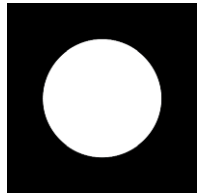


## 43. Међународна Физичка Олимпијада — теоријски део

Тарту, Естонија — понедељак, 16. јул 2012

- Израда задатака траје 5 сати. Постоје 3 задатка који укупно вреде 30 бодова. **Треба приметити да ова три задатка не вреде исти број бодова.**
- **Не смете да отворате коверат са задацима пре звучног сигнала који означава почетак такмичења** (три кратка сигнала).
- **Није вам дозвољено да напуштате своје место без дозволе.** Ако вам је потребна било каква помоћ (поковарен калкулатор, морате да одете до тоалета, итд.), подигните одговарајућу заставицу "HELP" или "TOILET" (помоћу дугачке дршке која се налази на радном месту) изнад зидова вашег радног места и држите је подигнуту све док неко од организатора не дође..
- **Ваша решења морају да буду изражена преко вредности које су обележене у тексту задатка, и такође може да садржи фундаменталне константе ако су потребне.** На пример, ако је написано: „висина коцке је  $a$ , а ширина –  $b$ “ онда  $a$  може да се користи у решењу, а  $b$  не може да се користи (осим ако је оно обележено на неком другом месту, видите даљи текст). Оне величине које су обележене у тексту подпитања могу бити коришћене само у решењу тог подпитања; величине које су обележене у уводном тексту задатка (или дела задатка), то јест ван подпитања, могу бити коришћене у свим решењима тог задатка (или дела задатка).
- Користите само предњу страну листова папира.
- За сваки задатак постоје **одговарајући Листови за решења – Solution Sheets** (погледајте број и симбол у заглављу). Ваша детаљна решења пишете на одговарајуће Листове за решења. За сваки задатак су нумерисани листови за решења; користите листове у складу са нумерацијом. **Увек назначите на овим листовима за који део задатка и које питање дајете решење.** Коначно решење препишите у одговарајуће поље **Листа за одговоре – Answer Sheet**. Такође постоје и **Радни папири**; оно што будете писали на њима неће бити прегледано. Ако сте на Листу за решења написали нешто што не желите да се оцењује (као што је почетно или погрешно решење), тај део прецртајте.
- Ако вам треба додатних листова за неки задатак подигните заставицу "HELP" и реците организатору број задатка; добићете два Листа за решења (ово можете урадити више пута)
- **Треба да користите што је мање могуће текста:** пробајте да изразите ваше решење углавном кроз једанчине, бројеве, симболе и графике. ~~Када је текстуално објашњење неизбежно пожељно је да дате и објашњење на Енглеском поред објашњења на матерњем језику (ако сте нешто погрешно превели или уопште нисте превели уопште, текст који сте написали на вашем матерњем језику биће коришћен приликом усаглашавања оцена).~~
- Први звучни сигнал (једнострук) означава да је остало још 30 минута за решавање задатака; други двоструки звучни сигнал означава да је остало још 5 минута; трећи троструки звучни сигнал означава крај решавања задатака. **После трећег звучног сигнала морате одмах да престанете да пишете.** Ставите све папире у коверат на вашем столу. **Није вам дозвољено да понесете било који лист папира ван просторије.** Ако завршите решавање пре последњег сигнала, подигнете вашу заставицу.



**Задатак Т1. Усредсредите се на скице (13 поена)**

**Део А. Балистика (4,5 поена)**

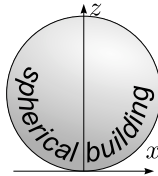
Лоптица бачена почетном брзином  $v_0$  креће се у хомогеном гравитационом пољу у  $x$ - $z$  равни, при чему је  $x$  - оса хоризонтална, а  $z$  - је вертикална, антипаралелна убрзању земљине теже  $g$ ; занемарите отпор ваздуха.

i. (0,8 поена) Подешавањем угла под којим се избацује лоптица константном почетном брзином  $v_0$ , из координатног почетка, мете могу да буде погођене у области која је описана једначином

$$z \leq z_0 - kx^2;$$

можете користити ову чињеницу без доказивања. Нађите константе  $z_0$  и  $k$ .

ii. (1,2 поена) Сада тачка из које се испаљује куглица може да буде слободно изабрана на површини земље  $z = 0$ , а угао под којим се испаљује може да се подешава по потреби; циљ је да се погоди највиша тачка сферне грађевине полупречника  $R$  (видите слику.) користећи што је мању могућу почетну брзину  $v_0$  (није дозвољено погодити врх користећи одскакање од крова). Скицирајте квалитативно облик оптималне путање лоптице (користите одговарајуће поље на листу за одговоре). Напомена: Поени се дају само за скицу.



iii. (2,5 поена) Колика је минимална брзина  $v_{\min}$  којом је потребно избацити лоптицу да би погодила највишу тачку сферне грађевине полупречника  $R$ ?

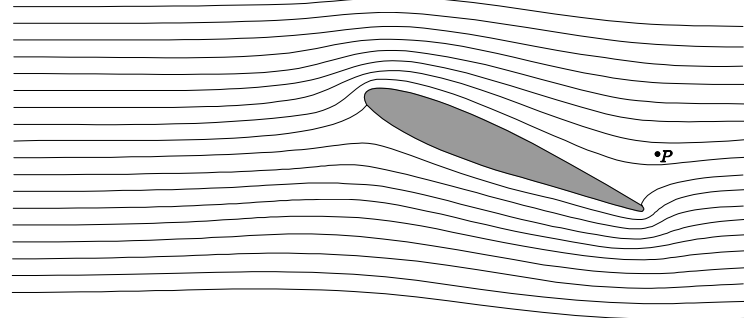


La Géode, Parc de la Villette, Paris. Photo: katchoo/flickr.com

**Део В. Струјање ваздуха око крила (4 поена)**

За овај део задатка следећа информација може да буде корисна. За протицање течности или гаса у цеви дуж струјница важи  $p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = const$  када је брзина протицања много мања од брзине звука. Овде је  $\rho$  густина,  $h$  - висина,  $g$  - убрзање земљине теже и  $p$  је хидростатички притисак. Струјнице се дефинишу као путање делића флуида (под претпоставком да је протицање стационарно). Члан  $\frac{1}{2} \rho v^2$  се назива динамички притисак.

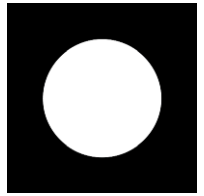
На доњој слици је приказан пресек авионског крила заједно са струјницама које описују струјање ваздуха око крила, посматраном из система референце везаног за крило. Претпоставите да је (а) струјање ваздуха дводимензионално (тј. вектор брзине ваздуха око крила се увек налази у равни слике); (б) облик струјница не зависи од брзине авиона; (с) нема ветра; (д) динамички притисак је много мањи од атмосферског притиска  $p_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Можете да користите лењир да мерите потребне величине на листу за одговоре.



i. (0,8 поена) Колика је брзина ваздуха  $v_P$  у односу на земљу у тачки  $P$  (означеној на слици) када је брзина авиона у односу на земљу  $v_0 = 100 \text{ m/s}$ ?

ii. (1,2 поена) У случају високе релативне влажности, када брзина авиона у односу на земљу порасте преко критичне вредности  $v_{\text{crit}}$ , долази до формирања водених капљица изнад крила. Капљице се појављују у одређеној тачки  $Q$ . Обележите тачку  $Q$  на слици на Листу за одговоре. Објасните квалитативно (користећи формуле и што је мање могуће текста) како сте одредили њену позицију.

iii. (2,0 поена) Процените критичну брзину  $v_{\text{crit}}$  користећи следеће податке: релативна влажност ваздуха је  $r = 90\%$ , специфична топлота ваздуха на константном притиску је  $c_p = 1,00 \times 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ , притисак zasiћене водене паре на температури  $T_a = 293 \text{ K}$  је  $p_{sa} = 2,31 \text{ kPa}$ , а на температури  $T_b = 294 \text{ K}$  је  $p_{sb} = 2,46 \text{ kPa}$ . У зависности коју апроксимацију користите може да вам буде потребна и вредност специфичне топлоте ваздуха при константној запремини  $c_v = 0,717 \times 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ . Напомена: релативна влажност се дефинише као однос притиска

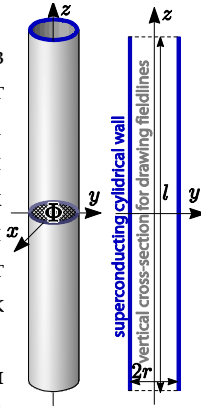


водене паре и притиска zasiћене паре на одређеној температури. Притисак zasiћене паре се дефинише као притисак паре при коме је пара у равнотежи са течносту.

### Део С. Магнетне линије (4,5 поена)

Посматрајмо цилиндричну цев направљену од суперпроводног материјала. Дужина цеви је  $l$ , а унутрашњи полупречник је  $r$ ; при чему је  $l \gg r$ . Координатни почетак се налази у центру цеви, а оса цеви се поклапа са  $z$ -осом. Вредност магнетног флукса кроз централни пресек цеви  $z = 0, x^2 + y^2 < r^2$  има вредност  $\Phi$ .

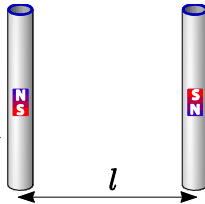
Суперпроводник је материјал који истискује било које магнетно поље из себе (магнетно поље је нула унутар њега).



i. (0,8 поена) Скицирајте пет линија магнетног поља које пролазе кроз пет црвених тачака означених на пресеку цеви у одговарајућем пољу листа за одговоре.

ii. (1,2 поена) Нађите силу  $T$  у правцу  $z$ -осе која делује у центру цеви (тј. силу којом две половине цеви,  $z > 0$  и  $z < 0$ , делују једна на другу).

iii. (2,5 поена) Сада постоји и друга цев, идентична и паралелна првој. Друга цев има супротни смер магнетног поља и њен центар се налази у тачки  $y = l, x = z = 0$  (тако да цеви формирају наспрамне стране квадрата). Одредите силу магнетне интеракције  $F$  између цеви.

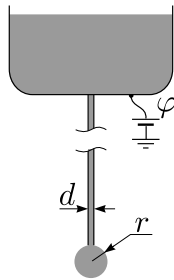




**Задатак Т2. Келвинова капалица за воду (8 поена)**

Следеће особине површинског напона могу бити од користи у овом задатку. За молекуле течности, места на граничној површини течност – гас су мање повољна него места унутар саме запремине течности. С тога се граничној површини приписује такозвана површинска енергија  $U=\sigma S$ , где је  $S$  величина површине, а  $\sigma$  коефицијент површинског напона. Даље, било која два дела површине течности се узајамно привлаче силом  $F=\sigma l$ , где је  $l$  дужина линије која раздваја те делове.

Дугачка метална цев, унутрашњег пречника  $d$  је усмерена на доле; вода лагано капље кроз отвор на дну цеви, види слику. Сматрати да је вода електро проводна; коефицијент површинског напона воде је  $\sigma$ , а густина  $\rho$ . Узети да је  $d \ll r$ . Овде је  $r$  полупречник капљице која виси на дну цеви и која лагано расте у времену све док се не одвоји од отвора цеви услед гравитационе силе која даје убрзање  $g$ .

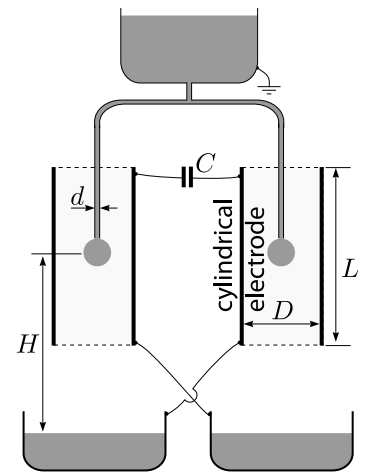


**Део А. Једна цев (4 поена)**

- i. (1,2 поена) Нађите полупречник  $r_{\max}$  капљице у тренутку одвајања од отвора.
- ii. (1,2 поена) Електростатички потенцијал капалице, у односу на бесконачност, је  $\varphi$ . Нађите наелектрисање  $Q$  капљице када је њен полупречник  $r$ .
- iii. (1,6 поена) У овом делу, претпоставите да је  $r$  непроменљиво, а  $\varphi$  постепено расте. Капљица ће постати нестабилна и распршиће се у два дела када притисак унутар капљице постане мањи од атмосферског. Нађите критични потенцијал  $\varphi_{\max}$  при којем се ово дешава.

**Део В. Две цеви (4 поена)**

Уређај зване „Келвинова капалица за воду“ се састоји од две цеви (идентичне оној описаној у делу А), повезане помоћу Т – споја, видите слику. Крајеви обе цеви се налазе у центрима две цилиндричне елктроде (висине  $L$  и пречника  $D$ ,  $L \gg D \gg r$ ); за обе цеви важи да је брзина капања једнака  $v$  капљица у јединици времена. Капљице падају са висине  $H$  у проводне посуде које се налазе испод цеви и које су укрштено повезане са доњим крајевима електрода као што је приказано на слици; горњи крајеви електрода су повезани преко кондензатора капацитета  $C$ . У почетку, цео систем је ненаелектрисан. Уочите да је резервоар са водом уземљен.

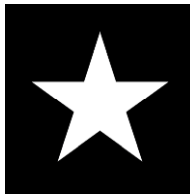


Прва капљица која падне ће имати микроскопско наелектрисање, што ће изазвати неравнотежу између две стране и самим тим мало раздвајање наелектрисања на коендензатору.

- i. (1,2 поена) Изразите апсолутну вредност наелектрисања  $Q_0$  капљице, која се одваја у одређеном тренутку, када је наелектрисање на кондензатору  $q$ , у зависности од  $r_{\max}$  (из дела А-i). Занемарите ефекте описане у делу А-iii.
- ii. (1,5 поена) Нађите зависност  $q$  од времена  $t$  апроксимирајући ту зависност континуалном функцијом  $q(t)$  и претпостављајући да је  $q(0) = q_0$ .
- iii. (1,3 поена) Функционисање капалице може да буде ометено појавом ефекта описаног у делу А-iii. При томе, максимални напон  $U_{\max}$  који се може постићи између електрода је ограничен електростатичким одбијањем између капљице и посуде испод ње; нађите  $U_{\max}$ .

# PROBLEM

## Problem 3



### Задатак Т3. Настајање протозвезда (9 поена)

Претпоставимо да се настајање звезде одвија на следећи начин. Сферични облак разређеног међузвезданог гаса, који у почетку мирује, почиње да се сажима услед сопствене гравитације. Почетни полупречник облака је  $r_0$ , а маса му је  $M$ . Температура околине (много разређеније од гаса) и почетна температура гаса су просторно равномерно распоређени једнаке су и износе  $T_0$ . Гас се може сматрати као идеалан. Средња моларна маса гаса је  $\mu$ , а његов експонент адијабате  $\gamma > 4/3$ . Претпоставите да је  $Gm\mu/r_0 \gg RT_0$ , где је  $R$  универзална гасна константа, а  $G$  — гравитациона константа.

