Задатак 1: Тенис

(а) Из закона одржања енергије следи $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$, где је ω_1 угаона брзина рекета након судара. Из одржања пројекције на осу o момента импулса у односу на тачку D следи $I\omega = mvd + I\omega_1$. Из претходних једначина следи $v = \frac{2\omega I d}{I+md^2}$. Ова функција достиже максимум за $d = \sqrt{\frac{I}{m}} = 1$ m. Пошто је тачка са $d = 1$ m ван рекета следи да лоптица има највећу брзину ако се удари врхом рекета, тј. тачком са $d = 67\,\mathrm{cm}$. Лоптица има најмању брзину ако се удари дном рекета, тј. тачком са $d = 31\,\mathrm{cm}$.

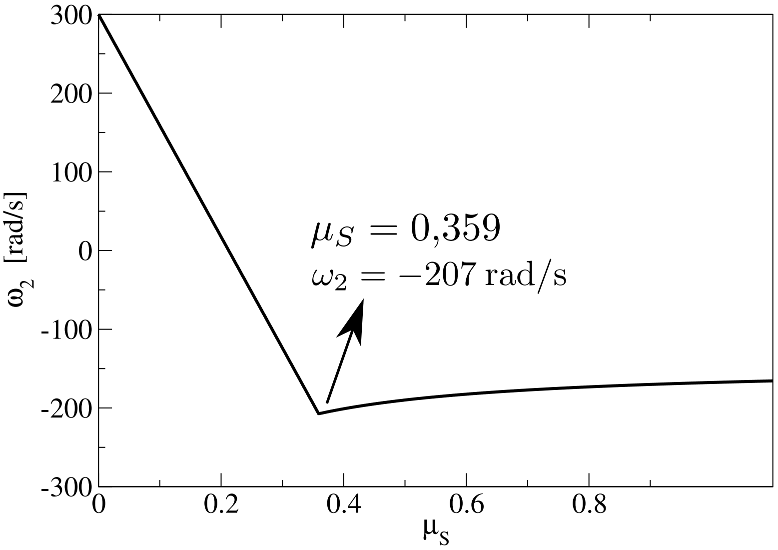
(б) Из закона одржања енергије следи $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, где је v_1 брзина лоптице после судара са рекетом. Из одржања пројекције на осу o момента импулса у односу на тачку D следи $mvd = I\omega - mv_1 d$. Коефицијент реституције је $e = \frac{v_1}{v}$. Из претходних једначина следи $e = \frac{I-md^2}{I+md^2}$. Функција $e(d)$ монотоно опада са порастом d и узима вредност 0 за $d = \sqrt{\frac{I}{m}} = 1$ m. Пошто је та тачка ван рекета, следи да лоптица има најмању брзину ако се удари врхом рекета ($d = 67\,\mathrm{cm}$), а највећу ако се удари дном рекета ($d = 31\,\mathrm{cm}$).

(в) Други Њутнов закон за транслацију лоптице и рекета даје $m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -F$ и $M\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = F$, а за ротацију лоптице $I_L\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = FR - Na$. Услов да нема проклизавања је $v_x - R\omega = V_x$, тј. $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} - R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}$. Притом је и $F = \mu_R N$. Из претходних једначина следи $a = R\mu_R\left(\frac{5}{3} + \frac{2m}{3M}\right) = 3{,}05\,\mathrm{mm}$.

(г) Из одржања $y-$компоненте импулса следи $mv_{1y} = MV_{2y} + mv_{2y}$. Користећи дефиниције величина e и e_P следи $e_P = \frac{eM-m}{M+m} = 0{,}443$.

