

Теоријски задатак 1 (10 поена)

Каменобил

Фред и Барни су направили аутомобил чији су „точкови“ две идентичне призме са квадратном основом (слика 1). Аутомобил се креће по путу који се састоји од идентичних избочина које се периодично понављају. Точкови су потпуно прилагођени таквом профилу пута тако да се центар масе аутомобила не помера у вертикалном правцу током кретања. Нема проклизавања између точкова и пута. Током кретања аутомобила, ивица омотача призме сваки пут додирује најнижу тачку пута. Највишу тачку пута точкови додирују линијом која полови страницу омотача призме. Аутомобил започиње кретање у тренутку кад точкови додирују пут у врховима избочина. Почетна хоризонтална брзина translације је v_0 .



Слика 1

Укупна тежина аутомобила без точкова је $M \cdot g$ и подједнако оптерећује обе осовине аутомобила.

Део 1 – Кинетичка енергија аутомобила

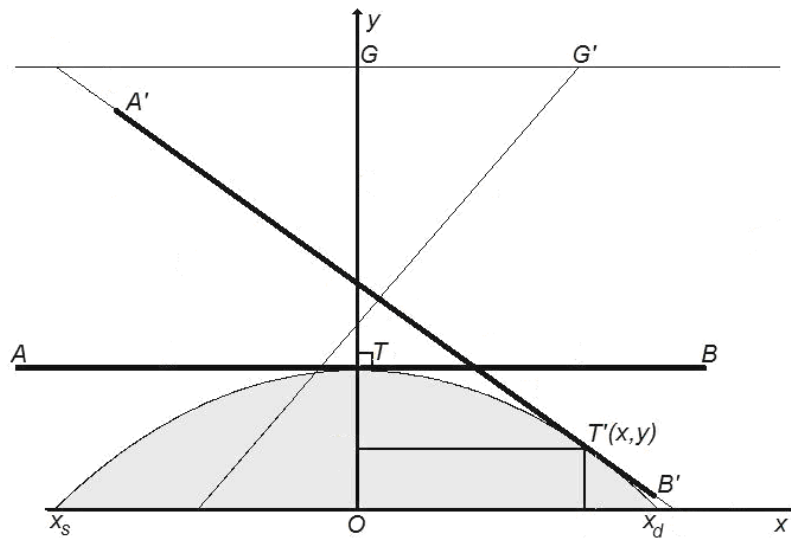
1.a. Одредити израз за J - момент инерције точка у односу на његову осовину. Маса точка је m , а дужина ивице квадратне основе призме је $2a$.

1.b. Одредити кинетичку енергију аутомобила и угаону брзину точкова у следећим тренуцима:

- i. кад точкови додирују највишу тачку пута;
- ii. кад ивица омотача призме удари у најнижу тачку пута.

Део 2 – Профил пута

На слици 2 је приказано кретање једне ивице квадратне основе точка по избочини (крива која пролази кроз тачке x_s, T, x_d).



Слика 2

Пут се састоји од периодичног низа таквих идентичних избочина.

ox оса координатног система пролази кроз најниже тачке профила пута, док oy оса пролази кроз врх избочине. У почетном тренутку је: ab положај једне ивице квадратне основе тачка, T тачка додира тачка и пута, а G положај осовине тачка. $A'B', T', G'$ имају исти смисао, али у неком наредном тренутку. Осовина тачка је у сваком тренутку на истој вертикали са тачком додира тачка и пута.

2.a. Доказати тврђење изречено у претходној реченици.

2.b. Одредити аналитички облик $y = y(x)$ попречног пресека избочине.

Помоћ: Извод $y'(x)$ функције $y = y(x)$ је нагиб тангенте на криву графика функције у тачки x . Сматрати познатим да је $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$. Препоручујемо да

користите следећу нотацију $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и идентитет $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

2.c. Наћи хоризонталну дужину избочине пута (растојање између тачака x_s и x_d на слици 2).

2.d. Наћи најмање могуће растојање између осовина тачкова Фредовог аутомобила.

2.e. Да ли аутомобил чији су тачкови у облику правилне шестоугаоне призме погодна изабраних димензија може да се креће без померања центра масе у вертикалном правцу по путу чији је профил одређен у делу 2.b?

Део 3 - Судар

Претпоставите да је аналитички израз за профил избочине пута дат са $y = k - h \cdot ch(x/a)$ где су k и h константе.

