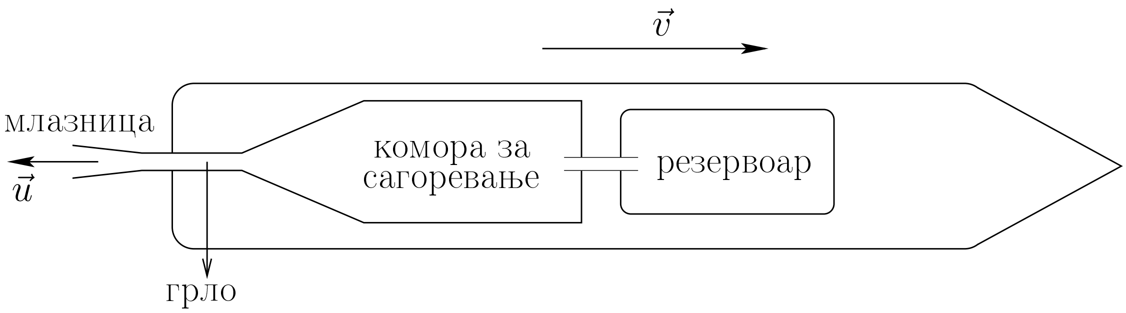
6. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2011/2012. ГОДИНА

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ

БЕОГРАД
26-27.5.2012.

Задатак 1: Ракета (23 поена)

Ракете као погонско гориво најчешће користе неку течност. У комори за сагоревање ракете долази до хемијске реакције при којој се течно гориво претвара у гасну смешу високе температуре. Млаз гасова истиче кроз млазницу и услед тога се ракета убрзава. У овом задатку ћемо испитати колико је горива потребно искористити да се ракета убрза до прве космичке брзине и тако постане Земљин сателит, као и колики је притом степен искоришћења хемијске енергије горива.



Шематски приказ ракете

а) Одредити брзину сателита који се креће на ниској кружној орбити око Земље. За ниску орбиту важи да је полупречник орбите приближно једнак полупречнику Земље. Колика је кинетичка енергија тог сателита ако је његова маса $m_{\mathrm{s}} = 200\,\mathrm{kg}$? Колико пута је та кинетичка енергија већа од месечне потрошње електричне енергије једног домаћинства која износи $Q_{\mathrm{d}} = 350\ \mathrm{kW \cdot h}$? **(3 поена)**

б) У референтном систему везаном за ракету гасна смеша истиче кроз млазницу брзином u. Ракета је кренула из мировања и тада је њена маса била једнака m_0. Колика ће бити брзина ракете v кад њена маса буде m? Занемарити утицај силе Земљине теже и Земљине атмосфере на кретање ракете. **(5 поена)**

в) У ракети се као гориво користи течни нитрометан ($\mathrm{CH_3NO_2}$). Нитрометан се чува у резервоару на температури $T_{\mathrm{r}} = 300\,\mathrm{K}$ и притиску p и одатле се убризгава у комору за сагоревање. У комори за сагоревање долази до хемијске реакције која се одвија при константном притиску p:

$$\mathrm{CH_3NO_2} \longrightarrow 0{,}8\,\mathrm{CO} + 0{,}2\,\mathrm{CO_2} + 0{,}7\,\mathrm{H_2} + 0{,}8\,\mathrm{H_2O} + 0{,}5\,\mathrm{N_2}$$

