frequency ω_p with the incident intensity $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$. As the wavelength is large, $\lambda_p \gg R$, the nanoparticle can be considered as being placed in a homogeneous harmonically oscillating field $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$. Driven by \mathbf{E}_0 , the center $\mathbf{x}_p(t)$ of the electron cloud oscillates at the same frequency with velocity $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ and constant amplitude x_0 . This oscillating electron motion leads to absorption of light. The energy captured by the particle is either converted into Joule heating inside the particle or re-emitted by the particle as scattered light.

Joule heating is caused by random inelastic collisions, where any given free electron once in a while hits a silver ion and loses its total kinetic energy, which is converted into vibrations of the silver ions (heat). The average time between the collisions is $\tau \gg 1/\omega_p$, where for silver nanoparticle we use $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$.

2.8a	Find an expression for the time-averaged Joule heating power P_{heat} in the nanoparticle as well as the time-averaged current squared $\langle I^2 \rangle$, which includes explicitly the time-averaged velocity squared $\langle v^2 \rangle$ of the electron cloud.	1.0
2.8b	Find an expression for the equivalent ohmic resistance R_{heat} in an equivalent resistor-model of the nanoparticle having the Joule heating power P_{heat} due to the electron cloud current I . Calculate the numerical value of R_{heat} .	1.0

The incident light beam loses some time-averaged power P_{scat} by scattering on the oscillating electron cloud (re-emission). P_{scat} depends on the scattering source amplitude x_0 , charge Q , angular frequency ω_p and properties of the light (the speed of light c and permittivity ϵ_0 in vacuum). In terms of these four variables, P_{scat} is given by $P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$.

2.9	By use of P_{scat} , find an expression of the equivalent scattering resistance R_{scat} (in analogy with R_{heat}) in an equivalent resistor-model, and calculate its value.	1.0
-----	---	-----

The above equivalent circuit elements are combined into an *LCR* series circuit model of the silver nanoparticle, which is driven by a harmonically oscillating equivalent voltage $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ determined by the electric field E_0 of the incident light.

2.10a	Derive expressions for the time-averaged power losses P_{heat} and P_{scat} involving the amplitude E_0 of the electric field in the incident light at the plasmon resonance $\omega = \omega_p$.	1.2
2.10b	Calculate the numerical value of E_0 , P_{heat} , and P_{scat} .	0.3

Steam generation by light

An aqueous solution of silver nanoparticles is prepared with a concentration $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$. It is placed inside a rectangular transparent vessel of size $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$ and illuminated by light at the plasmon frequency with the same intensity $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ at normal incidence as above, see Fig. 2.1(e). The temperature of the water is $T_{\text{wa}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ and we assume, in fair agreement with observations, that in steady state all Joule heating of the nanoparticle goes to the production of steam of temperature $T_{\text{st}} = 110 \text{ }^\circ\text{C}$, without raising the temperature of the water.

The thermodynamic efficiency η of the plasmonic steam generator is defined by the power ratio $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$, where P_{st} is the power going into the production of steam in the entire vessel, while P_{tot} is the total power of the incoming light that enters the vessel.

Most of the time any given nanoparticle is surrounded by steam instead of water, and it can thus be described as being in vacuum.

2.11a	Calculate the total mass per second μ_{st} of steam produced by the plasmonic steam generator during illumination by light at the plasmon frequency and intensity S .	0.6
2.11b	Calculate the numerical value of the thermodynamic efficiency η of the plasmonic steam generator.	0.2

Introduction

This problem deals with the physics of the Greenlandic ice sheet, the second largest glacier in the world, Fig. 3.1(a). As an idealization, Greenland is modeled as a rectangular island of width $2L$ and length $5L$ with the ground at sea level and completely covered by incompressible ice (constant density ρ_{ice}), see Fig. 3.1(b). The height profile $H(x)$ of the ice sheet does not depend on the y -coordinate and it increases from zero at the coasts $x = \pm L$ to a maximum height H_m along the middle north-south axis (the y -axis), known as the ice divide, see Fig. 3.1(c).

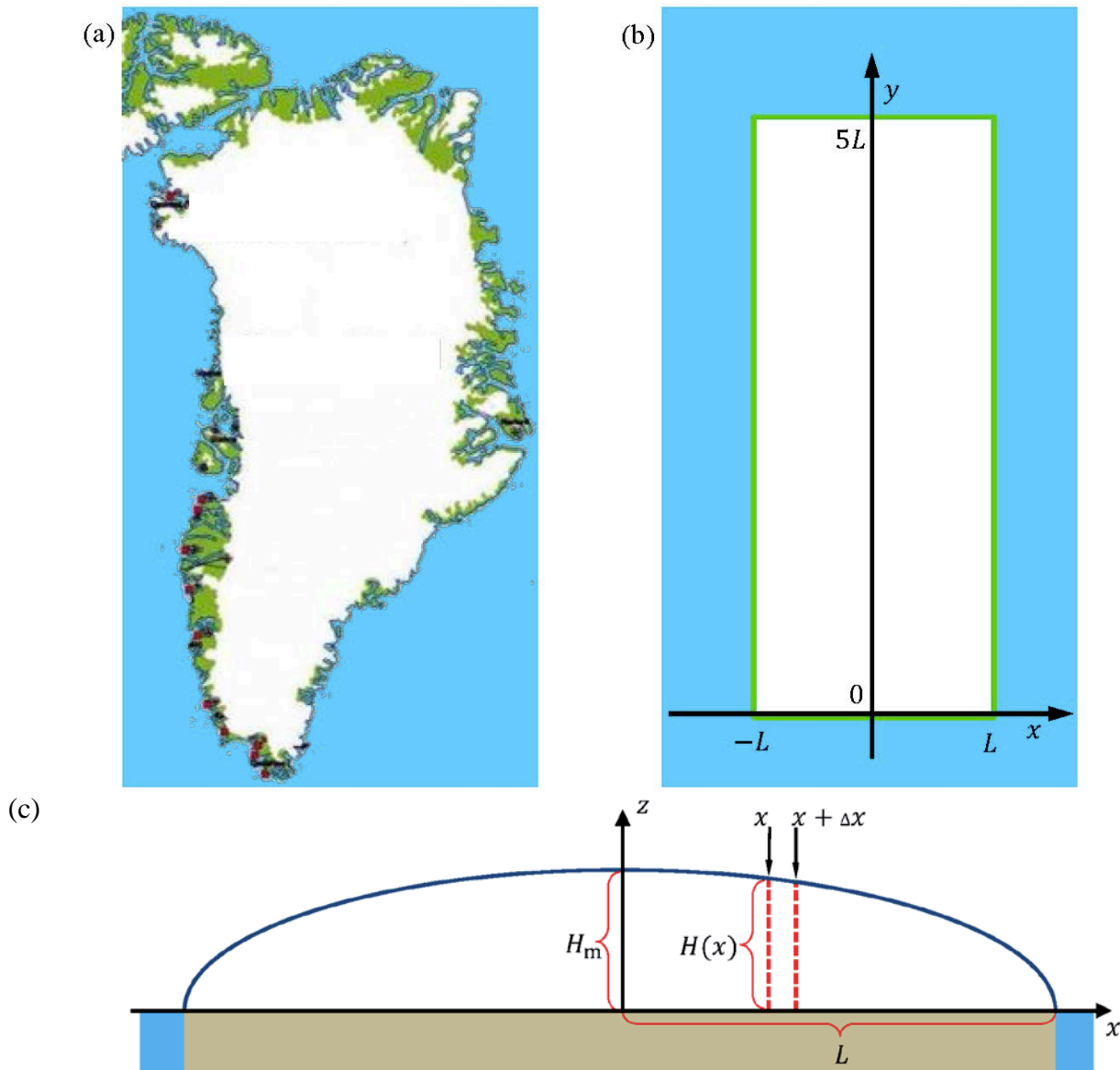


Figure 3.1 (a) A map of Greenland showing the extent of the ice sheet (white), the ice-free, coastal regions (green), and the surrounding ocean (blue). (b) The crude model of the Greenlandic ice sheet as covering a rectangular area in the xy -plane with side lengths $2L$ and $5L$. The ice divide, the line of maximum ice sheet height H_m runs along the y -axis. (c) A vertical cut (xz -plane) through the ice sheet showing the height profile $H(x)$ (blue line). $H(x)$ is independent of the y -coordinate for $0 < y < 5L$, while it drops abruptly to zero at $y = 0$ and $y = 5L$. The z -axis marks the position of the ice divide. For clarity, the vertical dimensions are expanded compared to the horizontal dimensions. The density ρ_{ice} of ice is constant.

Two useful formulas

In this problem you can make use of the integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

and the approximation $(1+x)^a \approx 1+ax$, valid for $|ax| \ll 1$.

The height profile of the ice sheet

On short time scales the glacier is an incompressible hydrostatic system with fixed height profile $H(x)$.

3.1	Write down an expression for the pressure $p(x, z)$ inside the ice sheet as a function of vertical height z above the ground and distance x from the ice divide. Neglect the atmospheric pressure.	0.3
-----	--	-----

Consider a given vertical slab of the ice sheet in equilibrium, covering a small horizontal base area $\Delta x \Delta y$ between x and $x + \Delta x$, see the red dashed lines in Fig. 3.1(c). The size of Δy does not matter. The net horizontal force component ΔF on the two vertical sides of the slab, arising from the difference in height on the center-side versus the coastal-side of the slab, is balanced by a friction force $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ from the ground on the base area $\Delta x \Delta y$, where $S_b = 100$ kPa.

3.2a	For a given value of x , show that in the limit $\Delta x \rightarrow 0$, $S_b = kH dH/dx$, and determine k	0.9
3.2b	Determine an expression for the height profile $H(x)$ in terms of ρ_{ice} , g , L , S_b and distance x from the divide. The result will show, that the maximum glacier height H_m scales with the half-width L as $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Determine the exponent γ with which the total volume V_{ice} of the ice sheet scales with the area A of the rectangular island, $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$.	0.5

A dynamical ice sheet

On longer time scale, the ice is a viscous incompressible fluid, which by gravity flows from the center part to the coast. In this model, the ice maintains its height profile $H(x)$ in a steady state, where accumulation of ice due to snow fall in the central region is balanced by melting at the coast. In addition to the ice sheet geometry of Fig. 3.1(b) and (c) make the following model assumptions:

- 1) Ice flows in the xz -plane away from the ice divide (the y -axis).
- 2) The accumulation rate c (m/year) in the central region is a constant.
- 3) Ice can only leave the glacier by melting near the coasts at $x = \pm L$.
- 4) The horizontal (x -)component $v_x(x) = dx/dt$ of the ice-flow velocity is independent of z .
- 5) The vertical (z -)component $v_z(z) = dz/dt$ of the ice-flow velocity is independent of x .

Consider only the central region $|x| \ll L$ close to the middle of the ice sheet, where height variations of the ice sheet are very small and can be neglected altogether, i.e. $H(x) \approx H_m$.

3.3	Use mass conservation to find an expression for the horizontal ice-flow velocity $v_x(x)$ in terms of c , x , and H_m .	0.6
-----	---	-----

From the assumption of incompressibility, i.e. the constant density ρ_{ice} of the ice, it follows that mass conservation implies the following restriction on the ice flow velocity components

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Write down an expression for the z dependence of the vertical component $v_z(z)$ of the ice-flow velocity.	0.6
-----	--	-----

A small ice particle with the initial surface position (x_i, H_m) will, as time passes, flow as part of the ice sheet along a flow trajectory $z(x)$ in the vertical xz -plane.

3.5	Derive an expression for such a flow trajectory $z(x)$.	0.9
-----	--	-----

Age and climate indicators in the dynamical ice sheet

Based on the ice-flow velocity components $v_x(x)$ and $v_z(z)$, one can estimate the age $\tau(z)$ of the ice in a specific depth $H_m - z$ from the surface of the ice sheet.

3.6	Find an expression for the age $\tau(z)$ of the ice as a function of height z above ground, right at the ice divide $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

An ice core drilled in the interior of the Greenland ice sheet will penetrate through layers of snow from the past, and the ice core can be analyzed to reveal past climate changes. One of the best indicators is the so-called $\delta^{18}\text{O}$, defined as

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{‰},$$

where $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ denotes the relative abundance of the two stable isotopes ^{18}O and ^{16}O of oxygen. The reference R_{ref} is based on the isotopic composition of the oceans around Equator.