3.a. Одредити интервал хоризонталних брзина аутомобила током кретања описаног у задатку.

3.b. Одредити како количина топлоте која се ослободи при апсолутно нееластичном судару Фредовог аутомобила са препреком зависи од положаја препреке на путу. Непосредно након судара аутомобил се зауставља.

3.c. Одредити количину топлоте која се ослободи у том судару.

© Delia DAVIDESCU, PhD
Adrian DAFINEI, PhD

ФОРМУЛАР ЗА ОДГОВОРЕ

Теоријски задатак 1 (10 поена)

Аутомобил Фреда и Барнија

Део 1 – Кинетичка енергија аутомобила

1.a. Одредити израз за J - момент инерције точка у односу на његову осовину.

1,00п

1.b.i. Одредити кинетичку енергију аутомобила и угаону брзину тачкова кад тачкови додирују највишу тачку пута.

1,00п

1.b.ii. Одредити кинетичку енергију аутомобила и угаону брзину тачкова кад ивица омотача призме удари у најнижу тачку пута.

1,00п

Део 2 – Профил пута

2.a. Осовина точка је у сваком тренутку на истој вертикали са тачком додира точка и пута. Доказати тврђење изречено у претходној реченици.

0,50п

2.b. Одредити аналитички облик $y = y(x)$ попречног пресека избочине.

2,00п

2.c. Наћи хоризонталну дужину избочине пута.

0,50п

2.d. Наћи најмање могуће растојање између осовина точкова Фредовог аутомобила.

0,50п

2.e. Да ли аутомобил чији су точкови у облику правилне шестоугаоне призме погодно изабраних димензија може да се креће по путу чији је профил одређен у делу 2.b? Дати кратко образложење.

0,50п

Део 3 - Судар

3.a. Одредити интервал хоризонталних брзина аутомобила током кретања описаног у задатку.

2,00п

3.b. Одредити како количина топлоте која се ослободи при апсолутно нееластичном судару Фредовог аутомобила са препреком зависи од положаја препреке на путу. Дати кратко образложење.

0,50п

3.c. Одредити количину топлоте која се ослободи у судару.

0,50п

Теоријски задатак 2 (10 поена)

Комптоново расејање

Уређај за складиштење електрона у облику прстена садржи високоенергетске електроне добијене из акцелератора који се крећу по кругу у одговарајућем магнетном пољу. Фотони из X - зрака се усмеравају тако да се сударе са електронима који се налазе у уређају. Притом долази до појаве која је позната као инверзно Комптоново расејање.

Фотон таласне дужине λ_i се расејава на слободном електрону који се креће. Након расејања електрон се зауставља, а фотон таласне дужине λ_0 се расејава под углом од $\theta = 60^\circ$ у односу на правац упадног фотона. Овај фотон се поново расејава на другом слободном електрону који мирује. Након овог другог процеса расејања фотон таласне дужине $\lambda_f = 1,25 \times 10^{-10} \text{ m}$ излеће под углом $\theta = 60^\circ$ у односу на правац фотона таласне дужине λ_0 .

При опису фотона и електрона у овим процесима користити следећу нотацију:

	иницијални фотон	фотон након првог расејања	финални фотон		Први електрон пре судара	Први електрон после судара	Други електрон пре судара	Други електрон после судара
импулс	\vec{p}_i	\vec{p}_0	\vec{p}_f	импулс	\vec{p}_{1e}	0	0	\vec{p}_{2e}
енергија	E_i	E_0	E_f	енергија	E_{1e}	E_{0e}	E_{0e}	E_{2e}
таласна дужина	λ_i	λ_0	λ_f	брзина	\vec{v}_{1e}	0	0	\vec{v}_{2e}

Познате су бројне вредности следећих физичких константи:

$$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \text{ - Планкова константа}$$

$$m_0 = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \text{ - маса мировања електрона}$$

$$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} / \text{s} \text{ - брзина светлости у вакууму}$$

Део 1 – Први судар

1.a. Нацртати слике на којима су означени вектори импулса електрона и фотона пре и после првог судара. Јасно назначити координатни систем који користите.

1.b. Изразити енергију и импулс електрона који учествује у првом судару у зависности од почетне брзине електрона \vec{v}_{1e} и његове масе мировања m_0 .