(д) У зависности од вредности μ_S могућа су два случаја: 1) лоптица проклизава по рекету током целог трајања судара; 2) лоптица проклизава на почетку судара, а затим се котрља по рекету. У првом случају важе једначине $I_L\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -FR$ и $m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = N$, одакле се интеграцијом од тренутка пре судара t_1 до тренутка после судара t_2 добија $m\left(v_{2y} - v_{1y}\right) = \int_{t_1}^{t_2} N\mathrm{d}t$ и $I_L\left(\omega_2 - \omega_1\right) = -R\int_{t_1}^{t_2} F\mathrm{d}t$, где се брзине и угаоне брзине означене индексом 2 односе на тренутак t_2. Користећи $v_{2y} = -e_P v_{1y}$ и $F = \mu_S N$, елиминацијом непознатог интеграла из претходне две једначине добијамо $\omega_2 = \omega_1 - \frac{3v_1\sin\theta_1}{2R}\mu_S\left(1 + e_P\right)$. У другом случају за време док лоптица проклизава важе једначине $m\left(v_{0x} - v_{1x}\right) = -\int_{t_1}^{t_0} F\mathrm{d}t$, $I_L\left(\omega_0 - \omega_1\right) = -\int_{t_1}^{t_0} FR\mathrm{d}t$ и $MV_{0x} = \int_{t_1}^{t_0} F\mathrm{d}t$, где је t_0 тренутак кад лоптица престаје да проклизава, а величине са индексом 0 се односе на тај тренутак. Из услова престанка проклизавања $v_{0x} + R\omega_0 = V_{0x}$ и претходне три једначине следи $\int_{t_1}^{t_0} F\mathrm{d}t = \frac{v_1\cos\theta_1 + R\omega_1}{\frac{1}{M} + \frac{5}{2m}}$, одакле је $\omega_0 < 0$. Интеграцијом другог Њутновог закона током целог времена судара (при чему је смер силе F током котрљања одређен имајући у виду део (в) и чињеницу да је $\omega_0 < 0$) се добијају једначине $I_L\left(\omega_2 - \omega_1\right) = -\int_{t_1}^{t_0} FR\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_2} FR\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_2} Na\mathrm{d}t$ и $m\left(v_{2y} - v_{1y}\right) = \int_{t_1}^{t_0} N\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_2} N\mathrm{d}t$. Користећи претходне три једначине и чињенице да је док траје проклизавање $F = \mu_S N$, а док траје котрљање $F = \mu_R N$, добија се

$\omega_2 = \omega_1 - \frac{\omega_1 + \frac{v_1 \cos\theta_1}{R}}{\frac{5}{3} + \frac{2m}{3M}} - (1 + e_P) \frac{v_1 \sin\theta_1}{R} \frac{3}{2} \left(\mu_R - \frac{a}{R}\right) + \frac{1}{\mu_S} \left(\mu_R - \frac{a}{R}\right) \frac{\omega_1 + \frac{v_1 \cos\theta_1}{R}}{\frac{5}{3} + \frac{2m}{3M}}$. Изједначавањем израза за ω_2 у случајевима 1) и 2) налазимо да гранични случај настаје за $\mu_S^{\text{gr}} = \frac{v_1 \cos\theta_1 + R\omega_1}{(1+e_P) v_1 \sin\theta_1 \left(\frac{m}{M} + \frac{5}{2}\right)} = 0{,}359$, при чему за $\mu_S < \mu_S^{\text{gr}}$ лоптица проклизава током свог времена судара, а за $\mu_S > \mu_S^{\text{gr}}$ долази и до котрљања лоптице по рекету. Одговарајући график зависности ω_2 од μ_S је приказан на слици. За $\mu_S = \mu_S^{\text{gr}}$ угаона брзина након судара има максимални интензитет од свих случајева кад је спин лоптице промењен.



Слика 1: График зависности ω_2 од μ_S

Задатак 2: Пиезоелектрични осцилатор

Део А: Прост модел механичко-електричног осцилатора

А.1. **(0,5 поена)** Сила теже која делује на горњу плочу уравнотежена је еластичном силом опруга, односно $mg = nk(\mathcal{X} - X_0)$, где је $\mathcal{X}$ дужина опруге у неистегнутом стању. Када се плоче прикључе на спољашњи напон, на њих делује и електростатичка привлачна сила и услов статичке равнотеже је $mg + F_q = nk(\mathcal{X} - X_1)$, одакле се лако добија $F_q = nk(X_0 - X_1)$. Наелектрисање једне плоче кондензатора је $q_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{X_1}U$. Нека је E_p јачина електричног поља које потиче од друге плоче. Тада је, на основу Гаусове теореме, $2SE_p = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$. Електростатичка сила којом једна плоча делује на другу је $F_q = q_0 E_p = \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2X_1^2} = nk(X_0 - X_1)$, одакле се добија $U = X_1\sqrt{\frac{2nk(X_0-X_1)}{\varepsilon_0 S}}$.