- i. (0,8 поена) За време већег дела сажимања, гас је толико непропустан за термално зрачење да и најмања количина топлоте која се створи у истом тренутку се и израчи, односно облак остаје у термодинамичкој равнотежи са околином. Колико пута ( $n$ ) се притисак гаса повећа ако се полупречник преполови ( $r_1 = 0,5r_0$ )? Претпоставити да густина гаса остаје равномерно распоређена.
- ii. (1 поен) Процените време  $t_2$  потребно да се полупречник смањи од  $r_0$  до  $r_2 = 0,95r_0$ . Занемарите

промене гравитационог поља приликом апроксимације у којој честице гаса слободно падају.

iii. (2,5 поена) Подразумевајући да притисак остаје занемарљив, наћи време  $t_{r \rightarrow 0}$  које је потребно да се облак сажме од  $r_0$  до много мањег полупречника користећи Кеплеров закон за елиптичне орбите.

iv. (1,7 поена) На неком полупречнику  $r_3 \ll r_0$ , гас постаје довољно густ и самим тим непропустан за термално зрачење. Израчунајте количину топлоте  $Q$  која се израчи за време сажимања од полупречника  $r_0$  до  $r_3$ .

v. (1 поен) За полупречнике мање од  $r_3$  можете да занемарите топлотно зрачење. Одредите како температура  $T$  сферичног облака зависи од његовог полупречника  $r < r_3$ .

vi. (2 поена) На крају, утицај притиска на динамику гаса се не може занемарити и сажимање престаје када је  $r = r_4$  (где је  $r_4 \ll r_3$ ). Ипак, зрачење се и даље може занемарити тако да температура још увек није довољна да се започне нуклеарна фузија. Притисак такве протозвезде није више равномерно распоређен, али грубе процене са бројним вредностима ниске тачности се још увек могу направити. Процените коначни полупречник  $r_4$  и одговарајућу температуру  $T_4$ .



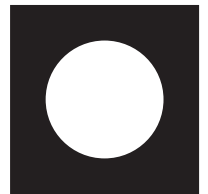
## The 43<sup>rd</sup> International Physics Olympiad — Theoretical Competition

Tartu, Estonia — Tuesday, July 17<sup>th</sup> 2012

- The examination lasts for 5 hours. There are 3 problems worth in total 30 points. **Please note that the point values of the three theoretical problems are not equal.**
- **You must not open the envelope with the problems before the sound signal of the beginning of competition (three short signals).**
- **You are not allowed to leave your working place without permission.** If you need any assistance (broken calculator, need to visit a restroom, etc), please raise the corresponding flag (“HELP” or “TOILET” with a long handle at your seat) above your seat box walls and keep it raised until an organizer arrives.
- **Your answers must be expressed in terms of those quantities, which are highlighted** in the problem text, and can contain also fundamental constants, if needed. So, if it is written that “the box height is  $a$  and the width —  $b$ ” then  $a$  can be used in the answer, and  $b$  cannot be used (unless it is highlighted somewhere else, see below). Those quantities which are highlighted in the text of a subquestion can be used only in the answer to that subquestion; the quantities which are highlighted in the introductory text of the Problem (or a Part of a Problem), i.e. outside the scope of any subquestion, can be used for all the answers of that Problem (or of that Problem Part).
- Use only the front side of the sheets of paper.
- For each problem, there are **dedicated Solution Sheets** (see header for the number and pictogramme). Write your solutions onto the appropriate Solution Sheets. For each Problem, the Solution Sheets are numbered; use the sheets according to the enumeration. **Always mark which Problem Part and Question you are dealing with.** Copy the final answers into the appropriate boxes of the **Answer Sheets**. There are also **Draft** papers; use these for writing things which you don’t want to be graded. If you have written something what you don’t want to be graded onto the Solution Sheets (such as initial and incorrect solutions), cross these out.
- If you need more paper for a certain problem, please raise the flag “HELP” and tell an organizer the problem number; you are given two Solution sheets (you can do this more than once).
- **You should use as little text as possible:** try to explain your solution mainly with equations, numbers, symbols and diagrams. ~~When textual explanation is unavoidable, you are encouraged to provide English translation alongside with the text in your native language (if you mistranslate, or don’t translate at all, your native language text will be used during the Moderation).~~
- The first single sound signal tells you that there are 30 min of solving time left; the second double sound signal means that 5 min is left; the third triple sound signal marks the end of solving time. **After the third sound signal you must stop writing immediately.** Put all the papers into the envelope at your desk. **You are not allowed to take any sheet of paper out of the room.** If you have finished solving before the final sound signal, please raise your flag.

# PROBLEM

## Problem 1



### Problem T1. Focus on sketches (13 points)

#### Part A. Ballistics (4.5 points)

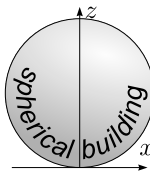
A ball thrown with an initial speed  $v_0$  moves in a homogeneous gravitational field in  $x - z$  plane, where the  $x$ -axis is horizontal, and  $z$  — vertical, antiparallel to the free fall acceleration  $g$ ; neglect the air drag.

i. (0.8 pts) By adjusting the launching angle for a ball thrown with a fixed initial speed  $v_0$  from the origin, targets can be hit within the region given by

$$z \leq z_0 - kx^2;$$

you can use this fact without proving it. Find the constants  $z_0$  and  $k$ .

ii. (1.2 pts) Now, the launching point can be freely selected on the ground level  $z = 0$ , and the launching angle can be adjusted as needed; the aim is to hit the topmost point of a spherical building of radius  $R$  (see fig.) with as small as possible initial speed  $v_0$  (prior hitting the target, bouncing off the roof is not allowed). Sketch qualitatively the shape of the optimal trajectory of the ball (use the designated box on the answer sheet). Note: the points are given only for the sketch.



iii. (2.5 pts) What is the minimal launching speed  $v_{\min}$  needed to hit the topmost point of a spherical building of radius  $R$ ?

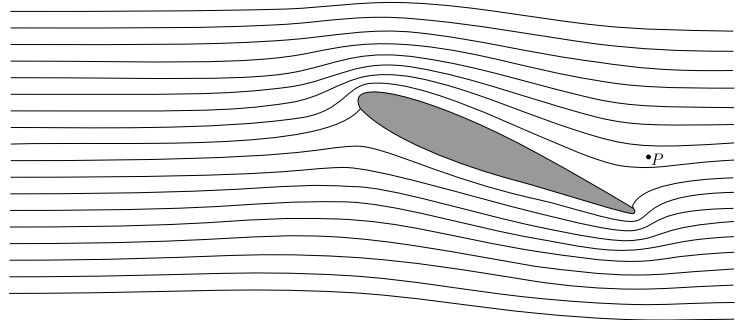


La Géode, Parc de la Villette, Paris. Photo: katchoo/flickr.com **Part**

#### B. Air flow around a wing (4 points)

For this Problem Part, the following information may be useful. For a flow of liquid or gas in a tube, along a streamline  $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$ , assuming that the velocity  $v$  is much smaller than the sound speed. Here  $\rho$  is the density,  $h$  — height,  $g$  — free fall acceleration, and  $p$  — hydrostatic pressure. Streamlines are defined as the trajectories of fluid particles (assuming that the flow pattern is stationary). Note that the term  $\frac{1}{2}\rho v^2$  is called the dynamic pressure.

In the fig. below, a cross-section of an aircraft wing is depicted together with streamlines of the air flow around the wing, as seen in the wing's reference frame. Assume that (a) the air flow is purely two-dimensional (i.e. that the velocity vectors of air lie in the figure plane); (b) the streamline pattern is independent of the aircraft speed; (c) there is no wind; (d) the dynamic pressure is much smaller than the atmospheric pressure  $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ . You can use a ruler to take measurements from the fig. on the answer sheet.



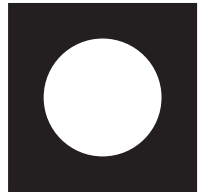
i. (0.8 pts) If the aircraft's ground speed is  $v_0 = 100 \text{ m/s}$ , what is the speed of the air  $v_P$  at the point  $P$  (marked in fig.) with respect to the ground?

ii. (1.2 pts) In the case of high relative humidity, as the ground speed of the aircraft increases over a critical value  $v_{\text{crit}}$ , a stream of water droplets is created behind the wing. The droplets emerge at a certain point  $Q$ . Mark the point  $Q$  in fig. on the answer sheet. Explain qualitatively (using formulae and as few text as possible) how you determined its position.

iii. (2.0 pts) Estimate the critical speed  $v_{\text{crit}}$  using the following data: relative humidity of the air is  $r = 90\%$ , specific heat of air at constant pressure  $c_p = 1.00 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , pressure of saturated water vapour:  $p_{sa} = 2.31 \text{ kPa}$  at the temperature of the unperturbed air  $T_a = 293 \text{ K}$  and  $p_{sb} = 2.46 \text{ kPa}$  at  $T_b = 294 \text{ K}$ . Depending on your approximations you may also need the specific heat of air at constant volume  $c_v = 0.717 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ . Note that the relative humidity is defined as the ratio of the vapor pressure to the saturated vapor pressure at the given temperature. Saturated vapor pressure is defined as the vapor pressure by which vapor is in equilibrium with the liquid.

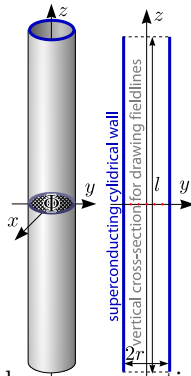
# PROBLEM

## Problem 1



### Part C. Magnetic straws (4.5 points)

Consider a cylindrical tube made of a superconducting material. The length of the tube is  $l$  and the inner radius is  $r$ ; always  $l \gg r$ . The centre of the tube coincides with the origin, and its axis coincides with the  $z$ -axis. There is a magnetic flux  $\Phi$  through the central cross-section of the tube,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 < r^2$ .



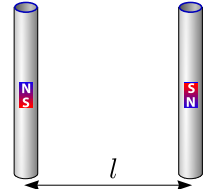
Superconductor is a material which expels any magnetic field (field is zero inside it).

i. (0.8 pts) Sketch five such magnetic field lines onto the des-

ignated box of the answer sheet which pass through the five red dots marked on the axial cross-section of the tube.

ii. (1.2 pts) Find the  $z$ -directional tension force  $T$  in the middle of the tube (i.e. the force by which two halves of the tube,  $z > 0$  and  $z < 0$ , interact with each other).

iii. (2.5 pts) Now there is another tube, identical and parallel to the first one. The second tube has opposite direction of the magnetic field, and its centre is placed at  $y = l$ ,  $x = z = 0$  (so that the tubes form opposite sides of a square). Determine the magnetic interaction force  $F$  between the two tubes.





# PROBLEM

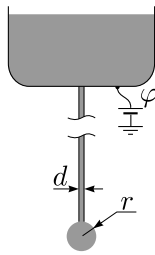
## Problem 2



### Problem T2. Kelvin water dropper (8 points)

The following facts about the surface tension may turn out to be useful for this problem. For the molecules of a liquid, the positions at the liquid-air interface are less favourable as compared with the positions in the bulk of the liquid. Therefore, this interface is ascribed the so-called surface energy  $U = \sigma S$ , where  $S$  is the surface area of the interface and  $\sigma$  — the surface tension coefficient of the liquid. Further, two fragments of the liquid surface pull each other with a force  $F = \sigma l$ , where  $l$  is the length of a straight line separating the fragments.

A long metallic pipe with internal diameter  $d$  is pointing directly downwards; water is slowly dripping from a nozzle at its lower end, see fig. Water can be considered to be electrically conducting; its surface tension is  $\sigma$  and density —  $\rho$ . Always assume that  $d \ll r$ . Here,  $r$  is the radius of the droplet hanging below the nozzle, which grows slowly in time until the droplet separates from the nozzle due to the free fall acceleration  $g$ .



#### Part A. Single pipe (4 points)

- (1.2 pts) Find the radius  $r_{\max}$  of a drop just before it separates from the nozzle.
- (1.2 pts) Relative to the far-away surroundings, the pipe's electrostatic potential is  $\varphi$ . Find the charge  $Q$  of a drop when its radius is  $r$ .
- (1.6 pts) For this question, assume that  $r$  is kept constant and  $\varphi$  is slowly increased. The droplet becomes unstable and breaks into two pieces if the hydrostatic pressure inside the droplet becomes smaller than the atmospheric one. Find the critical potential  $\varphi_{\max}$  at which this will happen.

#### Part B. Two pipes (4 points)

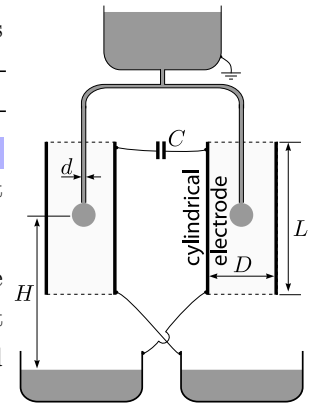
An apparatus called “Kelvin water dropper” consists of two pipes (identical to the one described in Part A), connected via a T-junction, see fig. The ends of both pipes are at the centres of two cylindrical electrodes (with height  $L$  and diameter  $D$ ,  $L \gg D \gg r$ ); for both tubes, the dripping rate is  $n$  droplets per unit time. Droplets fall from height  $H$  into conductive bowls underneath the nozzles, cross-connected to the electrodes as shown in Fig; the electrodes are connected via a capacitance  $C$ . There is no net charge on the system of bowls and electrodes. Note that the water container is grounded.

The first droplet to fall will have microscopic charge, which will cause an imbalance between the two sides and a small charge separation across the capacitor.

- (1.2 pts) Express the modulus of the charge  $Q_0$  of the drops separating at the instant when the capacitor's charge is  $q$  in terms of  $r_{\max}$  (from Part A-i). Neglect the effect described in Part A-iii.

- (1.5 pts) Find the dependence of  $q$  on time  $t$  by approximating it with a continuous function  $q(t)$  and assuming that  $q(0) = q_0$ .

- (1.3 pts) The dropper's functioning can be hindered by the effect shown in Part A-iii. Additionally, a limit  $U_{\max}$  to the achievable voltage between the electrodes is set by the electrostatic push between a droplet and the bowl beneath it; find  $U_{\max}$ .



# PROBLEM

## Problem 3



### Problem T3. Protostar formation (9 points)

Let us model the formation of a star as follows. A spherical cloud of sparse interstellar gas, initially at rest, starts to collapse due to its own gravity. The initial radius of the ball is  $r_0$  and the mass —  $m$ . The temperature of the surroundings (much sparser than the gas) and the initial temperature of the gas is uniformly  $T_0$ . The gas may be assumed to be ideal. The average molar mass of the gas is  $\mu$  and its adiabatic index is  $\gamma > \frac{4}{3}$ . Assume that  $G\frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$ , where  $R$  is the gas constant and  $G$  — the gravity constant.

**i. (0.8 pts)** During much of the collapse, the gas is so transparent that any heat generated is immediately radiated away, i.e. the ball stays in a thermodynamic equilibrium with its surroundings. How many times ( $n$ ) does the pressure increase while the radius is halved ( $r_1 = 0.5r_0$ )? Assume that the gas density stays uniform.

**ii. (1 pt)** Estimate the time  $t_2$  needed for the radius to shrink from  $r_0$  to  $r_2 = 0.95r_0$ . Neglect the change of the gravity field at the position of a falling gas particle.

**iii. (2.5 pts)** Assuming that the pressure stays negligible, find the time  $t_{r \rightarrow 0}$  needed for the ball to collapse from  $r_0$  down to a much smaller radius using Kepler's Laws for elliptical orbits.

**iv. (1.7 pts)** At some radius  $r_3 \ll r_0$ , the gas becomes dense enough to be opaque to the heat radiation. Calculate the amount of heat  $Q$  radiated away during the collapse from the radius  $r_0$  down to  $r_3$ .

**v. (1 pt)** For radii smaller than  $r_3$  you may neglect heat radiation. Determine how the temperature  $T$  of the ball depends on its radius  $r < r_3$ .

**vi. (2 pts)** Eventually we cannot neglect the effect of the pressure on the dynamics of the gas and the collapse stops at  $r = r_4$  (with  $r_4 \ll r_3$ ). However, the radiation can still be neglected and the temperature is not yet high enough to ignite nuclear fusion. The pressure of such a protostar is not uniform anymore, but rough estimates with inaccurate numerical pre-factors can still be done. *Estimate* the final radius  $r_4$  and the respective temperature  $T_4$ .