1.c. Изразити енергију и таласну дужину фотона након првог судара у зависности од таласне дужине иницијалног фотона λ_i , угла расејања θ и величине $\Lambda = h/(m_0 \cdot c)$.

Део 2 – Други судар

2.a. Нацртати слике на којима су означени вектори импулса електрона и фотона пре и после другог судара. Јасно назначити координатни систем који користите.

2.b. Изразити енергију и таласну дужину фотона након другог судара у зависности од таласне дужине фотона пре судара λ_0 , угла расејања θ и величине $\Lambda = h/(m_0 \cdot c)$.

2.c. Изразити кинетичку енергију ($T_2 = E_{2e} - E_{0e}$) и импулс p_{2e} електрона након другог судара у зависности од таласне дужине фотона након судара λ_f и константи m_0 , c и h .

Део 3 – Квантитативни опис процеса

Користећи бројне вредности датих физичких константи и λ_f и θ одредити изразе и нумеричке вредности за:

- 3.a.** де Брољеву таласну дужину иницијалног електрона;
- 3.b.** енергију и фреквенцију иницијалног фотона;
- 3.c.** брзину другог електрона након судара;
- 3.d.** промену таласне дужине фотона при сваком судару.

© Delia DAVIDESCU, PhD
Adrian DAFINEI, PhD

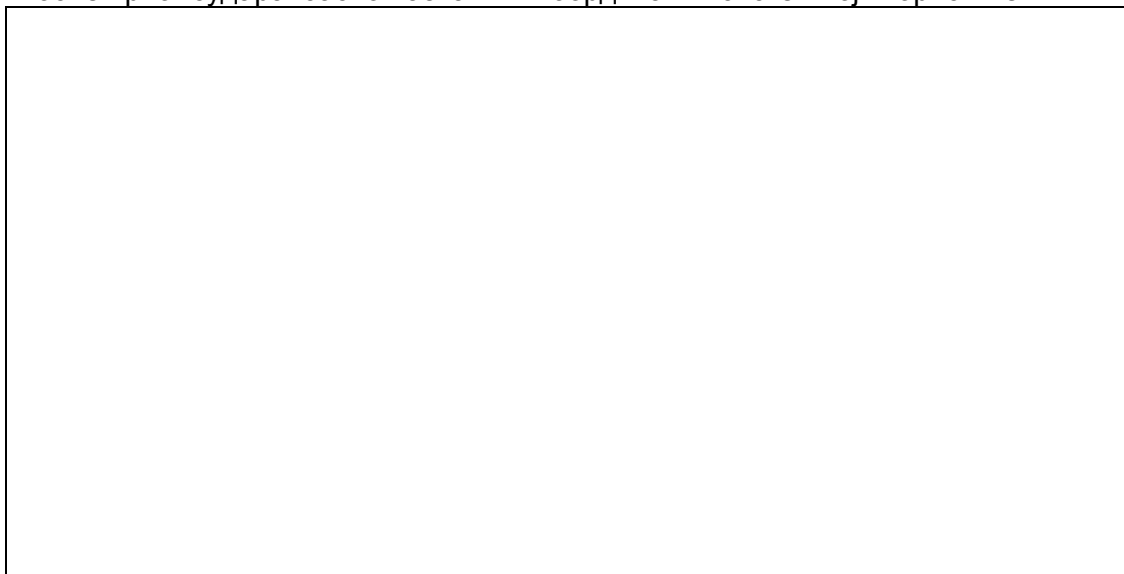
ФОРМУЛАР ЗА ОДГОВОРЕ

Теоријски задатак 2 (10 поена)

Комптоново расејање


Део 1 – Први судар

1.a. Нацртати слике на којима су означени вектори импулса електрона и фотона пре и после првог судара. Јасно назначити координатни систем који користите.



0,50п

1.b. Изразити енергију и импулс електрона који учествује у првом судару у зависности од почетне брзине електрона \vec{v}_{1e} и његове масе мировања m_0 .



0,80п

1.c. Изразити енергију и таласну дужину фотона након првог судара у зависности од таласне дужине иницијалног фотона λ_i , угла расејања θ и величине $\Delta\lambda = h/(m_0 \cdot c)$.



1,20п

Deo 2 – Други судар

2.a. Нацртати слике на којима су означени вектори импулса електрона и фотона пре и после другог судара. Јасно назначити координатни систем који користите.



