Задатак 1: Ракета (23 поена)

а) Из једначине кретања сателита по орбити следи $\frac{m_s v^2}{R_z} = m_s g$. Одатле је $v = \sqrt{gR_z} = 7{,}92\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, а кинетичка енергија је $T = \frac{1}{2}m_s v^2 = \frac{1}{2}m_s g R_z = 6{,}28 \cdot 10^9\,\mathrm{J} = 1{,}74\,\mathrm{MW}\cdot\mathrm{h}$. Та кинетичка енергија је $n = \frac{T}{Q_d} = 4{,}98$ пута већа од месечне потрошње једног домаћинства $\boxed{\mathbf{3п}}$.

б) Из закона одржања импулса примењеног на тренутке t и $t+\mathrm{d}t$ следи $m(t)v(t) = m(t+\mathrm{d}t)v(t+\mathrm{d}t) + [m(t) - m(t+\mathrm{d}t)]\,[v(t+\mathrm{d}t) - u]$, где је члан с леве стране импулс ракете у тренутку t, први члан с десне стране је импулс ракете у тренутку $t+\mathrm{d}t$, а други члан с десне стране импулс избачене количине гаса. Сређивањем ове једначине се добија $[m(t) - m(t+\mathrm{d}t)]\,u = m\,[v(t+\mathrm{d}t) - v(t)]$, одакле је $-\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{1}{u}\mathrm{d}v$. Интеграцијом последње једначине следи $-\int_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{1}{u}\int_0^v \mathrm{d}v$, па је $v = u \cdot \ln\frac{m_0}{m}$ $\boxed{\mathbf{5п}}$.

в) Ако у реакцији учествује n_L молова реактанта, тад настаје $n_D = 3n_L$ молова гасне смеше. Пошто ослобођена топлота одлази на грејање гасне смеше, следи $q_m n_L = n_D C_p (T - T_r)$, где је $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$ моларни топлотни капацитет гасне смеше при константном притиску. Тако се добија $T = T_r + \frac{q_m}{R}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{n_L}{n_D} = 2270\,\mathrm{K}$ $\boxed{\mathbf{4п}}$.

г) Нека је Δm маса гасне смеше која истекне за неко мало време, Δn број молова у тој маси, а ΔV запремина коју је та количина гаса заузимала у комори. Из енергијског баланса следи $p\Delta V = \frac{1}{2}\Delta m u^2 - \Delta n C_v T$. Користећи једначине $p\Delta V = \Delta n RT$, $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$ и $M = \frac{\Delta m}{\Delta n}$ следи $u = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{RT}{M}}$. Одатле је $u = \sqrt{\frac{2q_m}{M}\frac{n_L}{n_D} + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{RT_r}{M}} = 3{,}05\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ $\boxed{\mathbf{4п}}$.

д) Из дела б) следи $m_s = m_0 \exp\left(-\frac{v}{u}\right)$, па је маса потрошеног горива $m_g = m_0 - m_s = m_s\left(\exp\frac{v}{u} - 1\right) = 2480\,\mathrm{kg}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

ђ1) Степен искоришћења је $\eta = \frac{\frac{1}{2}m_s v^2}{m_g \frac{q_m}{M}\frac{n_L}{n_D}}$. Користећи решења делова г), д) и б) следи $\eta = \frac{(v/u)^2}{\exp\frac{v}{u} - 1}$. Пошто је $v/u = 2{,}79$ добија се $\eta = 0{,}51$ $\boxed{\mathbf{3п}}$. Напомена: Ако се узме бројна вредност из дела г) (која не укључује занемаривање члана који садржи T_r) добија се $v/u = 2{,}59$ и $\eta = 0{,}54$. Признаваће се оба наведена решења.

ђ2) Испитивањем функције $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ се добија да се максимум достиже за $x = 1{,}59$ и тај максимум износи $\eta = 0{,}648$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

Задатак 2: Молекулске интеракције (24 поена)

а) Ако се искористи једначина за $B_2(T)$ и дати потенцијал $U_{кс}(r)$ из поставке задатка онда је

$$B_2(T) = -2\pi N_A \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{U_{кс}(r)}{kT} \right) - 1 \right] r^2 \mathrm{d}r =$$

$$= -2\pi N_A \left\{ \int_0^d \left[\exp\left(-\frac{\infty}{kT} \right) - 1 \right] r^2 \mathrm{d}r + \int_d^\infty \left[\exp\left(-\frac{0}{kT} \right) - 1 \right] r^2 \mathrm{d}r \right\}. \quad \textbf{(2 п)}$$

Искориствиши да су $\lim_{x\to\infty} \exp(-x) = 0$ и $\lim_{x\to 0} \exp(-x) = 1$ добија се да је

$$B_2(T) = -2\pi N_A \int_0^d [0-1] r^2 \mathrm{d}r \to \frac{2\pi N_A d^3}{3}. \quad \textbf{(2 п)}$$