## 43. Међународна физичка олимпијада — Експериментални део

Тарту, Естонија — Понедељак, 16. јул 2012.

- Израда задатака траје 5 сати. Постоје два задатка која укупно вреде 20 бодова. Имате два стола на располагању (у суседним одељцима), апаратура за задатак E1 је на једном столу, а апаратура за задатак E2 је на другом столу; можете слободно да се крећете између столова. **Ипак, није дозвољено да се неки део једне апаратуре премешта на другу.**
- На почетку, апаратура на једном столу је покривена док је друга апаратура смештена у кутију. **Не смете нити склањати поклопац (покривач), нити отворати кутију, нити отворати коверту са задацима пре него што чујете звучни сигнал који означава почетак израде задатака (три кратка сигнала).**
- **Не смете напуштати ваша радна места без дозволе.** Ако вам треба било какав помоћ (експериментална опрема која не ради исправно, покварен калкулатор, морате у тоалет итд), подигните одговарајућу заставицу „HELP“ или „TOILET“ (помоћу дугачке дршке која се налази на радном месту) изнад зидова вашег радног места и држите је подигнуту све док неко од организатора не дође.
- Користите само предње стране листова папира
- За сваки задатак постоје **одговарајући Листови за решења** (погледајте број и симбол у заглављу). Ваша детаљна решења пишете на одговарајуће Листове за решења. За сваки задатак су нумерисани листови за решења; користите листове у складу са нумерацијом. **Увек назначите за који део задатка и питање пишете решење.** Коначно решење напишите и у одговарајуће поље **Листа за одговоре**. Такође постоје и **Радни** папири; оно што будете писали на њима неће бити прегледано. Ако на Листу за решења напишете нешто што не желите да буде прегледано (као нпр. почетни или нетачни одговори) тај део прецртајте.
- Ако вам треба додатних листова за неки задатак, подигните заставицу „HELP“ и реците организатору број задатка; добићете два Листа за решења (ово можете урадити више пута)
- **Треба да користите што је мање могуће текста:** пробајте да изразите ваше решење углавном кроз једанчине, бројеве, симболе и графике. ~~Када је текстуално објашњење неизбежно пожељно је да дате и објашњење на Енглеском поред објашњења на матерњем језику (ако сте нешто погрешно превели или уопште нисте превели уопште, текст који сте написали на вашем матерњем језику биће коришћен приликом усаглашавања оцена).~~
- **Избегавајте кретање које није неопходно током експерименталног задатка и немојте дрмати апаратуру: експеримент са ласером захтева стабилност**
- **Не гледајте директно у ласерски снап или његову рефлексију! То може трајно да вам оштети вид!**
- Први звучни сигнал (једнострук) означава да је остало још 30 минута за решавање задатака; други двоструки звучни сигнал означава да је остало још 5 минута; трећи троструки звучни сигнал означава крај решавања задатака. **После трећег звучног сигнала морате одмах да престанете да пишете.** Ставите све папире у коверат на вашем столу. **Није вам дозвољено да понесете било који лист папира ван просторије.** Ако завршите решавање пре последњег сигнала, подигнете вашу заставицу.



### Задатак E1. Магнетна пропустљивост (пермеабилност) воде (10 поена)

Ефекат магнетног поља на већину супстанци, осим феромагнетика, је веома слаб. Ово је последица чињенице да густина енергије магнетног поља у супстанци са релативном магнетном пропустљивошћу  $\mu$  износи  $\omega = \frac{1}{2\mu \cdot \mu_0} B^2$ , и обично је  $\mu$  веома приближно 1.

Ипак, коришћењем погодне експерименталне методе ови ефекти могу да буду јасно примећене. У овом задатку се проучавају ефекати магнетног поља, добијеног сталним неодијумским магнетом, на воду и користиће се добијени резултати за добијање магнетне пропустљивости воде. **Грешке није потребно одредити у целом овом задатку и није потребно урачунати ефекте површинског напона.**

**Апаратура** се састоји од: **1** постоља (означени бројеви одговарају бројевима на слици), **3** дигиталног нонијуса, **4** ласерског показивача, **5** посуде са водом и **7** цилиндричног сталног магнета који се налази у посуди (магнет је осно намагнетисан).

Посуда је причвршћена за основу постоља привлачењем магнета. Ласерски показивач је причвршћен за нонијус чија је основа причвршћена за постоље; нонијус омогућава хоризонтално померање ласера. Дугме за паљење ласера може да буде притиснуто помоћу беле конусне цеви **13**. Дебљина слоја воде изнад магнета треба да буде око 1mm (ако је вода изнад магнета сувише плитка њена површина постаје толико закривљена да зрак на заклону постаје размазан и немогуће је очитати његов положај). Чаша воде **15** и шприц **16** могу да се користе за подешавање нивоа воде (да бисте повећали ниво воде за 1mm додајте 13ml воде). Лист милиметарског папира (заклон **2**) је причвршћен за вертикалну плочу малим магнетном **14**. Ако ласерски

сноп на заклону постане размазан проверите да ли је вода изнад магнета плитка или има прашине на површини воде (и ако је има лагано је одувајте).

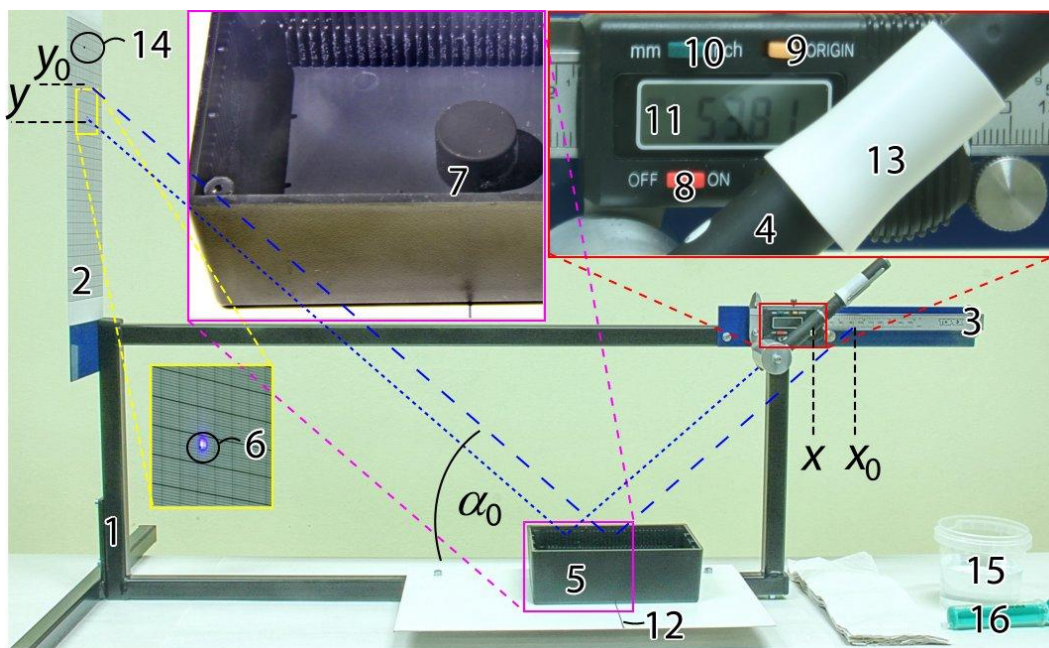
Преостале ознаке на слици се односе на следеће елементе: **6** тачка у којој ласерски зрак пада на заклон, **11** дисплеј нонијуса, **10** дугме које пребације јединице на нонијусу са милиметара на инче и обрнуто, **8** дугме за паљење и гашење нонијуса, **9** дугме које одређује у тачку од које мери нонијус. Испод ласерског показивача постоји још једно дугме на нонијусу које привремено ресетује тачку од које мери нонијус (ако га случајно притиснете, притисните га још једном да бисте се вратили на претходни начин мерење).

**Нумеричке вредности** за израчунавање: **хоризонтално растојање** између центра магнета и заклона  $L_0 = 490$  mm. Проверите (и подесите ако је неопходно) поравнатост центра магнета у оба правца у хоризонтално равни. Вертикална оса магнета мора да се сече са ласерским зраком и такође мора да се поравна са црном линијом **12** која је нацртана на постољу на ком се налази посуда.

**Магнетна индукција** на оси магнета, на висини 1mm од равне површине магнета је  $B_0 = 0.50$  T; густина воде је  $\rho_w = 1000$  kg/m<sup>3</sup>; **убрзање земљине** теже је  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>; **магнетна пропустљивост вакуума** је  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m.

#### УПОЗОРЕЊА

- Угао под којим стоји ласер је раније одређен, **немојте га мењати и немојте окретати ласер око његове уздужне осе!**
- **Немојте гледати директно у ласер или директно у рефлексију!**
- **Немојте покушавати да извадите снажан неодијумски магнет!**
- **Немојте приносити магнетне материјале близу магнета!**
- **Угасите ласер када га не користите, батерије трају**



# PROBLEM

## Problem E1



око 1 сат!

### Део А. Квалитативно одређивање облика површине воде (1 поен)

Када се цилиндричан магнет стави испод површине воде тада површина постаје закривљена. Посматрајте и закључите какав је облик површине воде изнад магнета; на основу посматрања закључите да ли је вода диамагнетик ( $\mu < 1$ ) или парамагнетик ( $\mu > 1$ ).

Option A

Option B

Option C

Option D

Option E

Option F

Option G

Напишите одговарајуће слово које одговара тачном одговору у Лист за одговоре, заједно са одговарајућом неједнакошћу  $\mu > 1$  или  $\mu < 1$ . За овај део не морате да објашњавате одговоре.

### Део В. Тачан облик површине воде (7 поена)

Закривљеност површине воде може да буде одређена са великом осетљивошћу мерењем рефлексије ласерског зрака од површине воде. Овде се користи овај ефекат да се израчуна промена дубине воде изнад магнета.

i. (1,6 поена) Мерите зависност висине ласерског зрака  $y$  на заклону у зависности од читавања нонијуса  $x$ . Треба да искористите цео опсег положаја ласера у којем можете да видите рефлексију на заклону. Упишите резултате у табелу на Листу за одговоре.

ii. (0,7 поена) Нацртајте график добијене зависности.

iii. (0,7 поена) Користећи добијени график одредите угао  $\alpha_0$  између зрака и хоризонталног дела површине воде.

iv. (1,4 поена) Приметите да нагиб површине воде  $\text{tg}\beta$  може да се изрази као

$$\text{tg}\beta \approx \beta \approx \frac{\cos^2 \alpha_0}{2} \cdot \frac{y - y_0 - (x - x_0)\text{tg}\alpha_0}{L_0 + x - x_0}$$

где је  $y_0$  је висина ласерског зрака на екрану када се рефлектује од површине воде на оси магнета, а  $x_0$  је одговарајуће читавање са нонијуса. Израчунајте вредности нагиба површине воде и попуните их у табелу на Листу за одговоре. Треба да приметите да је могуће поједноставити овај рачун ако за сваку тачку замените део претходног израза одговарајућом вредношћу коју на погодан начин можете прочитати са последњег графика.

v. (1,6 поена) Израчунајте висину површине воде у односу на висину воде далеко од магнета у функцији од  $x$  и попуните вредности у табелу на Листу за одговоре.

vi. (1 поен) Нацртајте график претходне зависности. Означите на добијеном гафику где се налазе крајеви магнета.

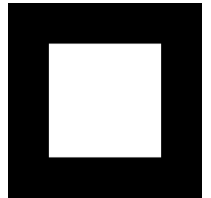
### Део С. Магнетна пропустљивост (2 поена)

Користећи резултате дела В, израчунајте вредност  $\mu - 1$  (такозвану магнетну осетљивост, односно магнетну сусцептибилност), где је  $\mu$  релативна магнетне пропустљивост воде. Напишите коначну формулу коју сте добили и нумеричку вредност у Лист за одговоре.



# PROBLEM

## Problem E2

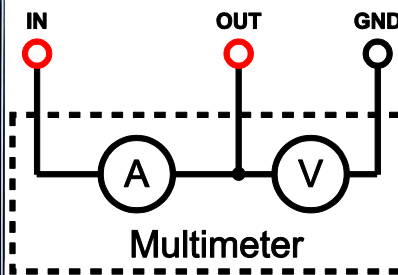


### Задатак E2. Нелинеарна црна кутија (10 поена)

У једноставним задацима, претпоставља се да су електрична кола састављена од линеарних елемената, за које важи да су им електричне особине пропорционалне једна другој. Примери за то су отпор ( $V = RI$ ), капацитет ( $Q = CV$ ) и индуктивитет ( $V = Li = Ldi/dt$ ), где су  $R$ ,  $C$  и  $L$  константни. У овом задатку ће се разматрати електрична кола за која претпоставка пропорционалности не важи јер садрже нелинеарне елементе, који се налазе у црној кутији.

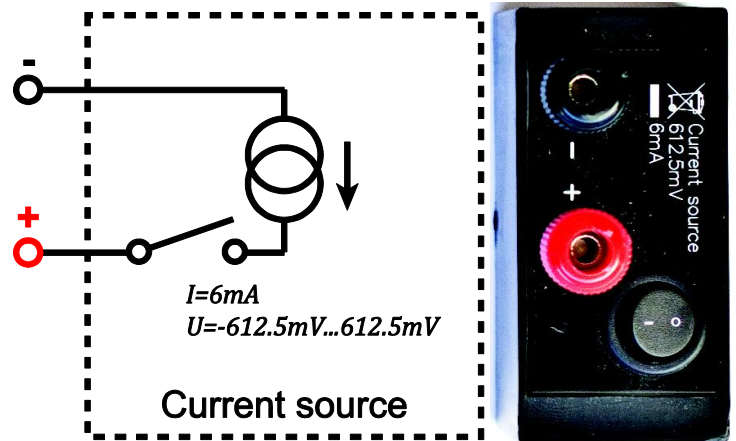
**Апаратура** се састоји од **мерног уређаја** (означеног са "IPhO-measure"), **извора константне струје**, **црне кутије** у којој се налазе нелинеарни елементи и четири кабла са одговарајућим конекторима тзв. бананама које могу да се убадају једна у другу. **Водите рачуна да не отворите запечаћени поклопац.**

Мерни уређај може да мери јачину струје и електрични напон истовремено. Уређај може да запамти до 2000 мерних тачака од којих свака садржи податке о: напону  $V$ , јачини струје  $I$ , снази  $P = IV$ , укупном отпору  $R = V/I$ , првом изводу напона у времену  $\dot{V}$  ( $dV/dt$ ), првом изводу јачине струје у времену  $\dot{I}$  ( $dI/dt$ ) и време  $t$ . За детаље погледајте упутство. Ако неким чудом будете мерили више од 2000 тачака знајте да ће најновији подаци бити уписани преко најстаријих.



Извор константне струје обезбеђује константну јачину струје све док је напон на његовим крајевима између  $-0.6125\text{ V}$  и  $0.6125\text{ V}$ . Када се искључи, извор константне струје се понаша као отпор велике отпорности (у идеалном случају бесконачно велике).