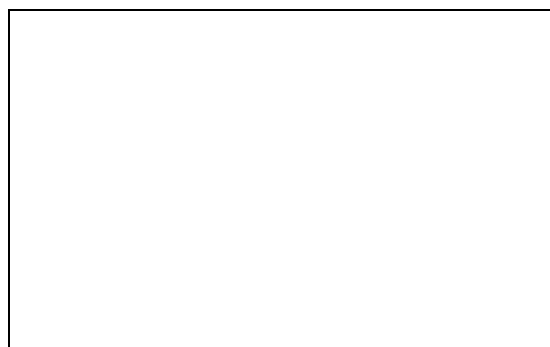
0,50п

2.b. Изразити енергију и таласну дужину фотона након другог судара у зависности од таласне дужине фотона пре судара λ_0 , угла расејања θ и величине $\Delta = h/(m_0 \cdot c)$.



1,20п

2.c. Изразити кинетичку енергију ($T_2 = E_{2e} - E_{0e}$) и импулс p_{2e} електрона након другог судара у зависности од таласне дужине фотона након судара λ_f и константи m_0 , c и h .



0,80п

Део 3 – Квантитативни опис процеса

3.a. Одредити израз за де Брољеву таласну дужину иницијалног електрона

1,00п

Одредити нумеричку вредност де Брољеве таласне дужине иницијалног електрона

1,00п

3.b. Одредити израз за енергију и фреквенцију иницијалног фотона

0,50п

Одредити нумеричке вредности енергије и фреквенције иницијалног фотона

0,50п

3.c. Одредити израз за брзину другог електрона након судара

0,50п

Одредити нумеричку вредност брзине другог електрона након судара

0,50п

3.d. Одредити израз за промену таласне дужине фотона при сваком од судара

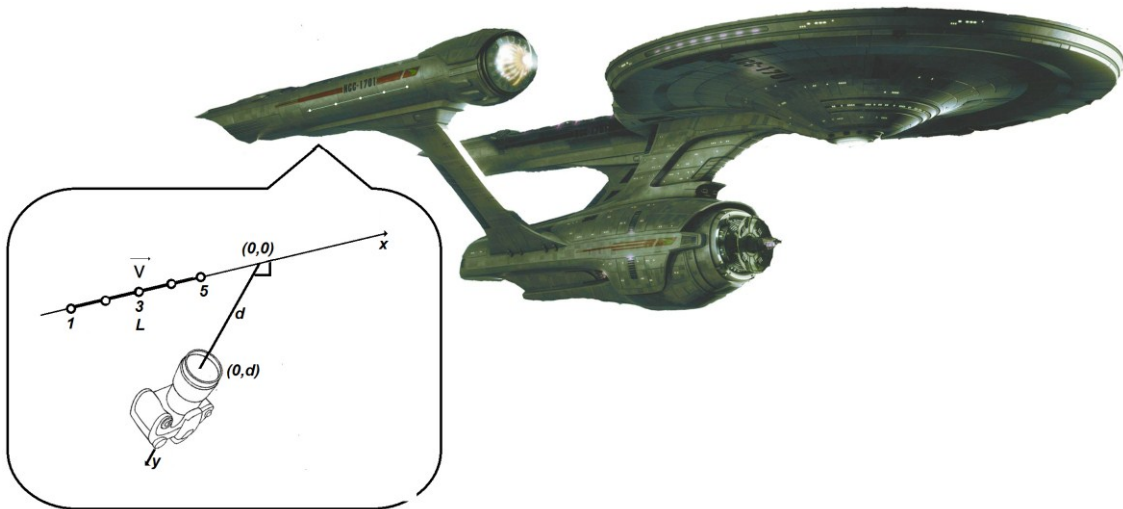
0,50п

Одредити нумеричку вредност промене таласне дужине фотона при сваком од судара

0,50п

Теоријски задатак 3 – Звездане стазе (10 поена)

Опис ситуације



Свемирски брод Ентерпрајз има два погонска мотора. На сваком од њих се налази низ од пет колинеарних, еквидистантних, нумерисаних светиљки приказаних на слици (за десни мотор). Ентерпрајз се креће константном брзином \vec{v} чији се правац поклапа са правцем дуж кога су распоређене светиљке - ox осом координатног система. У командној просторији другог свемирског брода који мирује и надгледа Ентерпрајз анализирају се слике низа светиљки. Сlike се снимају камером чија се апертура (отвор) налази у тачки $(0, d)$ Декартовог координатног система приказаног на слици горе. Слика низа светиљки настаје од светлосних зрака који истовремено стижу на апертуру која се отвара накратко. На слици Ентерпрајза који мирује дужина низа светиљки је L . У задатку сматрати светиљке тачкастим објектима.