А.2. **(0,5 поена)** Када се горња плоча налази на растојању $X_1 + x$ од доње, електростатичка сила која на њу делује је $F_q' = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(X_1+x)^2} \approx \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2X_1^2} - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{X_1^3}x = F_q - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{X_1^3}x$, док је еластична сила $F_e' = nk(\mathcal{X} - X_1 - x)$. Из другог Њутновог закона следи $m\ddot{x} = F_e' - mg - F_q' \approx -(nk - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{X_1^3})x = -nk(3 - 2\frac{X_0}{X_1})x$. Дакле, угаона фреквенција малих осцилација горње плоче је $\omega_0 = \sqrt{\frac{nk}{m}(3 - 2\frac{X_0}{X_1})}$. Мале осцилације ће бити могуће ако је $3X_1 > 2X_0$.

А.3. **(2 поена)** На основу другог Кирхофовог закона важи $U = L\ddot{q} + \frac{(q_0+q)(X_1+x)}{\varepsilon_0 S}$, где је $q_0 = \frac{\varepsilon_0 S U}{X_1}$ количина налектрисања на облогама кондензатора у почетном тренутку. Занемарујући члан другог реда qx, добија се $\ddot{q} = -\frac{U}{LX_1}x - \frac{X_1}{L\varepsilon_0 S}q$. Електростатичка сила у почетном тренутку је $F_q = \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S}$. Након малог померања је $F_q' = \frac{(q_0+q)^2}{2\varepsilon_0 S} \approx \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_0}{\varepsilon_0 S}q$, док је еластична сила $F_e' = nk(\mathcal{X} - X_1 - x)$. Из другог Њутновог закона следи $\ddot{x} = -\frac{nk}{m}x - \frac{U}{mX_1}q$.

А.4. **(1 поен)** Замењујући $\ddot{x} = -\omega^2 x$ и $\ddot{q} = -\omega^2 q$ у једначине из дела А.3. налазимо следећи систем једначина: $(\omega^2 - \frac{X_1}{L\varepsilon_0 S})q - \frac{U}{LX_1}x = 0$ и $(\omega^2 - \frac{nk}{m})x - \frac{U}{mX_1}q = 0$. Овај систем има нетривијално решење ако је $(\omega^2 - \frac{X_1}{L\varepsilon_0 S})(\omega^2 - \frac{nk}{m}) = \frac{U^2}{mLX_1^2} = \frac{2nk(X_0-X_1)}{mL\varepsilon_0 S}$. Након увођења смена $\omega_1^2 = \frac{nk}{m}$ и $\omega_2^2 = \frac{X_1}{L\varepsilon_0 S}$, претходна једначина се поједностављује: $\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2(3 - 2X_0/X_1) = 0$. Физичка решења ове једначине су $\omega_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2(5 - 4X_0/X_1)}\right]^{1/2}$, што значи да систем има две својствене кружне фреквенције, ако је задовољен услов $3X_1 > 2X_0$.

Део Б: Механички модел кварцне виљушке

Б.1. **(0,2 поена)** Једначина осцилација кварцне виљушке је $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos(\Omega t + \varphi)$.