Добијени израз за други виријални коефицијент $B_2(T)$ представља, за један мол гаса, запремину која није слободна за кретање молекула гаса услед њихових коначних (незанемарљивих) димензија. Да би то боље разумели замислимо два молекула облика идеалне куглице (сфере) пречника d. Када им се површине додирну њихови центри ће бити на растојању d. Површина круте сфере се опире њиховом даљем приближавању (потенцијал $U(r)$ расте до бесконачности), тако да се њихови центри не могу више приближавати, а оба молекула заузимају неку запремину једнаку запремини сфере полупречника d која онемогућава кретање других молекула у њој. За сваки пар молекула та запремина износи $4\pi d^3/3$. За један мол честица које имају $N_A/2$ молекулских парова, укупна запремина коју заузимају и не могу користити за кретање износи $2\pi N_A d^3/3$.

а1) за аргон је $\boxed{B_{2Ar}(T) = \frac{2\pi N_A d_{Ar}^3}{3} = 3{,}987\times 10^{-5}\ \frac{m^3}{mol}}$. **(1 п)**

а2) за угљендиоксид је $\boxed{B_{2CO_2}(T) = \frac{2\pi N_A d_{CO_2}^3}{3} = 7{,}572\times 10^{-5}\ \frac{m^3}{mol}}$. **(1 п)**

Пошто су температурски ефекти везани за привлачне силе, модел потенцијала круте сфере их искључује (нема потенцијалне јаме) па је и резултат за $B_2(T)$ такав да нема зависности од T.

Сада се може израчунати и вредност фактора компресибилности z узевши да је $V_M = 1\,\mathrm{m^3/mol}$:

а1) $\boxed{z_{Ar} = 1 + \frac{B_{2Ar}(T)}{1} \approx 1{,}0004}$ и а2) $\boxed{z_{CO_2} = 1 + \frac{B_{2CO_2}(T)}{1} \approx 1{,}0008}$. **(2 п)**

Види се да је $z > 1$ у оба случаја (одбојне силе доминирају), што је и на основу модела и очекивано. То значи да је

а1) $\boxed{B_{2\mathrm{Ar}}(T) = b - \frac{a}{RT} \approx b = 0{,}04\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}}}$, и *а*2) $\boxed{B_{2\mathrm{CO_2}}(T) = b - \frac{a}{RT} \approx b = 0{,}05\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}}}$. **(2 п)**

б) Јачина електричног поља на растојању r од центра дипола А дуж линије која спаја центре оба дипола (молекула) износи

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r-l)^2} - \frac{q}{(r+l)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{l}{r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{l}{r}\right)^2}\right], \qquad (1) \quad \textbf{(1 п)}$$

где је q апсолутна вредност наелектрисања која су се раздвојена у молекулу на растојању $2l$. Ако је за $l << r$ (наш случај)

$$\frac{1}{\left(1 \pm \frac{l}{r}\right)^2} \approx 1 \mp \frac{2l}{r} \qquad (2) \quad \textbf{(0,5 п)}$$

онда је јачина поља (1) једнака

$$E(r) = \frac{ql}{\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad (3) \quad \textbf{(0,5 п)}$$

Сада се може израчунати сила F_n којом поље (3) делује на поларизован молекул Б. Очигледно је

$$F_n(r) = [q'E(r+l') - q'E(r-l')] = \frac{q'ql}{\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{l'}{r}\right)^3} - \frac{1}{\left(1-\frac{l'}{r}\right)^3}\right], \qquad (4) \quad \textbf{(1 п)}$$

па је, као и у (2),

$$\frac{1}{\left(1 \pm \frac{l'}{r}\right)^3} \approx 1 \mp \frac{3l'}{r},$$

те једначина (4) поприма облик

$$F_n(r) = -\frac{6q'qll'}{\pi\varepsilon_0 r^4}. \qquad (5) \quad \textbf{(1 п)}$$

б1) Поларизација молекула Б тј. раздвојеност његових наелектрисања l', директно зависи од јачине поља (3) молекула А, па важи да је $l' \sim E(r) \sim 1/r^3$. Ако се тако добијено l' замени у (5) добија се да је тражена зависност

$$\boxed{F_n(r) \sim \frac{1}{r^7}}, \text{ тј. } \boxed{m = 7.} \qquad (6) \quad \textbf{(2 п)}$$

б2) Искористивши резултат добијен у *iii*) и дату везу да је $F_{md}(r) = -\mathrm{d}U_{md}(r)/\mathrm{d}r$ добија се општи облик потенцијала међудејства молекула са слике 1:

$$\boxed{U_{md}(r) = -\frac{a'_1}{r^6} + \frac{a'_2}{r^{12}},} \qquad \textbf{(3 п)}$$

где су a'_1 и a'_2 константе интеграљења.