при којој се течни нитрометан разлаже на смешу гасова. Количина топлоте која се ослободи при наведеној реакцији једног мола нитрометана на температури T_{r} и притиску p је $q_{\mathrm{m}} = 246\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{mol}}$. Настала гасна смеша се може посматрати као идеални гас коефицијента адијабате $\gamma = 1{,}25$ и моларне масе $M = 20{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$. Одредити температуру T гасне смеше. Сматрати да сва топлота која се ослободи у реакцији одлази на загревање гасне смеше при константном притиску p. **(4 поена)** г) Услед разлике притиска у комори за сагоревање и притиска ван ракете долази до протока гасне смеше кроз грло, млазницу и њеног истицања из ракете. Наћи брзину u којом гасна смеша истиче из ракете (у референтном систему везаном за ракету) ако је температура гасне смеше у комори T. Сматрати да је попречни пресек млазнице знатно мањи од попречног пресека коморе за сагоревање, а да је ван ракете вакуум. Колика је бројна вредност брзине u када се користи гориво из дела задатка в) ? **(4 поена)**

д) Колику масу нитрометана треба потрошити на убрзавање ракете од мировања до прве космичке брзине, при чему ће коначна маса ракете бити $m_\mathrm{s} = 200\,\mathrm{kg}$? **(2 поена)**

ђ) Степен искоришћења хемијске енергије горива при процесу убрзавања ракете се дефинише као однос крајње кинетичке енергије ракете и топлоте која се ослободи при сагоревању потрошеног течног горива.

ђ1) Уколико се у решењу делу задатка под в) занемари члан који садржи T_r (тј. замени да је $T_\mathrm{r} = 0$), степен искоришћења се може изразити у зависности само од односа v/u брзине ракете и брзине истицања горива. Одредити математички облик те зависности. Колики је степен искоришћења за ракету испитивану у овом задатку? **(3 поена)**

ђ2) При ком односу v/u је степен искоришћења максималан и колики је тај степен искоришћења? Признаваће се сва образложена нумеричка решења која од тачних одступају за мање од 10%. **(2 поена)**

Физичке константе које можете користити у овом задатку:

- Убрзање силе теже на површини Земље: $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
- Полупречник Земље: $R_\mathrm{z} = 6400\,\mathrm{km}$
- Универзална гасна константа: $R = 8{,}31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}}$
- Моларне масе атома водоника, угљеника, азота и кисеоника: $M_\mathrm{H} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, $M_\mathrm{C} = 12\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, $M_\mathrm{N} = 14\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, $M_\mathrm{O} = 16\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$.

Подсетник:

- $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\frac{b}{a}$, за $a > 0$ и $b > 0$.
- Коефицијент адијабате је по дефиницији једнак $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, где је C_p моларни топлотни капацитет при константном притиску, а C_v моларни топлотни капацитет при константној запремини.

Задатак припремио: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Дарко Танасковић*, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Александар Крмпот*, Институт за физику, Београд

Задатак 2: Молекулске интеракције (24 поена)

а) Сви молекули у природи међусобно дејствују на различите начине у зависности од самог типа молекула и карактера сила које делују између њих. Уопштено говорећи, понашање система од два интерагујућа молекула прикладно је разматрати помоћу зависности њихових потенцијалних енергија. Свака интеракција молекула на неком међусобном растојању r може се описати дефинисањем адекватног међумолекулског потенцијала $U = f(r)$. До данас теоријски није добијен аналитички облик криве $U = f(r)$ који би у потпуности репродуковао реално међудејство било која два молекула нпр. неког гаса. Семиемпиријски је, међутим, добијено неколико међумолекулских потенцијала који доста добро описују молекулске интеракије. Најједноставнији такав међумолекулски потенцијал је потенцијал круте сфере $U_{кс}(r)$, помоћу кога молекуле и њихово међудејство можемо посматрати као апсолутно еластичне сударе крутих билијарских куглица. Потенцијал $U_{кс}(r)$ међудејства таквог система дат је у аналитичком облику као

$$U_{кс}(r) = \begin{cases} \infty, & r \le d \\ 0, & r > d \end{cases},$$

где r представља међумолекулско растојање а d – ефективни пречник молекула (најмање растојање које достигну центри два молекула приликом судара). Помоћу овог потенцијала могу се израчунати карактеристични параметри реалних гасова a и b из Ван дер Валсове једначине стања реалних гасова