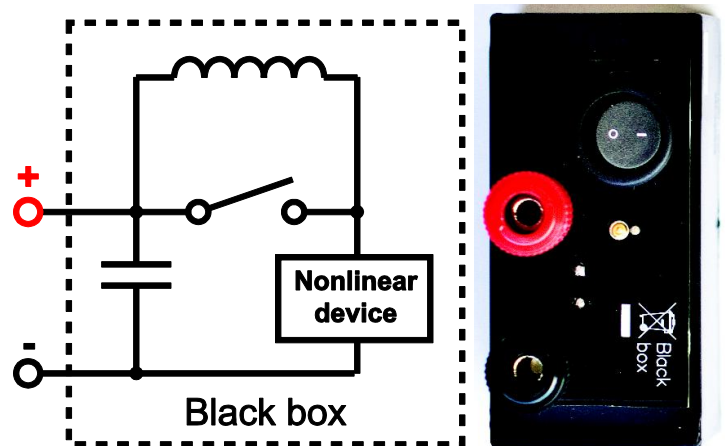
Црна кутија у себи садржи један електрични двослојни кондензатор (који је баго нелинеаран и изразито велике капацитивности), један непознати нелинеарни елемент и један калем индуктивности  $L = 10\text{ mH}$  занемарљиве термогене отпорности, који се може, помоћу прекидача,



укључити у коло или искључити из кола онако како је то назанчено на шеми. Нелинеарни елемент се може посматрати као термогеи отпорник са нелинеарном зависношћу између напона на њему и јачине струје кроз њега [ $I$  је непрекидна функција  $V$  с тим да је  $I(0) = 0$ ]. Исто тако, диференцијални капацитет  $C(V) = dQ / dV$  датог кондензатора није баш константан. **Каже се да је напон на црној кутији позитиван када је потенцијал на њеном црвеном крају већи од потенцијала на црном крају. Позитиван напон ће бити измерен када су повезани крајеви исте боје на црној кутији и струјном извору. (дозвољено је користити и негативан напон)**

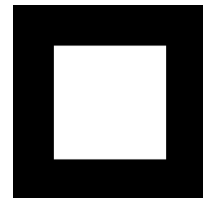
На овом уређају је безбедно испразнити кондензатор из црне кутије спајајући кратко његове крајеве или директно или преко  $IN$  и  $OUT$  крајева мерног уређаја: унутрашњи отпор кондензатора је довољно велики да спречи нагли пораст струје која би оштетила нешто.

У овом задатку није потребно процењивати грешке.



# PROBLEM

## Problem E2



### Део А. Коло без индуктивности (7 поена)

У овом делу, затворите прекидач на црној кутији (пртиегните "1" на прекидачу), тиме ће крајеви калема у црној кутији бити у кратком споју.

Уочите да нека мерења захтевају много времена, с тога препоручљиво је прочитати текст свих задатака у делу А да би се избегао непотребан рад.

**i. (1 поен)** Потврдити да је јачина струје, коју даје извор константне струје, приближно  $6\text{mA}$  и одредити опсег до којег та јачина струје варира за напоне између  $0$  и  $+480\text{mV}$ . Допуните на листу за одговоре како сте повезали уређаје.

**ii. (1.2 поена)** Показати да диференцијални капацитет  $C(V)$  кондензатора из црне кутије износи приближно  $2\text{F}$  мерећи овај капацитет за неки напон по сопственом избору  $C(V_0) = C_0$ . Допуните на листу за одговоре како сте повезали уређаје.

**iii. (2.2 поена)** Занемарујући нелинеарност кондензатора [ $C(V) \approx C_0$ ], одредите струјно напонску карактеристику нелинеарног елемента из црне кутије. Нацртајте криву  $I(V)$  у Листу за одговоре за позитивне напоне које је могуће постићи. Допуните на листу за одговоре како сте повезали уређаје.

**iv. (2.6 поена)** користећи мерења у целом опсегу позитивног напона који је могуће постићи, израчунајте и нацртајте  $C(V)$  криву у Листу за одговоре. Упишите најмању и највећу вредност диференцијалног капацитета  $C_{\min}$ ,  $C_{\max}$ . Допуните на листу за одговоре како сте повезали уређаје.

### Део В. Коло у којем постоји индуктивност (3 поена)

Укључите калем у коло тако што ћете отворити прекидач на црној кутији (пртиегните "0" на прекидачу). Користећи исти метод као у делу А-iii, измерите и нацртајте струјно напонску карактеристику нелинеарног елемента. Опишите све значајне разлике између кривих добијених у деловима А и В и објасните квалитативно те разлике.

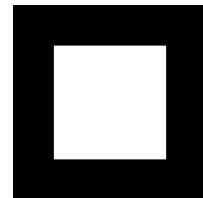
Овде је битно да знате да нелинеарни елемент, у ствари, има паразитну капацитивност (око  $1\text{nF}$ ) која се може посматрати као кондензатор који је паралелно везан са нелинеарним термогеним отпором.

# PROBLEM

## Problem E2



IPhO  
Estonia 2012

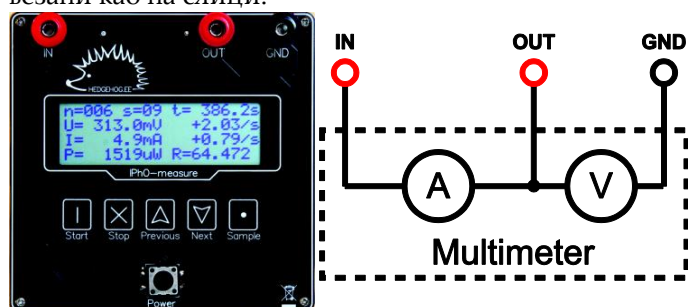


### IPhO-measure: кратко упутство.

IPhO-measure је инструмент који може истовремено да мери напон  $V$  и струју  $I$ . Он такође бележи њихове изводе по времену  $\dot{V}$  и  $\dot{I}$ , њихов производ  $P = VI$ , однос  $R = V/I$ , и време  $t$  у ком је мерење извршено. Сачувана мерења су смештена у различите скупове; свако сачувано мерење је нумерисано бројем скупа  $s$ , и бројем мерења у оквиру једног скупа  $n$ . Сва сачувана мерења су уписана у унутрашњу меморију и могу касније да се виде.

### Електричне особине

Уређај се понаша као амперметар и волтметар који су везани као на слици.



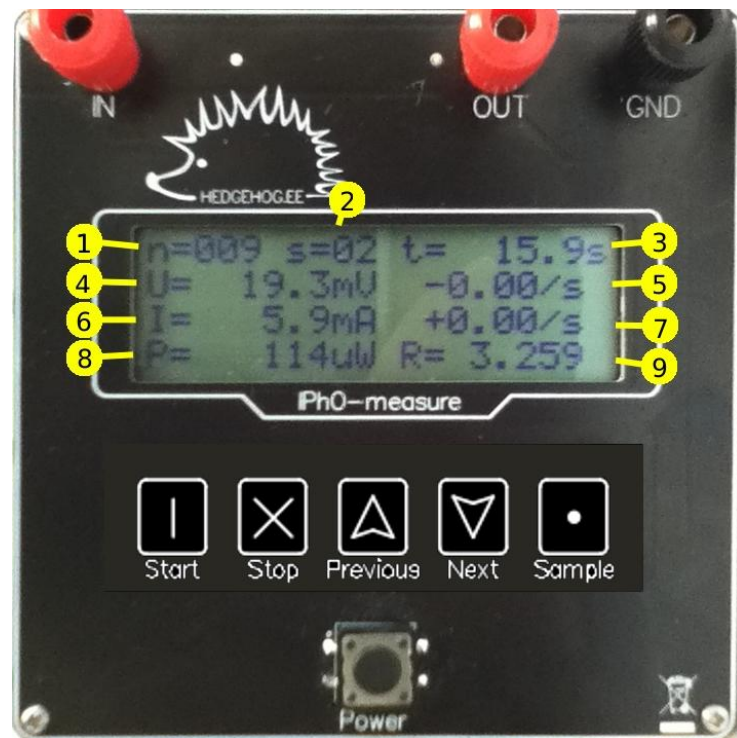
	Опсег	Унутрашња отпорност
Волтметар	0...2 V	1 MΩ
Волтметар	2...10 V	57 kΩ
Амперметар	0...1 A	1 Ω

### Коришћење уређаја

- Да бисте укључили IPhO-measure притисните дугме "POWER". Уређај још увек не мери; да бисте започели мерење притисните дугме "START". Без обзира да ли мерите или не, можете прегледати сачуване податке.
- Да бисте прегледали снимљена мерња (из свих скупова) притисните "PREVIOUS" или "NEXT". Када желите да пређете директно на други скуп мерења држите ове тастере дуже времена притиснуте.
- Када желите да започнете нови скуп мерења притисните тастер "START".
- За време мерења притисните "SAMPLE" да бисте снимили мерења (вредности у том тренутку).
- За време мерења можете да видите и претходна мерења из истог скупа мерења користећи тастере "PREVIOUS" и "NEXT"
- Притисните "STOP" да завршите скуп мерења и зауставите мерење. Након тога уређај је и даље укључен и можете започети ново мерење или прегледати сачуване податке.
- Притисните "POWER" да бисте искључили уређај. При том снимљена мерења неће бити избрисана. Уређај ће

показати поруку "my mind is going..."; али не брините, сви подаци о мерењима ће бити сачувани и моћи ћете опет да их прегледате након што поново укључите уређај.

### Дисплеј



Приказано мерење се састоји од девет величина:

1.  $n$  је број мерења у одређеном скупу;
2.  $s$  је број скупа мерења;
3.  $t$  је време од почетка мерења скупа;
4.  $V$  је измерени напон;
5. брзина промене напона  $V$  (извод по времену напона  $V$ ); ако извод не може да буде поуздано одређен због флукуација напона биће приказано "+nan/s";
6.  $I$  измерена јачина струје;
7. брзина промене јачине струје  $I$  (временски извод од  $I$ ); ако извод не може да буде поуздано одређен због флукуација струје биће приказано "+nan/s";
8. производ струје и напона  $P = VI$ ;
9. однос напона и струје  $R = V/I$ .

Ако је било која од променљивих изван дозвољеног опсега на дисплеју се појављује "+inf" или "-inf".

## The 43<sup>rd</sup> International Physics Olympiad — Experimental Competition

### Tartu, Estonia — Thursday, July 19<sup>th</sup> 2012

- The examination lasts for 5 hours. There are 2 problems worth in total 20 points. There are two tables in your disposal (in two neighbouring cubicles), the apparatus of Problem E1 is on one table and the apparatus of Problem E2 is on the other table; you can move freely between these tables. **However, you are not allowed to move any piece of experimental setup from one table to the other.**
- Initially the experimental equipment on one table is covered and on the other table is boxed. **You must neither remove the cover nor open the box nor open the envelope with the problems before the sound signal of the beginning of competition (three short signals).**
- **You are not allowed to leave your working place without permission.** If you need any assistance (**mal-functioning equipment**, broken calculator, need to visit a restroom, etc), please raise the corresponding flag (“HELP” or “TOILET” with a long handle at your seat) above your seat box walls and keep it raised until an organizer arrives.
- Use only the front side of the sheets of paper.
- For each problem, there are **dedicated Solution Sheets** (see header for the number and pictogramme). Write your solutions onto the appropriate Solution Sheets. For each Problem, the Solution Sheets are numbered; use the sheets according to the enumeration. **Always mark which Problem Part and Question you are dealing with.** Copy the final answers into the appropriate boxes of the **Answer Sheets**. There are also **Draft** papers; use these for writing things which you don't want to be graded. If you have written something what you don't want to be graded onto the Solution Sheets (such as initial and incorrect solutions), cross these out.
- If you need more paper for a certain problem, please raise the flag “HELP” and tell an organizer the problem number; you are given two Solution sheets (you can do this more than once).
- **You should use as little text as possible:** try to explain your solution mainly with equations, numbers, tables, symbols and diagrams. ~~When textual explanation is unavoidable, you are encouraged to provide English translation alongside with the text in your native language (if you mistranslate, or don't translate at all, your native language text will be used during the Moderation).~~
- **Avoid unnecessary movements during the experimental examination and do not shake the walls of your box: the laser experiment requires stability.**
- **Do not look into the laser beam or its reflections! It may permanently damage your eyes.**
- The first single sound signal tells you that there are 30 min of solving time left; the second double sound signal means that 5 min is left; the third triple sound signal marks the end of solving time. **After the third sound signal you must stop writing immediately.** Put all the papers into the envelope at your desk. **You are not allowed to take any sheet of paper out of the room.** If you have finished solving before the final sound signal, please raise your flag.



# PROBLEM

## Problem E1

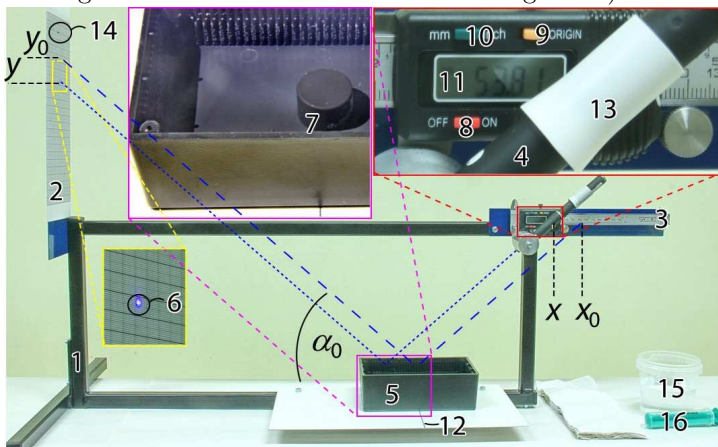


### Problem E1. The magnetic permeability of water (10 points)

The effect of a magnetic field on most of the substances but ferromagnetics is rather weak. This is because the energy density of the magnetic field in substances of relative magnetic permeability  $\mu$  is given by formula  $w = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2$ , and typically,  $\mu$  is very close to 1. Still, with suitable experimental techniques such effects are firmly observable. In this problem we study the effect of a magnetic field, created by a permanent neodymium magnet, on water and use the results to calculate the magnetic permeability of water. **You are not asked to estimate any uncertainties throughout this problem and you do not need to take into account the effects of the surface tension.**

The setup comprises of 1 a stand (the highlighted numbers correspond to the numbers in the fig.), 3 a digital caliper, 4 a laser pointer, 5 a dish with water and 7 a cylindrical permanent magnet in it (the magnet is axially magnetised). The dish is fixed to the base of the stand by the magnet's pull. The laser is fixed to the caliper, the base of which is fastened to the stand; the caliper allows horizontal displacement of the laser. The on-off button of the laser can be kept down with the help of 13 the white conical tube. The depth of the water above the magnet should be reasonably close to 1 mm (if shallower, the water surface becomes so curved that it will be difficult to take readings from the screen). 15 A cup of water and 16 a syringe can be used for the water level adjustment (to raise the level by 1 mm, add 13 ml of water). 2 A sheet of graph paper (the "screen") is to be fixed to the vertical plate with 14 small magnetic tablets. If the laser spot on the screen becomes smeared, check for a dust on the water surface (and blow away).

The remaining legend for the figure is as follows: 6 the point where the laser beam hits the screen; 11 the LCD screen of the caliper, 10 the button which switches the caliper units between millimeters and inches; 8 on-off switch; 9 button for setting the origin of the caliper reading. Beneath the laser pointer, there is one more button of the caliper, which temporarily re-sets the origin (if you pushed it inadvertently, push it once again to return to the normal measuring mode).



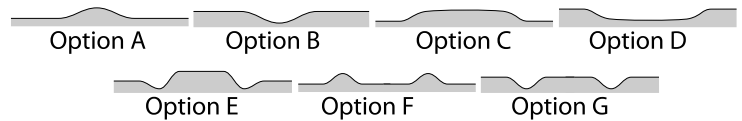
**Numerical values** for your calculations: horizontal distance between the magnet's centre and the screen  $L_0 = 490$  mm. Check (and adjust, if needed) the alignment of the centre of the magnet in two perpendicular directions. The vertical axis of the magnet must intersect with the laser beam, and it must also intersect with 12 the black line on the support plate. **Magnetic induction** at the magnet's axis, at the height of 1 mm from the flat surface  $B_0 = 0.50$  T; **Density of water**  $\rho_w = 1000$  kg/m<sup>3</sup>; **free-fall acceleration**  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>; **vacuum permeability**  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m.