Б.2. **(0,3 поена)** Дељењем једначине добијене под Б.1. са m добија се једначина еквивалентна једначини датој у задатку, па се на основу упоређивања одговарајућих чланова добија $\gamma = \frac{b}{m} = \frac{b}{0{,}243\,\rho_q WLD} = 104\,\mathrm{s}^{-1}$ и $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{ED^2}{0{,}972\,\rho_q L^4}} = 2{,}27 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Б.3. **(1 поен)** Заменом $x = x_0 \cos(\Omega t + \phi)$ у једначину $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \phi - \delta\varphi)$, где је $\delta\varphi = \phi - \varphi$ и $f_0 = F_0/m$, добијамо $-\Omega^2 x_0 \cos(\Omega t + \phi) - \gamma\Omega x_0 \sin(\Omega t + \phi) + \Omega_0^2 x_0 \cos(\Omega t + \phi) = f_0 \cos(\Omega t + \phi)\cos\delta\varphi + f_0 \sin(\Omega t + \phi)\sin\delta\varphi$. Раздвајањем чланова уз $\sin(\Omega t + \phi)$ и $\cos(\Omega t + \phi)$ добија се систем једначина $-x_0(\Omega^2 - \Omega_0^2) = f_0 \cos\delta\varphi$ и $-\gamma\Omega x_0 = f_0 \sin\delta\varphi$, чија су решења $x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\gamma^2\Omega^2}}$ и $\delta\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\gamma\Omega}{\Omega^2-\Omega_0^2}$.

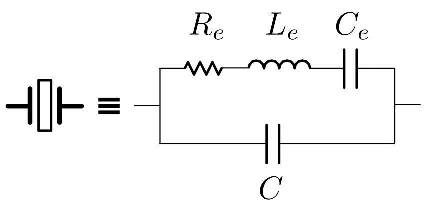
Део В: Електрични модел кварцне виљушке

В.1. **(1 поен)** Амплитуда електричне снаге коју наизменични напонски извор предаје зупцима виљушке је $P = \eta\dot{x}V_0$. Она одговара амплитуди механичке снаге принудне силе која делује на зупце виљушке, односно важи $P = 2F_0\dot{x}$. Тражена веза је $\eta V_0 = 2F_0$.

В.2. **(0,6 поена)** Користећи везу наелектрисања и елонгације врха зупца виљушке, за једначину осциловања наелектрисања се добија $\frac{m}{\eta}\ddot{q} + \frac{b}{\eta}\dot{q} + \frac{k}{\eta}q = F_0\cos(\Omega t + \varphi) = \frac{\eta}{2}V_0\cos(\Omega t + \varphi)$.

В.3. **(0,7 поена)** Свођењем претходне једначине на $L_e\ddot{q} + R_e\dot{q} + q/C_e = V_0\cos(\Omega t + \varphi)$, следи да је $L_e = \frac{2m}{\eta^2} = 2{,}27\,\mathrm{kH}$, $R_e = \frac{2b}{\eta^2} = 237\,\mathrm{k\Omega}$, и $C_e = \frac{\eta^2}{2k} = 8{,}54\,\mathrm{fF}$.

В.4. **(0,7 поена)** Еквивалентно електрично коло се састоји од редног $R_eL_eC_e$ кола које представља механички део кварцне виљушке и паралелно са њим везаног кондензатора C који чине електроде. Еквивалентно коло је приказано на слици 1.



Слика 1: Еквивалентно електрично коло

Део Г: Утицај температуре на кварцну виљушку

Г.1. **(0,1 поена)** Кварцни часовник показује тачно време када је $\frac{\Delta f}{f} = 0$, што на основу датог графика одговара температури $t_0 = 25\,^\circ\mathrm{C}$.

Г.2. **(0,1 поена)** У оба случаја важи $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta T}{T} < 0$, што значи да оба часовника касне.

Г.3. **(0,8 поена)** У задатку је наглашено да је зависност параболична, а са графика се види да је $t_0 = 25\,^\circ\mathrm{C}$ двострука нула, зато је $\frac{\Delta f}{f} = \alpha(t - t_0)^2$, где је α константа коју је потребно израчунати. Избором једне тачке са графика, нпр. $(-70 \cdot 10^{-6}, -10\,^\circ\mathrm{C})$, добија се $\alpha = \frac{-70\cdot10^{-6}}{2025\,^\circ\mathrm{C}^2} = -3{,}5 \cdot 10^{-8}\,^\circ\mathrm{C}^{-2}$. Дакле, зависност фреквенције од температуре је $f(t) = (1 - 3{,}5 \cdot 10^{-8}(t/^\circ\mathrm{C} - 25)^2) \cdot 2^{15}\,\mathrm{Hz}$.