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT,$$

где је $V_M = V/\nu$ моларна запремина гаса, ν је број молова гаса, p његов притисак, T његова апсолутна температура, док је $R = 8{,}314\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}$ универзална гасна константа. Најпогоднији експерименти којима се врше мерења одступања понашања реалних од идеалних гасова су они који се заснивају на мерењима тзв. *фактора компресибилности* z дефинисаног као

$$z = \frac{pV_M}{RT}.$$

За идеалне гасове је $z = 1$, док је за реалне гасове: $0 < z < 1$ (када доминирају привлачне силе међудејства) или $z > 1$ (када доминирају одбојне силе међудејства). Ако се z развије у ред по V_M добиће се да је

$$z = 1 + \frac{B_2(T)}{V_M} + \frac{B_3(T)}{V_M^2} + \frac{B_4(T)}{V_M^3} + \ldots = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(T)\left(\frac{1}{V_M}\right)^{k-1},$$

где су $B_k(T)$ тзв. *виријални коефицијенти* који указују на степен међудејства молекула јер су уско повезани са међумолекулским потенцијалом. За једноставне молекуле довољно је задржати се на другом виријалном коефицијенту $B_2(T)$ који се израчунава помоћу формуле

$$B_2(T) = -2\pi N_A \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{U(r)}{kT}\right) - 1\right] r^2 \mathrm{d}r,$$

где је $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ Авогадров број, $U(r)$ је претпостављени међумолекулски потенцијал, r је међумолекулско растојање, T је апсолутна температура гаса а $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K је Болцманова константа. Његова веза са параметрима a и b из Ван дер Валсове једначине стања дата је једноставном формулом облика

$$B_2(T) = b - \frac{a}{RT}.$$

Очигледно је да, уколико је $B_2(T) < 0$ преовлађују дејства привлачних сила, тј. доминира параметар a (нпр. на нижим температурама), а ако је $B_2(T) > 0$ преовлађују дејства одбојних сила између молекула тј. доминира параметар b (нпр. на вишим температурама). Јединица за $B_2(T)$ је $\mathrm{m^3/mol}$.

Израчунајте $B_2(T)$ и $z = f(B_2)$ за потенцијал круте сфере $U_{кс}(r)$, један мол гаса и $V_M = 1\ \mathrm{m^3/mol}$ ако је гас:

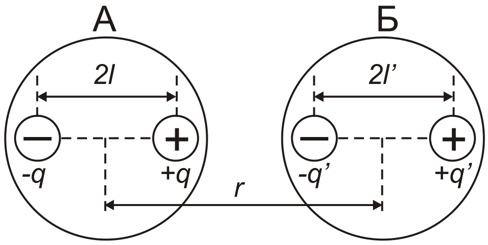
a1) аргонски $(d_{\mathrm{Ar}} = 316{,}2\ \mathrm{pm})$;

a2) угљендиоксидни $(d_{\mathrm{CO_2}} = 391{,}7\ \mathrm{pm})$.

На основу добијених резултата повежите $B_2(T)$ са Ван дер Валсовим параметрима a и b.

(10 поена)

б) На садашњем нивоу развоја физике, молекули се сматрају сложеним електродинамичким системима који се покоравају законима квантне механике, али их у основи можемо сврстати у електромагнетни тип деловања. Познато је да између молекула у неком реалном гасу делују и привлачне и одбојне силе. Пошто међудејства молекула сврставамо у електромагнетна, у представљању ових сила можемо се водити аналогијом са Кулоновим силама. Посматрајмо један фиксирани поларни молекул А који има сталан диполни момент, и један неполарни молекул Б који је неутралан у електричном смислу када се налази ван спољашњег електичног поља (нема сталан диполни момент). Услед дејства електричног поља молекула А молекул Б се поларизује и у њему се индукује диполни момент (слика 1). Први експерименти су показали да, у општем случају, привлачне F_n и одбојне F_o силе међу молекулима реалних гасова у зависности од њихових међусобних растојања r можемо представити у облику: $F_n = -(a_1/r^m)r_0$ и $F_o = (a_2/r^{13})r_0$ где су a_1, a_2 и m константе, а r_0 је јединични вектор у односу на правац који спаја центре молекула. Резултанта F_{md} ових сила међудејства једнака је $F_{md} = F_n + F_o$.