### WARNINGS:

- ◇ The laser orientation is pre-adjusted, do not move it!
- ◇ Do not look into the laser beam or its reflections!
- ◇ Do not try to remove the strong neodymium magnet!
- ◇ Do not put magnetic materials close to the magnet!
- ◇ Turn off the laser when not used, batteries drain in 1 h!

### Part A. Qualitative shape of the water surface (1 points)

When a cylindrical magnet is placed below water surface, the latter becomes curved. Observe, what is the shape of the water surface above the magnet; according to this observation, decide if the water is diamagnetic ( $\mu < 1$ ) or paramagnetic ( $\mu > 1$ ).



Write the letter corresponding to the correct option into the Answer Sheet, together with an inequality  $\mu > 1$  or  $\mu < 1$ . **For this part, you don't need to motivate your answer.**

### Part B. Exact shape of the water surface (7 points)

Curving of the water surface can be checked with high sensitivity by measuring the reflection of the laser beam by the surface. We use this effect to calculate the dependence of the depth of the water on the horizontal position above the magnet.

- i. (1.6 pts) Measure the dependence of the height  $y$  of the laser spot on the screen on the caliper reading  $x$  (c.f. figure). You should cover all the usable range of caliper displacements. Fill the results into the table in the Answer Sheet.
- ii. (0.7 pts) Draw the graph of the obtained dependence.
- iii. (0.7 pts) Using the obtained graph, determine the angle  $\alpha_0$  between the beam and the horizontal area of the water surface.
- iv. (1.4 pts) Please note that the slope ( $\tan \beta$ ) of the water surface can be expressed as follows:

$$\tan \beta \approx \beta \approx \frac{\cos^2 \alpha_0}{2} \cdot \frac{y - y_0 - (x - x_0) \tan \alpha_0}{L_0 + x - x_0},$$

where  $y_0$  is the height of the laser spot on the screen when the beam is reflected from the water surface at the axis of the magnet, and  $x_0$  — the respective position of the caliper.

Calculate the values of the water surface slope and fill them into the Table on the Answer Sheet. Please note that it may be possible to simplify your calculations if you substitute some combination of terms in the expression from the previous task with a reading from the last graph.

- v. (1.6 pts) Calculate the height of the water surface relative to the surface far from the magnet as a function of  $x$  and fill it into the Table on the Answer Sheet.
- vi. (1 pt) Draw the graph of the latter dependence. Indicate on it the region where the beam hits the water surface directly above the magnet.

### Part C. Magnetic permeability (2 points)

Using the results of Part B, calculate the value of  $\mu - 1$  (the so-called *magnetic susceptibility*), where  $\mu$  is the relative magnetic permeability of the water. Write your final formula and the numerical result into the Answer Sheet.



# PROBLEM

## Problem E2

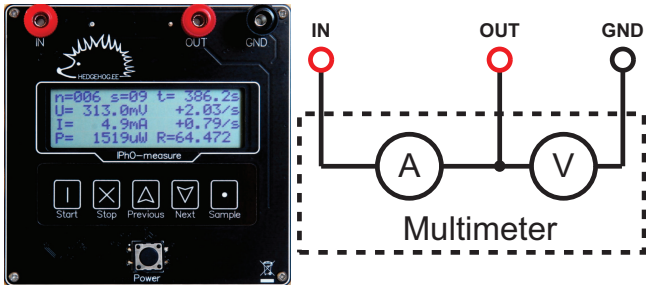


### Problem E2. Nonlinear Black Box (10 points)

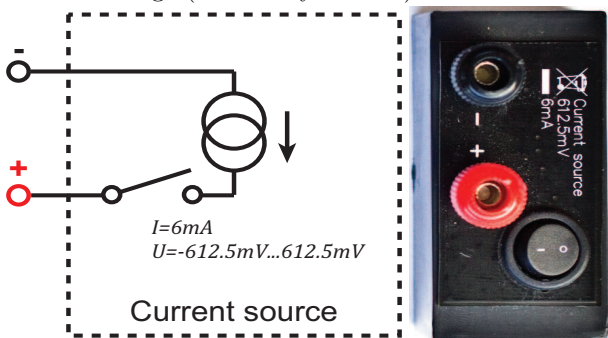
In simple problems, electrical circuits are assumed to consist of linear elements, for which electrical characteristics are directly proportional to each other. Examples include resistance ( $V = RI$ ), capacitance ( $Q = CV$ ) and inductance ( $V = L\dot{I}$ ), where  $R$ ,  $C$  and  $L$  are constants. In this problem, however, we examine a circuit containing nonlinear elements, enclosed into a black box, for which the assumption of proportionality no longer holds.

The setup comprises of a multimeter (labelled “IPhO-measure”), a current source, a black box containing nonlinear elements, and four test leads with stackable connectors for wiring. Be careful not to break the seal on the black box.

The multimeter can measure current and voltage simultaneously. You can record with it up to 2000 data points, each consisting of: voltage  $V$ , current  $I$ , power  $P = IV$ , resistance  $R = V/I$ , voltage time-derivative  $\dot{V}$ , current time-derivative  $\dot{I}$  and time  $t$ . See its manual for details. If you go beyond 2000 data points, the oldest data will be overwritten.

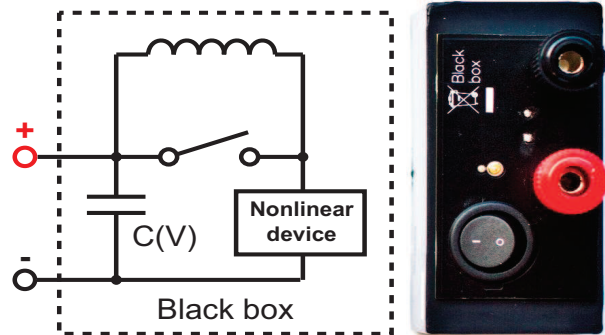


The constant current source supplies stable current as long as the voltage across its terminals stays between  $-0.6125\text{ V}$  and  $0.6125\text{ V}$ . When switched off, the constant current source behaves as a large (essentially infinite) resistance.



The black box contains an electric double layer capacitor (which is a slightly nonlinear high capacitance capacitor), an unknown nonlinear element and an inductor  $L = 10\ \mu\text{H}$  of negligible resistance, switchable as indicated on the circuit diagram. The nonlinear element can be considered as a resistance with a nonlinear dependence between the voltage and the current [ $I$  is a continuous function of  $V$  with  $I(0) = 0$ ]. Likewise, for the capacitor, the differential capacitance  $C(V) = dQ/dV$  is not exactly constant. We say that the voltage on the black box is positive when the potential on its red terminal is higher than the potential on the black terminal. Pos-

itive voltage will be acquired when the terminals of matching colours on the black box and the current source are connected (you are allowed to use negative voltages).



Here it is safe to discharge the capacitor in the black box by shorting its inputs either by itself or through the  $IN$  and  $OUT$  terminals on multimeter: the internal resistance of this capacitor is enough to keep the current from damaging anything.

You are not asked to estimate any uncertainties throughout this problem.

### Part A. Circuit without inductance (7 points)

In this part, keep the switch on the black box closed (push “I” down), so that the inductance is shorted.

Please note that some measurements may take considerable time, therefore it is recommended to read through all the tasks of part A to avoid unnecessary work.

i. (1 pt) Confirm that the output current of the current source is approximately  $6\text{ mA}$ , and determine the range within which it varies for voltages between  $0$  and  $+480\text{ mV}$ . Document the circuit diagram.

ii. (1.2 pts) Show that the differential capacitance  $C(V)$  used in the black box is approximately  $2\text{ F}$  by measuring its value for a single voltage of your choice  $C(V_0) = C_0$ . Document the circuit diagram.

iii. (2.2 pts) Neglecting the nonlinearity of the capacitance [ $C(V) \approx C_0$ ], determine the current–voltage characteristic of the nonlinear element used in the black box. Plot the  $I(V)$  curve for obtainable positive voltages on the black box onto the answer sheet. Document the circuit diagram.

iv. (2.6 pts) Using measurements taken from the whole range of obtainable voltages, calculate and plot the  $C(V)$  curve for obtainable positive voltages on the black box to the answer sheet. Write down the minimal and maximal values of differential capacitance  $C_{\min}, C_{\max}$ . Document the circuit diagram.

### Part B. Circuit with inductance (3 points)

Enable the inductance by opening the switch on the black box (push “0” down). Using the same method as in pt. A-iii, measure and plot the current–voltage characteristic of the nonlinear element. Describe any significant differences between the curves of parts A and B and suggest a reason using qualitative arguments.

Here you need to know that the nonlinear element has actually also a capacitance (ca  $1\text{ nF}$ ) which is connected in parallel to the nonlinear resistance.

# PROBLEM

## Problem E2

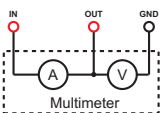


### IPhO-measure: short manual

*IPhO-measure* is a multimeter capable of measuring voltage  $V$  and current  $I$  simultaneously. It also records their time derivatives  $\dot{V}$  and  $\dot{I}$ , their product  $P = VI$ , ratio  $R = V/I$ , and time  $t$  of the sample. Stored measurements are organized into separate sets; every stored sample is numbered by the set number  $s$  and a counter  $n$  inside the set. All saved samples are written to an internal flash memory and can later be retrieved.

### Electrical behaviour

The device behaves as an ammeter and a voltmeter connected



	Range	Internal resistance
Voltmeter	0...2 V	1 M $\Omega$
Voltmeter	2...10 V	57 k $\Omega$
Ammeter	0...1 A	1 $\Omega$

### Basic usage

- Push “POWER” to switch the *IPhO-measure* on. The device is not yet measuring; to start measuring, push “START”. Alternatively, you can now start browsing your stored data, see below.
- To browse previously saved samples (through all sets), press “PREVIOUS” or “NEXT”. Hold them down longer to jump directly between sets.
- While not measuring, push “START” to start measuring a new set.
- While measuring, push “Sample” to store a data sample (with the current readings).
- While measuring, you can also browse other samples of the current set, using “PREVIOUS” and “NEXT”.
- Press “STOP” to end a set and stop measuring. The device is still on, you are ready to start a new measuring session, or browsing stored data.
- Pushing “POWER” turns the device off. The device will show the text “my mind is going . . .”; don’t worry, all the data measurements will be stored and you will be able to browse them after you switch the device on, again. Saved samples will not be erased.

### Display



A displayed sample consists of nine variables:

1. index  $n$  of the sample in the set;
2. index  $s$  of the set;
3. time  $t$  since starting the set;
4. voltmeter output  $V$ ;
5. rate of change of  $V$  (the time derivative  $\dot{V}$ ); if derivative cannot be reliably taken due to fluctuations, “+nan/s” is shown;
6. ammeter output  $I$ ;
7. rate of change of  $I$  (the time derivative  $\dot{I}$ ); if derivative cannot be reliably taken due to fluctuations, “+nan/s” is shown;
8. product  $P = VI$ ;
9. ratio  $R = V/I$ .

If any of the variables is out of its allowed range, its display shows “+inf” or “-inf”.

# PROBLEM

## Problem 1



### Problem T1. Focus on sketches (13 points)

#### Part A. Ballistics (4.5 points)

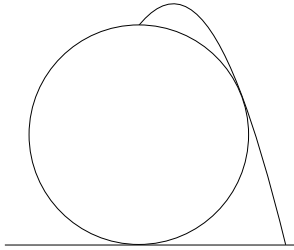
**i. (0.8 pts)** When the stone is thrown vertically upwards, it can reach the point  $x = 0$ ,  $z = v_0^2/2g$  (as it follows from the energy conservation law). Comparing this with the inequality  $z \leq z_0 - kx^2$  we conclude that

$$z_0 = v_0^2/2g. \quad [0.3 \text{ pts}]$$

Let us consider the asymptotics  $z \rightarrow -\infty$ ; the trajectory of the stone is a parabola, and at this limit, the horizontal displacement (for the given  $z$ ) is very sensitive with respect to the curvature of the parabola: the flatter the parabola, the larger the displacement. The parabola has the flattest shape when the stone is thrown horizontally,  $x = v_0 t$  and  $z = -gt^2/2$ , i.e. its trajectory is given by  $z = -gx^2/2v_0^2$ . Now, let us recall that  $z \leq z_0 - kx^2$ , i.e.  $-gx^2/2v_0^2 \leq z_0 - kx^2 \Rightarrow k \leq g/2v_0^2$ . Note that  $k < g/2v_0^2$  would imply that there is a gap between the parabolic region  $z \leq z_0 - kx^2$  and the given trajectory  $z = -gx^2/2v_0^2$ . This trajectory is supposed to be optimal for hitting targets far below ( $z \rightarrow -\infty$ ), so there should be no such a gap, and hence, we can exclude the option  $k < g/2v_0^2$ . This leaves us with

$$k = g/2v_0^2. \quad [0.5 \text{ pts}]$$

**ii. (1.2 pts)** Let us note that the stone trajectory is reversible and due to the energy conservation law, one can equivalently ask, what is the minimal initial speed needed for a stone to be thrown from the topmost point of the spherical building down to the ground without hitting the roof, and what is the respective trajectory. It is easy to understand that the trajectory either needs to touch the roof, or start horizontally from the topmost point with the curvature radius equal to  $R$ . Indeed, if neither were the case, it would be possible to keep the same throwing angle and just reduce the speed a little bit — the stone would still reach the ground without hitting the roof. Further, if it were tangent at the topmost point, the trajectory wouldn't touch nor intersect the roof anywhere else, because the curvature of the parabola has maximum at its topmost point. Then, it would be possible to keep the initial speed constant, and increase slightly the throwing angle (from horizontal to slightly upwards): the new trajectory wouldn't be neither tangent at the top nor touch the roof at any other point; now we can reduce the initial speed as we argued previously. So we conclude that the optimal trajectory needs to touch the roof somewhere, as shown in Fig.



**iii. (2.5 pts)** The brute force approach would be writing down the condition that the optimal trajectory intersects with the building at two points and touches at one. This would be described by a fourth order algebraic equation and therefore, it is not realistic to accomplish such a solution within a reasonable time frame.

Note that the interior of the building needs to lie inside the region where the targets can be hit with a stone thrown from the top with initial speed  $v_{\min}$ . Indeed, if we can throw over the building, we can hit anything inside by lowering the throwing angle. On the other hand, the boundary of the targetable region needs to touch the building. Indeed, if there were a gap, it would be possible to hit a target just above the point where the optimal trajectory touches the building; the trajectory through that target wouldn't touch the building anywhere, hence we arrive at a contradiction.

So, with  $v_0$  corresponding to the optimal trajectory, the targetable region touches the building; due to symmetry, overall there are two touching points (for smaller speeds, there would be four, and for larger speeds, there would be none). With the origin at the top of the building, the intersection points are defined by the following system of equations:

$$x^2 + z^2 + 2zR = 0, \quad z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Upon eliminating  $z$ , this becomes a biquadratic equation for  $x$ :

$$x^4 \left( \frac{g}{2v_0^2} \right)^2 + x^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2} \right) + \left( \frac{v_0^2}{4g} + R \right) \frac{v_0^2}{g} = 0.$$

Hence the speed by which the real-valued solutions disappear can be found from the condition that the discriminant vanishes:

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2} \implies \frac{gR}{v_0^2} = 2.$$

Bearing in mind that due to the energy conservation law, at the ground level the squared speed is increased by  $4gR$ . Thus we finally obtain

$$v_{\min} = \sqrt{v_0^2 + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

#### Part B. Mist (4 points)

**i. (0.8 pts)** In the plane's reference frame, along the channel between two streamlines the volume flux of air (volume flow rate) is constant due to continuity. The volume flux is the product of speed and channel's cross-section area, which, due to the two-dimensional geometry, is proportional to the channel width and can be measured from the Fig. Due to the absence of wind, the unperturbed air's speed in the plane's frame is just  $v_0$ . So, upon measuring the dimensions  $a = 10 \text{ mm}$  and  $b = 13 \text{ mm}$  (see Fig), we can write  $v_0 a = ub$  and hence  $u = v_0 \frac{a}{b}$ . Since at point  $P$ , the streamlines are horizontal where all the velocities are parallel, the vector addition is reduced to the scalar addition: the air's ground speed  $v_P = v_0 - u = v_0 \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 23 \text{ m/s}$ .