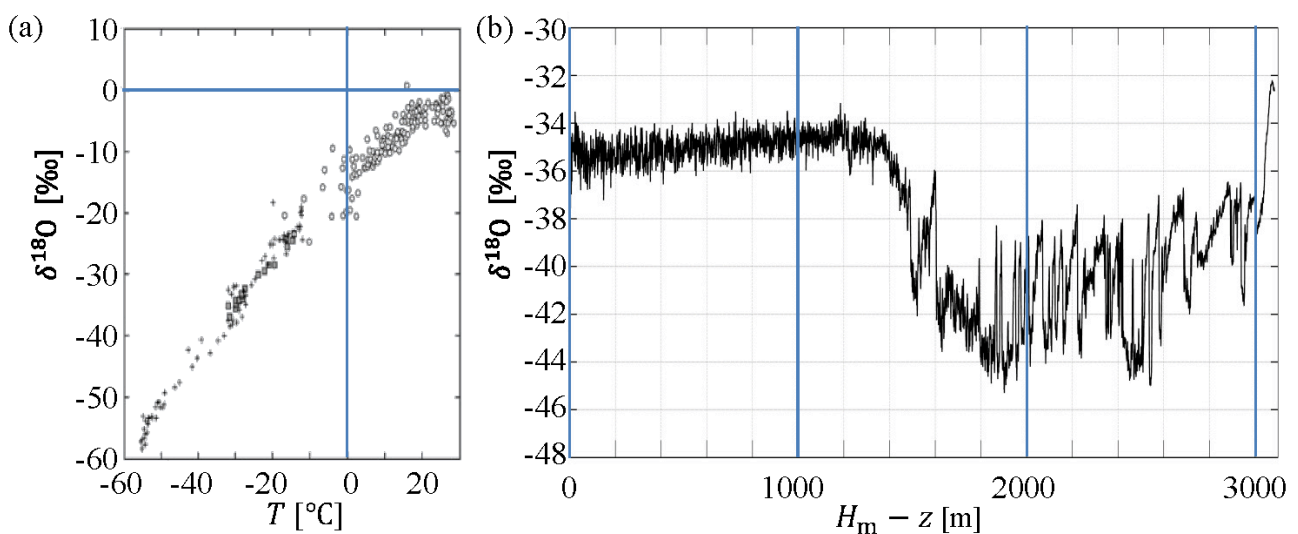


Figure 3.2 (a) Observed relationship between $\delta^{18}\text{O}$ in snow versus the mean annual surface temperature T . (b) Measurements of $\delta^{18}\text{O}$ versus depth $H_m - z$ from the surface, taken from an ice core drilled from surface to bedrock at a specific place along the Greenlandic ice divide where $H_m = 3060$ m.

Observations from the Greenland ice sheet show that $\delta^{18}\text{O}$ in the snow varies approximately linearly with temperature, Fig. 3.2(a). Assuming that this has always been the case, $\delta^{18}\text{O}$ retrieved from an ice core at depth $H_m - z$ leads to an estimate of the temperature T near Greenland at the age $\tau(z)$.

Measurements of $\delta^{18}\text{O}$ in a 3060 m long Greenlandic ice core show an abrupt change in $\delta^{18}\text{O}$ at a depth of 1492 m, Fig. 3.2(b), marking the end of the last ice age. The ice age began 120,000 years ago, corresponding to a depth of 3040 m, and the current interglacial age began 11,700 years ago, corresponding to a depth of 1492 m. Assume that these two periods can be described by two different accumulation rates, c_{ia} (ice age) and c_{ig} (interglacial age), respectively. You can assume H_m to be constant throughout these 120,000 years.

3.7a	Determine the accumulation rates c_{ia} and c_{ig} .	0.8
3.7b	Use the data in Fig. 3.2 to find the temperature change at the transition from the ice age to the interglacial age.	0.2

Sea level rise from melting of the Greenland ice sheet

A complete melting of the Greenlandic ice sheet will cause a sea level rise in the global ocean. As a crude estimate of this sea level rise, one may simply consider a uniform rise throughout a global ocean with constant area $A_O = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

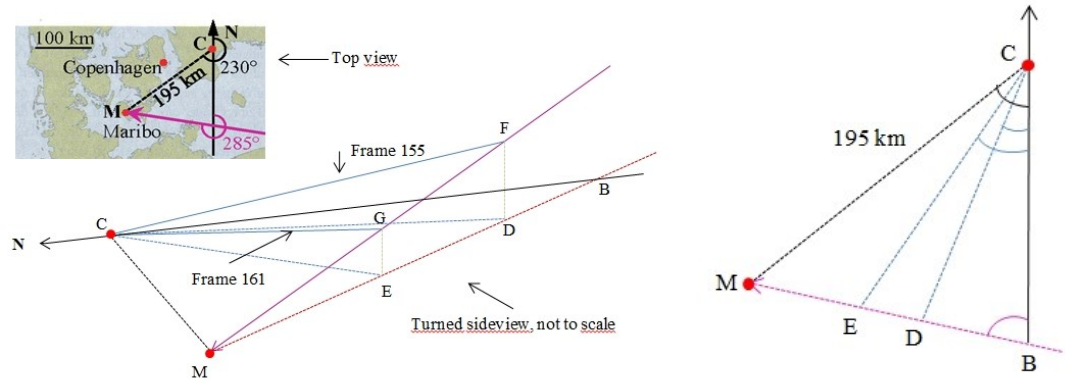
3.8	Calculate the average global sea level rise, which would result from a complete melting of the Greenlandic ice sheet, given its present area of $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ and $S_b = 100 \text{ kPa}$.	0.6
-----	---	-----

The massive Greenland ice sheet exerts a gravitational pull on the surrounding ocean. If the ice sheet melts, this local high tide is lost and the sea level will drop close to Greenland, an effect which partially counteracts the sea level rise calculated above.

To estimate the magnitude of this gravitational pull on the water, the Greenlandic ice sheet is now modeled as a point mass located at the ground level and having the total mass of the Greenlandic ice sheet. Copenhagen lies at a distance of 3500 km along the Earth surface from the center of the point mass. One may consider the Earth, without the point mass, to be spherically symmetric and having a global ocean spread out over the entire surface of the Earth of area $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$. All effects of rotation of the Earth may be neglected.

3.9	Within this model, determine the difference $h_{CPH} - h_{OPP}$ between sea levels in Copenhagen (h_{CPH}) and diametrically opposite to Greenland (h_{OPP}).	1.8
-----	---	-----

Solutions

1.1	 <p>Top view: Triangle MCB: $CM = 195 \text{ km}$, $\angle MCB = 230^\circ - 180^\circ = 50^\circ$, and $\angle MBC = 75^\circ$, so $\angle CMB = 180^\circ - 75^\circ - 50^\circ = 55^\circ$.</p> <p>Then $CB = \frac{ CM \sin(\angle CMB)}{\sin(\angle MBC)} = 165.4 \text{ km}$.</p> <p>Triangle DCB: $CB = 165.4 \text{ km}$, $\angle DCB = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$, and $\angle DBC = 75^\circ$, so $\angle CDB = 180^\circ - 75^\circ - 35^\circ = 70^\circ$.</p> <p>Then $CD = \frac{ CB \sin(\angle DBC)}{\sin(\angle CDB)} = 170.0 \text{ km}$.</p> <p>Triangle ECB: $CB = 165.4 \text{ km}$, $\angle ECB = 221^\circ - 180^\circ = 41^\circ$, and $\angle EBC = 75^\circ$, so $\angle CEB = 180^\circ - 75^\circ - 41^\circ = 64^\circ$.</p> <p>Then $CE = \frac{ CB \sin(\angle EBC)}{\sin(\angle CEB)} = 177.7 \text{ km}$.</p> <p>Triangle ECD: $\angle ECD = 41^\circ - 35^\circ = 6^\circ$. Horizontal distance travelled by Maribo: $DE = \frac{ DC \sin(\angle ECD)}{\sin(\angle CED)} = 19.77 \text{ km}$</p> <p>Side view: Triangle CFD: $FD = CD \tan(\angle FCD) = 59.20 \text{ km}$</p> <p>Triangle CGE: $GE = CE \tan(\angle GCE) = 46.62 \text{ km}$</p> <p>Thus vertical distance travelled by Maribo: $FD - GE = 12.57 \text{ km}$.</p> <p>Total distance travelled by Maribo from frame 155 to 161: $FG = \sqrt{ DE ^2 + (FD - GE)^2} = 23.43 \text{ km}$.</p> <p>The speed of Maribo is $v = \frac{23.43 \text{ km}}{2.28 \text{ s} - 1.46 \text{ s}} = 28.6 \text{ km/s}$</p>	1.2
-----	---	-----

1.2a	<p>Newton's second law: $m_M \frac{dv}{dt} = -k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2 v^2$ yields $\frac{1}{v^2} dv = -\frac{k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2}{m_M} dt$.</p> <p>By integration $t = \frac{m_M}{k\rho_{\text{atm}}\pi R_M^2} \left(\frac{1}{0.9} - 1 \right) \frac{1}{v_M} = 0.88 \text{ s}$.</p>	0.7
1.2b	$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{\frac{1}{2} v_M^2}{c_{\text{sm}}(T_{\text{sm}} - T_0) + L_{\text{sm}}} = \frac{4.2 \times 10^8}{2.1 \times 10^6} = 2.1 \times 10^2 \gg 1.$	0.3

1.3a	$[x] = [t]^\alpha [\rho_{sm}]^\beta [c_{sm}]^\gamma [k_{sm}]^\delta = [s]^\alpha [kg\ m^{-3}]^\beta [m^2\ s^{-2}\ K^{-1}]^\gamma [kg\ m\ s^{-3}\ K^{-1}]^\delta$, so $[m] = [kg]^\beta [m]^{-3\beta+2\gamma+\delta} [s]^{\alpha-2\gamma-3\delta} [K]^{-\gamma-\delta}$. Thus $\beta + \delta = 0$, $-3\beta + 2\gamma + \delta = 1$, $\alpha - 2\gamma - 3\delta = 0$, and $-\gamma - \delta = 0$. From which $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ and $x(t) \approx \sqrt{\frac{k_{sm}t}{\rho_{sm}c_{sm}}}$.	0.6
1.3b	$x(5\ s) = 1.6\ mm$ $x/R_M = 1.6\ mm/130\ mm = 0.012$.	0.4
1.4a	Rb-Sr decay scheme: ${}_{37}^{87}\text{Rb} \rightarrow {}_{38}^{87}\text{Sr} + {}_{-1}^0\text{e} + \bar{\nu}_e$	0.3
1.4b	$N_{87\text{Rb}}(t) = N_{87\text{Rb}}(0)e^{-\lambda t}$ and Rb→Sr: $N_{87\text{Sr}}(t) = N_{87\text{Sr}}(0) + [N_{87\text{Rb}}(0) - N_{87\text{Rb}}(t)]$. Thus $N_{87\text{Sr}}(t) = N_{87\text{Sr}}(0) + (e^{\lambda t} - 1)N_{87\text{Rb}}(t)$, and dividing by $N_{86\text{Sr}}$ we obtain the equation of a straight line: $\frac{N_{87\text{Sr}}(t)}{N_{86\text{Sr}}} = \frac{N_{87\text{Sr}}(0)}{N_{86\text{Sr}}} + (e^{\lambda t} - 1) \frac{N_{87\text{Rb}}(t)}{N_{86\text{Sr}}}$	0.7
1.4c	Slope: $e^{\lambda t} - 1 = a = \frac{0.712-0.700}{0.25} = 0.050$ and $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 4.9 \times 10^{10}$ year. So $\tau_M = \ln(1 + a) \frac{1}{\lambda} = \frac{\ln(1+a)}{\ln(2)} T_{1/2} = 3.4 \times 10^9$ year .	0.4
1.5	Kepler's 3rd law on comet Encke and Earth, with the orbital semi-major axis of Encke given by $a = \frac{1}{2}(a_{\min} + a_{\max})$. Thus $t_{\text{Encke}} = \left(\frac{a}{a_E}\right)^{3/2} t_E = 3.30$ year = 1.04×10^8 s.	0.6
1.6a	For Earth around its rotation axis: Angular velocity $\omega_E = \frac{2\pi}{24\ \text{h}} = 7.27 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$. Moment of inertia $I_E = 0.83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 = 8.07 \times 10^{37}\ \text{kg}\ \text{m}^2$. Angular momentum $L_E = I_E \omega_E = 5.87 \times 10^{33}\ \text{kg}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-1}$. Astroid $m_{\text{ast}} = \frac{4\pi}{3} R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}} = 1.57 \times 10^{15}\ \text{kg}$ and angular momentum $L_{\text{ast}} = m_{\text{ast}} v_{\text{ast}} R_E = 2.51 \times 10^{26}\ \text{kg}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-1}$. L_{ast} is perpendicular to L_E , so by conservation angular momentum: $\tan(\Delta\theta) = L_{\text{ast}}/L_E = 4.27 \times 10^{-8}$. The axis tilt $\Delta\theta = 4.27 \times 10^{-8}$ rad (so the north pole move $R_E \Delta\theta = 0.27$ m).	0.7
1.6b	At vertical impact $\Delta L_E = 0$ so $\Delta(I_E \omega_E) = 0$. Thus $\Delta\omega_E = -\omega_E(\Delta I_E)/I_E$, and since $\Delta I_E/I_E = m_{\text{ast}} R_E^2/I_E = 7.9 \times 10^{-10}$ we obtain $\Delta\omega_E = -5.76 \times 10^{-14}\ \text{s}^{-1}$. The change in rotation period is $\Delta T_E = 2\pi \left(\frac{1}{\omega_E + \Delta\omega_E} - \frac{1}{\omega_E}\right) \approx -2\pi \frac{\Delta\omega_E}{\omega_E^2} = 6.84 \times 10^{-5}$ s.	0.7
1.6c	At tangential impact L_{ast} is parallel to L_E so $L_E + L_{\text{ast}} = (I_E + \Delta I_E)(\omega_E + \Delta\omega_E)$ and thus $\Delta T_E = 2\pi \left(\frac{1}{\omega_E + \Delta\omega_E} - \frac{1}{\omega_E}\right) = 2\pi \left(\frac{I_E + \Delta I_E}{L_E + L_{\text{ast}}} - \frac{1}{\omega_E}\right) = -3.62 \times 10^{-3}$ s.	0.7