Слика 1

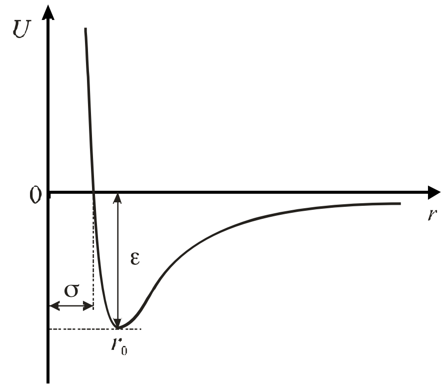
б1) Одредите зависност F_n од међусобног растојања r у датом случају (слика 1) израчунавши вредност константе m. **(6 поена)**

б2) На основу резултата под б1) и података из поставке задатка б), изведите општи израз за укупну потенцијалну енергију међудејства $U_{md}(r)$ ова два молекула са слике 1 као функцију међусобног растојања r, знајући да је $F_{md}(r) = -\mathrm{d}U_{md}(r)/\mathrm{d}r$.

(3 поена)

в) За молекуле са слике 1 међумолекулски потенцијал који јако добро описује њихово међудејство јесте тзв. Ленард-Џонсов потенцијал $U_{LJ}(r)$ облика

$$U_{\mathrm{LJ}}(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{p} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{k}\right]$$



Слика 2.

где су p и k вредности степене зависности од растојања добијене под б1) и б2), и података поставке задатка б). Параметар ε представља дубину тзв. "потенцијалне јаме" на међумолекулском растојању r_0, где одбојне силе преузимају доминацију над привлачним силама, а $U_{LJ}(r)$ има минимум (слика 2). Параметар σ представља растојање молекула при $U_{LJ}(r) = 0$ (слика 2).

в1) Користећи се датом једначином за $U_{LJ}(r)$ израчунајте вредност $r_0 = f(\sigma)$. **(3 поена)**

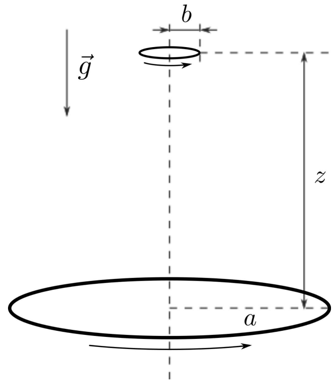
в2) Користећи се резултатом под v) израчунајте вредност $U_{LJ}(r_0)$. **(2 поена)**

Задатак припремили: *др Сања Тошић,* Институт за физику, Београд
др Бојан Николић, Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Драган Д. Маркушев,* Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: *др Александар Крмпот,* Институт за физику, Београд

Задатак 3: Магнетна левитација (23 поена)

У овом задатку проучићемо један од начина да се оствари магнетна левитација. Густо намотан кружни калем са N навоја полупречника a и занемарљиве дебљине налази се у хоризонталној равни. На растојању z изнад центра калема коаксијално је постављен мали проводни прстен полупречника $b \ll a, z$, као на слици. Маса прстена је m, отпор R, а коефицијент самоиндукције L. Систем ћемо посматрати у цилиндричном координатном систему чија се $z-$оса поклапа са осом калема и усмерена је навише, а калем се налази у равни $z = 0$. Одговарајући јединични вектори у тачки простора са координатама (r, φ, z) су $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z$. Убрзање Земљине теже је $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

Нека кроз калем протиче константна струја I_k у смеру као на слици.