**ii. (1.2 pts)** Although the dynamic pressure  $\frac{1}{2}\rho v^2$  is relatively small, it gives rise to some adiabatic expansion and compression. In expanding regions the temperature will drop and hence, the pressure of saturated vapours will also drop. If the dew point is reached, a stream of droplets will appear. This process will start in a point where the adiabatic expansion is maximal, i.e. where the hydrostatic pressure is minimal and consequently, as it follows from the Bernoulli's law  $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$ , the dynamic pressure is maximal: in the place where the air speed in

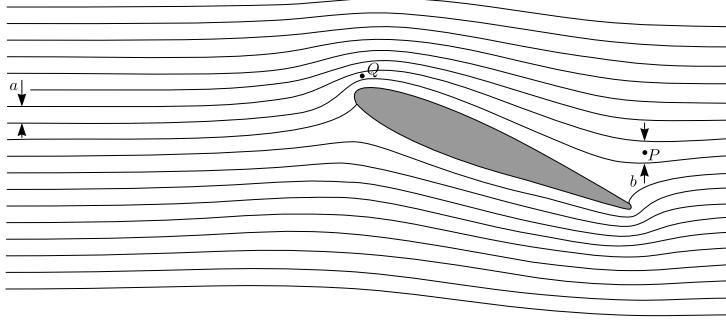


# PROBLEM

## Problem 1



wing's frame is maximal and the streamline distance minimal. Such a point  $Q$  is marked in Fig.



iii. (2 pts) First we need to calculate the dew point for the air of given water content (since the relative pressure change will be small, we can ignore the dependence of the dew point on pressure). The water vapour pressure is  $p_w = p_{sa}r = 2.08$  kPa. The relative change of the pressure of the saturated vapour is small, so we can linearize its temperature dependence:

$$\frac{p_{sa} - p_w}{T_a - T} = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} \implies T_a - T = (T_b - T_a) \frac{(1-r)p_{sa}}{p_{sb} - p_{sa}};$$

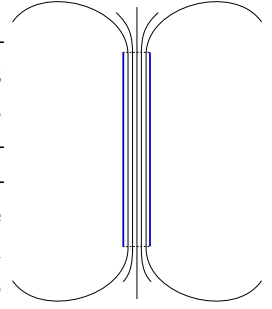
numerically  $T \approx 291.5$  K. Further we need to relate the air speed to the temperature. To this end we need to use the energy conservation law. A convenient ready-to-use form of it is provided by the Bernoulli's law. Applying this law will give a good approximation of the reality, but strictly speaking, it needs to be modified to take into account the compressibility of air and the associated expansion/contraction work. Consider one mole of air, which has the mass  $\mu$  and the volume  $V = RT/p$ . Apparently the process is fast and the air parcels are large, so that heat transfer across the air parcels is negligible. Additionally, the process is subsonic; all together we can conclude that the process is adiabatic. Consider a segment of a tube formed by the streamlines. Let us denote the physical quantities at its one end by index 1, and at the other end — by index 2. Then, while one mole of gas flows into the tube at one end, as much flows out at the other end. The inflow carries in kinetic energy  $\frac{1}{2}\mu v_1^2$ , and the outflow carries out  $\frac{1}{2}\mu v_2^2$ . The inflowing gas receives work due to the pushing gas equal to  $p_1 V_1 = RT_1$ , the outflowing gas performs work  $p_2 V_2 = RT_2$ . Let's define molar heat capacities  $C_V = \mu c_V$  and  $C_p = \mu c_p$ . The inflow carries in heat energy  $C_V RT_1$ , and the outflow carries out  $C_V RT_2$ . All together, the energy balance can be written as  $\frac{1}{2}\mu v^2 + C_p T = \text{const}$ . From this we can easily express  $\Delta \frac{v^2}{2} = \frac{1}{c} v_{\text{crit}}^2 \left( \frac{a^2}{c^2} - 1 \right) = c_p \Delta T$ , where  $c$  is the streamline distance at the point  $Q$ , and further

$$v_{\text{crit}} = c \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{a^2 - c^2}} \approx 23 \text{ m/s},$$

where we have used  $c \approx 4.5$  mm and  $\Delta T = 1.5$  K. Note that in reality, the required speed is probably somewhat higher, because for a fast condensation, a considerable over-saturation is needed. However, within an order of magnitude, this estimate remains valid.

### Part C. Magnetic straws (4.5 points)

i. (0.8 pts) Due to the superconducting walls, the magnetic field lines cannot cross the walls, so the flux is constant along the tube. For a closed contour inside the tube, there should be no circulation of the magnetic field, hence the field lines cannot be curved, and the field needs to be homogeneous. The field lines close from outside the tube, similarly to a solenoid.



ii. (1.2 pts) Let us consider the change of the magnetic energy when the tube is stretched (virtually) by a small amount  $\Delta l$ . Note that the magnetic flux through the tube is conserved: any change of flux would imply a non-zero electromotive force  $\frac{d\Phi}{dt}$ , and for a zero resistivity, an infinite current. So, the induction  $B = \frac{\Phi}{\pi r^2}$ . The energy density of the magnetic field is  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ . Thus, the change of the magnetic energy is calculated as

$$\Delta W = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 \Delta l = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2} \Delta l.$$

This energy increase is achieved owing to the work done by the stretching force,  $\Delta W = T \Delta l$ . Hence, the force

$$T = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}.$$

iii. (2.5 pts) Let us analyse, what would be the change of the magnetic energy when one of the straws is displaced to a small distance. The magnetic field inside the tubes will remain constant due to the conservation of magnetic flux, but outside, the magnetic field will be changed. The magnetic field outside the straws is defined by the following condition: there is no circulation of  $\vec{B}$  (because there are no currents outside the straws); there are no sources of the field lines, other than the endpoints of the straws; each of the endpoints of the straws is a source of streamlines with a fixed magnetic flux  $\pm\Phi$ . These are exactly the same condition as those which define the electric field of four charges  $\pm Q$ . We know that if the distance between charges is much larger than the geometrical size of a charge, the charges can be considered as point charges (the electric field near the charges remains almost constant, so that the respective contribution to the change of the overall electric field energy is negligible). Therefore we can conclude that the endpoints of the straws can be considered as magnetic point charges. In order to calculate the force between two magnetic charges (magnetic monopoles), we need to establish the correspondence between magnetic and electric quantities.

For two electric charges  $Q$  separated by a distance  $a$ , the force is  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$ , and at the position of one charge, the electric field of the other charge has energy density  $w = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^4}$ ; hence we can write  $F = 8\pi w a^2$ . This is a universal expression for the force (for the case when the field lines have the same shape as in the case of two opposite and equal by modulus electric charges) relying only on the energy density, and not related to the nature of the field; so we can apply it to the magnetic

# PROBLEM

## Problem 1



field. Indeed, the force can be calculated as a derivative of the full field energy with respect to a virtual displacement of a field line source (electric or magnetic charge); if the energy densities of two fields are respectively equal at one point, they are equal everywhere, and so are equal the full field energies. As it follows from the Gauss law, for a point source of a fixed magnetic flux  $\Phi$  at a distance  $a$ , the induction  $B = \frac{1}{4\pi} \frac{\Phi}{a^2}$ . So, the energy density  $w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{32\pi^2\mu_0} \frac{\Phi^2}{a^4}$ , hence

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{a^2}.$$

For the two straws, we have four magnetic charges. The longitudinal (along a straw axis) forces cancel out (the diagonally positioned pairs of same-sign-charges push in opposite directions). The normal force is a superposition of the attraction due to the two pairs of opposite charges,  $F_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{l^2}$ , and the repulsive forces of diagonal pairs,  $F_2 = \frac{\sqrt{2}}{8\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{2l^2}$ . The net attractive force will be

$$F = 2(F_1 - F_2) = \frac{4 - \sqrt{2}}{8\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{l^2}.$$



# PROBLEM

## Problem 2



### Problem T2. Kelvin water dropper (8 points)

#### Part A. Single pipe (4 points)

**i. (1.2 pts)** Let us write the force balance for the droplet. Since  $d \ll r$ , we can neglect the force  $\frac{\pi}{4}\Delta p d^2$  due to the excess pressure  $\Delta p$  inside the tube. So, the gravity force  $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$  is balanced by the capillary force. When the droplet separates from the tube, the water surface forms in the vicinity of the nozzle a “neck”, which has vertical tangent. In the horizontal cross-section of that “neck”, the capillary force is vertical and can be calculated as  $\pi\sigma d$ . So,

$$r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3\sigma d}{4\rho g}}.$$

**ii. (1.2 pts)** Since  $d \ll r$ , we can neglect the change of the droplet’s capacitance due to the tube. On the one hand, the droplet’s potential is  $\varphi$ ; on the other hand, it is  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$ . So,

$$Q = 4\pi\epsilon_0\varphi r.$$

**iii. (1.6 pts)** Excess pressure inside the droplet is caused by the capillary pressure  $2\sigma/r$  (increases the inside pressure), and by the electrostatic pressure  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\varphi^2/r^2$  (decreases the pressure). So, the sign of the excess pressure will change, if  $\frac{1}{2}\epsilon_0\varphi_{\max}^2/r^2 = 2\sigma/r$ , hence

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\sigma r/\epsilon_0}.$$

The expression for the electrostatic pressure used above can be derived as follows. The electrostatic force acting on a surface charge of density  $\sigma$  and surface area  $S$  is given by  $F = \sigma S \cdot \bar{E}$ , where  $\bar{E}$  is the field at the site without the field created by the surface charge element itself. Note that this force is perpendicular to the surface, so  $F/S$  can be interpreted as a pressure. The surface charge gives rise to a field drop on the surface equal to  $\Delta E = \sigma/\epsilon_0$  (which follows from the Gauss law); inside the droplet, there is no field due to the conductivity of the droplet:  $\bar{E} - \frac{1}{2}\Delta E = 0$ ; outside the droplet, there is field  $E = \bar{E} + \frac{1}{2}\Delta E$ , therefore  $\bar{E} = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\Delta E$ . Bringing everything together, we obtain the expression used above.

Note that alternatively, this expression can be derived by considering a virtual displacement of a capacitor’s surface and comparing the pressure work  $p\Delta V$  with the change of the electrostatic field energy  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \Delta V$ .

Finally, the answer to the question can be also derived from the requirement that the mechanical work  $dA$  done for an infinitesimal droplet inflation needs to be zero. From the energy conservation law,  $dW + dW_{\text{el}} = \sigma d(4\pi r^2) + \frac{1}{2}\varphi_{\max}^2 dC_d$ ,

where the droplet’s capacitance  $C_d = 4\pi\epsilon_0 r$ ; the electrical work  $dW_{\text{el}} = \varphi_{\max} dq = 4\pi\epsilon_0\varphi_{\max}^2 dr$ . Putting  $dW = 0$  we obtain an equation for  $\varphi_{\max}$ , which recovers the earlier result.

#### Part B. Two pipes (4 points)

**i. (1.2 pts)** This is basically the same as Part A-ii, except that the surroundings’ potential is that of the surrounding electrode,  $-U/2$  (where  $U = q/C$  is the capacitor’s voltage) and droplet has the ground potential (0). As it is not defined which electrode is the positive one, opposite sign of the potential may be chosen, if done consistently. Note that since the cylindrical electrode is long, it shields effectively the environment’s (ground, wall, etc) potential. So, relative to its surroundings, the droplet’s potential is  $U/2$ . Using the result of Part A we obtain

$$Q = 2\pi\epsilon_0 U r_{\max} = 2\pi\epsilon_0 q r_{\max}/C.$$

**ii. (1.5 pts)** The sign of the droplet’s charge is the same as that of the capacitor’s opposite plate (which is connected to the farther electrode). So, when the droplet falls into the bowl, it will increase the capacitor’s charge by  $Q$ :

$$dq = 2\pi\epsilon_0 U r_{\max} dN = 2\pi\epsilon_0 r_{\max} n dt \frac{q}{C},$$

where  $dN = n dt$  is the number of droplets which fall during the time  $dt$ . This is a simple linear differential equation which is solved easily to obtain

$$q = q_0 e^{\gamma t}, \quad \gamma = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max} n}{C} = \frac{\pi\epsilon_0 n}{C} \sqrt[3]{\frac{6\sigma d}{\rho g}}.$$

**iii. (1.3 pts)** The droplets can reach the bowls if their mechanical energy  $mgH$  (where  $m$  is the droplet’s mass) is large enough to overcome the electrostatic push: The droplet starts at the point where the electric potential is 0, which is the sum of the potential  $U/2$ , due to the electrode, and of its self-generated potential  $-U/2$ . Its motion is not affected by the self-generated field, so it needs to fall from the potential  $U/2$  down to the potential  $-U/2$ , resulting in the change of the electrostatic energy equal to  $UQ \leq mgH$ , where  $Q = 2\pi\epsilon_0 U r_{\max}$  (see above). So,

$$U_{\max} = \frac{mgH}{2\pi\epsilon_0 U_{\max} r_{\max}},$$

$$\therefore U_{\max} = \sqrt{\frac{H\sigma d}{2\epsilon_0 r_{\max}}} = \sqrt[6]{\frac{H^3 g \sigma^2 \rho d^2}{6\epsilon_0^3}}.$$

# PROBLEM

## Problem 3



### Problem T3. Protostar formation (9 points)

i. (0.8 pts)

$$T = \text{const} \implies pV = \text{const}$$

$$V \propto r^3$$

$$\therefore p \propto r^{-3} \implies \frac{p(r_1)}{p(r_0)} = 2^3 = 8.$$

ii. (1 pt) During the period considered the pressure is negligible. Therefore the gas is in free fall. By Gauss' theorem and symmetry, the gravitational field at any point in the ball is equivalent to the one generated when all the mass closer to the center is compressed into the center. Moreover, while the ball has not yet shrunk much, the field strength on its surface does not change much either. The acceleration of the outermost layer stays approximately constant. Thus,

$$t \approx \sqrt{\frac{2(r_0 - r_2)}{g}}$$

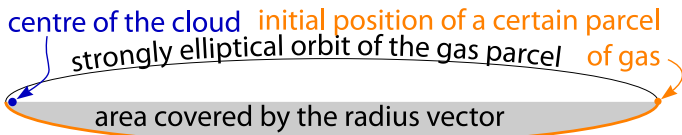
where

$$g \approx \frac{Gm}{r_0^2},$$

$$\therefore t \approx \sqrt{\frac{2r_0^2(r_0 - r_2)}{Gm}} = \sqrt{\frac{0.1r_0^3}{Gm}}.$$

iii. (2.5 pts) Gravitationally the outer layer of the ball is influenced by the rest just as the rest were compressed into a point mass. Therefore we have Keplerian motion: the fall of any part of the outer layer consists in a halfperiod of an ultra-elliptical orbit. The ellipse is degenerate into a line; its foci are at the ends of the line; one focus is at the center of the ball (by Kepler's 1<sup>st</sup> law) and the other one is at  $r_0$ , see figure (instead of a degenerate ellipse, a strongly elliptical ellipse is depicted). The period of the orbit is determined by the longer semiaxis of the ellipse (by Kepler's 3<sup>rd</sup> law). The longer semiaxis is  $r_0/2$  and we are interested in half a period. Thus, the answer is equal to the halfperiod of a circular orbit of radius  $r_0/2$ :

$$\left(\frac{2\pi}{2t_{r \rightarrow 0}}\right)^2 \frac{r_0}{2} = \frac{Gm}{(r_0/2)^2} \implies t_{r \rightarrow 0} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}.$$