1.7a	Minimum impact speed is the escape velocity from Earth: $v_{\text{imp}}^{\text{min}} = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.2 \text{ km/s}$	0.5
1.7b	<p>Maximum impact speed $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$ arises from three contributions:</p> <p>(I) The velocity v_b of the body at distance a_E (Earth orbit radius) from the Sun, $v_b = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}} = 42.1 \text{ km/s}$.</p> <p>(II) The orbital velocity of the Earth, $v_E = \frac{2\pi a_E}{1 \text{ year}} = 29.8 \text{ km/s}$.</p> <p>(III) Gravitational attraction from the Earth and kinetic energy seen from the Earth: $\frac{1}{2}(v_b + v_E)^2 = -\frac{Gm_E}{R_E} + \frac{1}{2}(v_{\text{imp}}^{\text{max}})^2$.</p> <p>In conclusion: $v_{\text{imp}}^{\text{max}} = \sqrt{(v_b + v_E)^2 + \frac{2Gm_E}{R_E}} = 72.8 \text{ km/s}$.</p>	1.2
Total		9.0

Solutions

A single spherical silver nanoparticle

2.1	<p>Volume of the nanoparticle: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.19 \times 10^{-24} \text{ m}^3$.</p> <p>Mass of nanoparticles: $M = V \rho_{\text{Ag}} = 4.39 \times 10^{-20} \text{ kg}$</p> <p>Number of ions: $N = N_A \frac{M}{M_{\text{Ag}}} = 2.45 \times 10^5$.</p> <p>Charge density $\rho = \frac{eN}{V} = 9.38 \times 10^9 \text{ C m}^{-3}$</p> <p>Electron concentration $n = \frac{N}{V} = 5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$, so charge density $\rho = en$</p> <p>Total charge of free electrons $Q = eN = 3.93 \times 10^{-14} \text{ C}$,</p> <p>Total mass of free electrons $m_0 = m_e N = 2.23 \times 10^{-25} \text{ kg}$.</p>	0.7
-----	---	-----

The electric field in a charge-neutral region inside a charged sphere

2.2	<p>For a sphere with radius R and constant charge density ρ, for any point inside the sphere designated by radius-vector $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ($r < R$) Gauss's law yields directly $4\pi r^2 \epsilon_0 \mathbf{E}_+ = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \mathbf{e}_r$, where \mathbf{e}_r is the unit radial vector pointing away from the center of the sphere. Thus, $\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$.</p> <p>Likewise, inside another sphere of radius R_1 and charge density $-\rho$ the field is $\mathbf{E}_- = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}'$, where \mathbf{r}' is the radius-vector of the point in the coordinate system with the origin in the center of this sphere.</p> <p>Merging the two charge configurations gives the setup we want with $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_d$. So inside the charge-free region $\mathbf{r} - \mathbf{x}_p < R_1$ the field is $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_d)$ or $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d$ with the pre-factor $A = \frac{1}{3}$</p>	1.2
-----	---	-----

The restoring force on the displaced electron cloud

2.3	<p>With $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ and $x_p \ll R$ we have from above that approximately the field induced inside the particle is $\mathbf{E}_{\text{ind}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p$. The number of electrons that produced \mathbf{E}_{ind} is negligibly smaller than the number of electrons inside the particle, so $\mathbf{F} \cong Q\mathbf{E}_{\text{ind}} = (-eN) \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p = -\frac{4\pi}{9\epsilon_0} R^3 e^2 n^2 x_p \mathbf{e}_x$ (like for a harmonic oscillator).</p> <p>The work done on the electrons to shift the electron cloud is $W_{\text{el}} = -\int_0^{x_p} F(x') dx' = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{9\epsilon_0} R^3 e^2 n^2 \right) x_p^2$</p>	1.0
-----	--	-----

The spherical silver nanoparticle in an external constant electric field

2.4	<p>Inside the metallic particle in the steady state the electric field must be equal to 0. The induced field (from 2.2 or 2.3) compensates the external field: $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{ind}} = 0$, so $x_p = \frac{3\epsilon_0}{\rho} E_0 = \frac{3\epsilon_0}{en} E_0$.</p> <p>Charge displaced through the yz-plane is the total charge of electrons in the cylinder of</p>	0.6
-----	--	-----

	radius R and height x_p : $-\Delta Q = -\rho \pi R^2 x_p = -\pi R^2 n e x_p$.	
--	--	--

The equivalent capacitance and inductance of the silver nanoparticle

2.5a	The electric energy W_{el} of a capacitor with capacitance C holding charges $\pm \Delta Q$ is $W_{el} = \frac{\Delta Q^2}{2C}$. The energy of such capacitor is equal to the work (see 2.3) done to separate the charges (see 2.4), thus $C = \frac{\Delta Q^2}{2W_{el}} = \frac{9}{4} \epsilon_0 \pi R = 6.26 \times 10^{-19}$ F.	0.7
2.5b	Equivalent scheme for a capacitor reads: $\Delta Q = C V_0$. Combining charge from (2.4) and capacitance from (2.5a) gives $V_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{4}{3} R E_0$.	0.4

2.6a	The kinetic energy of the electron cloud is defined as the kinetic energy of one electron multiplied by the number of electrons in the cloud $W_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 N = \frac{1}{2} m_e v^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 n \right)$. The current I is the charge of electrons in the cylinder of area πR^2 and height $v \Delta t$ divided by time Δt , thus $I = -e n v \pi R^2$.	0.7
2.6b	The energy carried by current I in the equivalent circuit with inductance L is $W = \frac{1}{2} L I^2$ is, in fact, the kinetic energy of electrons W_{kin} . Taking the energy and current from (2.6a) results $L = \frac{4 m_e}{3 \pi R n e^2} = 2.57 \times 10^{-14}$ H.	0.5

The plasmon resonance of the silver nanoparticle

2.7a	From the LC-circuit analogy we can directly derive $\omega_p = (LC)^{-1/2} = \sqrt{ne^2/3\epsilon_0 m_e}$. Alternatively it is possible to use the harmonic law of motion in (2.3) and get the same result for the frequency	0.5
2.7b	$\omega_p = 7.88 \times 10^{15}$ rad/s, for light with angular frequency $\omega = \omega_p$ wavelength is $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p = 239$ nm.	0.4

The silver nanoparticle illuminated with light at the plasmon frequency

2.8a	The velocity of an electron $v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin \omega t = v_0 \sin \omega t$. For harmonic motion it is enough to average over period of oscillations. The time-averaged kinetic energy on the electron $\langle W_k \rangle = \langle \frac{m_e v^2}{2} \rangle = \frac{m_e}{2} \langle v^2 \rangle$. During time t_0 each electron hits the ions t_0/τ times. So The energy lost in the whole nanoparticle during one period of oscillations is $W_{heat} = N \langle \frac{m_e v^2}{2} \rangle = \frac{4}{3} \pi R^3 n \langle \frac{m_e v^2}{2} \rangle$. Time-averaged Joule heating power $P_{heat} = \frac{1}{\tau} W_{kin} = \frac{1}{2\tau} m_e \langle v^2 \rangle \left(\frac{4}{3} \pi R^3 n \right)$. The expression for current is taken from (2.6a), squared and averaged $\langle I^2 \rangle = (en \pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle = \left(\frac{3Q}{4R} \right)^2 \langle v^2 \rangle$.	1.0
------	--	-----

2.8b	The oscillating current $I = I_0 \sin \omega t = \pi R^2 n e v_0 \sin \omega t$ produces the heat in the resistance R_{heat} equal to $P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle$, what together with results from (2.8a) leads to $R_{\text{heat}} = \frac{W_{\text{kin}}}{I^2} = \frac{2m_e}{3\pi n e^2 R \tau} = 2.46 \Omega$.	1.0
2.9	$R_{\text{scat}} = \frac{P_{\text{scat}}}{\langle I^2 \rangle}$ and $\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_p^2 x_0^2$ yields $R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \frac{16R^2}{9Q^2 \langle v^2 \rangle} = \frac{8\omega_0^2 R^2}{27\pi \epsilon_0 c^3} = 2.45 \Omega$.	1.0
2.10a	Ohm's law for a <i>LCR</i> serious circuit is $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$. At the resonance frequency time-averaged voltage squared is $\langle V^2 \rangle = Z_R^2 \langle I^2 \rangle = (R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2 \langle I^2 \rangle$. And from (2.5b) $\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2} V_0^2 = \frac{8}{9} R^2 E_0^2$, so Ohm's law results in $\langle I^2 \rangle = \frac{8R^2 E_0^2}{9(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$. Now time-averaged power loses are $P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle = \frac{8R_{\text{heat}} R^2}{9(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2} E_0^2$ and $P_{\text{scat}} = \frac{8R_{\text{scat}} R^2}{9(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2} E_0^2 = \frac{R_{\text{scat}}}{R_{\text{heat}}} \langle P_{\text{heat}} \rangle$.	1.2
2.10b	Starting with the electric field amplitude $E_0 = \sqrt{2S/(\epsilon_0 c)} = 27.4 \text{ kV/m}$, we calculate $P_{\text{heat}} = 6.82 \text{ nW}$ and $P_{\text{scat}} = 6.81 \text{ nW}$.	0.3

Steam generation by light

2.11a	Total number of nanoparticles in the vessel: $N_{\text{np}} = h^2 a n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{11}$. Then the total time-averaged Joule heating power: $P_{\text{st}} = N_{\text{np}} P_{\text{heat}} = 4.98 \text{ kW}$. This power goes into the steam generation: $P_{\text{st}} = \mu_{\text{st}} L_{\text{tot}}$, with $L_{\text{tot}} = c_{\text{wa}}(T_{100} - T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}} - T_{100}) = 2.62 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$. Thus the mass of steam produced in second μ_{st} : $\mu_{\text{st}} = \frac{P_{\text{st}}}{L_{\text{tot}}} = 1.90 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}$.	0.6
2.11b	The power of light incident on the vessel $P_{\text{tot}} = h^2 S = 0.01 \text{ m}^2 \times 1 \text{ MW m}^{-2} = 10.0 \text{ kW}$, and the power directed for steam production by nanoparticles is given in 2.11a. Thus $\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{4.98 \text{ kW}}{10.0 \text{ kW}} = 0.498$.	0.2
Total		12.0