Г.4. **(0,5 поена)** Часовник аутора ради тачно и после годину дана, док часовник рецензента одступа за ΔT. Из $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta T}{T}$ следи $\Delta T = \frac{\Delta f}{f}T = -3{,}5 \cdot 10^{-8}(10 - 25)^2 \times 365 \cdot 24 \cdot 60\,\mathrm{min} \approx -4{,}14\,\mathrm{min}$, дакле часовник рецензента касни.

Задатак 3: Балон за разгледање

а) Услов равнотеже је једнакост силе земљине теже и Архимедове силе: $\rho_2 Vg + m_0 g = \rho_1 Vg$ **(0,5п)**, где је ρ_2 густина ваздуха на t_2. Из ове једнакости имамо: $m_0 = (\rho_1 - \rho_2)V$ **(0,2п)**. Једначине стања гаса у балону за температуре T_1 и T_2 су, респективно: $p = \rho_1 RT_1 / M$ **(0,5п)** и $p = \rho_2 RT_2 / M$ **(0,5п)**. Из ових једнакости следи: $T_2 = \dfrac{T_1}{1 - \dfrac{m_0}{\rho_1 V}}$ **(0,2п).** За дате бројне вредности добијамо $\boxed{T_2 = 341\text{K}}$ или $t_2 = 68^\circ\text{C}$ **(0,1п)**.

б) Ако гас загрејемо до $T_3 = 383\text{K}$, онда је сила гравитације $F_g = \rho_3 Vg + m_0 g$ **(0,5п)**. Сила затезања је: $F_T = \rho_1 Vg - F_g = \left[(\rho_1 - \rho_3)V - m_0\right] g$ **(0,3п)**. Као и у делу под а) имамо: $\rho_1 / \rho_3 = T_3 / T_1$ **(0,6п)**, па коначно добијамо: $F_T = \left[\rho_1 (1 - \dfrac{T_1}{T_3})V - m_0\right] g$ **(0,5п)**. За дате бројне вредности је $\boxed{F_T = 1,2\text{N}}$ **(0,1п).**

в) Из услова равнотеже на висини h: $\rho_h Vg = \rho_3 Vg + m_0 g$ **(0,7п)** имамо: $\rho_h = \rho_3 + m_0 / V$ **(0,3п)**. Густина ваздуха на висини h се добија из барометарске формуле: $\rho_h = \rho_1 e^{-\frac{\rho_1 g x}{p_0}}$ **(0,4п)**. одатле се добија висина h: $\boxed{h = \dfrac{p_0}{\rho_1 g} \ln \dfrac{\rho_1}{\rho_h} = \dfrac{p_0}{\rho_1 g} \ln \dfrac{\rho_1 V}{m_0 + \rho_1 V \dfrac{T_1}{T_3}} \approx 843\text{m}}$ **(0,6п)**.

г) Густину на висини $h + \Delta h$ можемо написати као: $\rho_{h+\Delta h} = \rho_1 e^{-\frac{\rho_1 g (h+\Delta h)}{p_0}} = \rho_h e^{-\frac{\rho_1 g \Delta h}{p_0}}$ **(1п)**. Користећи се датом помоћи из поставке задатка, уз $\dfrac{\rho_1 g \Delta h}{p_0} \approx 10^{-3} \ll 1$, добија се да је $\rho_{h+\Delta h} \approx \rho_h (1 - \dfrac{\rho_1 g \Delta h}{p_0})$ **(0,5п)**. Из једначине кретања балона добијамо:
$(m_0 + \rho_3 V)a = -(m_0 + \rho_3 V)g + \rho_{h+\Delta h} Vg \approx -\dfrac{\rho_h \rho_1 g^2}{p_0} V \Delta h = -k \Delta h$ **(1,5п)**. Из последњег израза за силу видимо да је кретање осцилаторно са периодом:

$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_0 + \rho_3 V}{k}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{(m_0 + \rho_3 V) p_0}{\rho_h \rho_1 g^2 V}} = \dfrac{2\pi}{g} \sqrt{\dfrac{p_0}{\rho_1}} = 186\text{s}}$ **(1п).**