Alternatively, one may write the energy conservation law  $\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{Gm}{r} = E$  (that in turn is obtainable from Newton's II law  $\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}$  with  $E = -\frac{Gm}{r_0}$ , separate the variables ( $\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}}$ ) and write the integral  $t = -\int \frac{dr}{\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}}}$ . This integral is probably not calculable during the limited time given during the Olympiad, but a possible approach can

be sketched as follows. Substituting  $\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}} = \xi$  and  $\sqrt{2E} = v$ , one gets

$$\frac{t_\infty}{4Gm} = \int_0^\infty \frac{d\xi}{(v^2 - \xi^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4v^3} \int_0^\infty \left[ \frac{v}{(v - \xi)^2} + \frac{v}{(v + \xi)^2} + \frac{1}{v - \xi} + \frac{1}{v + \xi} \right] d\xi.$$

Here (after shifting the variable) one can use  $\int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi$  and  $\int \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{1}{\xi}$ , finally getting the same answer as by Kepler's laws.

iv. (1.7 pts) By Clapeyron–Mendeleev law,

$$p = \frac{mRT_0}{\mu V}.$$

Work done by gravity to compress the ball is

$$W = - \int p dV = - \frac{mRT_0}{\mu} \int_{\frac{4}{3}\pi r_3^3}^{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \frac{dV}{V} = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{r_3}.$$

The temperature stays constant, so the internal energy does not change; hence, according to the 1<sup>st</sup> law of thermodynamics, the compression work  $W$  is the heat radiated.

v. (1 pt) The collapse continues adiabatically.

$$pV^\gamma = \text{const} \implies TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

$$\therefore T \propto V^{1-\gamma} \propto r^{3-3\gamma}$$

$$\therefore T = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3\gamma-3}.$$

vi. (2 pts) During the collapse, the gravitational energy is converted into heat. Since  $r_3 \gg r_4$ , The released gravitational energy can be estimated as  $\Delta\Pi = -Gm^2(r_4^{-1} - r_3^{-1}) \approx -Gm^2/r_4$  (exact calculation by integration adds a prefactor  $\frac{3}{5}$ ); the terminal heat energy is estimated as  $\Delta Q = c_V \frac{m}{\mu} (T_4 - T_0) \approx c_V \frac{m}{\mu} T_4$  (the approximation  $T_4 \gg T_0$  follows from the result of the previous question, when combined with  $r_3 \gg r_4$ ). So,  $\Delta Q = \frac{R}{\gamma-1} \frac{m}{\mu} T_4 \approx \frac{m}{\mu} RT_4$ . For the temperature  $T_4$ , we can use the result of the previous question,  $T_4 = T_0 \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3}$ . Since initial full energy was approximately zero,  $\Delta Q + \Delta\Pi \approx 0$ , we obtain

$$\frac{Gm^2}{r_4} \approx \frac{m}{\mu} RT_0 \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3} \implies r_4 \approx r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}.$$

Therefore,

$$T_4 \approx T_0 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}.$$

Alternatively, one can obtain the result by approximately equating the hydrostatic pressure  $\rho r_4 \frac{Gm}{r_4^2}$  to the gas pressure  $p_4 = \frac{\rho}{\mu} RT_4$ ; the result will be exactly the same as given above.

# ANSWER SHEET



## Problem 1

### Problem T1. Focus on sketches (13 points)

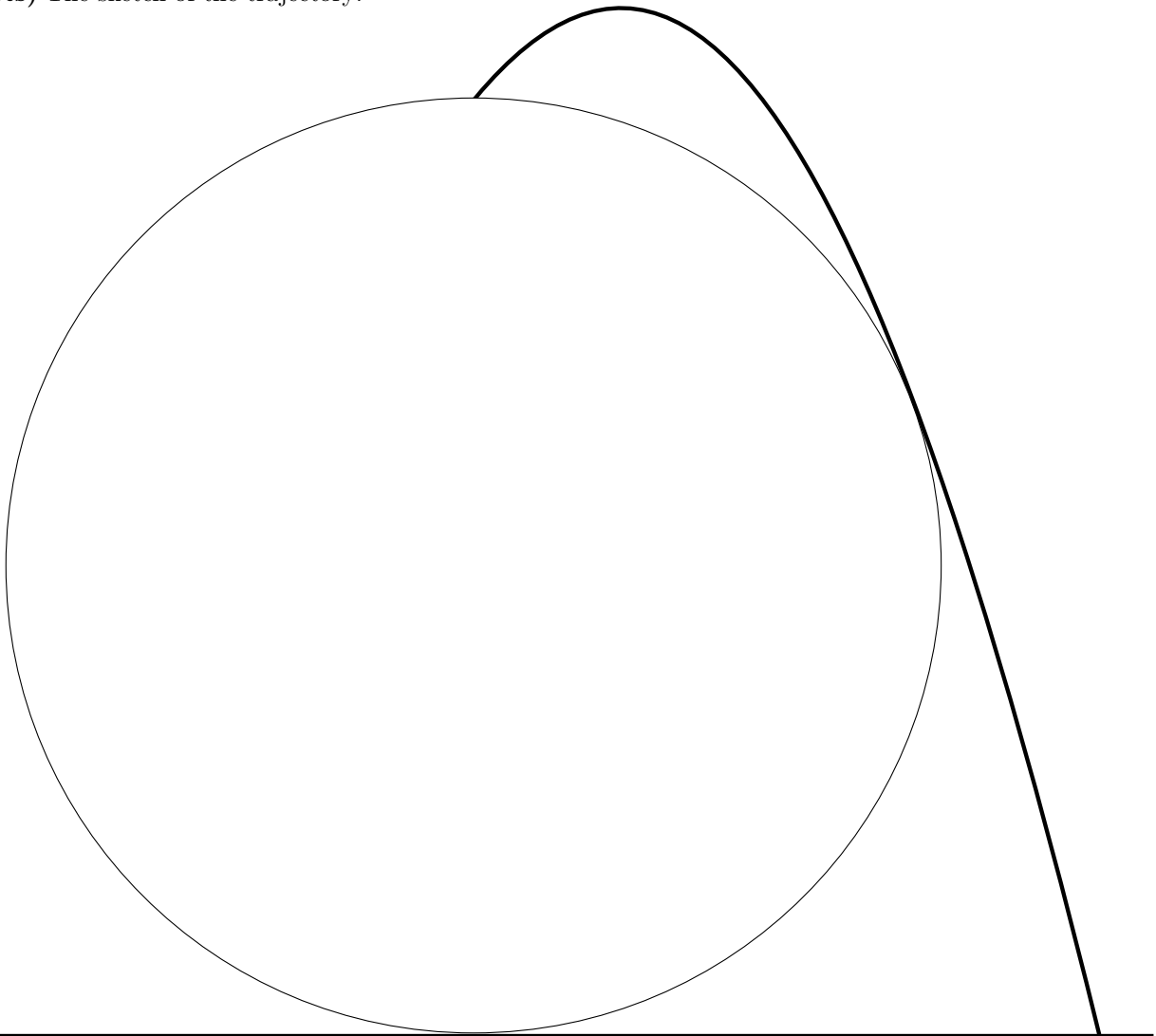
#### Part A. Ballistics (4.5 points)

i. (0.8 pts)

$$z_0 = v_0^2/2g$$

$$k = g/2v_0^2$$

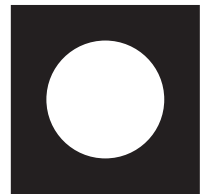
ii. (1.2 pts) The sketch of the trajectory:



iii. (2.5 pts)

$$v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}$$

# ANSWER SHEET



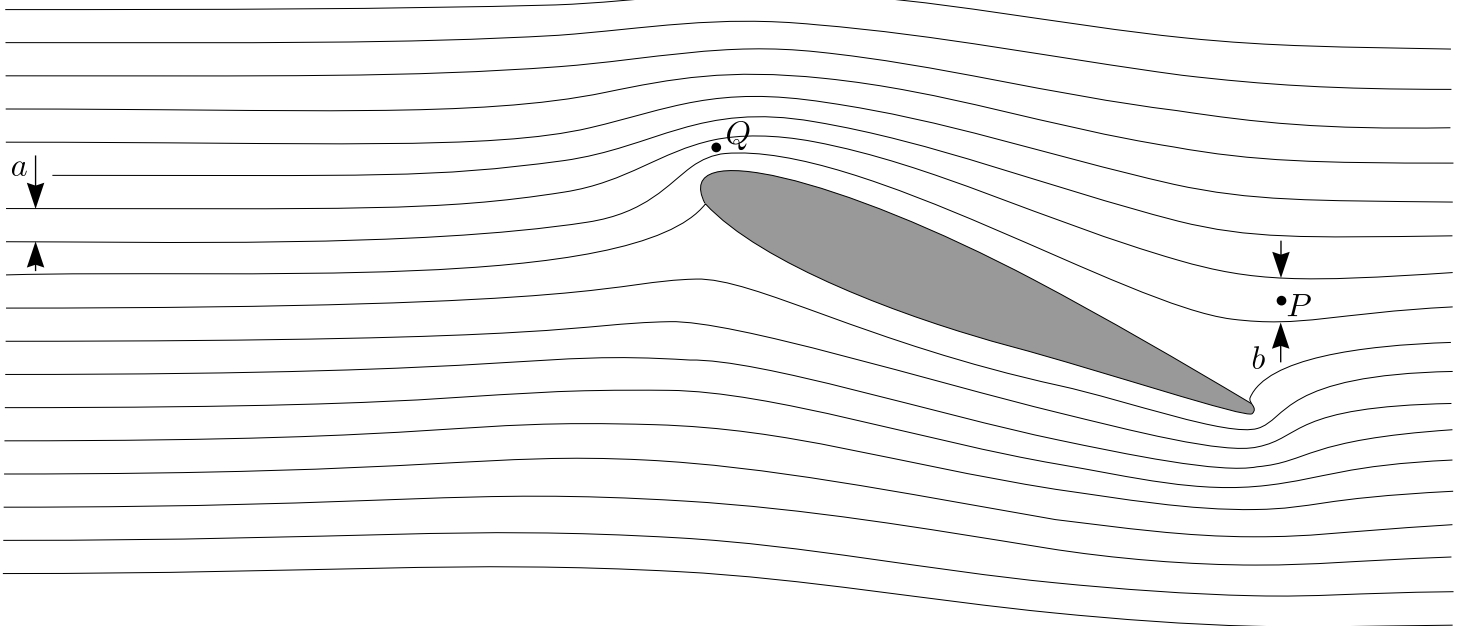
## Problem 1

### Part B. Air flow around a wing (4 points)

i. (0.8 pts)

$$v_P = 23 \text{ m/s}$$

ii. (1.2 pts) Mark on this fig. the point Q. Use it also for taking measurements (questions i and iii).



Formulae motivating  
the choice of point Q:

$$av = \text{const}$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}$$

iii. (2.0 pts)

$$\text{Formula: } v_{\text{crit}} = c \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{a^2 - c^2}}$$

$$\text{Numerical: } v_{\text{crit}} \approx 23 \text{ m/s}$$

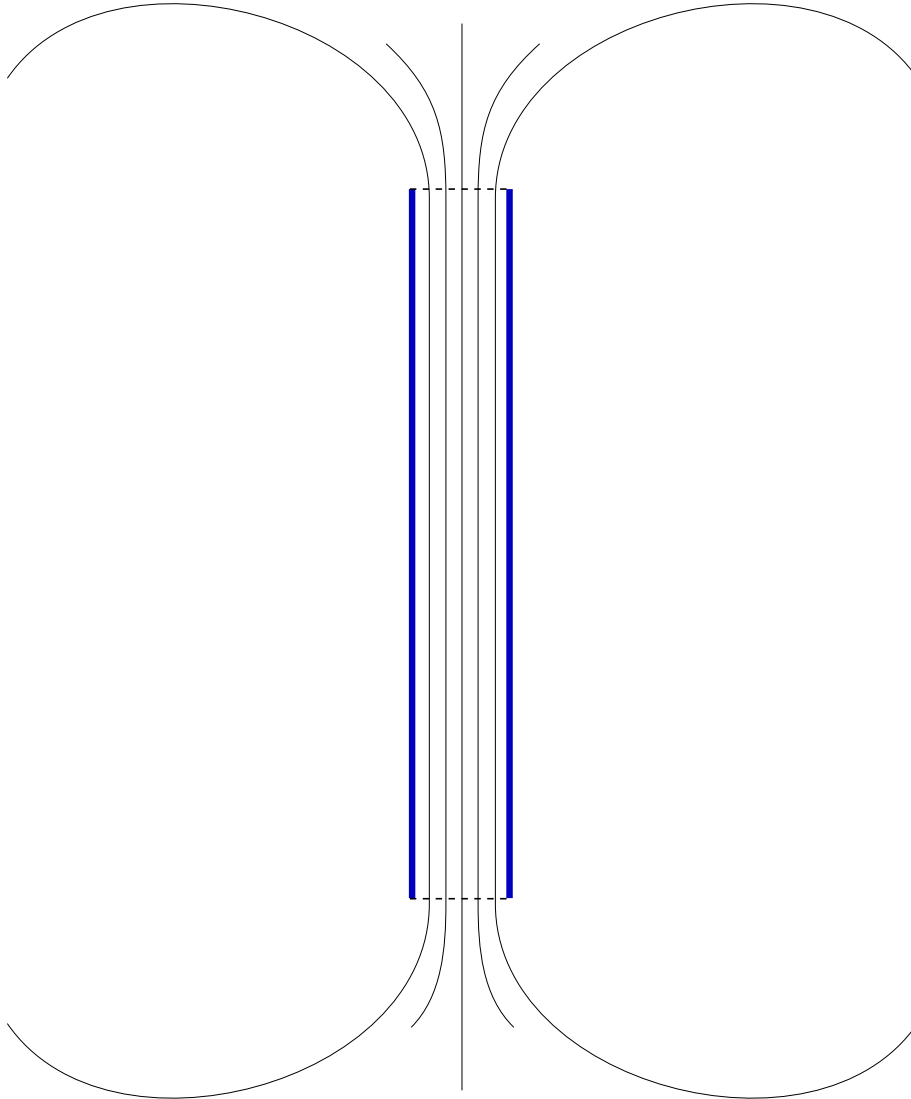


## Problem 1

### Part C. Magnetic straws (4.5 points)

i. (0.8 pts)

Sketch here five magnetic field lines.



ii. (1.2 pts)

$$T = \frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2}$$

iii. (2.5 pts)

$$F = \frac{4 - \sqrt{2}}{8\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{l^2}$$



# ANSWER SHEET



## Problem 2

### Problem T2. Kelvin water dropper (8 points)

#### Part A. Single pipe (4 points)

i. (1.2 pts)

$$r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3\sigma d}{4\rho g}}$$

ii. (1.2 pts)

$$Q = 4\pi\varepsilon_0\varphi r$$

iii. (1.6 pts)

$$\varphi_{\max} = 2\sqrt{\sigma r/\varepsilon_0}$$

#### Part B. Two pipes (4 points)

i. (1.2 pts)

$$Q_0 = 2\pi\varepsilon_0qr_{\max}/C$$

ii. (1.5 pts)

$$q(t) = q_0e^{\gamma t}, \quad \gamma = \frac{\pi\varepsilon_0n}{C}\sqrt[3]{\frac{6\sigma d}{\rho g}}$$

iii. (1.3 pts)

$$U_{\max} = \sqrt[6]{\frac{H^3g\sigma^2\rho d^2}{6\varepsilon_0^3}}$$

# ANSWER SHEET



## Problem 3

### Problem T3. Protostar formation (9 points)

i. (0.8 pts)

$$n = 8$$

ii. (1 pt)

$$t_2 \approx \sqrt{\frac{0.1r_0^3}{Gm}}$$

iii. (2.5 pts)

$$t_{r \rightarrow 0} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}$$

iv. (1.7 pts)

$$Q = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{r_3}$$

v. (1 pt)

$$T(r) = T_0 \left( \frac{r_3}{r} \right)^{3\gamma-3}$$

vi. (2 pts)

$$r_4 \approx r_3 \left( \frac{RT_0 r_3}{\mu m G} \right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}$$

$$T_4 \approx T_0 \left( \frac{RT_0 r_3}{\mu m G} \right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}$$

# PROBLEM

## Problem E1



### Problem E1. The magnetic permeability of water (10 points)

#### Part A. Qualitative shape of the water surface (1 points)

Observing reflections from the water surface (in particular, those of straight lines, such as the edge of a sheet of paper), it is easy to see that the profile has one minimum and has a relatively flat bottom, ie. the correct answer is “Option D” (full marks are given also for Option B). This profile implies that water is pushed away from the magnet, which means  $\mu < 1$  (recall that ferromagnets with  $\mu > 1$  are pulled).