Solutions

3.1	The pressure is given by the hydrostatic pressure $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g (H(x) - z)$, which is zero at the surface.	0.3
3.2a	<p>The outward force on a vertical slice at a distance x from the middle and of a given width Δy is obtained by integrating up the pressure times the area:</p> $F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}} g (H(x) - z) dz = \frac{1}{2} \Delta y \rho_{\text{ice}} g H(x)^2$ <p>which implies that $\Delta F = F(x) - F(x + \Delta x) = -\frac{dF}{dx} \Delta x = -\Delta y \rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx} \Delta x$. This finally shows that</p> $S_b = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y} = -\rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx}$ <p>Notice the sign, which must be like this, since S_b was defined as positive and $H(x)$ is a decreasing function of x.</p>	0.9
3.2b	<p>To find the height profile, we solve the differential equation for $H(x)$:</p> $-\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} = H(x) \frac{dH}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} H(x)^2$ <p>with the boundary condition that $H(L) = 0$. This gives the solution:</p> $H(x) = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}} \sqrt{1 - x/L}$ <p>Which gives the maximum height $H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}$.</p> <p>Alternatively, dimensional analysis could be used in the following manner. First notice that $\mathcal{L} = [H_m] = [\rho_{\text{ice}}^\alpha g^\beta \tau_b^\gamma L^\delta]$. Using that $[\rho_{\text{ice}}] = \mathcal{M} \mathcal{L}^{-3}$, $[g] = \mathcal{L} \mathcal{T}^{-2}$, $[\tau_b] = \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{T}^{-2}$, demands that $\mathcal{L} = [H_m] = [\rho_{\text{ice}}^\alpha g^\beta \tau_b^\gamma L^\delta] = \mathcal{M}^{\alpha+\gamma} \mathcal{L}^{-3\alpha+\beta-\gamma+\delta} \mathcal{T}^{-2\beta-2\gamma}$, which again implies $\alpha + \gamma = 0$, $-3\alpha + \beta - \gamma + \delta = 1$, $2\beta + 2\gamma = 0$. These three equations are solved to give $\alpha = \beta = -\gamma = \delta - 1$, which shows that</p> $H_m \propto \left(\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} \right)^\gamma L^{1-\gamma}$ <p>Since we were informed that $H_m \propto \sqrt{L}$, it follows that $\gamma = 1/2$. With the boundary condition $H(L) = 0$, the solution then take the form</p> $H(x) \propto \left(\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} \right)^{1/2} \sqrt{L - x}$ <p>The proportionality constant of $\sqrt{2}$ cannot be determined in this approach.</p>	0.8

3.2c	<p>For the rectangular Greenland model, the area is equal to $A = 10L^2$ and the volume is found by integrating up the height profile found in problem 3.2b:</p> $V_{G,ice} = (5L)2 \int_0^L H(x) dx = 10L \int_0^L \left(\frac{\tau_b L}{\rho_{ice} g}\right)^{1/2} \sqrt{1 - x/L} dx = 10H_m L^2 \int_0^1 \sqrt{1 - \tilde{x}} d\tilde{x}$ $= 10H_m L^2 \left[-\frac{2}{3}(1 - \tilde{x})^{3/2}\right]_0^1 = \frac{20}{3} H_m L^2 \propto L^{5/2},$ <p>where the last line follows from the fact that $H_m \propto \sqrt{L}$. Note that the integral need not be carried out to find the scaling with L. This implies that $V_{G,ice} \propto A_G^{5/4}$ and the wanted exponent is $\gamma = 5/4$.</p>	0.5
------	--	-----

3.3	<p>According to the assumption of constant accumulation c the total mass accumulation rate from an area of width Δy between the ice divide at $x = 0$ and some point at $x > 0$ must equal the total mass flux through the corresponding vertical cross section at x. That is: $\rho c x \Delta y = \rho \Delta y H_m v_x(x)$, from which the velocity is isolated:</p> $v_x(x) = \frac{cx}{H_m}$	0.6
-----	--	-----

3.4	<p>From the given relation of incompressibility it follows that</p> $\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}$ <p>Solving this differential equation with the initial condition $v_z(0) = 0$, shows that:</p> $v_z(z) = -\frac{cz}{H_m}$	0.6
-----	--	-----

3.5	<p>Solving the two differential equations</p> $\frac{dz}{dt} = -\frac{cz}{H_m} \quad \text{and} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{cx}{H_m}$ <p>with the initial conditions that $z(0) = H_m$, and $x(0) = x_i$ gives</p> $z(t) = H_m e^{-ct/H_m} \quad \text{and} \quad x(t) = x_i e^{ct/H_m}$ <p>This shows that $z = H_m x_i / x$, meaning that flow lines are hyperbolas in the xz-plane. Rather than solving the differential equations, one can also use them to show that</p> $\frac{d}{dt}(xz) = \frac{dx}{dt}z + x\frac{dz}{dt} = \frac{cx}{H_m}z - x\frac{cz}{H_m} = 0$ <p>which again implies that $xz = \text{const}$. Fixing the constant by the initial conditions, again leads to the result that $z = H_m x_i / x$.</p>	0.9
-----	--	-----

3.6	<p>At the ice divide, $x = 0$, the flow will be completely vertical, and the t-dependence of z found in 3.5 can be inverted to find $\tau(z)$. One finds that $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln\left(\frac{H_m}{z}\right)$.</p>	1.0
-----	---	-----

3.7a	<p>The present interglacial period extends to a depth of 1492 m, corresponding to 11,700 year. Using the formula for $\tau(z)$ from problem 3.6, one finds the following accumulation rate for the interglacial:</p> $c_{ig} = \frac{H_m}{11,700 \text{ years}} \ln \left(\frac{H_m}{H_m - 1492 \text{ m}} \right) = 0.1749 \text{ m/year.}$ <p>The beginning of the ice age 120,000 years ago is identified as the drop in $\delta^{18}\text{O}$ in figure 3.2b at a depth of 3040 m. Using the vertical flow velocity found in problem 3.4, on has $\frac{dz}{z} = -\frac{c}{H_m} dt$, which can be integrated down to a depth of 3040 m, using a stepwise constant accumulation rate:</p> $\begin{aligned} H_m \ln \left(\frac{H_m}{H_m - 3040 \text{ m}} \right) &= -H_m \int_{H_m}^{H_m - 3040 \text{ m}} \frac{1}{z} dz \\ &= \int_{11,700 \text{ year}}^{120,000 \text{ year}} c_{ia} dt + \int_0^{11,700 \text{ year}} c_{ig} dt \\ &= c_{ia}(120,000 \text{ year} - 11,700 \text{ year}) + c_{ig} 11,700 \text{ year} \end{aligned}$ <p>Isolating form this equation leads to $c_{ia} = 0.1232$, i.e. far less precipitation than now.</p>	0.8
3.7b	<p>Reading off from figure 3.2b: $\delta^{18}\text{O}$ changes from $-43,5 \text{ ‰}$ to $-34,5 \text{ ‰}$. Reading off from figure 3.2a, T then changes from -40 °C to -28 °C. This gives $\Delta T \approx 12 \text{ °C}$.</p>	0.2
3.8	<p>From the area A_G one finds that $L = \sqrt{A_G/10} = 4.14 \times 10^5 \text{ m}$. Inserting numbers in the volume formula found in 3.2c, one finds that:</p> $V_{G,ice} = \frac{20}{3} L^{5/2} \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice}g}} = 3.45 \times 10^{15} \text{ m}^3$ <p>This ice volume must be converted to liquid water volume, by equating the total masses, i.e. $V_{G,wa} = V_{G,ice} \frac{\rho_{ice}}{\rho_{wa}} = 3.17 \times 10^{15} \text{ m}^3$, which is finally converted to a sea level rise, as $h_{G,rise} = \frac{V_{G,wa}}{A_0} = 8.79 \text{ m}$.</p>	0.6

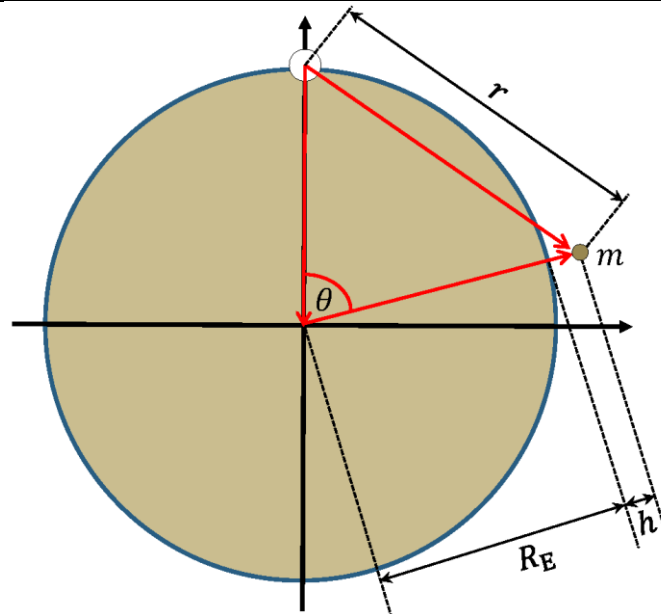


Figure 3.S1 Geometry of the ice ball (white circle) with a test mass m (small gray circle).

The total mass of the ice is

$$M_{\text{ice}} = V_{G,\text{ice}} \rho_{\text{ice}} = 3.17 \times 10^{18} \text{ kg} = 5.31 \times 10^{-7} m_E$$

- 3.9 The total gravitational potential felt by a test mass m at a certain height h above the surface of the Earth, and at a polar angle θ (cf. figure 3.S1), with respect to a rotated polar axis going straight through the ice sphere is found by adding that from the Earth with that from the ice:

1.6

$$U_{\text{tot}} = -\frac{Gm_E m}{R_E + h} - \frac{GM_{\text{ice}} m}{r} = -mgR_E \left(\frac{1}{1 + h/R_E} + \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} \right)$$

where $g = Gm_E/R_E^2$. Since $h/R_E \ll 1$ one may use the approximation given in the problem, $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$, $|x| \ll 1$, to approximate this by

$$U_{\text{tot}} \approx -mgR_E \left(1 - \frac{h}{R_E} + \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} \right).$$

Isolating h now shows that $h = h_0 + \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} R_E$, where $h_0 = R_E + U_{\text{tot}}/(mg)$. Using again that $h/R_E \ll 1$, trigonometry shows that $r \approx 2R_E |\sin(\theta/2)|$, and one has:

$$h(\theta) - h_0 \approx \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{2|\sin(\theta/2)|} R_E \approx \frac{1.69 \text{ m}}{|\sin(\theta/2)|}$$

To find the magnitude of the effect in Copenhagen, the distance of 3500 km along the surface is used to find the angle $\theta_{\text{CPH}} = (3.5 \times 10^6 \text{ m})/R_E \approx 0.549$, corresponding to $h_{\text{CPH}} - h_0 \approx 6.25 \text{ m}$. Directly opposite to Greenland corresponds to $\theta = \pi$, which gives $h_{\text{OPP}} - h_0 \approx 1.69 \text{ m}$. The difference is then $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.56 \text{ m}$, where h_0 has dropped out.