в) На основу резултата под б2) вредности степених зависности p и k Ленард-Џонсовог потенцијала $U_{\mathrm{LJ}}(r)$ су $p = 12$ за зависност која потиче од одбојних сила и $k = 6$ за зависност која потиче од привлачних сила међудејства, па може да се напише да је

$$U_{\mathrm{LJ}}(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]. \quad \textbf{(1 п)}$$

в1) Минимум функције $U_{\mathrm{LJ}}(r)$ добија се израчунавањем $\mathrm{d}U_{\mathrm{LJ}}(r)/\mathrm{d}r = 0$, одакле је

$$\boxed{r_0 = 2^{\frac{1}{6}}\sigma.} \quad \textbf{(2 п)}$$

в2) Вредност $U_{\mathrm{LJ}}(r_0)$ је вредност минимума функције $U_{\mathrm{LJ}}(r)$, а она износи, користећи се резултатом добијеним под в1),

$$\boxed{U_{\mathrm{LJ}}(r) = -\varepsilon.} \quad \textbf{(2 п)}$$

Задатак 3: Магнетна левитација (23 поена)

а) У тачкама на $z-$оси магнетно поље има само компоненту $\vec{B}_z = B_z\vec{e}_z$, док у тачкама ван $z-$осе има и радијалну компоненту $\vec{B}_r = B_r\vec{e}_r$. Уочимо вертикални цилиндар полупречника b и висине Δz који обухвата прстен, тако да се горња основица налази на висини $z+\Delta z/2$, а доња на висини $z-\Delta z/2$. Нека је у свакој тачки површи цилиндра вектор нормале усмерен ка споља. Како је флукс вектора магнетне индукције $\vec{B}$ кроз уочени цилиндар једнак нули, имамо $B_z(z+\Delta z/2)\cdot\pi b^2 - B_z(z-\Delta z/2)\cdot\pi b^2 + B_r(z)\cdot 2\pi b\Delta z = 0$. Имајући у виду да је $\frac{B_z(z+\Delta z/2)-B_z(z-\Delta z/2)}{\Delta z} = \frac{dB_z(z)}{dz}$ и $\vec{B}_r(z) = B_r(z)\vec{e}_r$, коначно добијамо $\vec{B}_r(z) = -\frac{b}{2}\frac{dB_z(z)}{dz}\vec{e}_r$. **(3 поена)**

б) Елементарна Амперова сила која делује на делић прстена је $d\vec{F}_A = I_p d\vec{\ell}\times\vec{B}(z)$, где је $d\vec{\ell} = b\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$, $\vec{B}(z) = B_r(z)\vec{e}_r + B_z(z)\vec{e}_z$. Имајући у виду да је $\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z = \vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r = -\vec{e}_z$, добијамо $d\vec{F}_A = I_pB_z(z)b\,d\varphi\,\vec{e}_r - I_pB_r(z)b\,d\varphi\,\vec{e}_z$. Након интеграције по целом опсегу углова $\varphi\in[0,2\pi)$, следи $\vec{F}_A = -2\pi bI_pB_r(z)\vec{e}_z$, што заменом резултата дела а) задатка постаје $\vec{F}_A = \pi b^2 I_p\frac{dB_z(z)}{dz}\vec{e}_z$. Како је $B_z(z) = \frac{\mu_0 NI_k a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$ и $\frac{dB_z(z)}{dz} = -\frac{3\mu_0 NI_k a^2 z}{2(z^2+a^2)^{5/2}}$, добијамо Амперову силу $\vec{F}_A = -\frac{3\pi\mu_0 Na^2b^2z}{2(z^2+a^2)^{5/2}}I_kI_p\vec{e}_z$. Да би прстен могао да левитира изнад калема, Амперова сила мора да буде усмерена навише како би уравнотежила силу Земљине теже, па мора да важи $I_kI_p < 0$, односно стварни смерови струја I_k и I_p морају да буду супротни. **(3 поена)**

в) Нека је референтни смер индуковане ЕМС као на слици у поставци задатка. Тада је магнетни флукс кроз прстен $\Phi = B_z(z)\cdot\pi b^2 = \frac{\pi\mu_0 Na^2b^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}I_k\cos\Omega t$, па је $\varepsilon_i(z,t) = -\frac{d\Phi}{dt} = U_0(z)\sin\Omega t$, где је $U_0(z) = \frac{\pi\mu_0 Na^2b^2\Omega I_k}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$. **(1 поен)**