а) Покажите да је радијална компонента магнетне индукције на ободу прстена дата са $\vec{B}_r(z) = -\dfrac{b}{2}\dfrac{dB_z(z)}{dz}\vec{e}_r$, где је $B_z(z)$ интензитет $z-$компоненте магнетне индукције у центру прстена. **(3 поена)**

б) Уколико кроз прстен протиче константна струја јачине I_p у смеру приказаном на слици, покажите да је Амперова сила која делује на прстен једнака $\vec{F}_A = \pi b^2 I_p \dfrac{dB_z(z)}{dz}\vec{e}_z$. Какав треба да буде однос стварних смерова струја I_k и I_p да би прстен могао да левитира, односно да непокретно лебди изнад калема? **(3 поена)**

Размотримо сада другачију ситуацију. Нека у смеру као на слици кроз калем протиче наизменична струја $i_k(t) = I_k \cos \Omega t$ која се мења тако брзо да је $2\pi/\Omega$ много мање од било ког другог времена карактеристичног за дати систем. Нека се прстен у тренутку t налази на висини z изнад калема.

в) Одредите електромоторну силу $\varepsilon_i(z,t)$ индуковану у прстену. **(1 поен)**

г) Одредите струју $i_p(z,t)$ која протиче кроз прстен. **(4 поена)**

д) Одредите Амперову силу $\vec{F}_A(z,t)$ која делује на прстен у овом случају. Представите $\vec{F}_A(z,t)$ у облику збира временски константне компоненте $\vec{F}_A(z)$ и временски променљиве компоненте $\vec{f}_A(z,t)$. Колика је средња вредност $\vec{f}_A(z,t)$ током једног периода $2\pi/\Omega$? **(3 поена)**

Сада ћемо размотрити магнетну левитацију прстена.

ђ) Претпоставимо да се утицај компоненте $\vec{f}_A(z,t)$ на кретање прстена практично може занемарити, што ћемо показати касније. Уколико прстен левитира на висини z_0, одредите за које вредности z_0 ће бити могуће мале осцилације прстена око тог равнотежног положаја. Одредите угаону учестаност ω таквих осцилација у функцији g, a и z_0. Занемарите утицај кретања прстена на индуковану електромоторну силу. **(6 поена)**

е) Колику амплитуду мора да има струја кроз калем да би прстен левитирао на висини $z_0 = a$? **(1 поен)**

ж) Услед брзе променљивости струје $i_k(t)$, јасно је да временски променљива компонента Амперове силе слабо утиче на кретање прстена. Њен допринос се може проценити на следећи начин: сматрајући да током кретања прстена важи $\vec{f}_A(z,t) \approx \vec{f}_A(z_0,t)$, одредите амплитуду принудних осцилација прстена за реалне вредности $a = 20$ cm, $z_0 = 10$ cm и $\Omega = 100$ Hz. **(2 поена)**

Подсетник:

- Флукс вектора индукције магнетног поља $\vec{B}$ кроз било коју затворену површину једнак је нули.
- Интензитет индукције магнетног поља на оси кружног проводника полупречника r кроз који протиче струја јачине I, на растојању z од његовог центра је $B(z) = \dfrac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}}$, где је μ_0 магнетна пермеабилност вакуума.
- Елементарна Амперова сила којом спољашње магнетно поље индукције $\vec{B}$ делује на бесконачно мали делић проводника дужине $d\ell$ кроз који протиче струја јачине I је $d\vec{F}_A = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$, при чему је смер вектора $d\vec{\ell}$ исти као и референтни смер струје I.
- $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, за $|x| \ll 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задатак припремио: *Милан Радоњић*, Институт за физику, Београд
Рецензенти: *др Антун Балаж* и *Милан Жежељ*, Институт за физику, Београд
Председник комисије за такмичење ученика средњих школа ДФС: *др Александар Крмпот*, Институт за физику, Београд