Total

9.0

Solution E1 (Important: In this document decimal comma is used instead of decimal point in graphs and tables)

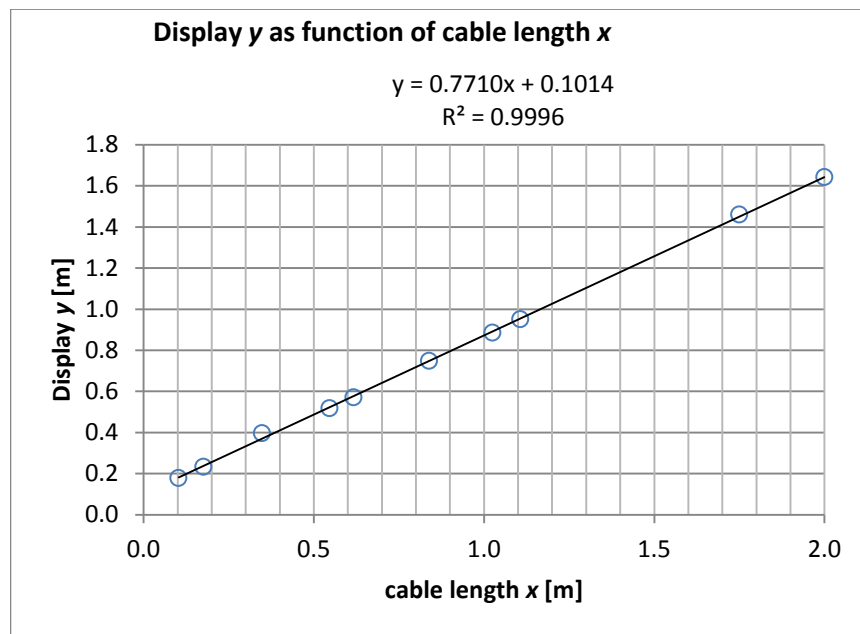
1.1

$H = 907 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm}$. See the sketch in the figure corresponding to 1.3b. It must appear how the height is measured with the LDM in the rear mode.

1.2a

I used a 2 m cable but 1 m is sufficient. There should be about 8 lengths evenly distributed in the interval $[0; 1 \text{ m}]$.

x	y
m	m
0,103	0,177
0,176	0,232
0,348	0,396
0,546	0,517
0,617	0,570
0,839	0,748
1,025	0,885
1,107	0,950
1,750	1,459
2,000	1,642



1.2b

The refractive index is twice the gradient of the linear graph, $n_{\text{co}} = 2 \cdot 0.7710 = 1.542$.

The reason for that is that the travel time for a light pulse

$$t = \frac{x}{v_{\text{co}}} = \frac{xn_{\text{co}}}{c}$$

The display will therefore show $y = \frac{1}{2}ct + k \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}n_{\text{co}}x + k$.

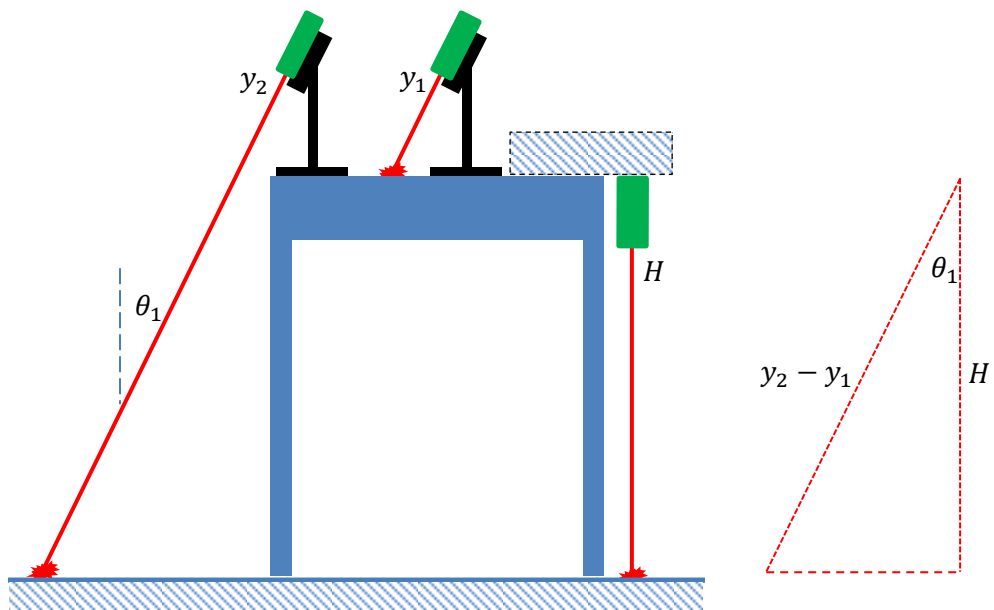
The speed of light in the core of the cable is $v_{\text{co}} = \frac{c}{n_{\text{co}}} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,542} = 1.95 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1.3a

$$y_1 = 312 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm}, y_2 = 1273 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm}$$

1.3b

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{H}{y_2 - y_1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{907 \text{ mm}}{961 \text{ mm}}\right) = 19.30^\circ, \text{ se figure:}$$



Measuring the horizontal part of some triangle is very inaccurate because of the size of the laser dot. No marks will be awarded for that

Using $\delta = 2 \text{ mm}$ as the uncertainty of y_1 , y_2 and H , one can calculate the uncertainty of θ_1

$$\Delta \cos \theta_1 = \Delta \left(\frac{H}{y_2 - y_1} \right)$$

Using simple derivative, we get

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 \cdot \Delta \theta_1 &= \frac{\delta}{H} + \frac{2\delta}{y_2 - y_1} \\ \Delta \theta_1 &= \frac{\left(\frac{\delta}{H} + \frac{2\delta}{y_2 - y_1}\right) \cdot 180^\circ}{\tan \theta_1 \cdot \pi} = \frac{\left(\frac{2}{907} + \frac{4}{961}\right) \cdot 180^\circ}{\tan 19,30^\circ \cdot \pi} \approx 1^\circ \end{aligned}$$

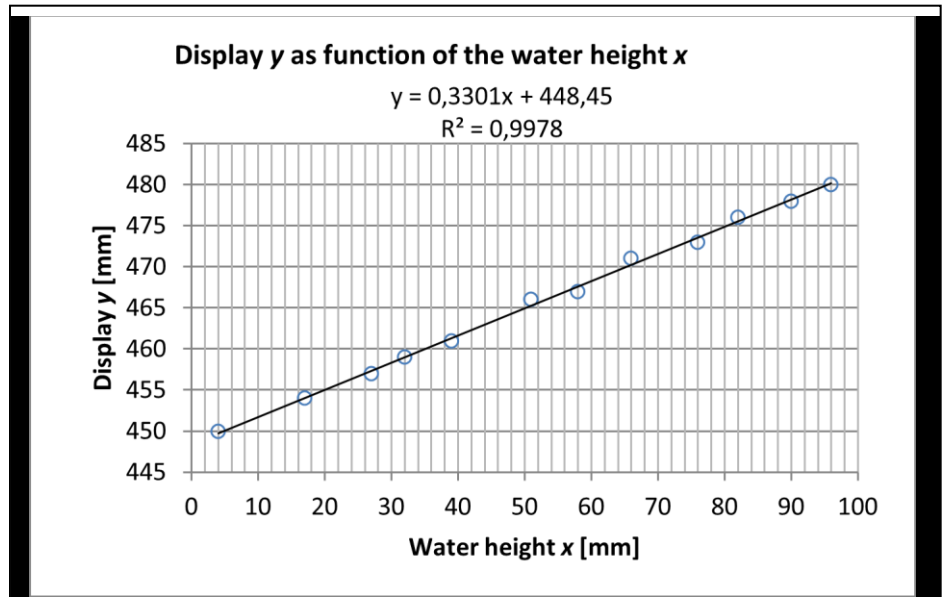
Otherwise, using min/max method

$$\Delta \theta_1 = \theta_{1\max} - \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{H_{\min}}{y_{2\max} - y_{1\min}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{905 \text{ mm}}{965 \text{ mm}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{907 \text{ mm}}{961 \text{ mm}}\right) = 1.0^\circ$$

Also, accept $\delta = 1 \text{ mm}$ and $\Delta \theta_1 = 0.5^\circ$.

1.4a

x	y
mm	mm
4	450
17	454
27	457
32	459
39	461
51	466
58	467
66	471
76	473
82	476
90	478
96	480



1.4b

The time it takes the light to reach the water surface is

$$t_1 = \frac{(h - x) / \cos \theta_1}{c}$$

From the water surface to the bottom the light uses the time

$$t_2 = \frac{x / \cos \theta_2}{v}$$

Total travel time forth and back

$$t = 2t_1 + 2t_2 = 2 \frac{(h - x) / \cos \theta_1}{c} + 2 \frac{x / \cos \theta_2}{v} = 2 \frac{h - x}{c \cos \theta_1} + 2 \frac{nx}{c \cos \theta_2}$$

Hence, the display will show (we simply write $n = n_w$)

$$y = \frac{1}{2}ct + k = \left(\frac{n}{\cos \theta_2} - \frac{1}{\cos \theta_1} \right) x + \frac{h}{\cos \theta_1} + k$$

which is a linear function of x .

Using a trigonometric identity and Snell's law,

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}}$$

we get the gradient to be

$$\alpha = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}}} - \frac{1}{\cos \theta_1} = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} - \frac{1}{\cos \theta_1}$$

1.4c

Knowing the gradient α from the graph, we can find n solving this equation with respect to n .

Introducing a practical parameter,

$$p = \alpha + \frac{1}{\cos \theta_1}$$

our equation becomes

$$p = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}$$

which can be written

$$n^4 - p^2 n^2 + p^2 \sin^2 \theta_1 = 0$$

and solved

$$n_w = \sqrt{\frac{p^2 \pm \sqrt{p^4 - 4p^2 \sin^2 \theta_1}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} p \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2 \sin \theta_1}{p}\right)^2}}$$

From our graph, we get $\alpha = 0.3301$. From there we find $p = 1.37865$ and hence $n_w = 1.3437$, omitting negative solutions and solutions less than 1.

The official value of n_w for pure water at normal conditions is $n_w = 1.331$ for the laser wavelength $\lambda = 635 \text{ nm}$.

Just for your interest, we have the following approximations:

For small angles, we have

$$n_w \approx \frac{\sqrt{2}}{2} p \sqrt{1 + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin \theta_1}{p}\right)^2} \approx p \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_1}{p}\right)^2} \approx p \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta_1}{p}\right)^2\right)$$

For very small angles, we get

$$n_w \approx p \approx \alpha + 1$$

It is much simpler but not recommendable to do the experiment with very small $\theta_1 \approx 0$: Reflections in the water surface will ruin the signal from the bottom.

2.1 The dependence of the solar cell current on the distance to the light source

$$I(r) = \frac{I_a}{1 + \frac{r^2}{a^2}}$$

2.1a	Measure I as a function of r , and set up a table of your measurements.	1.0
2.1b	Determine the values of I_a and a by the use of a suitable graphical method.	1.0

slot #	r mm	I mA	$1/I$ 1/mA	r^2 mm ²
3	9.0	5.440	0.184	81
4	14.5	5.290	0.189	210
5	20.0	5.010	0.200	400
6	25.5	4.540	0.220	650
7	31.0	3.840	0.260	961
8	36.5	3.230	0.310	1332
9	42.0	2.730	0.366	1764
10	47.5	2.305	0.434	2256
11	53.0	1.985	0.504	2809
12	58.5	1.730	0.578	3422
13	64.0	1.485	0.673	4096
14	69.5	1.305	0.766	4830
15	75.0	1.140	0.877	5625
16	80.5	1.045	0.957	6480
17	86.0	0.930	1.075	7396
18	91.5	0.840	1.190	8372
19	97.0	0.755	1.325	9409
20	102.5	0.690	1.449	10506

$$I \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) = I_a$$

$$r^2 = I_a a^2 \cdot \frac{1}{I} - a^2$$

$$a^2 = 1200 \text{ mm}^2 \pm 100 \text{ mm}^2,$$

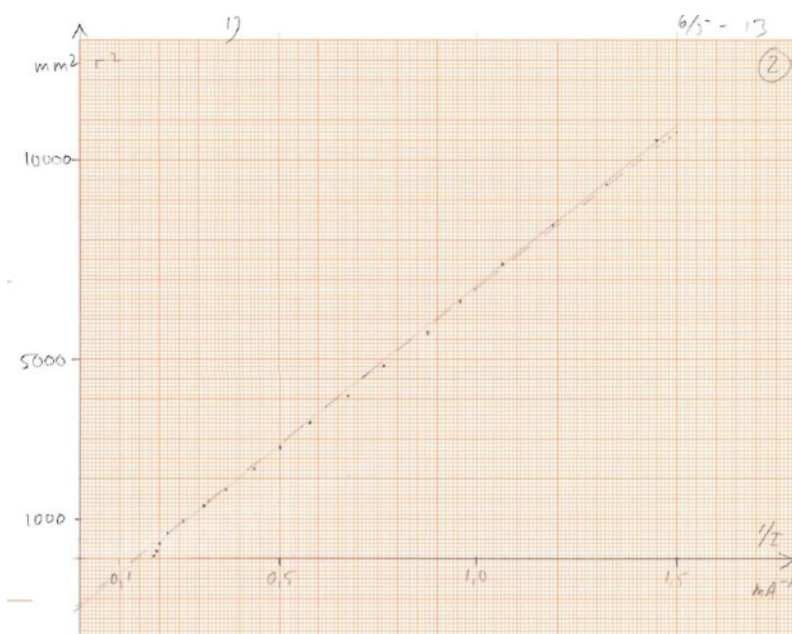
$$a = 35 \text{ mm} \pm \pm 2 \text{ mm}$$

$$I_a a^2 = \frac{10870 - 0}{1.50 - 0.15} \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{mA}^{-1}} = 8051.85 \dots \text{mm}^2 \text{mA}$$

$$I_a = \frac{8051.85 \frac{\text{mm}^2}{\text{mA}^{-1}}}{1200 \text{ mm}^2} = 6.7 \text{ mA} \pm 0.5 \text{ mA}$$

$$(I_a a^2)_{\min} = \frac{10700 - 0}{1.50 - 0.14} \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{mA}^{-1}} = 7867.6 \dots \text{mm}^2 \text{mA}$$