г) Пошто је индукована ЕМС наизменична, представићемо је у комплексном облику $\underline{\varepsilon}_i(z,t) = U_0(z)(\cos\Omega t + j\sin\Omega t)$. Индукована ЕМС је имагинарни део комплексне, тј. $\varepsilon_i(z,t) = \mathrm{Im}\,\underline{\varepsilon}_i(z,t)$. Комплексна импеданса прстена ће бити $R + j\Omega L$, а струја кроз прстен $\underline{i}_p(z,t) = \underline{\varepsilon}_i(z,t)/(R+j\Omega L)$. По услову задатка важи $\Omega \gg R/L$ јер је L/R време пригушења карактеристично за прстен посматран као RL коло. То значи да је $\underline{i}_p(z,t) \approx -j\underline{\varepsilon}_i(z,t)/(\Omega L)$. Струја која протиче кроз прстен је $i_p(z,t) = \mathrm{Im}\,\underline{i}_p(z,t)$, одакле добијамо $i_p(z,t) \approx -\frac{U_0}{\Omega L}\cos\Omega t = -\frac{\pi\mu_0 Na^2b^2I_k}{2(z^2+a^2)^{3/2}L}\cos\Omega t$. **(4 поена)**

д) На основу дела б) задатка, имамо $\vec{F}_A(z,t) = -\frac{3\pi\mu_0 Na^2b^2z}{2(z^2+a^2)^{5/2}}i_k(t)i_p(z,t)\vec{e}_z$. Заменом израза за струје следи да је Амперова сила $\vec{F}_A(z,t) = \frac{3\pi^2\mu_0^2N^2a^4b^4I_k^2}{4L}\frac{z}{(z^2+a^2)^4}\vec{e}_z\cos^2\Omega t$. Како је $\cos^2\Omega t = (1+\cos 2\Omega t)/2$, добијамо да је константна компонента $\vec{F}_A(z) = \frac{Kz}{(z^2+a^2)^4}\vec{e}_z$ и временски променљива компонента $\vec{f}_A(z,t) = \frac{Kz}{(z^2+a^2)^4}\cos 2\Omega t$, где је $K = \frac{3\pi^2\mu_0^2N^2a^4b^4I_k^2}{8L}$. Очигледно, средња вредност $\vec{f}_A(z,t)$ током једног периода $2\pi/\Omega$ једнака је нули. **(3 поена)**

ђ) Једначина кретања прстена дуж $z-$осе је $m\frac{d^2z}{dt^2} = F_A(z) - mg$. Будући да прстен левитира на висини z_0, биће $0 = F_A(z_0) - mg$, односно $\frac{Kz_0}{(z_0^2+a^2)^4} = mg$. Размотримо сада кретање прстена врло близу равнотежног положаја, $z = z_0 + \xi$, $|\xi| \ll z_0$. Како је $F_A(z) \approx F_A(z_0) + \xi\left.\frac{dF_A(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$, ако искористимо услов равнотеже $F_A(z_0) = mg$, добијамо $F_A(z) \approx mg - mg\frac{7z_0^2-a^2}{z_0(z_0^2+a^2)}\xi$, па је једначина кретања прстена око равнотежног положаја $m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -mg\frac{7z_0^2-a^2}{z_0(z_0^2+a^2)}\xi$. Мале осцилације прстена око равнотежног положаја ће бити могуће ако је $7z_0^2 - a^2 > 0$, односно ако је $z_0 > a/\sqrt{7}$. Њихова угаона учестаност је $\omega = \sqrt{g\frac{7z_0^2-a^2}{z_0(z_0^2+a^2)}}$. **(6 поена)**

е) Потребна амплитуда струје кроз калем налази се из услова равнотеже $K = mg(z_0^2+a^2)^4/z_0$, што за $z_0 = a$ постаје $K = 16mga^7$. Одатле добијамо амплитуду струје $I_k = \frac{8a^2}{\pi\mu_0 Nb^2}\sqrt{\frac{2mgL}{3a}}$. **(1 поен)**

ж) Временски променљива компонента је приближно $f_A(z,t) \approx f_A(z_0,t) = F_A(z_0)\cos 2\Omega t = mg\cos 2\Omega t$ и има улогу принудне силе. Одговарајућа амплитуда принудних осцилација је $x_0 = \frac{g}{|4\Omega^2-\omega^2|}$. За вредности дате у поставци задатка добија се $\omega \approx 7{,}7$ Hz, па је $x_0 \approx 0{,}25$ mm. Одатле видимо да је x_0 веома мало у односу на остале димензије система и да се због тога деловање временски променљиве компоненте може занемарити. **(2 поена)**

Задатак припремио: *Милан Радоњић*, Институт за физику, Београд
Рецензенти: *др Антун Балаж* и *Милан Жежељ*, Институт за физику, Београд
Председник комисије за такмичење ученика средњих школа ДФС: *др Александар Крмпот*, Институт за физику, Београд