Брзина светлости је $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Користити величине $\beta = v/c$ и $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, ако вам то помаже да краће запишете ваш резултат.

Део 1 – Веза између слике и стварног положаја

Под стварним положајем се подразумева положај у референтном систему у коме камера мирује.

Камера мирује у тачки $(0, d)$, док се Ентерпрајз креће брзином \vec{v} у ox правцу. На слици добијеној том камером примећено је да је једна од светиљки у положају x_i .

1.a. Наћи стварни положај x те светиљке у тренутку кад се формира њена слика у камери.

1.b. Наћи такође и одговарајућу инверзну релацију, тј. изразити x_i у зависности од x, d, L, v и c .

Део 2 – Привидна дужина низа светиљки

Камера прави снимак у тренутку кад је стварни положај централне светиљке x_0 .

2.a. Наћи привидну дужину низа светиљки на тој слици.

2.b. Испититати зависност привидне дужине низа светиљки од времена при кретању Ентерпрајза дуж Ox осе. Ентерпрајз долази из „минус бесконачности“, пролази кроз координатни почетак и удаљава се у „плус бесконачност“.

Део 3 – Симетрична слика

На једној од слика добијених помоћу камере оба краја низа светиљки су на једнаком растојању од апертуре камере.

3.a. Наћи привидну дужину низа светиљки са ове слике.

3.b. Наћи стварни положај средње светиљке у тренутку кад је ова слика снимљена.

3.c. Наћи где се на снимку налази слика средње светиљке.

Део 4 – Слике Ентерпрајза док је далеко и приближава се, као и када је далеко и удаљава се

Камера је снимила једну слику Ентерпрајза када је далеко и приближава се, а другу слику када је далеко и удаљава се. На једној од ове две слике привидна дужина низа светиљки је 200 m , а на другој је 600 m .

4.a. Који од следећих исказа је тачан?

i. Привидна дужина је 200 m на слици када се брод приближава, а 600 m на слици када се брод удаљава.

ii. Привидна дужина је 600 m на слици када се брод приближава, а 200 m на слици када се брод удаљава.

У одговарајуће поље у формулару за одговоре напишите број тачног одговора. Укратко образложите ваш одговор.

4.b. Израчунати брзину v брода.

4.c. Израчунати сопствену дужину низа светиљки.

4.d. Израчунати дужину низа светиљки на симетричној слици из дела 3.a.

ФОРМУЛАР ЗА ОДГОВОРЕ

Теоријски задатак 3 – Звездане стазе (10 поена)

Део 1 - Веза између слике и стварног положаја

1.a. Израз за стварни положај светиљке у тренутку кад се формира њена слика у камери.

1,00п

1.b. Одговарајућа инверзна релација, тј. израз за x_i у зависности од x , d , L , v и c .

1,00п

Део 2 - Привидна дужина низа светиљки

2.a. Израз за привидну дужину низа светиљки на тој слици

1,00п

2.b. Навести, користећи математички израз, како се мења привидна дужина низа светиљки у зависности од времена при кретању Ентерпрајза дуж Ox осе.

1,00п

Део 3 – Симетрична слика

3.a. Израз за привидну дужину низа светиљки са ове слике

1,00п

3.b. Израз за стварни положај средње светиљке у тренутку кад је ова слика снимљена

1,00п

3.c. Наћи где се на снимку налази слика средње светиљке.

1,00п

Део 4 - Слике Ентерштајза док је далеко и приближава се, као и када је далеко и удаљава се

4.a. Који од следећих исказа је тачан?

i. Привидна дужина је 200 m на слици када се брод приближава, а 600 m на слици када се брод удаљава.

ii. Привидна дужина је 600 m на слици када се брод приближава, а 200 m на слици када се брод удаљава.

Заокружите број испред тачног одговора. Укратко образложите ваш одговор.

1,00п

4.b. Брзина v брода

1,00п

4.c. Бројна вредност сопствене дужине низа светиљки

0,50п

4.d. Дужина низа светиљки на симетричној слици

0,50п