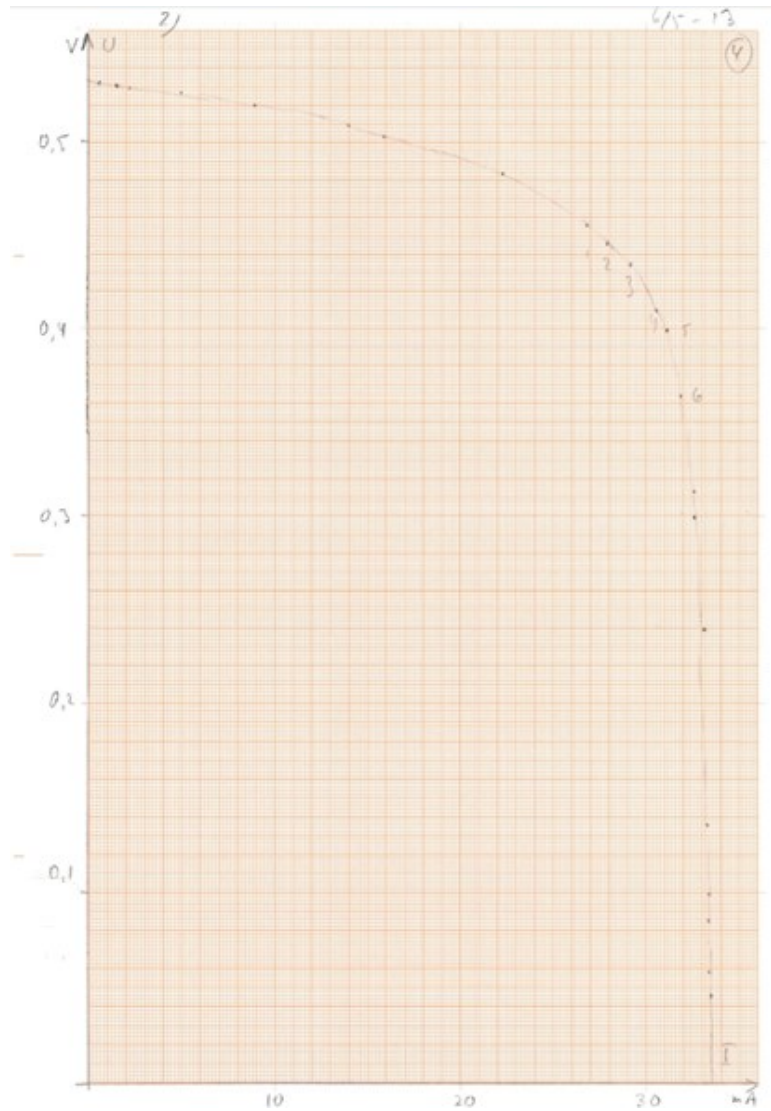
$$\rightarrow I_{a,\max} = \frac{(I_a a^2)_{\min}}{a^2_{\min}} = \frac{7867.6 \text{ mm}^2 \text{mA}}{1100 \text{ mm}^2} = 7.2 \text{ mA}$$



2.2 Characteristic of the solar cell

2.2a	Make a table of corresponding measurements of U and I .	0.6
2.2b	Graph voltage as a function of current	0.8

I mA	U V
0.496	0.532
1.451	0.531
5.05	0.526
8.88	0.52
14.05	0.509
31.1	0.395
25.3	0.471
21.6	0.488
30.6	0.41
31.9	0.364
32.6	0.299
32.6	0.313
33.1	0.239
33.4	0.085
33.3	0.138
33.4	0.096
33.4	0.058
33.5	0.046
33.5	0.045
1.05	0.529
27.8	0.454
15.9	0.503
22.3	0.483
26.8	0.458
29.2	0.435



2.3 Theoretical characteristic for the solar cell

2.3a	Use the graph from question 2.2b to determine I_{\max} .	0.4
2.3b	Estimate the range of values of U for which the mentioned approximation is good. Determine graphically the values of I_0 and η for your solar cell.	1.2

$$I = I_{\max} \text{ for } U = 0 \rightarrow I_{\max} = 33.5 \text{ mA}$$

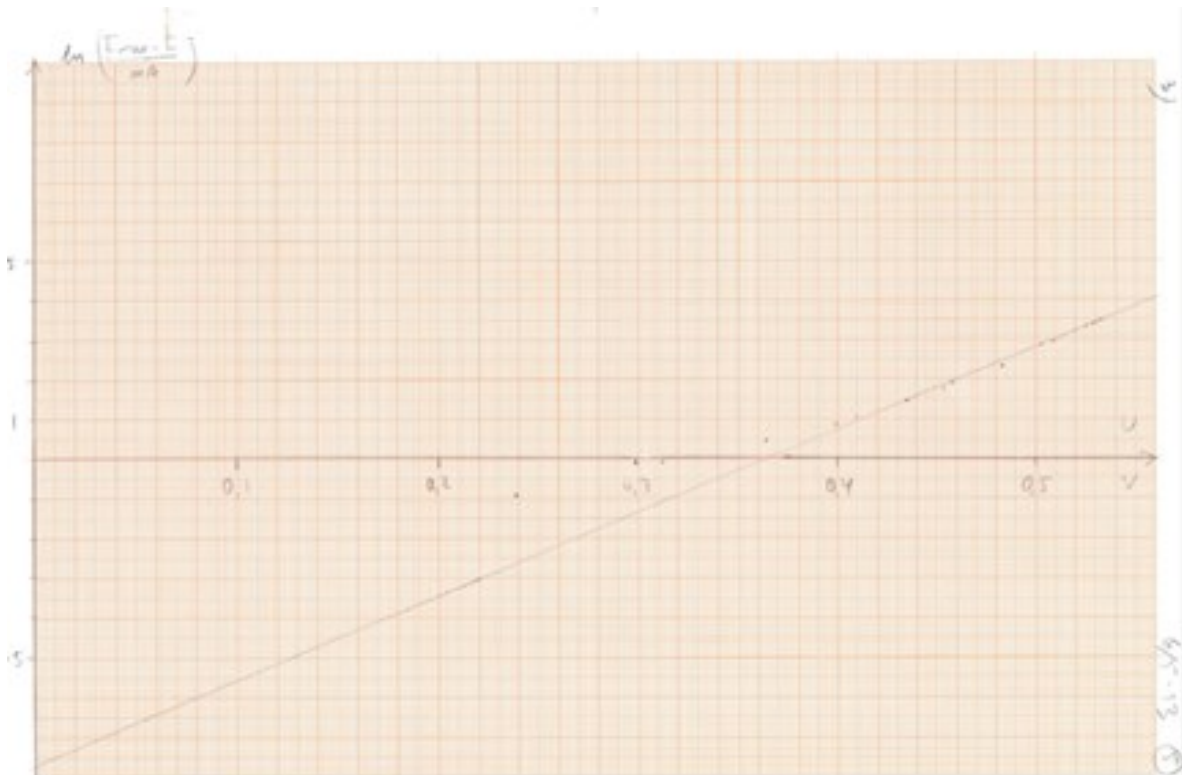
$$\eta k_B T < 4 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K} = 0.103 \text{ eV}$$

$$I = I_{\max} - I_0 \left(\exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right) - 1 \right) \approx I_{\max} - I_0 \exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right)$$

for $U > 0.4 \text{ V}$ where $\exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right) > \exp(4) \gg 1$

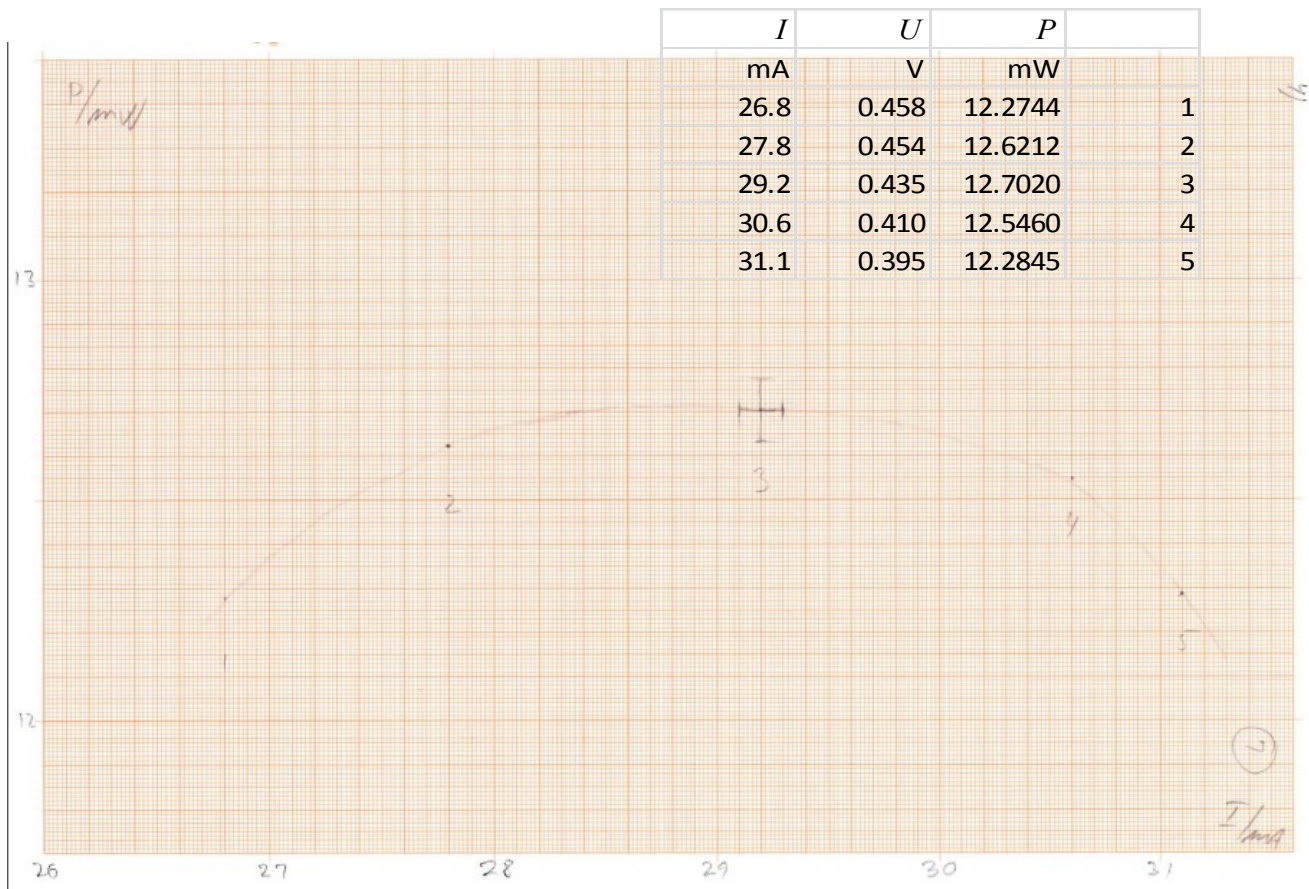
$$\ln\left(\frac{I_{\max} - I}{\text{mA}}\right) = \frac{e}{\eta k_B T} U - \ln\left(\frac{I_0}{\text{mA}}\right) \qquad \frac{e}{\eta k_B T} = \frac{4.03 - (-7.7)}{0.56 \text{ V}} = 20.95 \text{ V}^{-1}$$

$$I_0 = e^{-7.7} \text{ mA} = 0.45 \mu\text{A} \qquad \rightarrow \eta = \frac{e/(k_B T)}{20.95 \text{ V}^{-1}} = 1.85$$



2.4 Maximum power for a solar cell

2.4a	The maximum power that the solar cell can deliver to the external circuit is denoted P_{\max} . Determine P_{\max} for your solar cell through a few, suitable measurements. (You may use some of your previous measurements from question 2.2)	0.5
2.4b	Estimate the optimal load resistance R_{opt} , i.e. the total external resistance when the solar cell delivers its maximum power to R_{opt} . State your result with uncertainty and illustrate your method with suitable calculations.	0.5



$$P_{\max} = (12.7 \pm 0.1) \text{ mW} @ (28.8 \pm 0.2) \text{ mA}$$

$$R_{\text{opt}} = \frac{P_{\max}}{I_{\text{opt}}^2} = \frac{12.71 \text{ mW}}{(28.8 \text{ mA})^2} = (15.3 \pm 0.3) \Omega$$

Type equation here.