#### Part B. Exact shape of the water surface (7 points)

i. (1.6 pts) The height of the spot on the screen  $y$  is tabulated below as a function of the horizontal position  $x$  of the caliper. Note that the values of  $y$  in millimetres can be rounded to integers (this series of measurements aimed as high as possible precision).

x (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
y (mm)	11.5	15.6	19.8	24.3	30.2	33.2	37.2	40.5
x (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
y (mm)	42.2	41.4	40.3	40.3	40.8	42	43.2	44.4
x (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
y (mm)	45.3	45.8	45.4	44.4	43.6	46.2	50	53.6
x (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
y (mm)	56.7	59.5	61.6	63.5	65.3	67	70.9	74.9

ii. (0.7 pts)



On this graph, the data of two different water levels are depicted; blue curve corresponds to a water depth of *ca* 2 mm (data given in the table above); the violet one — to 1 mm.

iii. (0.5 pts) If the water surface were flat, the dependence of  $x$  on  $y$  would be linear, and the tangent of the angle  $\alpha_0$  would be given by  $\tan \alpha_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , where  $\Delta x$  is a horizontal displacement of the pointer, and  $\Delta y$  — the respective displacement of the spot height. For the extreme positions of the pointer, the beam hits the water surface so far from the magnet that there, the surface

is essentially unperturbed; connecting the respective points on the graph, we obtain a line corresponding to a flat water surface — the red line. Using these two extreme data points we can also easily calculate the angle  $\alpha_0 = \arctan \frac{74.9-11.5}{90-10} \approx 38^\circ$ .

iv. (1.4 pts) For faster calculations,  $y - y_0 - (x - x_0) \tan \alpha_0$  (appearing in the formula given) can be read from the previous graph as the distance between red and blue line; the red line is given by equation  $y_r = y_0 + (x - x_0) \tan \alpha_0$ . One can also precalculate  $\frac{1}{2} \cos^2 \alpha_0 \approx 0.31$ . The calculations lead to the following table (with  $z = \tan \beta \cdot 10^5$ ; as mentioned above, during the competition, lesser precision with two significant numbers is sufficient).

x (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
z	0	10	27	66	204	303	473	591
x (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
z	597	428	239	128	53	26	0	-26
x (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
z	-72	-145	-278	-449	-606	-536	-388	-254
x (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
z	-154	-74	-40	-20	-6	2	-2	0

# PROBLEM

## Problem E1



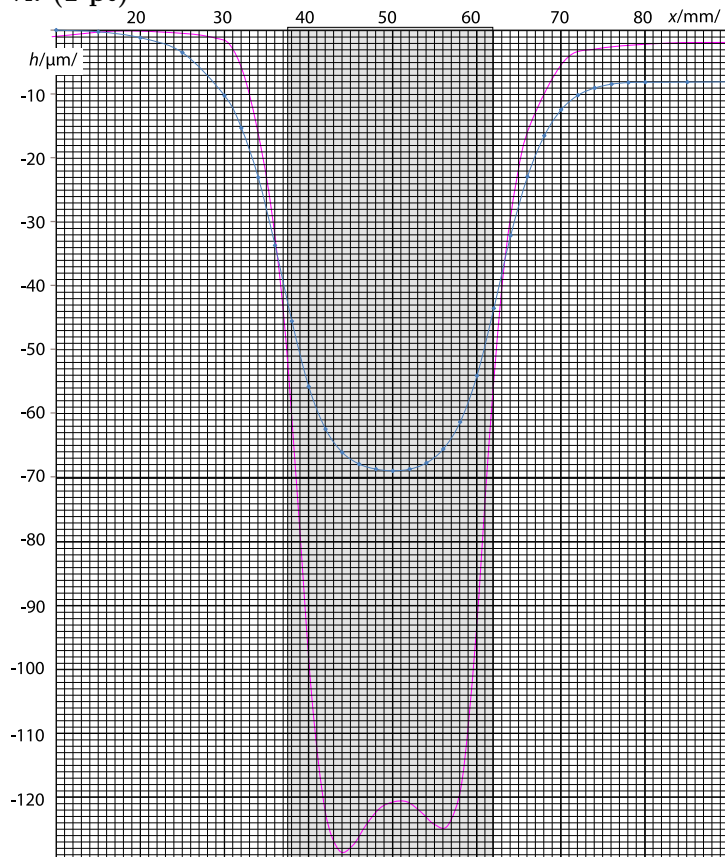
v. (1.6 pts) The water height can be obtained as the integral  $h = \int \tan \beta dx$ . Thus, we calculate the water height row-by-row, by adding to the height in the previous row the product of the horizontal displacement  $x_{i+1} - x_i$  with the average slope  $\frac{1}{2}(\tan \beta_{i+1} + \tan \beta_i)$ .

$x$ (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
$-h$ ( $\mu\text{m}$ )	0	0	1	4	10	15	23	34
$x$ (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
$-h$ ( $\mu\text{m}$ )	46	56	63	66	68	69	69	69
$x$ (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
$-h$ ( $\mu\text{m}$ )	68	66	61	54	44	32	23	17
$x$ (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
$-h$ ( $\mu\text{m}$ )	12	10	9	8	8	8	8	8

Note that the water level height at the end of the table should be also 0 (this corresponds also to an unperturbed region); the non-zero result is explained by the measurement uncertainties. One can improve the result by subtracting from  $h$  a linear trend  $8 \mu\text{m} \cdot \frac{x-10 \text{ mm}}{80 \text{ mm}}$ .

If the water level above the magnet is 1 mm, the water level descends below its unperturbed level at the axis of the magnet by ca  $120 \mu\text{m}$ .

vi. (1 pt)



Similarly to the previous figure, blue curve corresponds to a water depth of ca 2 mm, (data given in the table above), and the violet one — to 1 mm.

The position of the magnet can be found by measuring the caliper (find the positions when the laser beam hits the edges of the magnet and determine the distance between these positions — the result is ca 24 mm), and using the symmetry: magnet is placed symmetrically with respect to the surface elevation curve.

### Part C. Magnetic permeability (2 points)

Water surface takes an equipotential shape; for a unit volume of water, the potential energy associated with the magnetic interaction is  $\frac{B^2}{2\mu_0}(\mu^{-1}-1) \approx B^2 \frac{1-\mu}{2\mu_0}$ ; the potential energy associated with the Earth's gravity is  $\rho gh$ . At the water surface, the sum of those two needs to be constant; for a point at unperturbed surface, this expression equals to zero, so  $B^2 \frac{\mu-1}{2\mu_0} + \rho gh = 0$  and hence,  $\mu - 1 = 2\mu_0 \rho gh / B^2$ . Here,  $h = 120 \mu\text{m}$  stands for the depth of the water surface at the axis of the magnet; note that we have compensated the cumulative error as described at the end of the previous task and obtained  $h$  as the difference between the depth at the magnet's axis ( $121 \mu\text{m}$ ) and the half-depth at the right-hand-side of the graph ( $1 \mu\text{m}$ ). Putting in the numbers, we obtain  $\mu - 1 = -1.2 \times 10^{-5}$ .

# PROBLEM

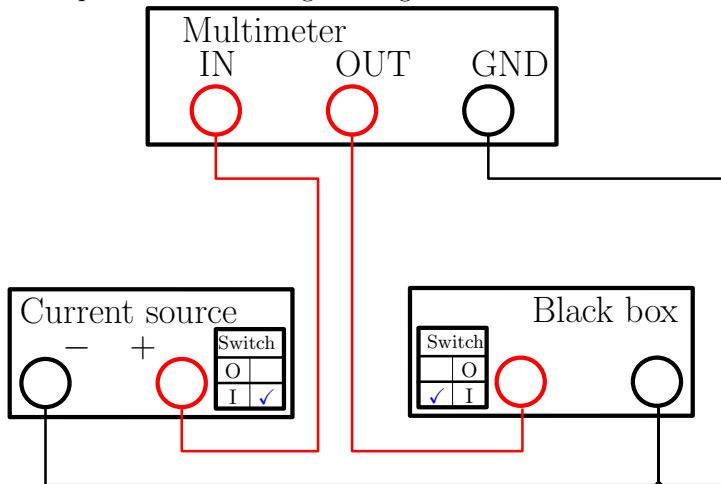
## Problem E2



### Problem E2. Nonlinear Black Box (10 points)

#### Part A. Circuit without inductance (7 points)

It is possible to make all the measurements needed for this problem with a single circuit as shown in the figure. While the current source is switched on, we are charging the capacitor in the black box, until the current  $I(V_{\max})$  through the nonlinear element equals to the output current  $I_0$  of the current source.  $V_{\max} = 540 \pm 40$  mVs varies from one experimental setup to another. When the current source is switched off or disconnected, the capacitor will discharge through the nonlinear element.



i. (1 pt) During charging of the capacitor from  $V = 0$  to  $V = V_{\max}$  we note that the output of the current source is constant ( $I_0 = 6.0$  mA) close to the precision of the multimeter.

ii. (1.2 pts) Using the definition of differential capacitance, we can calculate the current through the capacitor in the black box from the time derivative of the voltage on the black box.

$$I_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \frac{dV}{dt} = C(V) \dot{V}$$

There are several ways to determine the capacitance used in the black box based on chosen voltage.

- When the voltage on the black box is close to zero, the current through the nonlinear element is also close to zero, because  $I(V = 0) = 0$ . After switching the current source on, most of the input current  $I_0$  will at first go through the capacitor.

$$C_0 = I_0 / \dot{V}_{\uparrow}(V = 0)$$

This can be measured more precisely after first reversing the polarity of the current source and charging the capacitor backwards, because the multimeter does not display derivatives when they change sharply (as in few moments after switching the current source on).

Example measurements taken this way follow.

$\dot{V}_{\uparrow}(0)$ (mV/s)	3.51	3.32	3.55
$C_0$ (F)	1.71	1.81	1.69

$$C_0 = 1.74 \text{ F}$$

- When the voltage on the black box is  $V_{\max}$ , the current through the nonlinear element is  $I_0$ . Switching the current source off, we will have the capacitor discharging with the same current.

$$C_0 = -I_0 / \dot{V}_{\downarrow}(V = V_{\max})$$

- We can also measure the capacitance for any intermediate voltage as in **A-iv**.

iii. (2.2 pts) If we neglect the nonlinearity of the capacitor, there are (at least) two ways to obtain the current–voltage characteristic of the nonlinear element in the black box.

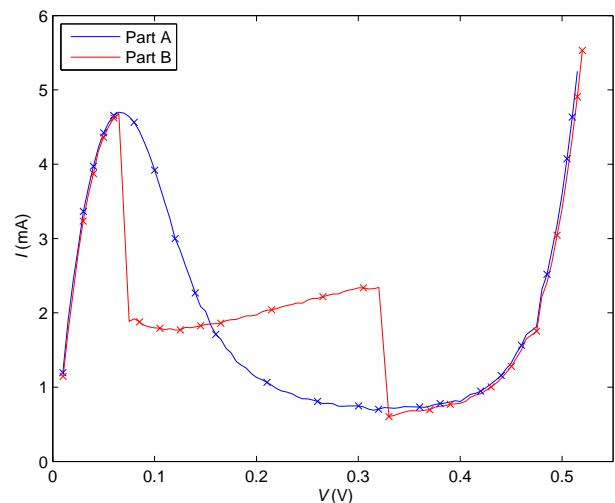
- Applying Kirchoff's I law to the charging capacitor,

$$I(V) = I_c - C_0 \dot{V}_{\uparrow}(V).$$

An  $I(V)$  characteristic obtained by charging the capacitor is shown on the following figure.

- Applying Kirchoff I law to the discharging capacitor,

$$I(V) = -C_0 \dot{V}_{\downarrow}(V).$$



iv. (2.6 pts) In order to obtain the differential capacitance, we solve a system of linear equations by eliminating  $I(V)$ :

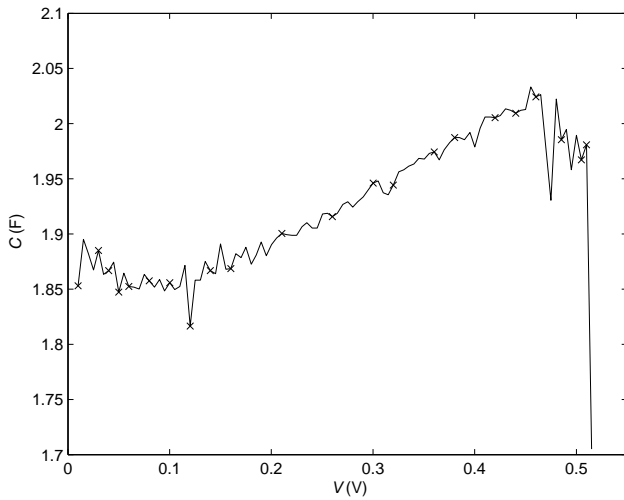
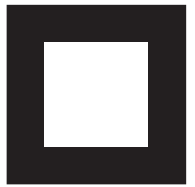
$$\begin{cases} I_0 = \dot{V}_{\uparrow} C(V) + I(V) \\ I(V) = -\dot{V}_{\downarrow} C(V); \end{cases} \implies C(V) = \frac{I_0}{\dot{V}_{\uparrow} - \dot{V}_{\downarrow}}.$$

Therefore we need to take measurements during both charging and discharging the capacitor in the black box at the same voltages. A graph of measurement results follows.



# PROBLEM

## Problem E2



### Part B. Circuit with inductance (3 points)

Measuring and plotting the current–voltage characteristic of the nonlinear element in the same way as in part **A-iii**, we obtain a graph that differs only in the negative differential resistance ( $I'(V) < 0$ ) region, in our case  $70 \text{ mV} < V < 330 \text{ mV}$ . This is the region where, when we look at small-signal oscillations, the nonlinear element behaves as a negative-valued Ohmic resistance. After enabling the inductance we have a LC circuit whose oscillations are amplified (instead of being dampened) by the negative differential resistance. Because the resonant frequency  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC_p}} \sim 30 \text{ MHz}$  (with  $C_p$  being the capacitance of the nonlinear element) is high, we actually measure the average current through the nonlinear element, while the real current oscillates all over the region of negative differential resistance.