2.5 Comparing the solar cells

2.5 Comparing the solar cells

2.5a	Measure, for the given illumination: - The maximum potential difference U_A that can be measured over solar cell A. - The maximum current I_A that can be measured through solar cell A. Do the same for solar cell B.	0.5
2.5b	Draw electrical diagrams for your circuits showing the wiring of the solar cells and the meters.	0.3

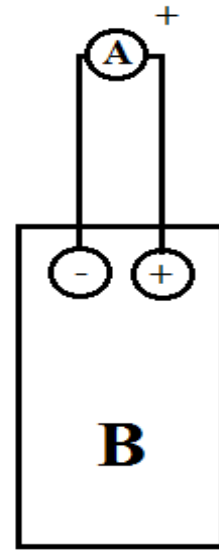
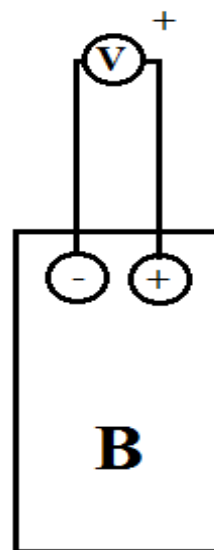
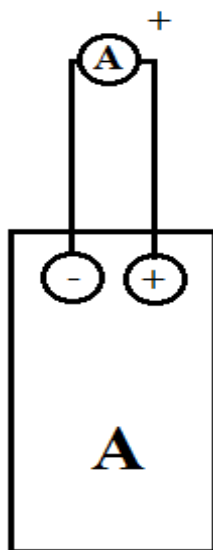
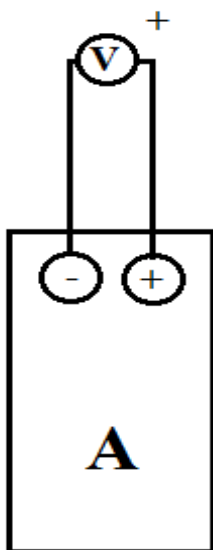
2.5a. $U_A = 0.512 \text{ V}$

$I_A = 16.465 \text{ mA}$

$U_B = 0.480 \text{ V}$

$I_B = 16.325 \text{ mA}$

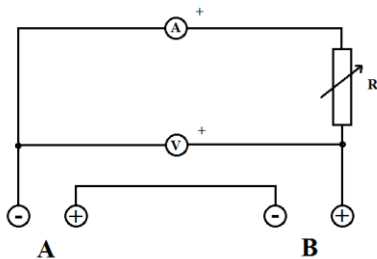
2.5b.



2.6 Couplings of the solar cells

2.6	<p>Determine which of the four arrangements of the two solar cells yields the highest possible power in the external circuit when one of the solar cells is shielded with the shielding plate (J in Fig. 2.1).</p> <p>Draw the corresponding electrical diagram.</p>	1.0
-----	--	-----

a.



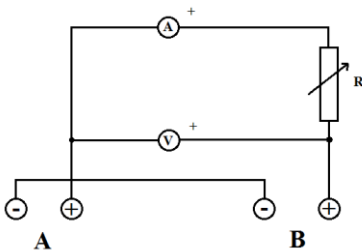
Unshielded (adjusting R for reasonable P)

13.10 mA; 0.794 V; 10.4 mW

A shielded: 0.37 mA; 0.022 V

B shielded: 0.83 mA; 0.049 V

b.

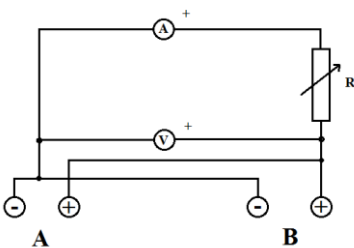


R like in a.

A shielded: 1.47 mA; 0.088 V

B shielded: -2.82 mA; -0.170 V

c.

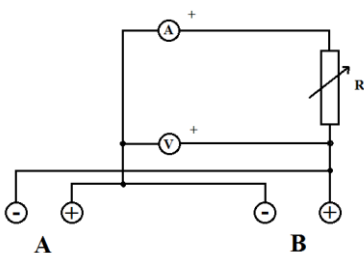


R like in a.

A shielded: 6.89 mA; 0.415 V

B shielded: 6.905 mA; 0.4165 V

d.



R like in a.

A shielded: 7.14 mA; 0.436 V

B shielded: -7.76 mA; -0.474 V

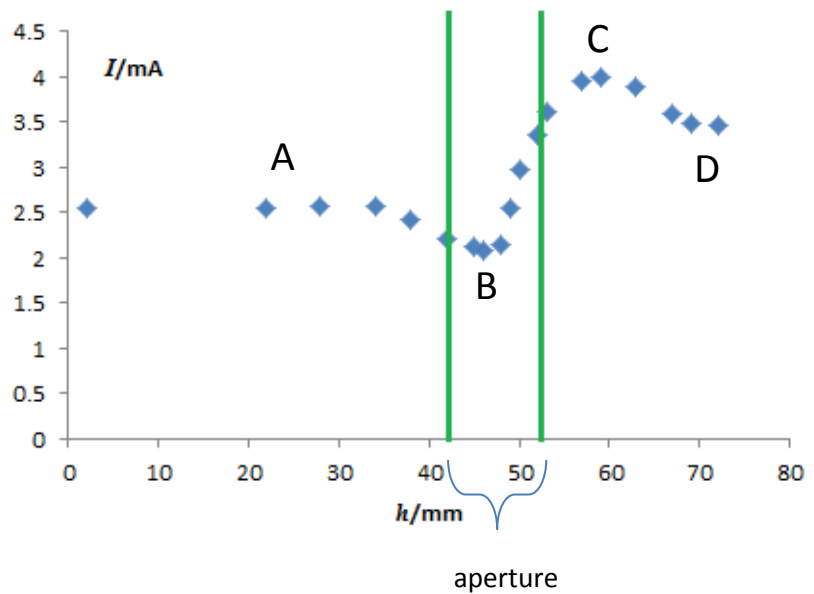
Conclusion: Best power: Set-up d with B shielded. (Solar cell A slightly better than B).

2.7 The effect of the optical vessel (large cuvette) on the solar cell current

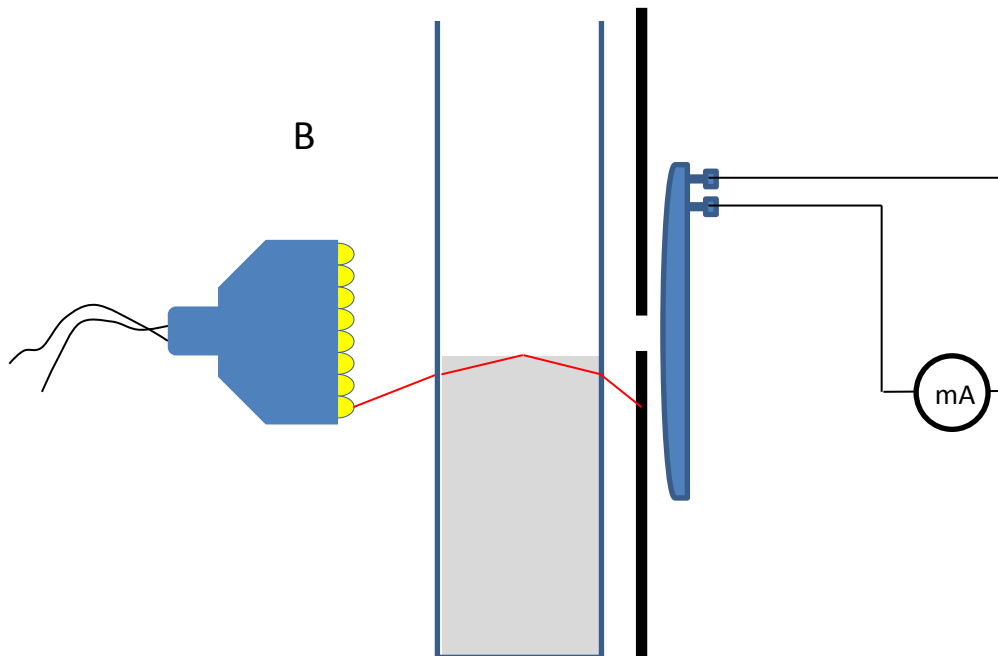
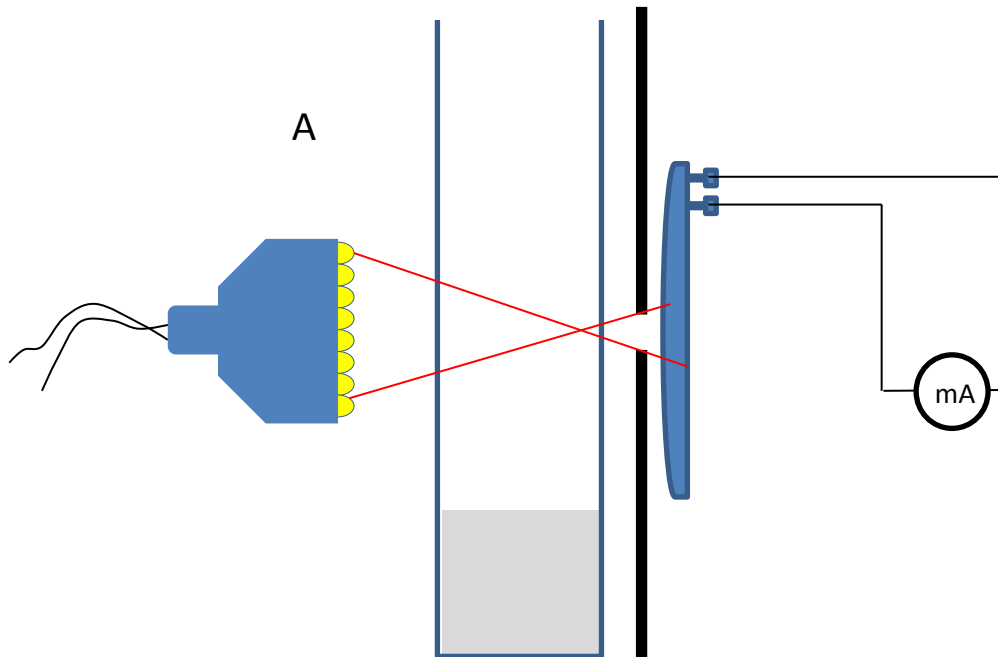
2.7a	Measure the current I , now as a function of the height, h , of water in the vessel, see Fig. 2.8. Make a table of the measurements and draw a graph.	1.0
2.7b	Explain with only sketches and symbols why the graph looks the way it does.	1.0
2.7c	For this set-up do the following: - Measure the distance r_1 between the light source and the solar cell, and the current I_1 . - Place the empty vessel immediately in front of the circular aperture and measure the current I_2 . - Fill up the vessel with water, almost to the top, and measure the current I_3 .	0.6
2.7d	Use your measurements from 2.7c to find a value for the refractive index n_w for water. Illustrate your method with suitable sketches and equations. You may include additional measurements.	1.6

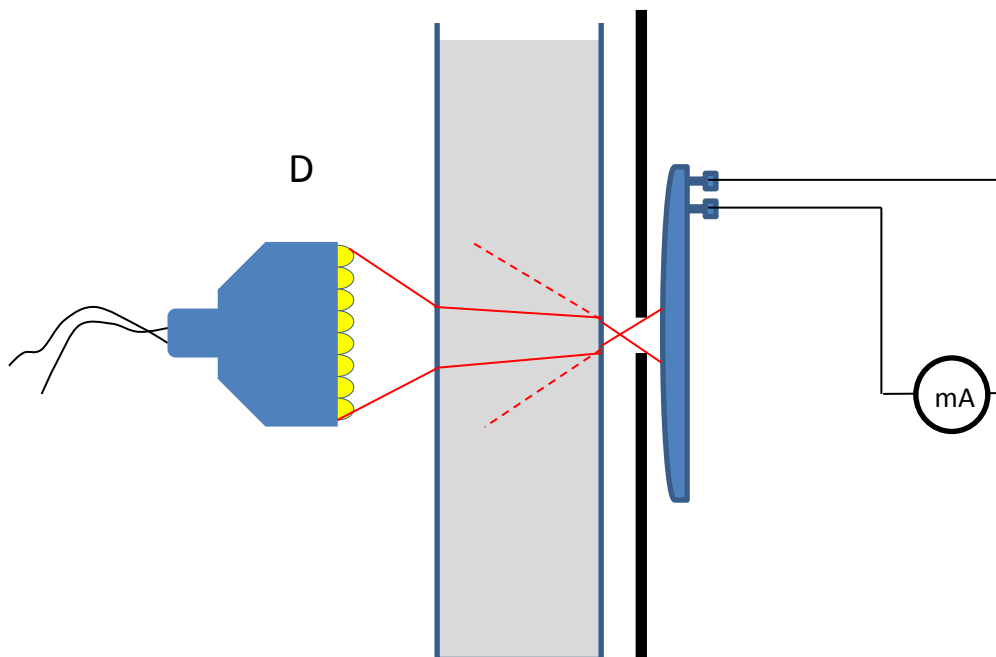
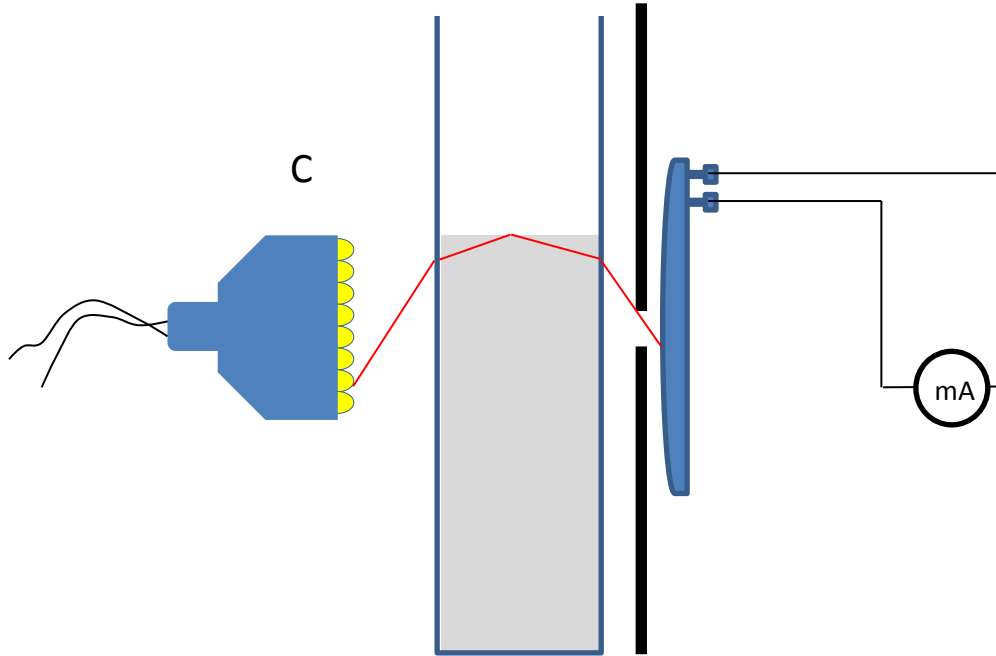
2.7a

h mm	I mA
2	2.54
22	2.55
28	2.56
34	2.57
38	2.42
42	2.21
45	2.13
46	2.08
48	2.15
49	2.54
50	2.97
52	3.36
53	3.61
57	3.96
59	3.99
63	3.89
67	3.6
69	3.49
72	3.47



2.7b *Exemplar* drawings for position A, B, C and D on previous graph:

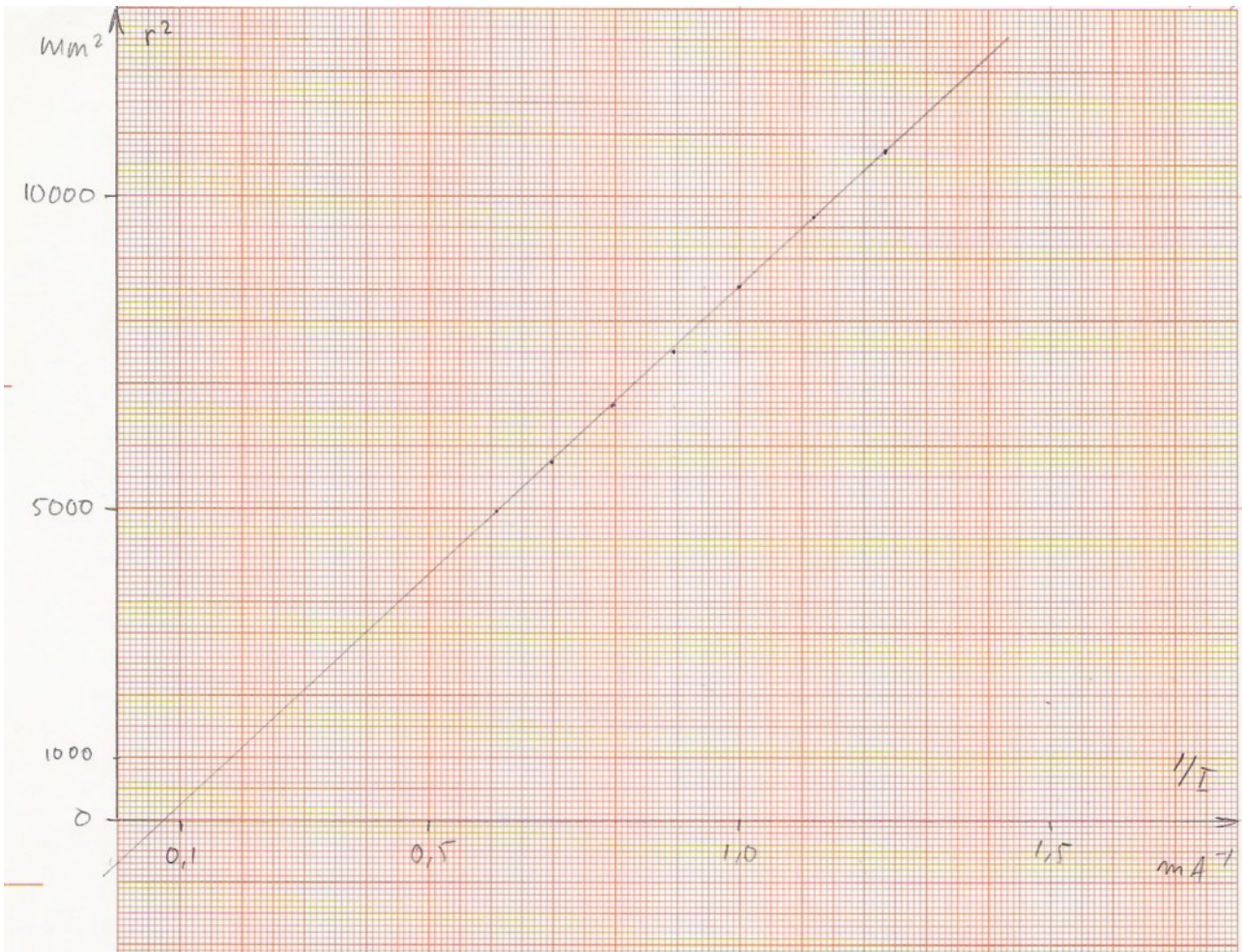




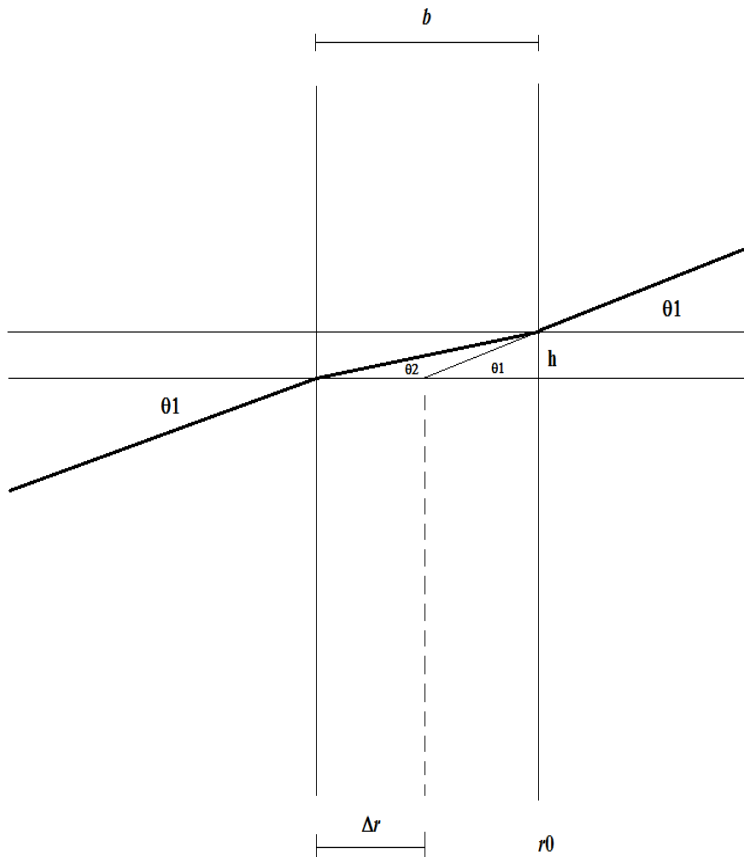
2.7c NOTE: The exemplar measurements are from a different lamp than in 2.1. For a solution to 2.7d using the distance graph you have to refer to the graph below.

$r_1 = 103.5 \text{ mm}$; $I_1 = 0.81 \text{ mA}$; $I_2 = 0.705 \text{ mA}$; $I_3 = 0.85 \text{ mA}$

$$\frac{1}{I_3} \cdot \frac{I_2}{I_1} = 1.024 \text{ mA}^{-1} \sim r_c^2 = 8800 \text{ mm}^2 \sim r_c = 93.8 \text{ mm}$$



2.7d



$$h = (b - \Delta r) \tan \theta_1 = b \tan \theta_2 \Rightarrow \frac{b}{b - \Delta r} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \approx \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n, \text{ da } \theta_2 < \theta_1 \ll 1.$$

$$n_w \approx \frac{b}{b - \Delta r} = \frac{b}{b - (r_1 - r_c)} = \frac{26.0 \text{ mm}}{26.0 \text{ mm} - (103.5 - 93.8) \text{ mm}} = 1.6$$

NOTE: You may get better results. The uncertainty is rather large in this method because of the subtraction of two large numbers for Δr

A different method is to determine the shift by actually moving the set-up and perhaps making an interpolation in directly measured data.